

S. A.
616

à

b

S. R.
615

S.A. 616



BIBLIOTHECA NACIONAL LISBOA

S.N. 616

REVERENDISSIMO AC ILLVSTRISSIMO PRINCIPI AC DOMINO, DOMINO IOANNI GODEFRIDO

Epiſcopo Bambergenſi, & Eccleſiæ Metropolitanæ Herbipolenſis Præpoſito, &c. Domino ſuo Clementiſſimo.

LIVRARIA D CARNIDE

CHRISTOPHORVS CLAVIVS BAMBERgenſis è Societate IESV.

QVANDO ita Deo immortali viſum fuit, Reuerendiſſime & Illuſtriſſime Princeps, vt me ſingulari beneficio ad eam ætatem viuendo peruenire vellet, quam aut veteraſcentis mundi vitio, quod perinde vt rerum omnium, ita Naturæ ipſius prima vis & efficacitas paulatim langueſcat: aut, quod ego magis crediderim, vnius Dei arbitrio & diſpenſatione non admodum multos hac tempeſtate videmus attingere: hoc mihi longe gratiſſimum accidit, quod cum reliquis mortalibus ita ferè contingat, vt dum hoc in procelloſo mari nauigant, omnes vitæ calamitates ac miſeriæ in extremam eius partem tanquam in ſentinam quandam confluant, ego adeo contrarium experiar, vt nulla vitæ meæ pars maiore quam hæc decrepita ſenectus gaudio & voluptate cumulata extiterit. Non ego quidem præter hominum morem & communem fortunam beatus, ab ijs vnquam malis eximius & immunis fui, quibuſcum tum reliqua vita, tum maxime exanguis hæc & effœta quam dego ætas conflictari ſolet: ſed quicquid id eſt quod communiter omnes patimur, ego iam ita facile tolero, vt omnem doloris ſenſum penitus amiſiſſe videar. Nam cum ante nihil vnquam optarem magis, quam vt Bambergenſis Eccleſiæ, in qua natus fueram & educatus, quam maximè incolumem ſtatum viderem, frequenter primos eius naſcentis ortus & incunabula inde à ſancti Ottonis felicibus au-

ſpicijs animo recolens arceſſebam, & per omnem ſuperiorum temporum memoriam incedendo adoleſcentiam illius & maturitatem ad hos vſque annos proſequebar. & licet eam paribus ſemper cum ætate incrementis ad immortalem gloriam, ſuiq; nominis dignitatem adoleuiſſe compererim; vt nihil minus timendum videretur, quam vt ab optimis maiorum inſtitutis aliquando deſciſceret: fecit tamen horum temporum iniquitas, vt cum vicinæ circum gentes peſtifera hæreſeos lue inficerentur, religionem illa quidem cõſtanſſime ſemper tueretur, non parum tamen boni omnes metuerent, ne ſicut vitiato cœlo morbos difficillimè caueri videmus: ita ſi quæ eius, quam hæretici comminiſcuntur, licentiæ aura peſtilens alicunde afflaſſet, vt maxime ipſam doctrinã auerſaretur, morum tamen & ſolutæ diſciplinę prauitati populus minime malus aſſueſceret. quib. rebus fiebat, vt ego, qui patriam vita mea cariorem habebam, cum F. M. Reuerendiſs. ac Illuſtriſs. Principem Ioannem Philippum anteceſſorem tuum à Deo ex hac vita euocatum eſſe cognouiſſem, omnino faciendum mihi putarim, vt quanto poſſem ſtudio deſtitutæ paſtore ſuo Eccleſiæ viduitatem DEO commendarem, vt difficilimis hiſce temporibus eum maximè præſidem conſequeretur, cui plurimum animi & virtutis eſſet ad profligandos qua hæreſios, qua vitiorum omnium ingruentes morbos. Hæc me cura cum pro eo, ac debuit grauiſſime angeret, ecce tibi non obſcuris primũ rumoribus, vt fieri amat, ſed cõmuni orbis Chriſtiani plauſu de tua feliciſſima inauguratione ad me allatum fuit. quo nuntio ita repẽte exultare gaudio cœpi, vt abiecta, qua potiſſimũ premebar, ætatis grauedine inſtar Æſonis ad primũ iuuentutis florẽ redijſſe mihi viderer. Itaq; ſublatis in cœlum manib. Deo gratulatus ſum, ꝙ non ante extremũ diem obire me voluerit, q̃ tanto bono potitus eſſem: vt iam adducta in tutum patriæ ſalute idem penè mihi eueniat, ꝙ illi ſeni Euangelico, qui conſpecto mundi ſaluatore lætus ſupremum diem operiebatur. Mentiar ego, ſi quicquam aliter ac ſentio loquor: nec vereor, vt quis me huius aliquando culpæ reum faciat. Nam præterquam quod iam id ætatis ſum, vt nihil leuiter affirmare velle videri debeam, tam eſt illuſtris & teſtata omnium ordinum atque ætatum de TVA VIRTVTE opinio, vt quod priuati amoris cauſa dixiſſe videri poteram, id mecum omnes mali iuxta ac boni ſentiant. Eſt enim, mihi crede, eſt aliqua virtus, quæ ſupra omnem maleuolorum obtrectandi libidinem tantum emineat, vt ſicut altiſſimi montes ſupra nubes toto vertice emicare ſolent, nec vnquam ventorum imbriumque tempeſtatem experiuntur: ita illa ſerena ſemper & tranquilla omnes maledicentiæ nimbos quam longiſſime excedat. Hoc modo factum eſt, vt cum primum maximo Reipublic. Chriſtianæ bono Epiſcopali dignitate auctus nunciareris, nemo iuuentus ſit aut ita à veritate alienus, aut bono publico

tam

tam inſenſus, qui non eum tibi honorem meritiſſimo collatum fateretur. quin omnium idem erat animus, vox eadem, iam inde à Sanct. Ottonis temporibus feliciorem Bambergenſi Eccleſiæ diem non illuxiſſe, quam eam qua te præſulem conſecuta eſſet. in te vno eſſe omnia: tuis potiſſimum auſpiciis rem feliciter geri poſſe, facienda DEO vota eſſe, vt hoc ſuum beneficium quam maxime diurnum eſſe velit. In qua communi lætitia & congratulatione aliquem mihi locum eſſe debere nemo iure negauerit: nam quis moleſte ferat, ſi quod obnixe DEVM immortalem fui precatus, vt eum maxime ſummæ rei præeſſe vellet, qui laboranti patriæ inprimis ſubſidio eſſe poſſet, id me ſummo beneficio conſecutum eſſe palam præ me fero: ſi quod omnium populorum ſermonibus celebratur, id ego ſolus non taceo: ſi de feliciſſimo patriæ ſtatu factus certior, gaudij mei vim premere non poſſum. Quod ſi omnem ſuperiorem vitam nullis literis in publicum notus ſilendo & latendo agitaſſem, venia tamen danda foret, ſi illa orbis vniuerſi acclamatione & plauſu excitatus me non tenerem, quin aliquid & feſtiuitatis celebrandæ, & voluntatis teſtificandæ meæ cauſa tanquam cygnea voce natura magis quam arte cultum modularer. Nunc quando aliquod inter literatos nomen merui, exiguum quidem illud fortaſſe, quod tamen ad poſteros peruenturum putem, committere non debui, quin meum erga patriam amorem, & tui nominis colendi ſtudium quam maxime poſſem illuſtri documento teſtatum relinquerem. Id vero vt liberius faciam, tum rei magnitudo poſtulat, tum Baſilij Magni exemplo & authoritate ſtimulari me ſentio. Ille cum de Sanct. AMBROSIO cognouiſſet, quod in Epiſcopum Mediolanenſem eſſet electus, hominem quem ante nunquam viderat, ſola virtutis fama commendatum non ſua magis, quam Reipublicæ Chriſtianæ cauſa vehementer adamare, & ſummo illius temporis bono tanquam de cœlo lapſum prædicare cœpit. *Glorificauimus*, inquit, *DEVM noſtrum, qui ex quauis mortalium generatione eos qui ſibi placuerint, deligit. qui olim quidem ex paſtoribus ouium populo ſuo principem excitauit, & Amos de grege caprarum ſumptum Spiritu ſuo inſtruxit, & ad propheticam dignitatem extulit: nunc vero virum ex vrbe regia, cui totius gentis principatus concreditus erat, ſapientia ſublimem, generis claritate, vitæ ſplendore, orandi facultate, & rebus ſæcularibus illuſtrem ad gregum CHRISTI paſturam traxit, qui proiectis huius vitæ opibus vniuerſis, proque damno habitis, vt CHRISTVM lucrifaceret, commiſſa ſibi magni ac præclari nauigij, Eccleſiæ videlicet DEI, in fide CHRISTI gubernacula accepit. age igitur ô homo DEI, quandoquidem non ab hominibus accepiſti, aut doctus es Euangelium CHRISTI, ſed ipſe te*

dominus è medio iudicum terræ deſumptum ad præſidentiam Apoſtolicam tranſtulit, certa bonum certamen, corrige ac moderare infirmitatem populi, ſi qua Arianæ veſaniæ labe tactus eſt, renoua priſca patrum veſtigia, &c. Intelligis credo Reuerendiſſime & Illuſtriſſime Princeps, quam hæc in te omnia ad vnguem conueniant. quod ſi tamen pro ea, qua plurimum commendaris, modeſtia, diuerſum à me ſentis, non moleſtus ero pudori tuo, nec præter eorum qui te intimius norunt teſtificationem aliquid amplius requiram. Hoc patere me aliquanto dicere apertius, quod D. Baſilius extremis verbis admonebat. antiquos ille mores & religionem inſtaurari, & graſſantem ea tempeſtate Arianam hæreſin volebat ex hominum animis extirpari. Vtrumque ſibi pollicebantur omnes futurum, cum primum de tua Electione cognouiſſent. Nunc illud feliciter inchoatum, & incredibili celeritate magnam partem tranſactum videmus. redit poſtliminio, proſcripta vitiorum colluuie, antiqua pietas, reſtituitur vitæ integritas, & veteris diſciplinæ renouantur exempla. illud vero quantam laudem meretur, quod primo loco libenter commemoraſſem, niſi publici boni rationem ego potiorem habuiſſem. eſt tamen eiuſmodi, vt à communi vtilitate non admodum ſeiunctum eſſe videatur. Cum inter ea, quæ à S. Ottone præclare geſta ſunt, illud eximium ſit & ſingulare, quod ſub primis ſtatim initijs, quando Eccleſiarum fortunæ tenuiores eſſe ſolent, quam vt ad magnos ſumptus faciendos ſufficiant, ampliſſima tamen religioſorum hominum domicilia multis in locis erexerit, & annuis vectigalibus locupletarit: nihil tibi antiquius fuit, quam ne hoc vnum deeſſet, quod ex eius præclaris facinoribus non eſſes imitatus. itaque cum primum difficultates, quæ obſtabant, ſuperare potuiſti, Societatem IESV, quam à puero toto ſemper animo complexus fueras, Bambergæ ſedem habere, & perpetuis reditibus auctam eſſe voluiſti. Cuius beneficentiæ tuæ etſi tibi certum eſt, quam ampla ſint à Deo præmia conſtituta, vt à nobis nihil admodum deſideres: faciet tamen, vt ſpero, SOCIETAS, vt huius te beneficij nullo vnquam tempore pœnitere poſſit. Ego vero cum quidam è collegio Moguntino Societatis noſtræ Patres pro ſuo in Mathematicas diſciplinas inſigni ſtudio & amore ad opera mea omnia colligenda, quæ vt apud me nata erant & in lucem edita, ita in plures partes diſtracta circumferebantur, & ſuo quæque ordine & loco diſtribuenda ac typis exprimenda operam mihi ſuam & laborem obtuliſſent, nihil cunctandum ratus, collaudata eorum voluntate, vt rem magno animo aggrederentur, adhortatus ſum. quin memetipſe excutiens cum tua cauſa omnia me debere intelligerem, omnia poſſe exiſtimans, vt quam maturrime perficeretur quod tuo Nomini dedicare cogitabam, ipſe manum operi admoui, & licet grauiter affecta iam ætate, qua tamen maxima potuit fieri celeritate, omnes

mnes libros à principio ad finem recenſui, ſublatiſque Typographorum erroribus multarum eos rerum acceſſione, quibus in locis maxime oportunum videbatur, locupletaui. Hos igitur Reuerendiſſime & Illuſtriſſime Princeps, tanquam vno faſciculo colligatos ſtudiorum meorum fructus, tuis quidem magnis promeritis nullo modo pares; meæ vero & vniuerſæ Societatis obſeruantiæ & amoris ad poſteritatem locupletiſſimos teſtes, vltima voluntate Nomini tuo conſecro dedicoque. Quos ſi tibi gratos fuiſſe cognouero, magnam vitæ & laborum mercedem ac præmium tuliſſe me arbitrabor. Quod reliquum eſt, Reuerendiſſime & Illuſtriſſime Princeps, DEVM oro, vt quando non vni Tibi, ſed totius Reipub. Chriſtianæ ſummo bono natus es; non Tua magis, quam illius cauſa, te quàm diutiſſime ſuperſtitem eſſe velit. Romæ Kal. Maij, Anno M. DC. XI.

INDEX

INDEX GENERALIS EORVM QVÆ SINGVLIS TOMIS CONTINENTVR.

TOMO PRIMO.

In Euclidem } *Commentarij.*
In Theodoſium }
De ſinibus, ac lineis tangentibus & ſecantibus.
Triangula rectilinea.
Triangula ſphærica.

TOMO SECVNDO.

Geometria Practica.
Refutatio Cyclometriæ Ioſephi Scaligeri.
Arithmetica practica.
Algebra.

TOMO TERTIO.

In Sphæram Ioannis de Sacro Boſco Commentarius.
Aſtrolabium.

TOMO QVARTO.

Gnomonices libri octo.
Fabrica & vſus inſtrumenti horologiorum.
Horologiorum noua deſcriptio.

TOMO QVINTO.

Romani Calendarij à Gregorio XIII. P. M. reſtituti explicatio.
Ioſephi Scaligeri Elenchus & caſtigatio Calendarij Gregoriani caſtigata.
Reſponſio ad conuicia & calumnias Ioſephi Scaligeri in Calendarium Gregorianum.
Confutatio Calendarij Georgij Germanni VVartenbergenſis Boruſſi.

CHRI-

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV.

OPERVM MATHEMATICORVM

TOMVS PRIMVS.

Complectens

Commentaria { *In Euclidis Elementa Geometrica,*
In Sphærica Theodoſij,

Sinuum, Tangentium & Secantium rationem & Canones:
Tractationem triangulorum, tum rectilineorum, tum ſphæricorum.



MOGVNTIÆ,

Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat REINHARDVS ELTZ.

Cum Gratia & priuilegio Sacræ Cæſareæ Maieſtatis.

ANNO M. DC. XI.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV.

IN DISCIPLINAS MATHEMATICAS PROLEGOMENA.

(o)

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINÆ Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem verſantur omnes, nomen acceperunt à dictione Græca μάθημα, ſiue μάθησις, quæ ſignificat diſciplinam, ſeu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen diſciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes ſolæ ſint adeptæ, duas potiſſimum cauſas apud probatos ſcriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici exiſtimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, eaſque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Chriſtiana fides falſum eſſe perſpicue docet) teſtantur, eas nomen doctrinæ, ſiue diſciplinæ obtinere, quod maxime ex ipſis nanciſcamur recordationem, reminiſcentiamque illius ſcientiæ, qua anima noſtra, (vt eorum eſt error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inſcribitur, vbi Socratem introducit puſionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimenſione, ad quæ licet in principio reſponderit, vt puer, gradatim tamen aſcendens, eo deductus eſt, vt reſponderit id, quod tandem dicturus fuiſſet, ſi diutiſſime perdidiciſſet Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen ſcientiæ, & doctrinæ ſibi vendicare, quod ſolæ modum rationemque ſcientiæ retineant. Procedunt enim ſemper ex præcognitis quibuſdam principijs ad concluſiones demonſtrandas, quod proprium eſt munus, atque officium doctrinæ ſiue diſciplinæ, vt & Ariſtoteles 1. poſteriorum teſtatur; neq; vnquam aliquid non probatū aſſumunt Mathematici, ſed quandocunque aliquid docere volunt, ſi quid ad eam rem pertinet eorum, quę ante docuerunt, id ſumūt pro conceſſo, & probato: illud vero modo explicant, de quo ante nihil ſcriptum eſt. Quod quidem alias artes, diſciplinasue non ſemper obſeruare videmus, cum plerunq; in confirmationem eorum, quæ oſtendere volunt, ea, quæ nondum ſunt explicata, demonſtratave adducant.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM DIVISIO.

PYTHAGOREI, quos deinde ſecuti ſunt omnes propemodum Mathematici, atq; Philoſophi non pauci, Mathematicas diſciplinas vniuerſas in quatuor partes diſtribuerunt, Arithmeticam, Muſicam, Geometriā, atque Aſtronomiam. Cum enim omnis quātitas, circa quam verſantur, ſit vel diſcreta, ſub qua omnes numeri, vel continua, ſub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & vtraque tam ſecundum ſe, quam comparatione alterius poſſit cōſiderari; viſum fuit illis conſentaneum quatuor prædictas facultates inſtituere, quæ vtrāque quantitatem, pro duplici conſideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate diſcreta ſecundum ſe, inquirendo & accurate explicando omnes numerorū proprietates, ac paſſiones. Muſica tractat eandem quātitatem diſcretam, ſiue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum ſonorum concentus reſpicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, ſiue quantitate continua, ſecundum ſe quoque, vt immobilis exiſtit, diſputat. Aſtronomia deniq, eandem magnitudinem, vt eſt mobilis, conſiderat; qualia ſunt cœleſtia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor ſcientias Mathematicas, quarum Arithmetica & Geometria puræ, Muſica vero atque Aſtronomia mixtæ dicuntur omnes aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis eſt Perſpectiua, Geographia, & cæteræ huiuſmodi, vel facile, vt ad capita, à quibus dependent, reduci poſſunt.

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, vt auctor eſt Proclus in Commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematicæ diſciplinæ diuiduntur. Quam quidem diuiſionem, quoniam eleganter, copioſeque docet, ad quænam ſeſe extendant Mathematicæ diſciplinæ, ferme ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Franciſci Barocij Patricij Veneti excerptam hic ſubijcere ſtatui. Volunt itaq; prædicti auctores, ſcientiarum Mathematicarum quaſdam in intellectilibus duntaxat ab omni materia ſeparatis, quaſdam vero in ſenſilibus, ita vt attingant materiam ſenſibus obnoxiam, verſari. Prioris generis ſtatuunt duas longe primas, præcipuasque ſcientias, Arithmeticam & Geometriam: In poſteriori vero genere conſtituunt ſex, Aſtro-

logiam, Perſpectiuam, Geodæſiam, Canonicam, ſiue Muſicam, Supputatricem, atque Mechanicã. Aſtrologiam dicunt eſſe eam facultatem, quæ de mundanis edifferit motibus, de corporum cœleſtium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terraque diſtantijs, ac de alijs huiuſmodi rebus. Huius rurſum tres conſtituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimenſione, poſitu gnomonum exercetur: Metheoroſcopica, quæ eleuationum differentias, ſiderumque reperit diſtantias, nec non multa alia & varia Aſtrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumque ſtellarum diſtantias huiuſmodi Dioptricis dignoſcit inſtrumentis. Perſpectiuam aiunt à Geometria gigni, atque vti radijs viſorijs, tanquam lineis, & angulis qui ex hiſce conſtituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in ea, quæ proprio nomine dicitur Perſpectiua, quæ quidem reddit cauſam earum apparentiarum, quæ aliter, quam ſint, ſeſe nobis offerre ſolent, ob eorum, quæ ſub viſum cadunt, alios ſitus & diſtantias, vt parallelarum coincidentiæ, vel quadratorum, tanquam circulorum, aſpectionis: Et in vniuerſam ſpeculariam; quæ circa varias, multipliceſque verſatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographice, hoc eſt, vmbrarũ deſignatrix appellatur, quæ oſtendit, qua ratione fieri poſſit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob deſignatorum diſtantias, altitudineſque videantur. Geodæſiam appellant eam ſcientiam, quæ res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos tanquam conos; & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non aſſequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, ſed ſenſilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero craſſioribus, vt ſpartis & perpendiculo. Diuiditur hæc, vt Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ ſolida dimetitur. Canonicam, ſiue Muſicam, vocant eam ſcientiam, quæ apparentes concentuum conſiderat rationes, ſenſusque vbique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis exiſtit, vt menti aures ipſas præpoſuiſſe videatur. Supputatrix eadem apud ipſos eſt, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros conſiderat, non vt in intellectilibus, ſed vt ſunt in ſenſilibus ipſis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum ſenſilium, materiæque coniunctarum conſiſtit, apud ipſos multiplex eſt. Quædam enim eſt inſtrumentorũ effectrix, quæ ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis ſunt bellis idonea, qualia ſane Archimedes etiam fertur conſtruxiſſe, Syracuſas terra mariq; obſidentibus reſiſtentia. Quædã mirabilium prorſus rerũ effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ, dicitur; quippe quæ alia quidem ſpiritibus maximo cum artificio conſtruit, quemadmodum etiam Cteſibius atque Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, ſtatus vero æquilibrium eſſe cauſam cenſendum eſt, vt Timæus etiam determinauit; alia vero neruis, ſpartiſque animatas conuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam eſt æquilibrantium omnino. & eorum, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quædam denique ſphærarum effectrix, quæ σφαιροποιΐα appellatur, ad cœleſtium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus eſt. Atque vt vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæ igitur ſunt diſciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad inſtruendas, coordinandaſque pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam eſſe non cenſent, vt quidam alij voluere, ſed vti eam volunt modo quidem arte ſupputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæſia, vt in diuidendis, dimetiendiſque Caſtrametationi ſpatijs in campo. Quemadmodum neque hiſtoricam, neque medendi artem Mathematices partem vllam eſſe dicunt, licet ſæpenumero tum Hiſtorici, tum etiam medici Mathematicis vtantur theorematibus; Rerum quidem geſtarum ſcriptores, vel climatum ſitus referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus circuituſue colligẽdo: Medici vero quam plurimas res in arte ſua huiuſmodi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Aſtrologia peruenit, ipſe etiam Hippocrates oſtendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, lociſque dixere. Eadem ſane ratione ille etiam, qui aciebus inſtruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numeroſa eſt, pauciſſimam oſtendere multitudinem, caſtra ſuoſque exercitus ad figuram circuli formet; interdum vero ad figuram quadranguli, vel quinquanguli vel alterius cuiuſdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere ſunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum ſcientiarum partitione reliqueruut.

INVENTORES MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

OMNES diſciplinas Mathematicas à varijs & diuerſis auctoribus ortum originemque duxiſſe, perſpicue hiſtoriæ teſtantur: Imo vero ſingulas nequaquam ſummam adeptas eſſe perfectionem ſtatim ab initio, ſed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora proceſſiſſe, memoriæ quoque proditum eſt. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commercia, vt auctor eſt Proclus. Quam mirum in modum poſtea Pythagoras, eiuſq; ſucceſſores, nec non Ægyptij, Græci deniq; atque Arabes amplificarunt, varijſque problematis, atque theorematis illuſtrarunt. Muſicam deinde à Mercurio primum eſſe inuentam, multi ſcriptores tradunt, quam ipſe poſtea Orpheo inſigni Muſico commendauit atque concredidit; Hic autem Thamyri & Lino. Linus vero Herculi, & ſic ſucceſſionibus continuis per alios Muſicos præclaros ad noſtra vſq; tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Ægyptijs reperta eſt ortumq; habuit ab agrorum dimenſione. Cum enim anniuerſaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vaſtaretque, vt nemo agrum dignoſcere poſſet ſuum, cœperunt Ægyptij animos ad rationem menſurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod ſuum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quamquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipſo tamen officio Geometria eſt appellata. γεωμετρέομαι enim, ſiue γεωμετρέω idem ſignificat, quod terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria cœpta eſt expoliri; & non contenta ſuis finibus, ſeſe ad corpora etiam cœleſtia dimetienda conuertit, tradiditque principia vniuerſæ Aſtronomiæ, Perſpectiuæ, Coſmographiæ, & alijs diſciplinis quamplurimis, quæ ex ipſa, veluti radice, dependent. Hanc Thales Mileſius ex Ægypto in Græciam primus tranſtuliſſe fertur: Deinde eam inſignes Philoſophi ac Mathematici plurimis acutiſſimiſque

demon-

demonſtrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi ſunt præcipui ex veteribus: Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Ariſtarchus, Eratoſthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus Hypſicles Alexandrinus, Archimedes Syracuſius, Apollonius Pergæus, Theodoſius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Aſcalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum eſſet recenſere. Aſtronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentam eſſe autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Aſtronomię cognitionem, exortam eſſe volunt fabulam, illum ſuis humeris cælum ſuſtinere. Alij putant Chaldæos diuturna obſeruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) ſiderum ſcientiam adinueniſſe. Alij Ægyptios primos huius ſcientiæ faciunt inuentores: Alij Aſſyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonijs eſſe deferendam, cenſent. Hac autem in ſcientia, vt eſt præſtantiſſima, ita quoq; maxime illuſtres auctores claruerunt, quod non eſt huius loci declarare. Cæterum præcipuis hiſce quatuor diſciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipſis tanquam riuuli ex fonte, deriuatæ ſunt, atque deductæ.

NOBILITAS ATQVE PRÆSTANTIA SCIENTIARVM MATHEMATICARVM.

QVONIAM diſciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ abſque vlla materia ſenſibili conſiderantur, quamuis reipſa materiæ ſint immerſæ; perſpicuum eſt, eas medium inter Metaphyſicam, & naturalem ſcientiam obtinere locum, ſi ſubiectum earum conſideremus, vt recte à Proclo probatur, Metaphyſices etenim ſubiectum ab omni eſt materia ſeiunctum, & re, & ratione: Phyſices vero ſubiectum & re, & ratione materiæ ſenſibili eſt coniunctum: Vnde cum ſubiectum Mathematicarum diſciplinarum extra omnem materiam conſideretur, quamuis re ipſa in ea reperiatur, liquido conſtat hoc medium eſſe inter alia duo. Si vero nobilitas, atque præſtantia ſcientiæ ex certitudine demonſtrationum, quibus vtitur, ſit iudicanda; haud dubie Mathematicæ diſciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonſtrant enim omnia, de quibus ſuſcipiunt diſputationem, firmiſſimis rationibus, confirmantque, ita vt vere ſcientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorſus dubitationem tollant: Id quod alijs ſcientijs vix tribuere poſſumus, cum in eis ſæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac ſententiarum varietate in veritate concluſionum iudicanda ſuſpenſus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorum ſectæ, (vt alios interim Philoſophos ſilentio inuoluam) quæ ab Ariſtotele, veluti rami è trunco aliquo, exortæ, adeo & inter ſe, & nonnumquam à fonte ipſo Ariſtotele diſſident, vt prorſus ignores, quidnam ſibi velit Ariſtoteles, num de nominibus, an de rebus potius diſputationem inſtituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos ſe eſſe glorientur) tanquam ductores ſequantur. Quod quam longe à Mathematicis demonſtrationibus abſit, neminem latere exiſtimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in ſcholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonſtrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, ſeu dialogo, qui de ſummo bono inſcribitur; Eam ſcientiam eſſe digniorem, præſtantioremq;, quæ magis ſynceritatis, veritatisq; eſt amans. Cum igitur diſciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non ſolum nihil, quod ſit falſum, verum etiam nihil, quod tantum probabile exiſtat, nihil denique admittant, quod certiſſimis demonſtrationibus non confirment, corroborentque, dubium eſſe non poteſt, quin eis primus locus inter alias ſcientias omnes ſit concedendus.

VTILITATES VARIÆ MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

NON ſolum vtiles, verum etiam neceſſariæ admodum cenſeri debent diſciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfecte perdiſcendas, tum ad rem etiam publicam recte inſtituendam, & adminiſtrandam. Neque enim ad Metaphyſicam, vt eleganter oſtendit Proclus, vlli patet aditus, niſi per Mathematicas diſciplinas. Nam ſi à rebus ſenſibilibus, quas Phyſicus conſiderat, ad res ab omni materia ſenſibili ſecretas, ſeiunctasque, quas contemplatur Metaphyſicus, vires, aciemque noſtri intellectus attollere abſque vllo medio tentemus, noſmetipſos excæcabimus, non ſecus, ac ei contingit, qui è carcere aliquo tenebricoſo, in quo diu latuit, in lucem Solis clariſſimam emittitur. Quam ob rem, antequam à rebus phyſicis, quæ materiæ ſenſibus obnoxiæ ſunt coniunctæ, ad res Methaphyſicas, quæ ſunt ab eadem maxime auulſæ, intellectus aſcendat, neceſſe eſt, ne harum claritate offundatur, prius eum aſſueſieri rebus minus abſtractis, quales à Mathematicis conſiderantur, vt facilius illas poſſit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas diſciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti hæ diſciplinæ ad ſacras litteras recte percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrime nobis exponit B. Auguſtinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina Chriſtiana, demonſtrans, numerorum inſcitia multa non intelligi à multis, quæ tranſlate, ac myſticè poſita ſunt in Scripturis. Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemquen ſententiam longe poſt pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem docet D. Hieronymus tomo 1. Epiſt. 5. aſſerens magnam ineſſe numeris vim, ad multa myſteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco Geometriam magnam afferre Theologis vtilitatem perhibet. Rurſum B. Auguſtinus loco iam citato, capite 16. quem paulo ante retuli, teſtatur, Muſicam perneceſſariam eſſe doctori Chriſtiano, ſubiungens paulo poſt, capite 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter eſſe inſtructos. Quod non ignorans Diuus Gregorius Nazianzenus, ſummis laudibus Diuum Baſilium Præceptorem ſuum extollit, quod in Aſtrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæteriſq; ſcientijs

 Mathe-

Mathematicis, fuerit non mediocriter verſatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philoſophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, arteſque perfecte acquirendas, vt perſpicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philoſophorum, maxime Ariſtotelis, & Platonis, quos merito duces nobis ſequendos ad bene recteque philoſophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis ſunt referta, ea potiſſimum de cauſa, vt ea, quæ alioquin multis obſtructa difficultatibus videbantur eſſe, per exempla huiuſmodi clariora, magiſque perſpicua fierent; quæ procul dubio nulla ratione percipiet is, qui ſcientiarum Mathematicarum omnino eſt expers. Quid ? quod olim nemo auſus eſſet celeberrimum Diuini Platonis gymnaſium frequentare, qui prius optime Mathematicis diſciplinis non fuiſſet exornatus ? Vnde pro foribus Academiæ hoc ſymbolum dicitur pinxiſſe, ἀγεωμέ τρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Philebo, omnes diſciplinas ſine Mathematicis viles eſſe non dubitauit aſſerere. Qua de cauſa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas diſciplinas primo omnium eſſe addiſcendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copioſe ſcribit) non ſolum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad Remp. bene adminiſtrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum noſtræ ætatis, ſi id neceſſe foret, in medium poſſem adducere. Ibidem clariſſimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos eſſe, idoneoſque, adeo vt etiamſi nullam aliam nobis hæ ſcientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipſis percipiamus) perdiſcendas tamen omni ſtudio eas eſſe ſtatuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes omnes capeſſendas aptiorem reddant, & acutiorem: Quod quidem experientia ipſa magiſtra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hiſce diſciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex aliis ſcientiis percipere: Contra vero eos, qui ad haſce facultates idonei minime reperiuntur, prorſus ad cæteras eſſe ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in ſuis operibus iterum atque iterum harum diſciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat; præſertim in 7. de Rep. in Epinomide, ſeu Philoſopho, in Timæo, vbi Mathematicas diſciplinas omnis eruditionis ingenuæ viam appellat, & pleriſque aliis in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor induſtria ſuperſedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiuſque animus his artibus colendis, exercendiſque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex ſeptem artibus liberalibus, in quibus non ſolum ingenui adoleſcentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges ac imperatores ad honeſtiſſimam, maximeq; liberalem oblectationem animi, quam ſumma etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumq; verſari ſolebant. Quorum exemplum multos adhuc noſtra hac ætate imitari conſpicimus. Te[illegible]ur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab aliis ſtudiis excæcatur, defoditurque, à Mathematicis tantum diſciplinis recreari, excitarique rurſus ad eius, quod eſt, contemplationem. Omitto plurima alia teſtimonia Platonis, aliorumque grauiſſimorum Philoſophorum, quibus harum diſciplinarum vtilitas cum neceſſitate, & delectatione coniuncta, atque præſtantia abunde poteſt comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIÆ COMMENDATIO.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum inſtitutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum propoſuimus, deque Geometria vniuerſa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non ſatis conuenit inter ſcriptores. Multi enim, vt teſtatur vulgata elementorum Euclidis ſecundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inſcriptio, exiſtimant, eum fuiſſe philoſophum illum Megaris natum, quod oppidum Iſthmo adiacet, Socratiſque auditorem, qui ſectam inſtituit à ſe dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod ſectatores illius interrogando, reſpondendoq; (quod proprium eſt munus Dialecticorum) libros conſcriberent. De quo multa ſunt in Diogene Laertio de vitis philoſophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæſt. Acad. lib. 2. vbi ait. Poſt Euclides Socratis diſcipulus Megareus, à quo iidem illi Megarici dicti, qui id bonum ſolum eſſe dicebant, quod eſſet vnum, & ſimile, & idem, & ſemper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. ſcribit, nimirum à Platone, qui Socratis etiam diſcipulus fuit, conductores aræ ſacræ de modo, & forma eius ſecum ſermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iuſſos. Verum ſi Proclo nobili ſcriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum eſt, Euclides hic noſter iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, poſt Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Chriſtum natum anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius eſſe crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentiſſime enumerans, nullam prorſus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conſcripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam ſibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum eſt, Diogenem in monumentis philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus vel ſcientem voluiſſe præterire, vel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum ignoraſſe. Itaque Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Megareo Philoſopho longe alius eſt, qui cum in doctrina Academicorum eſſet ſumma cum laude verſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos ſibi locum iure optimo vendicarit. Scripſit autem volumina ad rem Mathematicam ſpectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia ſunt eius Optica, Catoptrica, Elementares inſtitutiones ad Muſicam capeſſendam pertinentes, Phænomena, atque Datorum liber, opus de Diuiſionibus, quod nonnulli ſuſpicantur eſſe libellum illum acutiſſimum de Superficierum diuiſionibus, Machometo Bagdedino aſcriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinenſis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem eſt editus. Conſcripſit item Conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuſcula. Maxime verò hoc volumen Elementorum Geometricorum, numquam

quan

quam omnium conſenſione ſatis laudatum, tam mirabili ordine, tantaque eruditione contexuit, vt nullus vnquam eorum, qui ſimilia conſcripſerunt elementa, (conſcripſerunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipſum ſuperarit. In quo quidem, vt ſummum ingenii acumen demonſtrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, ſed ea duntaxat, quæ viſa ſunt eſſe neceſſaria, atque vtilia ad communem omnium vtilitatem, argumentis & rationibus firmiſſimis cenſuit eſſe comprobanda. Cæterum, quanta ſit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac proinde vniuerſæ Geometriæ præſtantia, atque vtilitas, partim ex iis, quæ ante ſcripſimus, partim ex iis, quæ nunc dicemus, non obſcure perſpici poteſt. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob cauſam, quod ſine ipſis nullum opus Mathematicum poſſimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes ſiquidem Mathematicarum rerum ſcriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodoſios, &c. in ſuis demonſtrationibus vſurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perſpecta, atque demonſtrata. Quamobrem ſicut is, qui legere vult, elementa litterarum diſcit prius, & illis aſſidue repetitis vtitur in vocibus omnibus exprimendis, ſic qui alias diſciplinas Mathematicas deſiderat ſibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene ac perfecte calleat prius neceſſe eſt. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, inſularum dimenſio, atque diuiſio, omnis in cælo per inſtrumenta ſiderum obſeruatio, omnis horologiorum ſciotericorum compoſitio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in ſpeculis, in picturis, in aquis, & in aere variè illuminato, diuerſitas manat. Ex his, inquam, elementis machinę totius huius mundanę eſt inuentum medium, atque centrum; inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Oſtenditur atque demonſtratur vnius huius ſcientiæ vi cæli vniuerſi, ſiderumque perennis conuerſio, ortus, occaſus, abitus, reditus, aſcenſus, deſcenſus, diei ac noctis, temporumq; toto anno per omnem terrarum ſitum, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppoſitiones, aſpectuſq; varii tam expedite cognoſcuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipſes, ſeu Solis, ac Lunæ defectiones certiſſime, antequam fiant, in omne poſterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingēs Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis noſtræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ ſubiectum conſpicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia eſſe videntur, omniumq; fidem ſuperant, perſpicua facere, credibiliaque eſſe oſtendere: Quale eſt illud, quod de Archimede Syracuſio teſtantur hiſtoriæ. Cùm enim Hieron Syracuſarum Rex nauem, quam Ptolemæo Ægyptiorum Regi mittere ſtatuerat, tantæ eſſet molis fabricatus, vt eam omnes vnà Syracuſij à loco dimouere minime valerent: Archimedes [illegible]ometra peritiſſimus, vnius Geometriæ viribus fretus Regi promiſit, ſe effecturū, vt ipſam ſolus Rex abſque vllo labore ſubduceret. Quod cum præſtitiſſet, in conſpectu omnium Rex ſtupefactus exclamaſſe perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendum eſt. Nō diſſimile huic videtur mihi eſſe pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ geſſit Syracuſis, quando corona ex auro argentoque confecta, quam Rex ſummo ſtudio fabricari iuſſerat, non diſſoluta, ſingula auri & argenti pondera, quæ inter ſe aurificis fraude ac dolo commiſta erant, ſubtiliſſime oſtendit. Neque ſilentio præteriri debet, eundem Archimedem robori ac efficaciæ demonſtrationum Geometricarum innixum ſæpenumerò iactitaſſe, ſi haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc noſtram, quam incolimus, è loco ſe commouere poſſe. Pari ratione, datis viribus quibuſcunque, pondus quodcunque ſe poſſe mouere. Et alia id genus, non ſolùm ab Archimede, verum etiam ab aliis præclaris, & illuſtribus Geometris patrata eſſe, memoriæ proditum eſt. Tantum denique nomen vna hæc Geometria Archimedi peperit, vt Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracuſanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibuſdam per Geometricas demonſtrationes adinuentis, & conſtructis, in expugnatæ vrbis direptione, ac cæde ciuium vnius Archimedis ſaluti publico edicto cauerit: quem vbi contra imperium ſuum & voluntatem à gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem viuo habere non potuit. Cuius ſepulchrum Cicero à ſe, cum in Sicilia Quæſtoris officio fungeretur, repertum eſſe, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in ſummo ſemper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præſtantiam vtilitatemque Geometriæ, quod cum demonſtrationes Geometricæ ſint maxime illuſtres, nemo ſine ipſis ſatis perſpiciet, quæ ſit vis demonſtrationum, nemoque eiſdem deſtitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidē ingenue fatetur Galenus inſignis Philoſophus, ac Medicorum princeps, in libro, quem de libris propriis inſcripſit. Is enim inſtructiſſimus rebus Dialecticis, cum ſcholas Peripateticorum ac Stoicorum ſui temporis percurriſſet omnium, & præcepta miro cum animi ardore ſtudioque arripuiſſet, nihil fere ab ipſis audiſſe ſe teſtatur, quod ad Demonſtrationis cognitionem pertineret; quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuerſia poſita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia repeririſſe. Ita vt ad Pyrrhoniorum fere (erant Pyrrhonii Philoſophi, qui nihil decernebant, ſed de omnibus dubitabant) hæſitantiam deuenturus fuerit, niſi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticæque (quibus artibus ab auis & patre fuerat inſtitutus) eſſet cognitione ſcientiaque reuocatus. Vnde ſuadet, ſequendos eſſe characteres illos Arithmeticos, & linearum demonſtrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam cauſam diſcendam eſſe Geometriam dixit, quòd eius cognitio maxime ſit vtilis, vt aliæ artes facilius & rectius percipiantur. Poſtremo eſt hæc ſumma laus Geometriæ, omnibuſque modis prædicanda, quod non hæſit in exiguis & inferioribus hiſce machinis, à quibus originem traxit, ſed euolauit in cælum vſque, & humanas Mentes humi abiectas in illam rurſus cæleſtem ſedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiuſque adminiſtrationem & gubernationem noſtro intellectui ſubiecit.

DIVISIO GEOMETRIÆ ET ELEMENTORVM EVCLIDIS.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici.

Nam Geometria vniuerſe ſibi hunc ſcopum proponit, vt plana, aut ſolida vel conſtituat, vel conſtituta inter ſe comparet, aut diuidat. Neque vero mirum alicui videri debet, quod cum tria ſint genera magnitudinum, linea, ſuperficies, & corpus, ſolum de duobus poſterioribus extent propriæ contemplationes, vt diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potiſſimum circa figuras verſatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam ſolidis conſiſtunt omnes. Non enim puncta, vel lineæ figuram vllam conſtituunt ſine planis, aut ſolidis, ac proinde neceſſe non erat, propriam de punctis & lineis ſcientiam inſtituere; Superficiebus vero, ſiue planis, & corporibus, ſolidiſue maxime conueniebat, vt proprias nanciſcerentur tractationes. Volens igitur ſummus harum rerum artifex Euclides in hiſce elementis perfectam, & omnibus numeris abſolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus ſex libris agit de planis, in poſterioribus verò quinque de ſolidis acutiſſime diſputat, eorumque proprietates maxime illuſtres perueſtigat. Quoniam vero cum res omnes Geometricæ, tum præſertim ſolida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici ſolent, perfecte tractari non poterant, abſque linearum commenſurabilium, atque incommenſurabilium notitia; Immo vero quam plurimæ magnitudines ſub menſuram cadere nulla ratione abſque earundem linearum cognitione poſſunt, cum earum latera ſæpenumero ſint talia, vt ea communis & nota menſura data metiri nequeat, vt liquido conſtat iis, qui aliquando demonſtrationes Geometricas in opus contulerunt, atque vſum: id circo vt hiſce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimenſionemque requiſita, Stereometriæ ſuæ præpoſuit decimum librum, in quo ſubtiliter & copioſe de huiuſcemodi lineis diſſerit. Intelligens rurſum Euclides, neque hanc tractationem linearum commenſurabilium & incommenſurabilium ſine numerorum cognitione poſſe conſiſtere, ante decimum librum agit de numerorum paſſionibus, eaſque copioſe & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, eſt perſecutus. Quamobrem totum hoc volumen elementorum Geometricorum quindecim libris comprehenſum (quorum quidem priores tredecim ſine vlla controuerſia Euclidi aſcribuntur ab omnibus; poſteriores vero duo à nonnullis Hypſiclis Alexandrini eſſe creduntur) ſecari recte poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta ſex prioribus libris agat de planis; Secunda tres ſequentes complectens, paſſiones numerorum perſcrutetur; Tertia, quam ſolus decimus conſtituit liber, de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusque diſputet; Quarta denique reliquis quinque libris abſoluta ſcientiam ſolidorum, ſiue corporum complectatur. Prima pars rurſum triplex eſt; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis abſolute, inueſtigando eorum æqualitatem & inæqualitatem: In quinto vero libro de proportionibus magnitudinum in genere diſputatur. In ſexto denique proportiones figurarum planarum diſcutiuntur. Quid vero Euclides in ſingulis aliis libris pertractet, propriis in locis exponemus.

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, QVID PROPOSITIO, ET QVID LEMMA apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis ſcriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant demonſtrationem, quæ iubet, ac docet aliquid conſtituere. Vt ſi quis conetur demonſtrare, ſupra lineam rectam finitam poſſe triangulum æquilaterum conſtitui, appellabitur huiuſcemodi demonſtratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilaterum conſtitui debeat ſupra rectam lineam finitam. Dictum eſt autem hoc genus demonſtrationum Problema, ad ſimilitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæſtio illa, cuius vtraq; pars contradictionis (vt ipſi loquuntur) eſt probabilis, qualis hæc eſt quæſtio; An totum diſtinguatur realiter à ſuis partibus ſimul acceptis: Sic etiam quæſitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent conſtruere, & cuius contrarium effici etiam poteſt, problema appellatur. Vt ſi quis proponat ſe demonſtraturum, ſupra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum poſſe conſtitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Iſoſceles, vel ſcalenum, ſupra eandem lineam conſtitui poteſt. Pari ratione, qui inſtituit angulum rectilineum ſecare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi poteſt in partes non æquales. Eſt tamen diſcrimen non paruum inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis ſuſcepta confirmatur tantum probabiliter, ita vt intellectus cuiuſq; ambigat, vtranam illius pars vera ſit: In Mathematico vero, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonſtratione, ita vt nihil omnino dubij ſit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra ſtatuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propoſitæ lineam perpendicularem educere, efficiet vtique hoc ipſum ratione conſtanti, & euidenti: Eodem modo dicendum eſt, ſi ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonſtrationem, quæ ſolum paſſionem aliquam, proprietatemue vnius, vel plurium ſimul quantitatum perſcrutatur. Vt ſi quis optet demonſtrare, in omni triangulo tres angulos eſſe æquales duobus rectis, vocabunt talem demonſtrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodo trianguli cuiuslibet conſtituti paſſionem hanc, quòd anguli illius duobus ſint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipſa, hæc demonſtratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione poteſt, cōtradictionis vtraque pars vera vt ſit. Si enim quis demonſtret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus eſſe rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoque ſint duobus rectis. Eadem ratio in aliis theorematibus eſt intelligenda. Itaque vt vno verbo dicam, quæſitum illud Mathematicum conſtruere aliquid docens, cuius etiam oppoſitum poteſt effici, Problema: Illud vero, quod nihil docet conſtruere, & cuius pars oppoſita perpetuo falſa exiſtit, Theorema appellatur. Vnde ſi quis proponeret in modum problematis, ſe in ſemicirculo velle angulum rectum conſtituere, irridendus omnino eſſet, & Geometriæ prorſus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in ſemicirculo conſtituti ſunt recti, vt demōſtrabitur libro 3. propoſitione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Cæterum tam problema, quàm theorema dici conſueuit apud Mathematicos Propoſitio, propterea quod vtrumque aliquid nobis proponit, vt in exemplis adductis conſtat. Hæc ideo dixerim, vt ſtudioſus lector non miretur, quando

reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propoſitionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorum interim volumina taceam) conſtant partim problematibus, partim theorematibus. Demonſtrationes problematum ſemper concluduntur his fere verbis: Quod faciendum erat; Theorematum vero hiſce: Quod oſtendendum, vel demonſtrandum erat; habita nimirum ratione finis vtriuſque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonſtrationes continentur, & nō vna tantum, quamuis vltimus ſyllogiſmus demonſtratiuus ſolum concludat id, quod in initio demonſtrandum proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propoſitione, & in cæteris omnibus manifeſtum erit.

QVONIAM vero ad demonſtrationes problematum atque theorematum ſæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facile ex ijs, quæ prius demonſtrata ſunt, intelligi poſſunt; inſeruntur interdū à Geometris huiuſmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, vt breuius demonſtrari poſſint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quod ſolum aſſumuntur ad alias demonſtrationes; non autem de illis præcipua diſputatio inſtituitur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici poteſt demonſtratio, ſeu conſtructio illius, quod ad demonſtrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis aſſumitur, vt demonſtratio expeditior fiat, ac breuior.

QVÆNAM SINT PRINCIPIA APVD MATHEMATICOS.

CVM omnis doctrina, omniſque diſciplina ex præexiſtente gignatur cognitione, vt auctor eſt Ariſtoteles, atque ex aſſumptis, & conceſſis quibuſdam principijs ſuas demonſtret concluſiones; Nulla autem ſcientia ex eiuſdem Ariſtotelis, aliorumque Philoſophorum ſententia ſua principia demonſtret; habebunt vtique & Mathematicæ diſciplinæ ſua principia, ex quibus poſitis, & conceſſis ſua problemata ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reperiuntur omnes definitiones, quas nonnulli cum Ariſtotele ſuppoſitiones, vt vult Proclus, appellant. His autem vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipſa, nominum ambiguitate, aut obſcuritate circumuenti in paralogiſmos incidamus. Secundum genus complectitur Petitiones, ſiue Poſtulata, quæ quidem adeo clara ſunt, & perſpicua in ſcientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, ſed auditoris duntaxat aſſenſum expoſcant, ne vlla ſit in demonſtrando hæſitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, ſeu communes animi notiones, quæ non ſolum in ſcientia propoſita, ſed etiam in omnibus alijs ita manifeſta ſunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione diſſentire queat is, qui ipſa vocabula recte perceperit. Atque his principijs recte mihi videtur accommodari poſſe id, quod in Metaphyſicis ſcribit de primis principijs Ariſtoteles: A ianua quis aberrabit? Vt præclare à Cicerone, Pronunciata, ſiue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorum præmittit ante demonſtrationes ſuarum concluſionum omnia hæc principia, vt ex ipſis, quæ quidem facile à quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquam aſſenſum præberet, niſi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine ſummis laudibus efferenda eſt Geometria, omnibusque ſæculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs cuilibet quantumuis rudi & ignaro notiſſimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aſpectu ab omni ſenſu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonſtrationibusque certiſſimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porro in huiuſcemodi principijs tradendis hic ordo ab Euclide ſeruatur, vt in ipſo quidem introitu ſcientiæ proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res poſtulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quadam ratione ad materiam illorum ſubiectam videntur ſpectare. Neque vero omnia principia Geometrica ab Euclide in his elementis ſunt explicata, ſed multa reliquit lectori diſquirenda; quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, ſine magno labore ac ſtudio percipi poſſunt, & intelligi. Verum ne in hac quoque parte defuiſſe videamur rerum Mathematicarum ſtudioſis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide poſita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime curſum demonſtrationum arbitrati ſumus retardari poſſe.

IN

IN EVCLIDIS ELEMENTA PRÆFATIO.

SI quis forte miratur, cur poſt tot præclariſſimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregijs, & inprimis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipſi commentationes conſcripſerimus; is facile ſibi perſuadebit, non temere id à nobis eſſe factum, ſi conſilij noſtri rationem cognouerit. Cum enim longa diuturnaque experientia nobis eſſet perſpectum, atque exploratum, eam eſſe vtilitatem, atque adeo neceſſitatem horum elementorum, vt fruſtra quiſquam ſe ſperet, ſine illorum præſidio, acutiſſimas, ſubtiliſſimasque Archimedis, Apollonij, Theodoſii, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illuſtrium Mathematicorum demonſtrationes poſſe percipere; vehementer dolebamus, tam inſignem & illuſtrem auctorem à pleriſque omnino negligi, à perpaucis vero pro dignitate tractari, ita vt vix hoc noſtro ſeculo reperiantur, qui ſedulam operam, ac ſtudium in perdiſcendis his elementis ponant; ob eam potiſſimum, vt arbitror, cauſam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obſcuritate deterreantur, nullumq; habeant in hac re ducem, quem ſibi citra erroris periculum ſequendum proponant. Extant quidem Commentarij Campani, ac Theonis in ſingulos Euclidis libros ſane eruditi, qui ſatis eſſe poſſint cuiuis ad facile conſequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter ſecutus in omnibus eſt traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac Methodum peruerterunt, verbaque propoſitionum eiuſdem locis nou paucis immutarunt, vt verus germanusq; auctoris ſenſus perdifficile poſſit intelligi; id quod maxime in 10. lib. perſpicitur; Alter (Theonem intelligo) pene innumeris mendis, vitiisq; incuria librariorum ita eſt deprauatus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonſtrationibus adhibentur, obſcuras illas ac male expreſſas adeo impeditus, vt magnam difficultatem in exercitatis ingenijs, perplexitatemq; gignat. Quo fit, vt Euclidem ſine maximo labore ac ſtudio nemo percipiat. Iam ſi alij ad noſtram vſq; memoriam maius aliquod ſtudium operamq; in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel ſex priores tantum libros expoſuerunt: vel ſi qui in vniuerſum Euclidem Commentarios ediderunt, hi perſæpe, relictis antiquorum demonſtrationibus certiſſimis, proprias alias, ac nouas confinxerunt, quæ plerumq; non tam firmæ ſunt, neq; rem ipſam ſimpliciter & abſolute conficiunt; præſertim quod modo propoſitionib. voces quaſdam perperam detrahunt, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, vt merito de vero proprioq; Euclidis ſenſu dubitare quis poſſit. Qua tamen in re Federicum Commãdinum Vrbinatem, Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem Latine redditum in priſtinum nitorem reſtituit, paucis locis exceptis, in quibus non parum à vero aberrauit, vt ſuo loco monebimus. Quæ cum ita ſint, reſq; ac ſcientia tam præclara digna ſit, quæ ope, ſtudio, induſtria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre poſſunt, poſt diuturni temporis in rebus Mathematicis operam collocatam faciendum putauimus, vt lucubrationes noſtras ac vigilias ſtudioſis harum rerum nonnihil (niſi fallimur) ſubſidij allaturas in publicum ederemus. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præſtitum ſit, paucis accipe. Demonſtrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipſius eſſe Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum pleriſq; aſſeueramus, & Proclus etiam teſtatur, breuiores, quantum per rei difficultatem licuit, vel certe planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresq; reddere conati ſumus. Non enim illas nude, ac totidem verbis, quot erant ſcriptæ, propoſuimus. Etenim ea eſt interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantiſſimo Poeta dictum eſt: Breuis eſſe laboro, obſcurus fio. *Interdum etiam cum breuius, atque ſuccinctius efferri poſſint, magna, ob longiorem, quam ſatis eſt, ſermonem, affertur moleſtia legenti. Quare vtrumq; vitantes, eas, velut* παραφραστικῶς, *atque ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice Euclidem interpretaremur, obſeruauimus; hac etiam re auditorum deſiderio, & voluntati, quantum eſt in nobis, ſatisfacere cupientes. Ita enim, noſtra ſententia, Euclides facilius à ſtudioſis, ijs præſertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica ſtudia nunc primum auſpicantur, ac maiore voluptate, vtilitateq; cognoſcetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata ſcitu non iniucunda, neque à ſcopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliisque auctoribus decerpſimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, aſſiduisque meditationibus ipſi confecimus. Data inſuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præſertim obſcuriores, & quæ aliquid viſæ ſunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in ſcopulos quoſdam incidentes, à recto curſu deflexerunt, & in errores varios atque abſurdos, prorſusque ab inſtituto diſciplinæ abhorrentes dilapſi ſunt) dilucide atque perſpicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium ſtudioſi facile iudicabunt.*

QVÆ

QVÆ PRÆCIPVE PRIMÆ EDITIONI EVCLIDIS ADDITA SINT.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.] multo euidentior, quam ea, quam Proclus affert. *Ad propoſ. 28. lib. 1.*

I I.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per ſolas priores 40. propoſ. lib. 1. abſque ope proportionum ſexti lib. *Ad propoſ. 40. lib. 1.*

I I I.

QVO pacto conſtruenda ſint triangula amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apparere poſſint, quæ ab Euclide demonſtrata ſunt propoſ. 12. & 13. lib. 2. *Ad propoſ. 12. & 13. lib. 2.*

I I I I.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi Peletarij, de angulo contactus. *Ad propoſ. 16. lib. 3.*

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris planis æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum deſcriptis: Num ſcilicet, omnis æquilatera ſit æquiangula etiam, & omnis æquiangula ſit quoque æquilatera. *Ad finem lib. 4.*

V I.

TRACTATIO copioſiſſima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. *Ad defin. 4. lib. 5.*

V I I.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit. *Ad defin. 8. lib. 5.*

V I I I.

DESCRIPTIO inflexæ cuiuſdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium deſcribitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales diſtribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contra; Et denique alia ſcitu iucundiſſima perficiuntur *Ad finem lib. 6.*

I X.

QVO pacto pleraque theoremata lib. 7. demonſtrentur quoque de numeris fractis, ſiue ipſis adhæreant numeri integri, ſiue non. *Ad propoſitiones lib. 7.*

X.

MINVTIARVM, ſiue numerorum fractorum demonſtrationes clariſſimæ. *Ad finem lib. 7.*

X I.

DE Proportionum compoſitione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio ac Diuiſio fieri debeat: aduerſus quoſdam Recentiores. *Ad finem lib. 9.*

X I I.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quam ea, quam nos tradidit Euclides. *Ad finem lib. 16.*

X I I I.

COMPARATIO Soliditatum, & ſuperficierum conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter ſe. *Ad finem lib. 16.*

Cætera quæ paſſim hiſce commentarijs adiecta ſunt non pauca, quæ in alijs editionibus deſunt, cuiuſmodi eſt præſertim accuratior inuentio vltimorum punctorum Quadratricis per lineas perpendiculares, non autem per obliquas linearum interſectiones, &c. diligens Lector nullo negotio notabit.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM eſt, cuius pars nulla eſt.

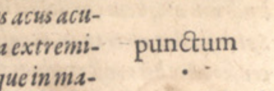
TOTVS hic primus liber in eo poſitus eſt, vt nobis tradat ortus proprietatesq; triangulorum, tum quod ad eorum angulos ſpectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter ſe comparat interdum, interdum vero vnumquodq; per ſe inſpicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos conſiderat, aliquando vero ex angulis latera, ſecundum æqualitatem atq; inæqualitaetm, rimatur. Idemq; variis rationibus inquirit in duobus quandoq; triangulis inter ſe collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationem aggreditur, tum inter ſe, tum etiam, vt cum triangulis inter eaſdem parallelas conſtitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuiſionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, conſtitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiuſmodi. Itaq; vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli ſententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atque parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propoſitam exorditur à principiis, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, ſi prius intelligamus, quantitatem cõtinuam triplices habere partes, vnas ſecundum longitudinem, alteras ſecundum latitudinem, & ſecundum profunditatem altitudinemve alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, ſed quædam vnicas tantum ſecundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adiiciat partes etiam latitudinis; quædam deniq; præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, ſiue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa ſolùm eſt, aut longa ſimul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda. Neq; aliam dimenſionem habere poteſt res vlla quanta, vt recte demonſtrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in priſtinam dignitatem reſtituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimenſione, qui quidem, quod ſciam, adhuc nondum eſt excuſus. Itaq; quod in quantitate continua, ſiue magnitudine exiſtit, intelligiturq; ſine omni parte, ita vt neque longum, neque latum, neque profundum eſſe cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Inſtans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum poteſt, niſi velis, extremitatem alicuius acus acutiſſimæ, ſimilitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non eſt, quoniam ea extremitas diuidi poteſt, & ſecari infinite, punctum verò indiuiduum prorſus debet exiſtimari. Denique in magnitudine id concipi debet eſſe punctum, quod in numero vnitas, quodque in tempore inſtans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

punctum

II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam ſpeciem magnitudinis, quam dicit eſſe quantitatem longam dũtaxat, non autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam neceſſario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, ſiue longitudinem abſq; latitudine, non abſurde concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, ſeu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam eſt, ad longitudinem ipſiuſmet luminis, & vmbræ extenſa, carens omni latitudine, cum ſit limes vtriuſque. Mathematici quoque, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam deſcriptum ſuperiore definitione, è loco in locum moueri. Cum enim punctum ſit prorſus indiuiduum, relinquetur ex iſto motu imaginario veſtigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt ſi punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, veſtigium effectum AB, linea



appella-

appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehenſum ſit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimenſione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum eſt, vt alij dixerint, lineam nil eſſe aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Poteſt enim linea vnico tantum modo, vtpote ſecundum longitudinem ſecari, atque diuidi.

III.

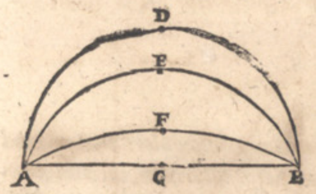
LINEÆ autem termini, ſunt puncta.

DOCET, *quænam ſint extrema lineæ cuiuſuis, ſeu termini, dicens lineam terminari, ſiue claudi vtrinque punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos aſsignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea qualibet habens extrema, in ſuis extremitatibus puncta recipiat. Vt ſuperior linea AB, extrema habet puncta A, & B. Idemque in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum eſt, ita vt earum extremitates ſola eſſe puncta cogitemus.*

IV.

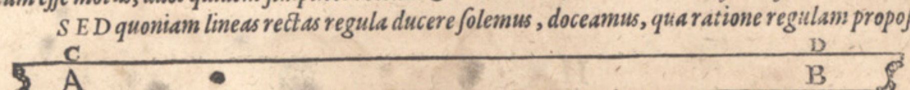
RECTA linea eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.

TRIPLEX *omnino eſt linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, ſiue compoſita ex vtraque. Ex his deſcribit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit eſſe eam, quæ æqualiter inter ſua puncta extenditur, hoc eſt, in qua nullum punctum intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel huc, atque illuc deflectendo ſubſultat; in qua denique nihil flexuoſum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue ſumma vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent ſitum, neque vlla eſt alia ſublimior, aut humilior, ſed omnes æquabiliter inter extremos fines poſitæ progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo ſua interiacere puncta, quando æquale occupat ſpatium ei, quod inter ſua ſitum eſt puncta extrema. Vt linea ACB, dicetur recta,*



quoniam tantum occupat præciſè ſpatium, quanta eſt diſtantia puncti A, à puncto B, Lineæ vero ADB, AEB, AFB, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant ſpatia, quam ſit diſtantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ ACB, inter quæ eſt punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in aliis lineis, quoniam puncta D, E, F, ſubſultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchre ſic definit: Linea recta eſt, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea ACB, ſi punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique eſſet C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rurſus oculus in A, exiſtens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perſpicuum eſt in lineis ADB, AEB, AFB. Archimedes vero ait, lineam rectam eſſe minimam earum, quæ terminos habent eoſdem; qualis eſt ACB, comparata cum ADB, AEB, AFB. Si enim ACB, non eſſet minima earum, quæ eoſdem terminos A, & B poſsident, non ex æquo interiaceret ſua puncta, ſed ea potius linea, quæ minor diceretur, quam ACB. Campanus denique deſcribens rectam lineam, vocat eam breuiſsimam ex vno puncto in aliud extenſionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt deſcribi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ deſcriptæ intelligunt. Si namque punctum recta fluere concipiatur per breuiſsimum ſpatium, ita vt neque in hanc partem, neque in illam deflectat, ſed æquabilem quendam motum, atque inceſſum teneat, dicetur linea illa deſcripta, Recta: Si vero punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atque hinc inde titubare, appellabitur linea deſcripta, mixta: Si denique punctum fluens in ſuo motu, non vacillet, ſed in orbem feratur vniformi quodã motu, atq; diſtantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur deſcripta illa linea, circularis. Itaq; ſi duo puncta moueantur ſimilibus prorſus motib. ita vt ſemper æqualiter inter ſe diſtent; deſcribentur ab ipſis duæ lineæ ſimiles, hoc eſt, ſi vna earum fuerit recta, erit & altera recta: ſi vero vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici poſſunt, non definit hoc loco Euclides, ſed circularem exponet definitione decimaquinta, miſtam prorſus omittens, quod ea in hiſce elementis Geometricis nullum habeat vſum. Sunt autẽ plurima genera linearum miſtarum: quædam enim ſunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rurſus aliæ ſunt in plano, aliæ in ſolido. In plano ſunt Hyperbole, Parabole, Ellipſis, de quibus agit copioſiſsime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoideos, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis ſpiralibus tractationem inſtituit, & aliæ huiuſmodi. In ſolido, ſeu ſuperficie curua ſunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea ab Archimede deſcripta, qualis eſt illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum exiſtit, vel etiam quæ circa ſphæram, cuiuſmodi ſunt ſpiræ illæ, quas Sol deſcribit ab ortu in occaſum, vt in ſphæra docuimus. Difformium autem infinitus eſt numerus, quas non eſt opus hic recenſere. Ex his conſtat, duas tantum eſſe lineas ſimplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunque ſunt, miſtas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingenioſe concludit Ariſtoteles in libro de Cælo, iuxta triplicem lineam, tres tantum eſſe motus, duos quidem ſimplices rectum & circularem, tertium vero miſtum. ſiue ex illis duobus compoſitum.

S E D *quoniam lineas rectas regula ducere ſolemus, doceamus, qua ratione regulam propoſitam examinare poſsimus,*



num linea per illam deſcripta recta ſit, nec ne. Sit ergo regula AB, ſecundum cuius latus CD, recta CD, deſcribatur ex puncto C, in punctum D. Deinde conuertatur regula, vt manente eadem parte ſuperiore, punctum C, ſtatuatur in D, & punctum D, in C, & ſecundum idem latus regulæ CD, recta ducatur ex eodem puncto C, in punctum D. Nam ſi poſterior hæc linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regulæ AB, in lineis rectis ducendis fidere poſsimus: Si vero non congruet omni ex parte, latus illud CD, perfecte rectum non erit, ſed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES eſt, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

POST *lineam, quæ eſt prima quantitatis continuæ ſpecies, vnicamq́; habet dimenſionem, definit ſuperficiem, quæ ſecundam magnitudinis ſpeciem conſtituit, additq́; primæ dimenſioni ſecundum longitudinem, alterã ſecundũ latitudinẽ. Nam in ſuper-*

ſuperficie reperitur, non ſolum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, ſine tamen omni profunditate. Vt quantitas ABCD, inter lineas AB, BC, CD, DA, comprehenſa, conſiderataque ſecundum longitudinem AB, vel DC, & ſecundum latitudinem AD, vel BC, omnis expers profunditatis, appellatur ſuperficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiuſque corporis, ſi ab ea omnis ſoliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quaſi expreſſam ſuperficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem terræ partem penetrare non poſſint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri: Veſtigium enim relictum ex ipſo motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in traſuerſum eſt factus; nulla vero ratione profundum eſſe poterit, cum linea ipſum deſcribens omni careat profunditate; quare ſuperficies dicetur. Vt ſi linea AB, fluat verſus DC, efficietur ſuperficies ABCD. Alij deſcribentes ſuperficiem dicunt, eam eſſe corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus conſtantem interuallis. Poteſt enim ſuperficies diuidi, & ſecari duobus modis, vno quidem ſecundum longitudinem, altero vero ſecundum latitudinem.



VI.

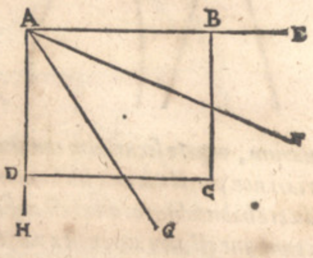
SVPERFICIEI autem extrema, ſunt lineæ

NON *diſsimilis iſt hæc definitio ſuperiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates ſuperficiei eſſe lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt ſuperioris ſuperficiei ABCD, extrema ſunt lineæ AB, BC, CD, DA. Eodemque modo in quacunque altera ſuperficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in ſuperficie infinita, vel etiam ſphærica, quæ corpus ſphæricum circundat. Poteſt etiam ſuperficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis eſt circularis ſuperficies, vt dicemus in definitione circuli.*

VII.

PLANA ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

HÆC *quoque definitio ſimilitudinem quandam deſcriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas ſuas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis ſurſum, deorſumue ſubſultando, non recedant, appellabitur plana: qualis eſt ſuperficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum ſunt collocatæ, ita vt nihil habeat inciſum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunoſum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ ſunt ſitum, nec vlla eſt alia ſublimior, humiliorue, ſed omnes æquabiliter protenduntur. Alij ſuperficiem planam definiunt, dicentes eam eſſe, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel eſſe minimam, ſiue breuiſsimam omnium, quæ eadem habent extrema: vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari poteſt, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt ſuperficies ABCD: tum demum plana dici debet, quando linea recta AE, circa punctum A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem, quæ AF, nunc eadem, quæ AG, & nunc eadem, quæ AH, nihil in ſuperficie offendit depreſſum, aut ſublatum, ſed omnia puncta ſuperficiei à linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod ſi minima ſuperficiei particula aliis humilior à linea recta non tangeretur, vel ipſa linea recta libere non poſſet circumduci, propter aliquem tumorem, ſeu eminentiam in ſuperficie occurrentem, iam non poſſet nuncupari plana. Itaque vt ſit plana, requiritur vt omnibus modis poſſit recta linea commenſurari, hoc eſt, vt ei applicari poſsit recta linea ſecundum AB, & AF, & demque ſecundum omnes partes. Hæc autem ſuperficies ſola erit ea, quam imaginari, & intelligere poſſumus deſcribi ex motu lineæ rectæ in tranſuerſum, qui ſuper duas alias lineas rectas conficitur. Vt ſi linea recta AB, per duas rectas AD, BC, feratur, efficietur ſuperficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic ſuperficiei traditas deſcriptiones accommodare. Solent Mathematici ſuperficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda ſemper ſit ſuperficies plana. Cæteræ omnes ſuperficies, quibus non omni ex parte accommodari poteſt linea recta, qualis eſt ſuperficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæue rotundæ, vel etiam coni, &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim ſuperficiei columnæ rotundæ, ſeu cylindri, ſecundum longitudinem adaptari poſsit linea recta, tamen ſecundum latitudinem minime poteſt. Idemque dicendum eſt de aliis. Superficies autem curua duplex eſt, conuexa videlicet, vt exterior ſuperficies ſphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, ſiue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro ſolum planam nobis explicauit, de qua eſt diſputaturus prioribus ſex libris.*

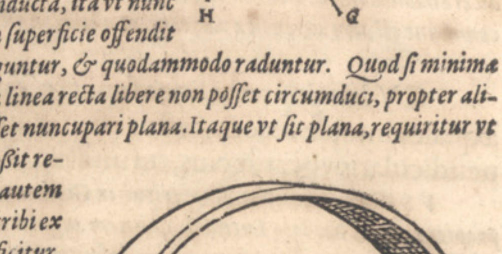




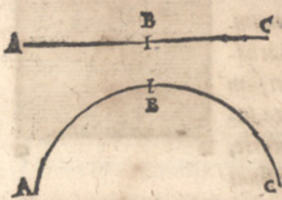
VIII.

PLANVS vero angulus, eſt duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, *quidnam ſit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua ſuperficie inuicem concurrunt, & non in directum conſtituuntur, efficietur ex huiuſmodi concurſu, ſeu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana conſtituatur ſuperficie. Verbigratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem exiſtentem ſuperficie, in qua duæ illæ lineæ conſtituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earum verſus concurſum protenſa non coincidit cum altera, ſed vel eam ſecat, vel certe ſtatim poſt punctum concurſus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus qui fit, quando duo circuli ſe contingunt, vel etiam, quando linea recta, circulum tangit. Protracta enim recta linea poſt punctum contactus, quanquam non ſecet circulum, tamen ſtatim poſt illud ab eo ſeiungitur. Eodem pacto circularis illa linea ſecundum propriam diſpoſitionem, ac formam extenſa recedit à recta tangente, quamuis eam non ſecet. Vnde vere eſt angulus*



conſtitutus in illo contactu: qua de re plura ſcribemus in propoſitione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eam non eſſe angulum. Quod ſi duæ lineæ ſe mutuo tangant iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concurſu, cum nulla ſit inclinatio, ſed ambæ vnam integrã lineam conſtituẽt. Vt quia recta AB, producta conuenit cum recta BC, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis AB, BC, quia alterutra ſecundum ſuam inflexionem, & obliquum ductum extenſa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaque vt lineæ rectæ efficiant angulum, neceſſe eſt, vt poſt concurſum productæ ſe mutuo ſecent: Curuæ autem lineæ, vel quarum altera curua, altera vero recta exiſtit, angulum conſtituere vere poſſunt, etiamſi non ſe mutuo interſecent; ſufficit enim, quod ſeſe contingant, ita vt ſtatim poſt contactum altera ab altera ſeparetur, quemadmodum & ante eundem ſe-

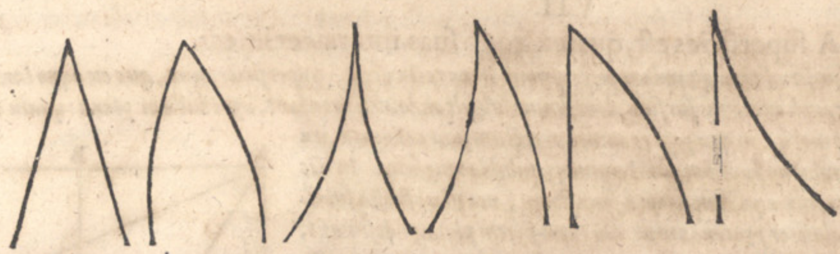


mota cernuntur. Conſiſtit autem anguli cuiuſuis quantitas in ſola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrẽtes non augent ſuam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius ſolidos comprehendit, de quibus Euclides diſſerit in Stereometria, quique in corporibus exiſtunt; Poſterius vero ſphærales, qui in ſuperficie ſphæræ conſtituuntur ex circulorum maximorum circumferentiis, & de quibus copioſe agitur in ſphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cum hic de ſolis planis angulis ſit futurus ſermo.

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo ſolum hic agit Euclides: aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua & altera recta, qui nõ inepte mixtus appellatur. Ex hiſce porro lineis poſſunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, ſeu habitudine linearum curuarum, vtpote ſecundum conuexum, concauum, ceu in propoſitis angulis plane, & aperte perſpicitur: Rectilineus vero variari non poteſt ratione inclinationis, habitudiniſue linearum, niſi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod eſt abſurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune eſt, non autem ita varietur, vt aliud conſtituat genus.



X.

CVM vero recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam eos, qui ſunt deinceps, angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum: Et quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui inſiſtit.

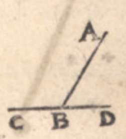
VSVS frequentiſſimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtuſi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quiſnam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quænam linea perpendicularis: In ſequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtuſum, & acutum. Non enim alius dari poteſt angulus rectilineus, præter rectum, obtuſum, & acutum. Igitur ſi recta linea AB, rectæ CD, inſiſtens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur à Mathematicis eſſe deinceps, quod eos eadem linea CD protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter ſe æquales, quod tum demum fiet, quando recta AB, non magis in C, quam in D, inclinabit, ſed æquabiliter rectæ, CD, inſiſtet, vocabitur vterque angulus B, rectus, & recta AB, perpendicularis rectæ CD, cui inſiſtit. Eadem ratione nominabitur recta CB, perpendicularis rectæ AB: quamuis enim CB, tantum faciat cum AB, vnum angulum, tamen ſi AB, extenderetur in rectum & continuum verſus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propoſitione 11. & 12. huius primi libri. Itaque vt in Geometria concludamus angulũ aliquem eſſe rectum, aut lineam, quæ ipſum efficit, ad aliam eſſe perpendicularem, requiritur, & ſufficit, vt probemus angulum, qui eſt ei deinceps, æqualem illi eſſe. Pari ratione, ſi dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipſum conſtituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque eſſe. Quando enim anguli, qui ſunt deinceps, fuerint inter ſe æquales, nuncupatur vterq; illorum rectus, & linea ipſos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quiſquam illorum rectus, vt conſtabit ex conſequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos conſtituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vſum habeant apud Geometras deſcriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



XI.

OBTVSVS angulus eſt, qui recto maior eſt.

QVANDO recto AB, rectæ CD, inſiſtens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam cauſam neutrum rectum, ſed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtuſus, qualis eſt angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BC.



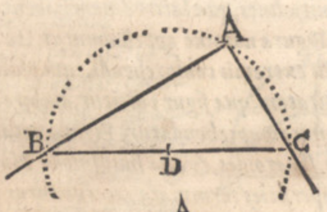
XII.

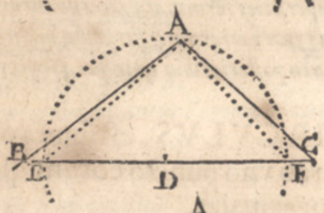
ACVTVS vero, qui minor eſt recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eũ efficiens non debeat magis in vnã partẽ inclinare, quam in alterã: Obtuſus vero, & Acutus augeri poſſunt,

& minu-

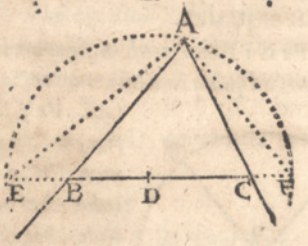
& minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea poſſit recedere, vt perſpicuum eſt. Quoniam vero ad quemuis angulum planum conſtituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures exiſtunt anguli, ſolent Mathematici, vt tollatur confuſio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media oſtendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero ſignificant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in ſuperiore figura angulum obtuſum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD, quod diligenter eſt notandum, vt facile dignoſcamus angulos, quorum mentio fit in demonſtrationibus.





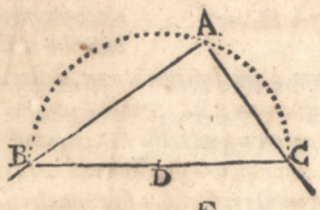
IAM vero propoſito nobis angulo aliquo rectilineo, ſi experiri velimus, num rectus ſit, an obtuſus, acutuſue, efficiemus id hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A. Ducta recta BC, vtcunque, quæ angulum ſubtendat, & diuiſa bifariam in D, deſcribatur ex D, vt centro ad interuallum DA, circumferentia circuli; quæ ſi per puncta B, C, tranſeat, [a] erit angulus A, rectus, vtpote qui in ſemicirculo BAC, exiſtat: ſi vero idem ſemicirculus rectam BC, ſecet in E, F, erit angulus BAC, obtuſus; propterea quod, ductis rectis EA, FA, [b] angulus EAF, in ſemicirculo EAF, rectus eſt, qui quidem pars eſt anguli BAC. Si denique idem ſemicirculus rectam BC, productam ſecet in E, F, erit angulus BAC, acutus; propterea quod ductis rectis EA, FA, [a] angulus EAF, in ſemicirculo EAF, rectus eſt, qui quidem maior eſt angulo BAC.

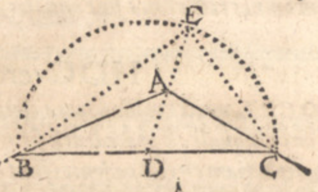
a 31. tertij.
b 31. tertij.
a 31. tertij.

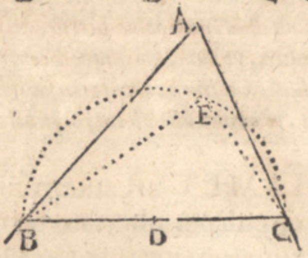


ALITER idem aſſequemur hoc modo. Deſcribatur ex puncto D, quod rectam BC, dato angulo A, ſubtenſam ſecat bifariam, ſemicirculus ad interuallum DB, vel DC, qui ſi tranſeat per punctum A, [b] datus angulus erit rectus, vtpote qui in ſemicirculo exiſtat. Si vero idem ſemicirculus tranſeat ſupra punctum A, datus angulus erit obtuſus. Ducta enim recta DA, ſecante circumferentiam in E, iungantur rectæ EB, EC, [c] eritque angulus BEC, in ſemicirculo rectus. Cum ergo angulus BAC, datus [d] maior ſit angulo BEC, erit angulus datus A, recto maior, hoc eſt, obtuſus. Si denique ſemicirculus idem ſecet rectas AB, AC, erit datus angulus acutus. Sumpto namque puncto E, inter rectas AB, AC, in circumferentia, iungantur rectæ EB, EC, [e] eritque angulus BEC, rectus in ſemicirculo: [f] qui cum maior ſit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id eſt, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonſtrationem aſſumamus propoſitiones, quæ poſterius demonſtrantur ab Euclide; quod alienum eſſe videtur à puritate demonſtrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco oſtendimus, neceſſarium non ſit ad ſequentes demonſtrationes, poterit commode differri, donec propoſitiones requiſitæ ſint demonſtratæ. Satis eſt, vt praxis huiuſce rei hoc loco intelligatur. Idem obſeruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim propriis in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuiſionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, vbi Euclides docet diuiſionem eiuſdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonſtrationes neceſſariæ ſint propoſitiones poſterius demõſtratæ.

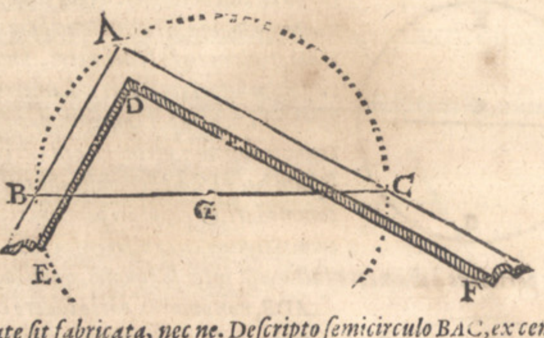
b 31. tertij.
c. 31. tertij.
d 21. primi.
e. 31. tertij.
f 21. primi.







FACILIVS idem cognoſcemus beneficio normæ alicuius accurate fabricatæ, qualem refert inſtrumentum ABC, conſtans duabus regulis AE, AF, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nam ſi latus AB, huius normæ, rectæ, AB, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; ſi quidem & normæ latus AC, rectæ AC, congruat, erit angulus A, rectus: ſi vero citra rectam AC, cadat normæ latus AC, erit angulus A, obtuſus: ſi denique latus normæ AC, vltra rectam AC, cadat, acutus erit angulus, vt perſpicuum eſt.



ITA autem normam examinabimus, num accurate ſit fabricata, nec ne. Deſcripto ſemicirculo BAC, ex centro G, cuiuſuis magnitudinis, ductaque diametro BC, ponatur angulus A, in aliquo puncto circumferentiæ, vt in A, latuſque vnum normæ, vt AB, per B, punctum extremum diametri tranſeat. Nam ſi alterum tunc latus AC, per alterum punctum extremum C, tranſeat, rite fabricata erit norma ABC; [a] quod tunc angulus BAC, in ſemicirculo BAC, rectus ſit: ſi vero latus AC, non per C, tranſeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, ſi angulum D, circumferentiæ applicemus, & latera DE, DF, punctis extremis B, C, &c. a 31. tertij.

XIII.

TERMINVS eſt, quod alicuius extremum eſt.

TRES ſunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus eſt, ſeu extremum lineæ: Linea ſuperficiei: & ſuperficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil poteſt, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimenſiones, quam tres. Omne ſiquidem terminatum ſuperat terminum ſuum vna dimenſione, vt perſpicuũ eſt ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA eſt, quæ ſub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

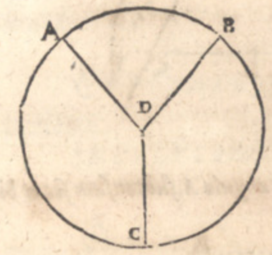
NON omnis quantitas terminos poſſidens Figura dici poteſt, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed ea

ſolum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe ſuperficies terminatæ, & quæ profunditatem adeptæ quoq; ſunt, vt ſolida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Hæ enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, ſed potius punctis terminari dicitur. Itaq; termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione poteſt, Figuræ vnico comprehenſæ termino ſunt, Circulus, Ellipſis, ſphæra, ſphæroides, & alia huiuſmodi: Pluribus vero terminis incluſæ figuræ ſunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: ſolida autem circunſcripta, figuræ ſolidæ, ſiue corporeæ. Porro quia formas, ſeu typos variarum figurarum inſpicies quam plurimas in ſequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, ſolidarum vero in poſterioribus quinque, propterea nulla hoc hoco figura depingenda eſſe videtur.

XV.

CIRCVLVS, eſt figura plana ſub vna linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectiſſimam, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circumſcribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram exiſtit, ſint æquales, vocari circulum. Vt ſi ſuperficies, ſeu ſpatium concludatur vnica linea A B C, habueritque hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus ſuſcepto, vtpote à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum ABC, quales ſunt DA, DB, DC, inter ſe ſint æquales, appellabitur talis figura plana, circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propoſitione 1. tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis eſt ABC, appellari Peripheriam, ſeu, vt Latini exponunt, circumferentiam. Poteſt circulus etiam hac ratione deſcribi. Circulus eſt figura plana, quæ deſcribitur à linea recta finita circa alterum punctum extremum quieſcens circumducta, cum in eundem rurſus locum reſtituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidem deſcriptio perſimilis eſt ei, qua ab Euclide ſphæra deſcribitur lib 11. Vt ſi intelligatur recta A D, circa punctum D, quieſcens moueri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoueri cœpit, deſcribet ipſa recta totum ſpatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoque punctum quieſcens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam ſunt inter ſe æquales, propterea quod recta AD, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, poſſunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipſis, quamuis figura ſit plana vna linea circumſcripta, tamen quia in ea non datur punctum, à quo ad ipſam lineam terminantem omnes rectæ lineæ ſint æquales, circulus dici nequit.



XVI.

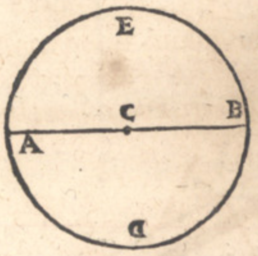
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

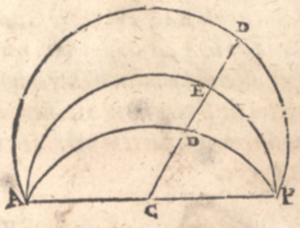
DOCET, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ ſunt æquales, appellari centrum circuli; quale eſt præcedentis figuræ punctum D. Vnde perſpicuum eſt, polum alicuius circuli in ſphæra, à quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes ſunt æquales, vt ait Theodoſius in ſphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, exiſtat in ſuperficie ſphæræ, nō autem in ſuperficie circuli; quæ tamen eſt neceſſario requiſita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, ſatis eſt, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam ſint æquales inter ſe, vt demonſtrat Euclides propoſitione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emiſſæ inter ſe ſint æquales.

XVII.

DIAMETER autem circuli, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam ſecat.

SI in circulo ducatur recta linea AB, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, ſed ea ſolummodo, quæ per centrum vſque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures aſſignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam ſecari à diametro, perſpicuum ex eo eſſe poteſt, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum tranſitum, vtrinque æquales circumferentiæ abſcindantur. Quod tamen Thaletem Mileſium hac ratione demonſtraſſe teſtatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ AEB, ita vt diameter AB, communis ſit vtrique portioni: Si igitur circumferentia ADB, congruat penitus circumferentiæ A E B, manifeſtum eſt, duas illas portiones à diametro factas, eſſe inter ſe æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circumferentia ADB, non omni ex parte cadere dicatur ſuper circumferentiam AEB, ſed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta à centro C. ſecante, circumferentiam ADB, in D, & circumferentiam AEB, in E, erunt duæ rectæ CD, CE, ductæ ex centro ad circumferentiam eiuſdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna ſit pars alterius, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, ſed ambæ inter ſe aptabuntur, ideoque æquales erunt, quod demonſtrandum proponebatur.





EX hac demonſtratione conſtat, diametrum non ſolum circumferentiā, verumetiam totam areā circuli ſecare bifariam. Cū enim ſemicircumferentiæ ſibi mutuo congruant, vt oſtenſum eſt, cōgruent etiā ſuperficies ipſæ inter diametrum, & vtramq; circunferentiā comprehenſæ, cū neutra alterā excedat. Quare æquales inter ſe erunt.

XVIII

SEMICIRCVLVS vero eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratia, in ſuperiori circulo figura ADB, contenta ſub diametro AB, & peripheria ADB, dicitur ſemicirculus, quia

quia, vt in præcedenti definitione oſtendimus, ea eſt dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura AEB, ſemicirculus. Idem autem punctum C, diamentrum ſecans bifariam, centrum eſt in circulo, & in ſemicirculo.



QVOD ſi recta linea B D, non tranſeat per centrum E, ſecabitur circulus ab ea non bifariam, ſed in duas portiones inæquales B A D, B C D, quarum ea, in qua centrum circuli exiſtit, cuiuſmodi eſt portio B A D, maior eſt, quam alia B C D, extra quam centrum E, reperitur. Eſſe autem portiones B A D, B C D, inæquales, ita probari poteſt. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam B D, perpendicularis A C. Si igitur dictæ portiones dicantur eſſe æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, vt ſuper portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, qui omnes inter ſe æquales ſunt ex defin. 10. cum ſint ſibi mutuo deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadem eſt, quæ F A, maior erit, quam E A, pars ipſius F A. Cum ergo ipſi E A, ſit æqualis E C, quod ambæ ducantur è centro ad circunferentiam, erit quoq; F C, maior quam E C, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Non igitur portio B C D, portioni BAD, congruet, ſed intra eam cadet, cuiuſmodi eſt portio B G D, vt recta F G, eadem tunc exiſtens, quæ F C, minor poßit eſſe quam E A, vel E C. Si namque diceretur cadere extra, vt ſi circulus eſſet B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis eſt portio B A D, eſſet rurſus F A, eadem tunc exiſtens, quæ F C, maior quam E G, hoc eſt, quam E C, atque ita pars F C, maior rurſum foret toto E C, quod abſurdum eſt. Ex quo patet, portionem B A D, in qua centrum E, exiſtit, maiorem eſſe reliqua portione B C D, cum hæc æqualis ſit portioni B G D, quæ pars eſt portionis B A D. Cum enim oſtenſum ſit, portionem B C D, circa rectam B D, circumductam non poſſe congruere portioni B A D, neque cadere extra, cadet omnino intra, qualis eſt B G D.

XIX.

RECTILINEÆ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides deſcriptiones variarum figurarum, explicat prius, quænam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potißimum ſermo futurus eſt in hiſce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndiq; rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perſpicuum eſt, figuras planas curuis lineis comprehenſas, dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circumſcribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide deſcribentur.

XX.

TRILATERÆ quidem, quæ ſub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumſcribuntur, aperte nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot ſint anguli, quot latera, ſeu rectæ lineæ ex quibus conſtant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes ſpecies iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERÆ quidem, quæ ſub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ ſpecies mox ſubſequentur.

XXII.

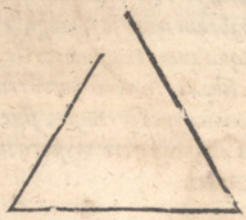
MVLTILATERÆ autem, quæ ſub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM ſpecies rectilinearum figurarum ſunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progreſſum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam ſpeciem, ſub quâ omnia triangula continentur; quatuor conſtituunt ſecundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinq; tertiam componunt ſpeciem; ſex quartam, atq; ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur perſequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumſcribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortaßis eam ob cauſam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atq; Quandrangulis ſermo habeatur, & quod facile ad ſimilitudinem harum duarum ſpecierum cæteræ omnes à quolibet definiri poßint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinqulateram, & ſex lineis comprehenſam ſexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiuſmodi figuræ quinquangulæ, ſexangulæ, ſeptangulæ, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

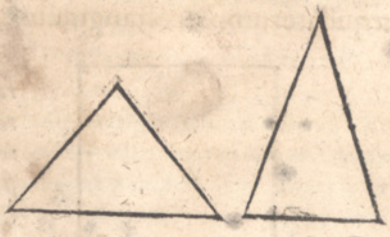
DESCENDIT iam ad ſingulas ſpecies triangulorum. Quia vero triangula diuidi poſſunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius ſpecies prioris diuiſionis, quæ tres ſunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis ſeſe poßint habere. Aut enim omnia æqualia ſunt; aut duo tantum, tertio exiſtente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter ſe æqualia ſunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoque eſſe, ceu ad quintam propoſitionem huius libri demonſtrabimus.



XXIV.

ISOSCELES autem eſt, quod duo tantum æqualia habet latera.

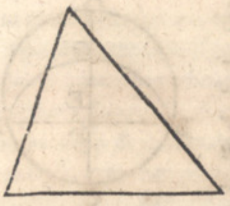
EX hac rurſum æqualitate duorum laterum trianguli Iſoſcelis efficitur, duos angulos ſuper reliquum latus etiam eſſe æquales, vt demonſtrabit Euclides propoſ. 5. huius libri. Appoſuimus autem duo triangula Iſoſcelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, poſterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ ſint ſpecies trianguli Iſoſcelis; alterum, cuius tertium latus ſit vtrouis æqualium maius, & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus ſit.



XXV.

SCALENVM vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

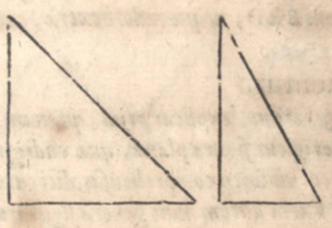
HIC denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt oſtendetur propoſ. 18. huius 1. lib. Porro ex his conſtat, eodem modo potuiſſe diuidi triangulum in tres ſpecies, ſi æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli ſint inter ſe æquales; aut duo tantum, tertio maiore, vel minore exiſtente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales, vel duorum tantum angulorum æqualium: vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, ſecundum vero Iſoſceli, tertium deniq; Scaleno reſpondet triangulo. Cæterum quanam arte conſtruenda ſint triangula huius partitionis ſuper quauis data recta linea finita, trademus propoſ. 1. huius lib.



XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

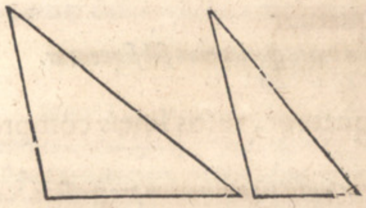
NVNC exponit triangulorum ſpecies iuxta poſteriorem diuiſionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo ſunt angulorum rectilineorum genera diuerſa; (Omnis enim angulus rectilineus vel eſt rectus, vel obtuſus, vel acutus, vt ſupra diximus,) fit vt tres quoque ſpecies triangulorum ſub hac conſideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli eſt rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propoſ. 1. lib. conſtabit; aut obtuſus, & ob eandem cauſam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nulluſq; obtuſus, ſed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs Geometris Rectangulum. Poteſt autem triangulum huiuſmodi eſſe Iſoſceles, vel ſcalenum, vt hæ figuræ indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum eſſent per ea, quæ propoſ. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoq; cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propoſ. 17. & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtuſum angulum habet.

TRIANGVLVM Amblygonium, ſiue obtuſangulum eſſe quoque poteſt vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt in his figuris cernitur, non autem æquilaterum, alias eadem ratione eſſent omnes tres anguli per ea, quæ propoſ. 5. oſtendemus, æquales, ideoque cum vnus ponatur obtuſus, omnes res obtuſi, quod multo magis pugnat cum propoſ. 17. & 32. huius libri.



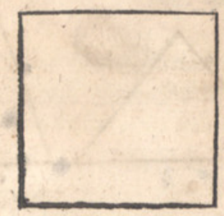
XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxygonium, ſiue acutangulum, poteſt eſſe vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in ſpeciebus prioris diuiſionis ſpectanda exhibuimus, ne eadem hic fruſtra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, eſſe neceſſario Oxygonium: At omne triangulum tam Iſoſceles, quam Scalenum, eſſe vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atque Iſoſceles Oxygonium rurſum duplex, Iſoſceles nimirum Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, atque Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus: Vt vnica ſit ſpecies trianguli æquilateri, quatuor vero Iſoſcelis, & tres Scaleni: Atq; in vniuerſum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium eſſe diximus, Iſoſceles rectangulum, Iſoſceles Amblygonium, Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum Amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam hiſce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Iſoſceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Iſoſceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Iſoſceles habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Iſoſceles habens tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perſpicuum eſt, quamnam connexionem, ſiue affinitatem habeant inter ſe triangula vtriuſq; partitionis. Poſſe autem dari triangulum Iſoſceles Oxygonium, cuius duorum laterum æqualium vtrumuis tertio ſit minus, vt recte animaduertit Franciſcus Barocius in ſua Coſmographia, oſtendemus ad propoſ. 15. lib. 4. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expreſſe nominantur, ſolet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Baſis, ſiue illud in ſitu infimum occupet locum, ſiue ſupremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere myſterij in baſe trianguli, intelligereſque quodlibet latus, omni diſcrimine remoto, baſis nomine poſſe nuncupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum, & rectangulum eſt.

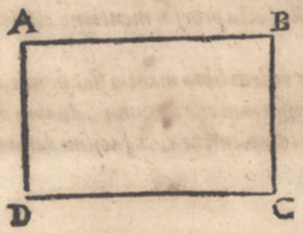


POST figurarum trilaterarum ſpecies, exponit iam ſingulatim quadrilateras figuras, recenſendo quinque tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia ſunt, poſterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter ſe æqualia exiſtunt, omneſque anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propoſ. 46. huius lib. quonam modo conſtruendum ſit quadratum ſuper recta linea propoſita finita.

XXX.

XXX.

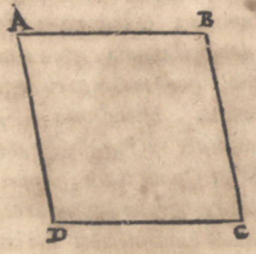
ALTERA vero parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.



SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli ſunt recti, at latera non ſunt inter ſe æqualia, quamuis bina oppoſita inter ſe æqualia exiſtant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter ſe, & A D, B C, inter ſe quoq; æqualia ſunt, cum A B C D, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum ſit, vt in hoc lib. ad propoſ. 34. oſtendemus.

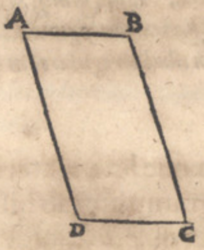
XXXI.

RHOMBVS autem, quæ æquilatera, ſed rectangula non eſt.



HÆC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppoſitas prorſus habet conditiones, & diuerſas à conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppoſiti inter ſe æquales exiſtant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter ſe, & B, & D, quoq; inter ſe æquales ſunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum ſit, ceu ad eandem propoſ. 34. huius libri demonſtrabitur.

XXXII.

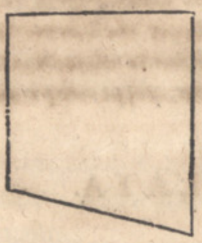


RHOMBOIDES vero, quæ aduerſa & latera, & angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera eſt, neque rectangula.

EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte oppoſita. Nam neq; eius latera omnia æqualia ſunt, neq; vllus angulus rectus, ſed tamen latera bina oppoſita, qualia ſunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter ſe, item anguli bini oppoſiti, quales ſunt A, C, & B, D, inter ſe exiſtunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici poſſunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunq; ſint, irregulares.

XXXIII.

PRÆTER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

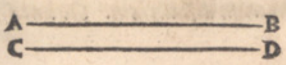


RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, ſeu rectos, neq; latera bina oppoſita; neq; angulos binos oppoſitos habeant inter ſeſe æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, recte irregulares nuncupabuntur. Poſſunt enim duo anguli eſſe recti, vel vnus obtuſus, alij acuti, vel duo obtuſi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri poteſt quaſi diuiſio penes latera: Nam vel aliqua æqualia inter ſe ſunt, vel nullum alteri eſt æquale, &c. Determinatas porro trapezïorum ſpecies nonnullas afferemus poſt definitionem linearum parallelarum, ſeu æquidiſtantium, & parallelogrammi.

XXXIV.

PARALLELÆ rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, ſiue æquidiſtantes, non ſatis eſt, vt in quamcunque partem, etiam ſpatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; ſed neceſſe quoq; eſt, vt in vna plana ſuperficie exiſtant. Multæ ſiquidem lineæ rectæ non exiſtentes in eadem ſuperficie plana productæ ad ſpatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non ſunt parallelæ dicendæ; quales ſunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in tranſuerſum poſitæ in medio aere, & non ſe tangentes; Hæ etenim nunquam coire poſſunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem exiſtere plana ſuperficie, quando ſuperficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoq; accommodari poteſt ſecundum omnia eius puncta, quamuis re ipſa in duabus ſuperficiebus diuerſis



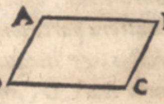
reperiantur; Vt propoſitis duabus rectis lineis A B, C D, ſi ſuperficies aliqua plana rectæ A B, applicetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circumducta tangat quoq; omnia puncta alterius rectæ C D; dicentur huiuſmodi rectæ duæ lineæ in eadem ſuperficie plana exiſtere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eædem non coeant, etiamſi infinite producatur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, ſiue æquidiſtantes. Cæterum planius, perfectiuſq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur ſuperficie exiſtere: Satis ſit hoc loco breuiter admonuiſſe, recte ab Euclide vtramq; conditionem eſſe poſitam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem exiſtere plano, & productæ in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad ſpatium infinitum. Quod ſi duæ rectæ lineæ per immenſum aliquod ſpatium extenſæ non cernantur coire, conſtet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotieſcunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur à quopiam eſſe parallelæ, is

lelæ, is neceſſe eſt concedat, illas in vna, eademque ſuperficie iacere, & nunquam poſſe coire. Similiter, ſi quis concludere velit, duas rectas lineas eſſe parallelas, hic demonſtret prius oportet, eas in eodem exiſtere plano, & in neutram partem productas coniungi poſſe. Quæ in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur oſtendere, aliquas rectas lineas eſſe parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamſi infinite producantur, nulla facta prorſus mentione alterius conditionis, quæ eaſdem lineas in eodem requirit exiſtere plano.

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, neceſſarium eſſe duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid ſit Parallelogrammum, & quæ ſint parallelogrammi complementa, vt facilius demonſtrationes percipiantur.

XXXV.

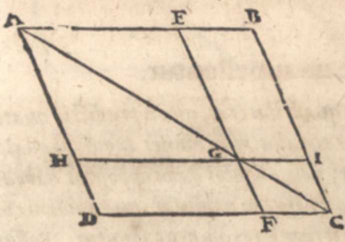
PARALLELOGRAMMVM eſt figura quadrilatera, cuius bina oppoſita latera ſunt parallela, ſeu æquidiſtantia.



VT figura quadrilatera ABCD, ſi quidem latus AB, æquidiſtet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor ſolum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, poſteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus exiſtat rectus. Cæterum quatuor has figuras eſſe parallelogramma, oſtendemus ad propoſ. 34. huius lib. Itaq; poſſumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rurſus in rectangulum, & æquilaterum, quale eſt Quadratum: in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale eſt Rhomboides; in rectangulnm, ſed non æquilaterum, qualis eſt figura altera parte longior: & in æquilaterum, ſed non rectangulum, cuiuſmodi eſt Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera oppſita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla oppoſita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non ſunt parallela, inter ſe æqualia, diciturq; Trapezium Iſoſceles: vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus ſeptem genera figurarum quadrilaterarum conſtitui poſſunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Iſoſceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera ſunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ ſecantes diametrum in vno eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrũ cõſiſtere dicuntur.



SIT parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC, & linea EF, ſecans diametrum in G, & parallela exiſtens lateribus AD, BC. Item linea HI, ſecans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus AB, DC, exiſtens. Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, parallelogrammum totum diuiſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non tranſit, vocantur à Geometris complementa, ſiue ſupplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, quippe cum per ea diameter tranſeat, vt videre eſt in præſenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

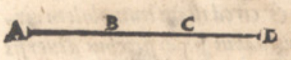
POSTVLETVR, vt à quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.



PRIMVM hoc poſtulatum planum admodum eſt, ſi recte conſiderentur ea, quæ paulo ante de linea ſcripſimus. Nam cum linea ſit fluxus quidam puncti imaginarius, atq; adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt ſi punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta ſane ſit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione poſtulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A, ductam eſſe rectam lineam ad punctum B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctumD; & ſic innumeræ aliæ ab eodẽ puncto educi poſſunt ad alia atq; alia puncta.

II.

ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.



QVOD ſi punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis ſit expers, producta erit ipſa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere poſſimus moueri ad infinitam diſtantiam. Sic linea recta AB, producta eſt primo in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c.

III.



ITEM quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.

IAM vero, ſi terminatam rectam lineam cuiuſcunq; quantitatis mente conceperimus applicatam eſſe ſecundum alterum extremum ad quoduis punctum, ipſamq; circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cœpit; deſcriptus erit circulus, effectumq;, quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinq; lineis AB, AC, AD, AE, AF, quæ ſingulæ citra centrum A, circumuolutæ ſingulos circulos deſcripſerunt iuxta quantitatem, ſeu interuallum ipſarum.

PRÆTER hæc tria poſtulata, quibus Euclides contentus fuit, ſunt multa alia

æque

æque facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progreſſu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex ſe vel facile intelliget.

IV.

ITEM quacunque magnitudine data, ſumi poſſe aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuiſionem vero diminui poteſt infinite: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari poßit: neq; tam parua, quin minor ea poßit exhiberi. Hoc idem in numeris verum eſt, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri poteſt infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.

COMMVNES NOTIONES SIVE

Axiomata, quæ & Pronunciata dici ſolent, vel Dignitates.

I.

QVÆ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia. Et quod vno æqualium maius eſt, aut minus, maius quoque eſt, aut minus altero æqualium. Et ſi vnum æqualium maius eſt, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoq; æqualium eadẽ magnitudine maius eſt, aut minus.

FIERI nulla ratione poteſt, vt duæ quantitates inæquales, æquales ſint alteri quantitati. Si enim minor illarum propoſitæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem neceſſario maior illarum. Et ſi maior æqualis fuerit propoſitæ quantitati, ſuperabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter ſe æquales quoq; eſſe. Reliquæ quoq; partes Axiomatis à nobis adiectæ, quod frequentem vſum habeant, clariſſimæ ſunt.

II.

ET ſi æqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, ſiue compoſitæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus eſſet adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

III.

ET ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia.

NAM ſi reliquæ quantitates forent inæquales, à minore plus fuiſſet detractum, quam à maiore.

IV.

ET ſi inæqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt inæqualia. Et, ſi inæqualibus inæqualia adiecta ſint, maiori maius, & minori minus, tota ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN &, ſi æqualibus inæqualia adiecta ſint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem conſtituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & ſi inæqualibus æqualia adijciantur, compoſita quantitas ex maiore, maior eſt, quam compoſita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vſum.

V.

ET ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia. Et ſi ab inæqualibus inæqualia ablata ſint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata ſint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum reſiduum maioris maius eſt reſiduo minoris, ſi æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam ſimpliciter, & abſolute gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur poſt ſubtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde poteſt, niſi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in ſecunda parte Axiomatis dictum eſt, quam nos ob inſignem eius vtilitatem adiecimus. Poſſunt enim compoſitæ quantitates, vel reſiduæ, eſſe & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ ſunt inæqualia. Sic etiam ſi ex 7. & 5. detrahantur [illegible] & 1. relinquentur 5. & 4. quæ ſunt inæqualia. At vero ſi ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia ſunt. Item ſi detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque exiſtunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda eſt etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et ſi ab æqualibus idem commune detrahatur, reſidua æqualia erunt: Et ſi inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & ſi ab inæqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inæqualia auferantur, reſidua exiſtent inæqualia.

VI.

ET quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia. Et quod vnius æqualium duplum eſt, duplum eſt & alterius æqualium.

SIMILITER; quæ eiuſdem ſunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter ſe ſunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum eſſet duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatis, deficeret vtiq; minus à duplici, vel tripliei. &c. Quod ſi contra, minus eſſet duplex, vel triplex, &c. quãtitatis cuiuſpiã, excederet ſane maius duplex ipſum; vel triplex, &c. Hoc autẽ & ex ſecundo axiomate comprobari poteſt, ad hunc modum. Si n. duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtriq; tertia illa addatur, erunt compoſitæ duplices illius tertiæ, [a] ſed & inter ſe æquales, ob idem additamentum. Quod ſi a 2. pron.

rurſum

b 2. pron. rurſum compoſitis eadem tertia adijciatur, erunt conſlatæ triplices eiuſdem tertiæ. Cum [b] igitur & æquales inter ſe, propter idem additamentum, exiſtant; eademque ſit ratio in cæteris multiplicibus, perſpicuum erit Axioma propoſitum. Secundam porro partem huius Axiomatis nos appoſuimus, quod non rarò eius vſus in rebus Geometricis requiratur.

VII.

ET quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt. Et contra, Quæ æqualia ſunt, eiuſdem ſunt dimidia.

PARI ratione, quæ eiuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia quoq; ſunt: Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter ſe æqualia neceſſario exiſtunt. Partem quoque ſecundam huiuſce Axiomatis nos adiunximus, propterea quod non minus frequenter, quam prima, à Geometris vſurpatur.

VIII.

ET quæ ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

HOC eſt, duæ quantitates, quarum vna ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed ambæ inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando vna alteri ſuperpoſita, ea quæ ſuperponitur, alteri tota congruit, ita vt eā nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, ſed lineæ illius cum lineis huius prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter ſe inæquales exiſtant.

E CONTRARIO, Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſibi mutuo congruent, ſi alterum alteri ſuperponatur. Intelligendum eſt autem, quantitates ſibi mutuo congruentes, eſſe æquales, ſecundum id duntaxat, in quo ſibi congruunt. Congruit autem longitudo longitudini tantum, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

IX.

ET totum ſua parte maius eſt.

CVM pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipſum auferatur; perſpicuum eſt, omne totum ſua eſſe parte maius.

IN ſequentibus porro pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quod duo alia axiomata hoc loco inſerenda eſſe cenſuimus valde neceſſaria, cum ex ijs Axioma 12. quod Euclidi eſt decimum, demonſtrari poſſit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros appoſuimus ordini Euclidis reſpondentes.

o.
X.

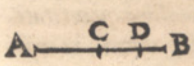
DVÆ lineæ rectæ non habent vnum & idem ſegmentum commune.

NON eſt difficile iſtud Axioma, ſi perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo ſemper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione poteſt, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo ſe mutuo interſecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonſtrat. Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & interuallo DA, [a] deſcribatur circulus ſecans duas rectas propoſitas in punctis B, & C; [b] Erunt igitur duæ circunferentiæ AB, ABC, inter ſe æquales, (Sunt enim circunferentiæ ſemicirculorum æqualium, cum ADB, ADC, ponantur eſſe diametri) pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem ſegmentum commune. Quod eſt propoſitum.

a 3. petit
b 17. def.



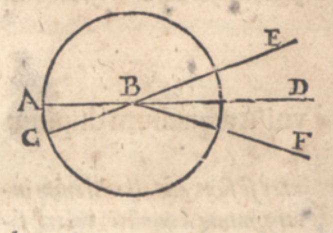
POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere ſegmentum, quando vnam & eandem rectam lineam conſtituunt. Vt in hac figura, rectæ AD, BC; commune habent ſegmentum CD, quia ambæ vnam rectam conſtituunt lineam AB. At vero quando duæ rectæ ſunt diuerſæ, quales fuere AB, AC, in ſuperiori exemplo, non poſſunt poſſidere ſegmentum aliquod commune, vt recte à Proclo fuit demonſtratum.



o.
XI.

DVÆ rectæ in vno puncto concurrentes, ſi producantur ambæ, neceſſario ſe mutuo in eo puncto interſecabunt.

HOC etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonſtrabimus. Coeant duæ rectæ AB, CB, in B. Dico illas productas ſe mutuo ſecare in B, nempe CB, productam cadere in E, ſupra rectam AB, productam. Nam ſi CB, producta non cadit ſupra AB, productam, congruet cum AB, producta, ita vt tranſeat per D, atque ita duæ rectæ ABD, CBD, habebunt idem ſegmentum commune BD, quod in antecedenti axiomate oſtenſum eſt fieri non poſſe: vel certe infra AB, productam cadet, ita vt CB, producta cadat in F, ſitq; vna recta linea CBF. Centro igitur B, deſcribatur ad quoduis interuallum circulus ACFD, ſecans rectas AB, CB, productas in D, F. Quia ergo vtraq; recta ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam ACD, quam CF, ſemicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ ACD, CF. vt ad defin. 17. demonſtrauimus, totum & pars. Quod eſt abſurdum.



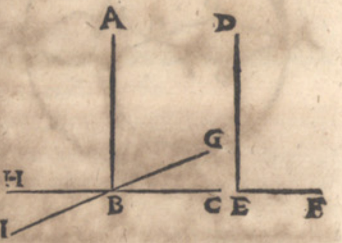
DVO proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen neceſſaria ſunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inſeruimus. Tria autem ſequentia Euclidis ſunt.

XII.

XII. x.

ITEM, omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

HOC *axioma apertiſsimum eſſe cuilibet poteſt ex 10. definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, minuiue nequit, ſed prorſus eſt immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita ſuperſtat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter ſe eſſe, cum ſemper ſit eadem inclinatio, quamuis lineæ ſint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonſtrare hac ratione. Sint duo anguli recti ABC, DEF, quos dico eſſe inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ſint inæquales, ſitq; ABC, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam DE, rectæ AB, cadet recta EF, inter rectas AB, BC, qualis eſt BG, propterea quod angulus DEF, minor ponitur angulo ABC.*[a] *Producatur CB, in rectum & continuum vſq; ad H. Cum igitur angulus ABC, ſit rectus,*[b] *erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoq;: quare maior etiam angulo ABC.*[a] *Producta autem GB, in rectum & continuum vſq; ad I, cadet portio producta BI, infra CB, productam, vt in præcedenti Axiomate eſt demonſtratum. Quare cum angulus ABG, ponatur rectus,*[b] *fiet angulus ABI, illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoq; erit angulo ABI, pars toto, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt duo anguli recti propoſiti, ſed æquales. Quod eſt propoſitum: eademq; eſt ratio in cæteris.*



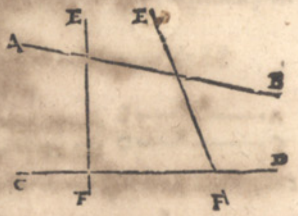
a 2.pet.
b 10. def.
a 2.pet.
b 10.def.

RECTE *autem hoc loco monet Pappus, axioma iſtud non poſſe conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus eſt, cum & curuilineus recto æqualis eſſe queat, vt in 5. lib. demonſtrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum non ſit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter ſe æquales erunt, ſine vlla exceptione.*

XIII. xj.

ET ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

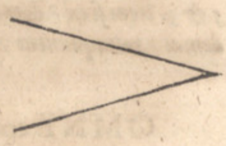
VT ſi in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conuenturas eſſe ad aliquod punctum vnum, verſus eam partem, in qua duo anguli minores exiſtunt duobus rectis, vt appoſitum exemplum commonſtrat. Ratio huius perſpicua eſt, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales ſunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire poſſunt, ſed æquali ſemper ſpatio protenduntur, vt propoſ. 28. huius lib. demonſtrabitur. Quare ſi duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, neceſſe eſt ex ea parte dictarum linearum ſpatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem eſſe aliquando in vnum punctum. Verum quia axioma hoc ſubobſcurum videri ſolet tyronibus, immo à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quod non facile quiuis ei aſſenſum præbeat; præſertim cum reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum ſpatium, licet ſemper magis ac magis coanguſtetur, (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propoſ. 28. huius lib. demonſtrabimus) nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamſi infinitè producantur, vt conſtat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Idcirco pleniorem illius explicationem in ſcholium propoſ. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli ſententia Geometrice demonſtrabimus, vt firme, ac ſine vlla dubitatione tanquam veriſſimum, ad propoſitionis 29. huius lib. (vbi primum eius vſus incipit apparere) & ad aliarum propoſitionum demonſtrationes poſſit aſſumi. Quod tamen nos aliter quam Proclus, & quidem magis Geometrice demonſtrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

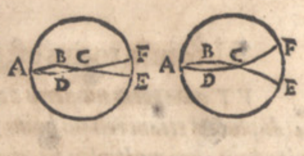


XIV. xij.

DVÆ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

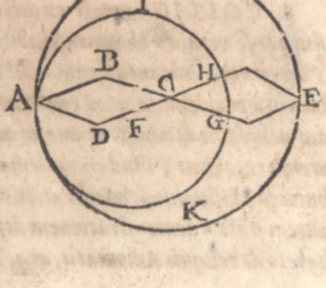
NVLLAM *prorſus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, neceſſario ex altera parte ſemper magis ac magis disiungentur, ſi producantur, vt in exemplo propoſito perſpicuum eſt. Quare vt ſuperficies, ſpatiumue quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda eſt. Ita enim conficietur ſpatium triangulare, ſeu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonſtrat hoc principium, hoc modo. Si fieri poteſt, vt duæ lineæ rectæ claudant ſuperficiem, comprehendant duæ rectæ ABC, ADC, ſuperficiem ABCD, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis, A, & C. Facto deinde centro C,*[a] *deſcribatur circulus interuallo CA,*[b] *& producantur rectæ ABC, ADC, in rectum & continuum vſq; ad circumferentiam, nempe ad puncta, E, & F. Itaq; quia rectæ ACE, ACF, tranſeunt per centrum C,*[c] *erunt ſemicirculi AE, AEF, inter ſe æquales, & idcirco circunferentia quoq; AE, circunferentiæ AEF, æqualis erit, pars toti, quod fieri non poteſt. Non ergo rectæ duæ lineæ ſpatium comprehendunt. Quod eſt propoſitum.*



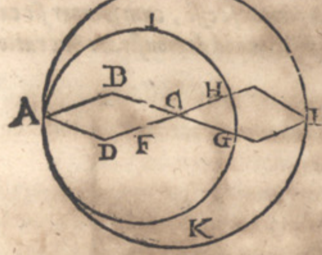


a 3.pet.
b 2. petit.
c 17.def.

SED *quia fortaſsis aduerſarius dicet, rectas ABC, ADC, productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in E, vel F, atq; adeo non ſequi, partem æqualem eſſe toti, demonſtrabimus tunc idem Axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ lineæ iterum, ſi fieri poteſt, in E. Sumpto puncto F, in recta ADC, quocunq;, erit AF, minor, quam FE, cum minor ſit, quam AFC, hoc eſt, quam CHE, quæ ipſi AFC, æqualis eſt, atq; adeo multo minor, quàm FE. Circulus igitur ex F, ad interuallum FA, deſcriptus ſecabit rectam FE, in H, atq; adeo CGE, in G. Quoniam igitur AFH, diameter circuli eſt, erit AIH, ſemicirculus, vt ad defin. 17. oſtendimus: Portio autem AIG, quam aufert recta ABG, & in qua centrum non eſt, ſemicirculo minor, vt ad defi. 18. demonſtrabimus. Eſt ergo circumferentia AIG,*



minor quam AIH, totum quam pars, quod eſt abſurdum. Quòd autem minor ſit portio AIG, ſemicirculo, oſtendemus, vt ſupra. Nam ducta ex centro F, ad rectam ABG, perpendiculari, & circumuoluta portione AIG, circa rectam ABG, cadet circumferentia AIG, intra circumferentiam AKG, ne pars maior ſit quam totum, vt ſupra demonſtrauimus.

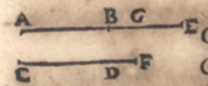


CONSTAT *hoc etiam Axioma ex definitione lineæ rectæ. Cum enim recta linea ſit breuiſſima extenſio ab vno puncto ad aliud, duci poterit vnica tantum linea ab vno puncto ad aliud. Quare ſi ABC, recta eſt, non erit ADC, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam ſi ABC, eſt recta, obumbrabunt media illius extremitates eiuſdem. Igitur media puncta lineæ ADC, non obumbrant extrema, cum viſus per rectam ABC, feratur. Non ergo recta eſt ADC.*

HIS *Axiomatis ab Euclide poſitis adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decerpta, non minus neceſſaria ad futuras demonſtrationes Problematum atq; Theorematum cùm Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quàm ea, quæ nobis tradidit Euclides.*

XV.

SI æqualibus inæqualia adiiciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis.



HOC, *& ſequens pronunciatum deſumpſit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaq; quantitatibus AB, CD, addantur inæquales BE, DF, ſitq; BE, maior quàm DF. Et ex BE, auferatur BG, æqualis ipſi DF, vt ſit GE, exceſſus, quo quan..tas addita BE, ſuperat quantitatem additam DF. Quoniam igitur æqualibus AB, CD, addita ſunt æqualia BG, DF,* [a] *erunt tota AG, CF, æqualia. Quare conſtat, totam quantitatem AE, ſuperare totam CF, eodem exceſſu GE, quo magnitudo DF, adiuncta, à magnitudine adiuncta BE, ſuperatur. Quod eſt propoſitum.*

a 2. pron.

XVI.

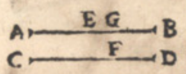
SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

IN *eadem figura, inæqualibus quantitatibus BE, DF, addantur æquales AB, CD. Et ex maiore BE, auferatur BG, æqualis ipſi DF, vt GE, ſit exceſſus; quo quantitas BE, quantitatem DF, ſuperat. Quoniam igitur æqualibus BG, DF, addita ſunt æqualia AB, CD,* [a] *erunt tota AG, CF, æqualia. Quamobrem tota quantitas AE, ſuperabit totam CF, eodem exceſſu GE, quo maior quantitas propoſita BE, mincrem DF, ſuperat. Quod eſt propoſitum.*

a 2. pron.

XVII.

SI ab æqualibus inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis.

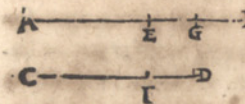


AB *æqualibus AB, CD, auferantur inæqualia BE, DF. Sitq; EG, exceſſus, quo quantitas BE, ſuperat quantitatem DF; ita vt BG, æqualis ſit ipſi DF. Quia igitur ab æqualibus AB, CD, ablata ſunt æqualia BG, DF,* [b] *remanebunt AG, CF, æqualia. Perſpicuum ergo eſt, reſiduum AE, ſuperari à reſiduo CF, eodem exceſſu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, ſuperat. Quod eſt propoſitum.*

b 3. pron.

XVIII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis.



AB *inæqualibus AB, CD, auferantur æqualia AE, CF. Sitq; BG, exceſſus, quo tota quantitas AB, ſuperat totam quantitatem CD, ita vt AG, æqualis ſit ipſi CD. Quoniam igitur ab æqualibus AG, CD, ablata ſunt æqualia AE, CF, remanebunt EG, FD, æqualia. Quare reſiduum EB, ſuperabit reſiduum FD, eodem exceſſu BG, quo tota quantitas AB, ſuperat totam quantitatem CD. Quod eſt propoſitum.*

IN *his quoq; quatuor proxime poſitis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda eſt vna etiam ſola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis. Et ſi inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et ſi ab eodem communi inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis. Et ſi ab inæqualibus idem commune dematur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis. Nam in numeris, ſi ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus eſt 2. idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus 2. idem eſt, qui ipſorum 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 5. & 2. Deniq; ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.*

XIX.

OMNE totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

QVONIAM *omnes partes ſimul ſumptæ conſtituunt totum, cuius ſunt partes, manifeſta eſt veritas huius axiomatis.*

XX.

SI totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT *quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus eſt etiam reliqui huius 7. In vniuerſum autem hoc demonſtrabitur propoſ. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atq; ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atq; tota totius.*

COLLIGI *poteſt ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc diſcrimen inter poſtulata, & Axiomata, quod cum vtraq; ſint per ſe nota, & indemonſtrabilia, illa naturam ſapiunt Problematum, propterea quod aliquid fieri expoſcant; hæc vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, ſed ſolum ſententiam aliquam notiſſimam proponant. Differt autem poſtulatum à problemate, quod conſtructio poſtulati non indigeat vlla demonſtratione, problematis autem conſtructionem concedat nemo ſine demonſtratione, eo quod difficile aliquod nobis exhibeat conſtruendum. Idem diſcrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonſtrari non debet, hoc vero concedendum nulla eſt ratione, niſi demonſtretur. Nam nemo huius propoſitionis demonſtrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter ſe quoq; æqualia ſunt. Huius autem ſtatim demonſtrationem deſiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales ſunt duobus rectis. Idē iudicium habeto de reliquis Axiomatis, atq; Theorematis, nec non poſtulatis, problematiſq;.*

CONSTAT

CONSTAT quoq;, Poſtulatorum alia propria eſſe Geometriæ, qualia ſunt illa tria, quæ Euclides nobis propoſuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiuſmodi eſt hoc, Quantitatem poſſe infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri poteſt, ita vt numquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, ſiue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, tertiumdecimum, & quartumdecimum ſoli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonſtrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ à magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, ſiue hæ magnitudines lineæ ſint, ſiue ſuperficies, ſiue corpora; ita quoq; numeri æquales detracti è numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HÆC dicta à nobis ſint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonſtrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiuſmodi, vt plane non intelligantur, niſi prius eorum vſus appareat in demonſtrationibus; id quod ſatis te experientia docebit.

ANTEQVAM porro ad propoſitiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum eſt, quemnam ordinem, ac modum in ipſis demonſtrationibus ſimus ſecuti. Primum cuilibet propoſitioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus ſignificat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum eſt ſecutus in Euclidis propoſitionibus, alter vero in ipſa propoſitionum ſerie deſcriptus refert diſpoſitionem propoſitionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obſeruari cernimus in codicibus Græcis. Id vero eo conſilio à nobis eſt factum: quoniam cum à quibuſdam Geometris propoſitiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis ſeriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter ſe diſcrepent, in ſerie, atq; ordine propoſitionum, id quod maxime in 6. 7. & 10. lib. perſpicitur; neceſſarium eſſe duximus, vt vtriuſq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt ſi quando numerus propoſitionum à Geometra quopiam citatus non reſpondet alteri interpreti, alteri ſaltem conueniat. Deinde ne curſus demonſtrationum interrumperetur, citauimus principia, & propoſitiones Euclidis in margine præfixa cuilibet citationi ſemper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis ſigno, cui ſimilis literula, ſeu ſignum reſpondet in demonſtratione, vt facilius cognoſcatur, ad quem locum quælibet citatio ſit referenda. Porro citationes intelligendæ ſunt hoc modo.

1. def.	Prima definitio. & ſic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.
1. pet.	Prima petitio, vel primum Poſtulatum.
1. pron.	Primum pronunciatum, ſeu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.
1. primi.	Prima propoſitio primi libri.
23. Vndec.	Vigeſimatertia propoſitio vndecimi libri.
6. tertijd.	Sexta tertijdecimi libri.
9. ſextid.	Nona ſextidecimi libri.
13. duod.	Decimatertia libri duodecimi.
7. quind.	Septima libri quindecimi.
5. quartid.	Quinta libri quartidecimi, &c.

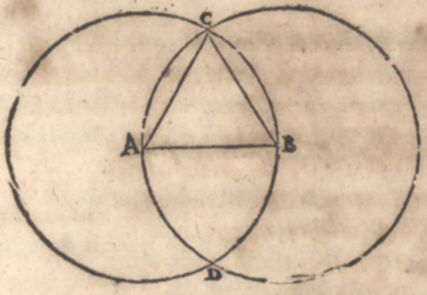
Ex his aliæ citationes à quolibet facile poterunt intelligi.
Eadem enim in omnibus eſt ratio.

PROPLEMA I.
PROPOSITIO I.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum conſtituere.

IN omni problemate duo potiſſimum ſunt conſideranda, conſtructio illius, quod proponitur, & demonſtratio, qua oſtenditur, conſtructionem recte eſſe inſtitutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet conſtituere triangulum æquilaterum ſuper data recta linea terminata quacunq; , ita vt linea recta propoſita ſit vnũ latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur conſtitui ſuper recta linea, quando ipſa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet conſtruere ex principiis conceſſis triangulum aliquod, deinde demonſtrare, ipſum ea ratione conſtructum, eſſe æquilaterum, hoc eſt, habere omnia tria latera inter ſe æqualia. Quod idem in aliis problematibus perſpici poteſt. Hæc etiam duo reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonſtretur id, quod proponitur, conſtruendum eſt, atque efficiendum prius aliquid, ceu manifeſtum erit in ſequentibus. Pauca vero admodum ſunt theoremata, quæ nullam requirant conſtructionem.

SIT igitur propoſita recta linea terminata A B, ſuper quam conſtituere iubemur triangulum æquilaterum.



a 3. pet. Centro A, & interuallo rectæ A B, *a* deſcribatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiuſdem rectæ B A, alius circulus deſcribatur C A D, ſecans priorem in punctis C, & D.
a 1. pet. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, *a* ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; Eritque ſuper rectam A B, conſtitutum triangulum A B C, hoc eſt, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita conſtructum neceſſario eſſe æquilaterum. Quoniam rectæ A B, AC, ducuntur ex centro A, ad circumferentiam circuli C B D, *b* erit recta A C, rectæ A B, æqualis:
b 15. def. Rurſus, quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur AC, quam BC, æqualis eſt rectæ A B. *c*
c 1. pron. Quare & A C, BC, inter ſe æquales erunt, atque idcirco triangulum ABC, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Vt autem videas, plures demonſtrationes in vna propoſitione contineri, placuit primam hanc propoſitionem reſoluere in prima ſua principia, initio facto ab vltimo ſyllogiſmo demonſtratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, conſtructum methodo prædicta, eſſe æquilaterum, vtetur hoc ſyllogiſmo demonſtrante.

d 23. def. *Omne triangulum habens tria latera æqualia,* [d] *eſt æquilaterum.*

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, eſt æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio ſyllogiſmo.

e 1. pron. *Quæ eidem æqualia ſunt,* [e] *inter ſe quoque ſunt æqualia.*

Duo latera A C, B C, æqualia ſunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter ſe æqualia ſunt. Ac propterea omnia tria latera A B, B C, AC, æqualia exiſtunt.

Minorem vero huius ſyllogiſmi hac ratione colliget:

f 15. def. *Lineæ rectæ à centro ductæ ad circumferentiam circuli,* [f] *inter ſe ſunt æquales.*

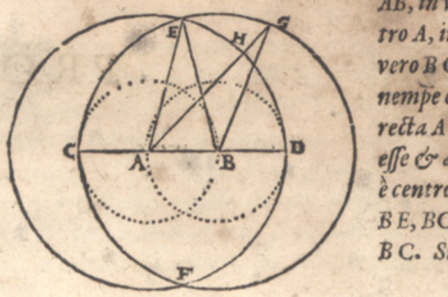
Lineæ A B, A C, ſunt ductæ à centro A, ad circumferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter ſe.

Eademque ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cum ducantur à centro B, ad circumferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis ſyllogiſmi tota confirmata erit.

Non aliter reſolui poterunt omnes aliæ propoſitiones, non ſolum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum. Negligunt tamen Mathematici reſolutionem iſtam in ſuis demonſtrationibus, eo quod breuius, ac facilius ſine ea demonſtrent id, quod proponitur, vt perſpicuum eſſe poteſt ex ſuperiori demonſtratione.

Si quis autem ſuper data recta deſideret conſtituere triangulum quoque Iſoſceles, & ſcalenum, id cum Proclo in hunc
a 2. petit. *modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, deſcribantur duo circuli, vti prius.* [a] *Deinde producatur*



b 3. pet. *A B, in vtramque partem ad circumferentias vſque ad puncta C, & D. Atq; centro A, interuallo vero A D,* [b] *deſcribatur circulus E D F. Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, ſecans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet,*
c 1. pet. *nempe ex E,* [c] *ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit ſuper*
d 20. def. *recta A B,* [d] *triangulum A B E; quod dico eſſe Iſoſceles, nimirum duo latera A E, B E, eſſe & æqualia inter ſe, & maiora latere A B. Cum enim rectæ A E, AD, ducantur*
e 15. def. *è centro A, ad circumferentiam E D F,* [e] *erit A E, æqualis rectæ A D. Item cum rectæ*
f 15. def. *B E, BC, ducantur è centro B, ad circumferentiam E C F,* [f] *erit B E, æqualis rectæ B C. Sunt autem rectæ A D, BC, æquales inter ſe, (vtraque enim A C, & B D, æqualis*

æqualis eſt recta A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad
circumferentiam quoque egrediantur. [g] *Quare AC, BD, æquales inter ſe erunt. Addito igitur communi recta A B,* [h] *erit to-* g *1. pron.*
ta A D, toti B C, æqualis.) [i] *Igitur A E, B E, æquales quoque inter ſe erunt. Quod vero vtraque A E, BE, maior ſit, quam A B,* h *2. pron.* i *1. pron.*
perſpicuum eſt, cum AD, æqualis oſtenſa ipſi A E, [a] *maior ſit, quam AB; Item BC, æqualis demonſtrata ipſi B E,* [b] *maior quoq;*
ſit, quam A B. Conſtitutum igitur eſt ſuper recta A B, Iſoſceles A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter ſe, & maiora a *9. pron.* b *9. pron.*
latere AB, quod faciendum erat. Atque hæc eſt demonſtratio Procli, aliorumque interpretum Euclidis.

Breuius tamen videtur mihi poſſe demonſtrari, triangulum A B E, eſſe Iſoſceles, hac ratione. [c] *Quoniam A E, æqualis* c *15. def.*
eſt rectæ AD, & recta AD, eſt dupla rectæ AB, propterea quod BA, BD, æquales inter ſe ſunt; erit & A E, dupla rectæ AB. Rur-
ſus [d] *quia BE, æqualis eſt rectæ BC, & BC, dupla eſt ipſius AB, propterea quod* [e] *A B, A C, æquales ſunt inter ſe, erit & BE, du-* d *15. def.*
pla ipſius AB. Cum igitur vtraque AE, BE, dupla ſit eiuſdem AB, erunt [f] *A E, BE, inter ſe æquales, maioresq; propterea recta* e *15. def.* f *6. pron.*
A B. Iſoſceles ergo eſt triangulum A B E.

Iam vero, ſi ex puncto A, [g] *ducatur linea recta AG, ad circumferentiam EGF, quæ non ſit eadem quæ A E, vel A D, ſecans* g *1. pet.*
circumferentiam E H D, in puncto H, & ex G, ad B, [h] *ducatur alia recta G B,* [i] *conſtitutum erit triangulum A B G, ſuper* h *1. pet.*
recta AB, quod dico eſſe ſcalenum. [k] *Quoniam AG, maior eſt, quam AH:* [l] *Sunt autem A H, A E, ex centro A, ductæ, inter ſe* i *20. def.*
æquales; erit & AG, maior quam A E, hoc eſt, quam BE, quæ oſtenſa eſt æqualis ipſi AE; igitur & maior erit A G, quam B G, k *9. pron.* l *15. def.*
[m] *cũ BG, ſit æqualis ipſi B E. Eſt autẽ & BG, maior quam AB, propterea quod tota BC, æqualis ipſi BG,* [n] *maior eſt, quam A B,* m *15. def.*
pars. Omnia ergo tria latera trianguli ABG, inæqualia ſunt, ideoq; ſcalenum eſt ex definitione; quod erat faciendum. n *9. pron.*

Breuius quoque oſtendemus, triangulum A G B, eſſe ſcalenum, hac ratione. Quoniam tam [o] *AH, AD, ex centro A, ductæ,* o *15. def.*
ſunt æquales, quam B G, B C, ex centro B, ductæ: Sunt autem AD, BC, ipſius AB, duplæ, quod AB, vtrique BD, AC, æqualis ſit;
erunt quoque AH, BG, ipſius AB, duplæ, ac propterea maiores, quam AB. Cum ergo [p] *AG, maior ſit, quam AH, ſiue quam BG,* p *9. pron.*
ſcalenum erit triangulum A G B, habens latus AG, maximum; BG, medium, & AB, minimum.

PRAXIS.

Conabimur in ſingulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & breuem, qua effici poßit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit conſtruere; Idque in ijs præſertim obſeruabimus, quæ frequentiorem vſum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod ſecum videtur afferre.

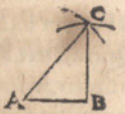


Itaque triangulum æquilaterum ita facile conſtruetur ſuper data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo ve[...] datæ rectæ A B, deſcribantur duo arcus circulorum ſe interſecantes in puncto C, ſiue hoc infra lineam contingat, ſiue ſupra. Poſt hæc ducantur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B; factumque erit, quod proponitur. Cuius rei eadem eſt demonſtratio cum ſuperiori, ſi modo circuli eſſent integri, ac perfecti. Tranſirent enim neceſſario per puncta A, & B.





Iſoſceles ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore, quam A B, ſi datam rectam eſſe velimus minus latus; vel minore, ſi eandẽ in latus maius eligamus, deſcribantur duo arcus ſecantes ſe in C. Poſtea ducantur rectæ A C, & B C; conſtructumque erit Iſoſceles: quoniam A C, B C, æquales erunt propter æquale interuallum aſſumptum, maius ſcilicet aut minus, quam recta A B.

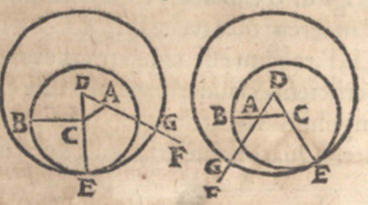


Scalenum denique hoc modo fabricabitur ſuper data recta A B. Ex centro B, interuallo vero maiore, quam B A, deſcribatur arcus aliquis. Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius aſſumptum, deſcribatur alter arcus priorem ſecans in C. Deinde ducantur rectæ A C, BC; conſtitutumque erit Scalenum, vt conſtat ex inæqualitate interuallorum, quæ aſſumpta fuerunt in conſtructione.

Cæterum, quo pacto triangulum conſtitui debeat, habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuſcunque, ſingula ſingulis, latius explicabimus propoſitione 22. huius libri.

PROBLEMA 2. PROPOSITIO 2. ij.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.



SIT punctum datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectam
æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ
B C, nempe C, centro *a* deſcribarur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et a *3. pet.*
ex A, ad centrum C, *b* recta ducatur A C; (niſi punctum A, intra rectam b *1. pet.*
B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta ſumetur A C, vt ſecunda figura
indicat.) Super recta vero A C, *c* conſtruatur triangulum æquilaterum c *1. primi.*
A C D, ſurſum, aut deorſum verſus, vt libuerit; cuius duo latera modo conſtituta D A, D C, verſus rectam
A C, *d* extendantur; DC, quidem oppoſitũ puncto dato A, vſque ad circumferentiam in E; D A, vero oppo- d *2. pet.*
ſitũ centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrum tranſeuntis,
e alter circulus deſcribatur E G, ſecans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ poſita eſt ad punctum datum e *3. pet.*
A, æqualem eſſe datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ ſunt ex centro D, ad circumferentiam E G, *f* ipſæ f *15. def.*
inter ſe æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, *g* remanebit g *3. pron.*
A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, *a* æqualis eſt recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadant ex centro a *15. def.*
C, ad circumferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidem vtraque æqualis eſt oſtenſa rectæ C E,
inter ſe *b* æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum. b *1. pron.*

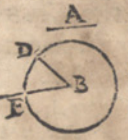
QVOD ſi punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale eſt C, facile abſoluetur problema. Si e-
nim centro C, & interuallo C B, *c* deſcribatur circulus, ad cuius circumferentiam recta *d* ducatur vtcunq; C E, c *3. petit.*
erit hæc poſita ad punctum datum C, *e* æqualis datæ rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E, ex eodem centro d *1. pet.*
egrediatur ad circumferentiam B E. e *15. def.*

SCHOLIVM.

HVIVS *problematis varij eſſe poſſunt caſus vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipſa data recta eſt poſitum, aut extra ipſam: Si in ipſa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumq; iacebit extremũ. Si vero extra ipſam, erit vel è directo datæ lineæ, ita vt producta in rectum, & continuum per ipſum punctum tranſeat, vel non è directo, ita vt ab ipſo ad datæ lineæ extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel ſupra datam lineam erit conſtitutum, vel infra, vt manifeſtum eſt. In omnibus autem iſtis caſibus ſemper eadem eſt conſtructio, & demonſtratio. Quod ſi in conſtructione fiat triangulum ACD, ſuper recta AC, Iſoſceles, eodem modo oſtendemus, rectam AG, rectæ BC, æqualem eſſe.*

PROBL. 3. PROPOS. 3.

iij. DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.



SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & BC, maior, oporteatque ex maiore BC, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris BC, nempe ad punctum B, *a* ponatur aliqua linea, quæ ſit BD, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem BD, circulus *b* deſcribatur ſecans BC, in E. Dico BE, detractam eſſe æqualem ipſi A. Quoniam BE, *c* æqualis eſt rectæ BD, & eidem BD, æqualis eſt recta A, per conſtructionem; *d* erunt A, & BE, inter ſe æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.

a 2. primi.
b 3. pet.
c 15. def.
d 1. pron.

QVOD ſi duæ rectæ datæ coiungantur in vno extremo, quales ſunt BD, & BC, coniunctæ in extremo vtriuſque B; deſcribendus erit circulus ex B, ad interuallum minoris BD. Hic enim auferet BE, æqualem ipſi BD, vt conſtat ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

VARIOS *etiam poſſe caſus eſſe in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter ſe diſtent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, ſed vel coniungantur ad vnum extremum, vel ſe mutuo ſecent, vel certe altera alteram ſuo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.*

THEOREMA 1. PROPOS. 4.

iiij. SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique, habeant vero & angulum angulo æqualem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſim baſi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

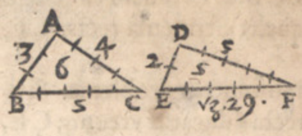


SINT duo triangula ABC, DEF, & vnius vtrumque latus AB, AC, æquale ſit alterius vtrique lateri DE, DF, hoc eſt, AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, anguluſque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico baſim BC, æqualem quoque eſſe baſi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id eſt, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter ſe; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter ſe quoque eſſe æquales. Quoniam enim recta AB, rectæ DE, ponitur æqualis, fit, vt ſi altera alteri ſuperponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, *a* ipſæ ſibi mutuo congruant, punctumque B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem ſegmentum commune, *b* quod eſt impoſſibile. Quòd ſi quis dicat, poſito puncto, A, in D, cadere quidem punctum B, in E, ſed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad ſiniſtram DE, claudent duæ rectæ lineæ ſuperficiem. *c* quod fieri non poteſt. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, vt dictum eſt. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, *d* congruet quoque alter alteri, hoc eſt, recta AC, rectæ DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Baſis igitur BC, baſi EF, congruet quoque: alias ſi ſupra caderet, aut infra, vt efficeretur recta EGF, vel EHF, clauderent duæ rectæ EF, EGF; vel EF, EHF, ſuperficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quàm EHF, rectam eſſe, cum vtraque ponatur eſſe eadem, quæ recta BC.) quod eſt abſurdum. Duæ enim rectæ ſuperficiem *e* claudere non poſſunt. Quocirca *f* baſis BC, baſi EF, æqualis erit, cum neutra alteram excedat, & triangulum ABC, triangulo DEF; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis ob eãdem cauſam, exiſtet. Quare ſi duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonſtrandum erat.

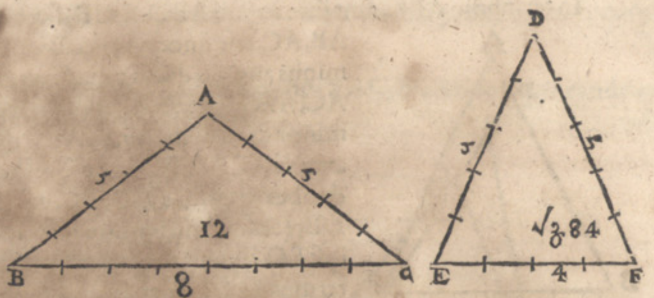
a 8. pron.
b 10. pron.
c 14. pron.
d 8. pron.
e 14. pron.
f 8. pron.

SCHOLIVM.

RECTE *Euclides duas conditiones poſuit in antecedente huius theorematis, quarum prima eſt, vt duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtriq;; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis ſit angulo alterius contento lateribus, quæ iſtis ſunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque baſes, neque reliqui anguli poterunt vnquam eſſe æquales, vt probe hoc loco à Proclo demonſtratur: Triangula vero ipſa licet poſſint eſſe æqualia, poſteriore duntaxat conditione deficiente, vt ex ſcholio propoſ. 37. huius lib. conſtabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum ABC, DEF, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, non quidem vtrumq; vtriq;, ſed illa ſimul ſumpta hiſce ſimul ſumptis, ſitq; AB, 3. AC, 4. vt ambo ſimul efficiant 7. At vero DE. ſit 2. & DF, 5. vt ambo quoq; ſimul 7. conſtituant. Quibus poſitis, erit baſis BC, 5. & baſis EF, radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem eſt quam 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli ABC erit 6. area vero trianguli DEF. 5. Anguli deniq; ſuper baſim BC, inæquales erunt angulis ſuper baſim EF. Quæ quidem omnia ita eſſe, hic oſtenderemus, niſi ad eorum demonſtrationem requirerentur multa, quæ nondum ſunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia eſſe, propterea, quod non vtrumq; latus vtriq; lateri æquale exiſtit in dictis triangulis ABC, DEF.*



RVRSVS triangulorum ABC, DEF, latera AB, AC, æqualia ſint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique, ſitque vnumquodque 5. anguli vero A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, ſitque A, maior quam D. Quibus conceſſis, erit baſis BC, maior baſe EF, vt propoſ. 24. huius libri oſtendetur. Quod ſi baſim BC, ponamus eſſe 8. baſim autem EF, 4. erit area triãguli ABC, 12. area vero trianguli DEF, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem eſt quam 9. minor vero, quam 10. id quod notiſſimum eſt Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & baſes, & anguli, nec non triangula ipſa æqualia inter ſe ſint, neceſſe eſt, vt vtrumq; latus vnius æquale ſit vtriq; lateri alterius, & anguli quoq; dictis lateribus contenti æquales exiſtant, vt optime dixit Euclides.



THEOR. 2. PROPOS. 5. v.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.



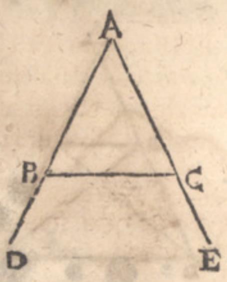
SIT triangulum Iſoſceles ABC, in quo latera AB, AC, inter ſe ſint æqualia. Dico angulos ABC, ACB, ſupra baſim BC, æquales inter ſe eſſe: Itẽ ſi latera æqualia AB, AC, producantur quantum libuerit, vſque ad puncta D, & E, angulos quoque DBC, ECB, infra baſim eãdem BC, eſſe æquales. Ex linea enim AE, producta infinite [a] abſcindatur AF, æqualis ipſi AD,[b] & ducantur rectæ BF, CD. Conſiderentur deinde duo triangula ABF, ACD. Quia ergo duo latera AB, AF, trianguli ABF, æqualia ſunt duobus laterib. AC, AD, trianguli ACD, vtrumque vtrique, nempe AB, ipſi AC, ex hypotheſi, & AF, & ipſi AD, ex conſtructione; angulusq; A, contentus lateribus AB, AF, æqualis eſt angulo A, contento lateribus AC, AD, immo angulus A, communis eſt vtriq; triangulo:[c] Erit baſis BF, æqualis baſi CD, & angulus F, angulo D, & angulus ABF, angulo ACD; cum & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet: Rurſus conſiderentur duo triangula BDC, CFB. Quoniam vero rectæ AD, AF, æquales ſunt, per conſtructionem, fit vt, ſi auferantur ex ipſis æquales AB, AC, [d] & reliquæ BD, & CF, ſint æquales. Quare duo latera BD, DC, trianguli BDC, æqualia ſunt duobus lateribus CF, FB, trianguli CFB, vtrumque vtrique, videlicet BD, ipſi CF, & DC, ipſi FB, vt probatum eſt: Sunt autem & anguli D, & F, cõtenti dictis lateribus æqualibus æquales, vt oſtenſum etiam fuit. Igitur erit angulus [e] DBC, angulo FCB, æqualis; & angulus BCD, angulo CBF. Tam enim priores duo, quam poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntque ſupra communem baſim BC, vtriuſque trianguli BDC, CFB. Quod ſi ex totis angulis æqualibus ABF, ACD, (quos æquales eſſe iam demonſtrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales CBF, BCD, (quos itidem in poſterioribus triangulis modo probauimus eſſe æquales) [f] remanebunt anguli ABC, ACB, ſupra baſim BC, æquales: Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos DBC, FCB, qui quidem ſunt infra eandem baſim BC, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & anguli infra eandem inter ſe ſunt ęquales; ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 3. primi.
b 1. peti.
c 4. primi.
d 3. pron.
e 4. primi.
f 3. pron.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio vera etiam eſt in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter ſe æqualia, licet eam Euclides ſolis Iſoſcelibus triangulis videatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus AB, AC, trianguli ABC, æqualibus; ſiue reliquum latus BC, ipſis quoq; ſit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, ſiue inæquale, vt in Iſoſcele accidit, neceſſario conſequitur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoque eſſe æquales, vt conſtat ex demonſtratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus ſubdifficile, & obſcuriuſculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum ſunt aſſueti. Verumtamen, ſi diligenter theorematis præcedentis vis ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, à quolibet percipietur, ſi modo memor ſit, illos angulos triangulorum probari æquales eſſe in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem, quoniam Campanus non appoſuit, cauſa fuit, vt confuſa eſſe videatur, & ſubobſcura eius demonſtratio.

VERITAS porro huius theorematis, quoad vtramq; partem, facile quoq; demonſtrari poteſt per ſuperpoſitionem, vt demonſtrata fuit propoſitio 4. Sint enim rurſus in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, quæ producantur quantumlibet vſq; ad D, & E. Dico tam angulos ABC, ACB, ſupra baſim BC, inter ſe æquales eſſe, quam angulos DBC, ECB, infra eandem baſim. Si enim concipiamus mente triangulum ABC triangulo ACB, (ita vt idem triangulum ſit inſtar duorum) ſuperponi, ita vt recta AB, rectæ AC, ſuperponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum AB, AC. Quo poſito, cadet recta AC, ſuper rectam AB, ob æqualitatem, ſiue identitatem anguli A; atque pũctum C, in punctũ D, incidet, propter æqualitatẽ laterũ AC, AB. Quapropter angulus ABC, angulo ACB, & angulus DBC, angulo ECB, [a] congruet, ac proinde tam illi, quam hi, inter ſe æquales erunt.



a 8. pron.

COROLLARIVM.

EX hac propoſitione quinta liquet, omne triangulum æquilaterũ eſſe æquiangulum quoque: Hoc eſt, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri eſſe inter ſe æquales. Sit enim triangulum æquilaterũ ABC. Quoniam igitur duo latera AB, AC, ſunt æqualia,[a] erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera AB, BC, ſunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erũt. Quod oſtendendum erat.

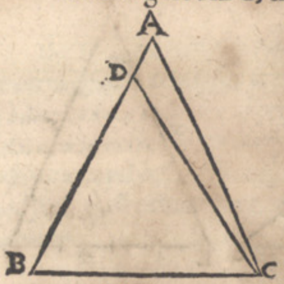
a 5. primi.



THEOR. 3. PROPOS. 6. vi.

SI trianguli duo anguli ęquales inter ſe fuerint: & ſub ęqualibus angulis ſubtenſa latera ęqualia inter ſe erunt.

In triangulo ABC, ſint duo anguli ABC, ACB, ſuper latus BC, æquales. Dico duo latera illis oppoſita AB, AC, eſſe quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, exiſtentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; ſit igitur AB, maius quã AC, ſi fieri poteſt: Et ex AB, [b] abſcindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, (quæ minor dicitur eſſe quam AB,) ducaturque recta CD. Conſiderentur iam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia ſint duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, vtrumque vtrique, nempe AC, ipſi DB, (abſcidimus enim ex AB, ipſi AC, conceſſu aduerſarij, æqualem DB,) & CB, ipſi BC, cum ſit vnum & idem; Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis lateribus æquales, per hypotheſin: [c] Erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum & pars, quod fieri non poteſt. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſuper latus BC, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe concedamus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli duo anguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

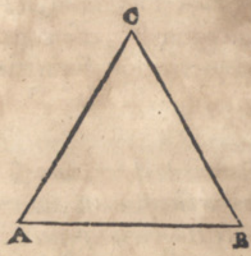


b 3. primi.
c 4. primi.

S C H O L I V M.

CONVERTIT *hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æqualia fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic vero, ſi anguli ad baſim ſint æquales, latera quoque angulis illis oppoſita eſſe æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, ſi Mathematici interdum conuertunt propoſitiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam conceſſo colligant per demonſtrationem conſequens aliquod. nunc vero rurſus ex conſequente hoc conceſſo inferant per aliam demonſtrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hiſce duabus proximis propoſitionibus factum eſſe conſpicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non ſemper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & conſequens. Nam in propoſitionibus neceſſariis, quales ſunt propoſitiones Geometricæ, poteſt interdum prædicatum eſſe vniuerſalius ſubiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propoſitio. Nam neceſſaria eſt hæc propoſitio; (Omnis homo eſt animal) non tamen conuerti poteſt vniuerſaliter, cum non omne animal ſit homo. Ita quoq; fieri poteſt in propoſitionibus Geometricis neceſſariis: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonſtrat Euclides propoſ. 16. huius lib. Si trianguli cuiuſuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem eſſe duobus internis ſibi oppoſitis; In qua quidem propoſitione nullo modo antecedens, & conſequens reciprocantur. Non enim ſequitur, ſi figuræ cuiuſuis rectilineæ vno latere producto, angulus externus maior ſit ſingulis internis oppoſitis, figuram illam eſſe triangulum, cum poſſit etiam eſſe quadrilatera figura, vt ad propoſ. 16. huius lib. oſtendemus. Eodemq; modo multæ a[illegible] propoſitiones conuerti nequeunt. Quam ob rem neceſſe eſt, vt prius demonſtret Geometra, propoſitionem aliquam conuerti, hoc eſt, antecedens, & conſequens illius reciprocari, antequam ex conſequente conceſſo colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propoſitiones quæ conuerti poſſunt, ſed eas duntaxat, quarum conuerſione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam videbuntur afferre vtilitatem.*

COROLLARIVM.



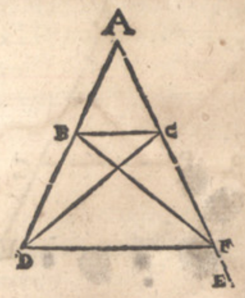
SEQVITVR ex hac propoſitione, omne triangulum æquiangulum, id eſt, cuius omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt corollarii quintæ propoſitionis, vt liquet. Sint enim trianguli ABC, tres anguli æquales. Dico ipſum eſſe æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, ſint æquales, [a] erunt latera AB, AC, æqualia. Rurſus cum duo anguli A, & B, ſint æquales, erunt quoque latera AC, BC, æqualia, & idcirco omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia. Quod oſtendendum erat.

a 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT *nobis etiam conuertere ſecundam partem quintæ propoſitionis, hoc modo.*

SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra baſim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter ſe erunt.



TRIANGVLI *enim ABC, productis lateribus AB, AC, ad D, & E, fiant anguli DBC, ECB, infra baſim BC, æquales. Dico latera AB, AC, eſſe quoque inter ſe æqualia. Ex CE, quantumlibet producta [b] abſcindatur CF, æqualis ipſi BD, & ducantur rectæ BF, FD, DC. Conſiderentur deinde triangula DBC, FCB. In quibus cũ latera DB, BC, æqualia ſint lateribus FC, CB, vtrumq; vtrique, nempe DB, ipſi FC, per conſtructionem, & BC, ipſi CB, quod ſit vnum & idem: ſint autem & anguli DBC, FCB, dictis lateribus contenti æquales, per hypotheſim: [c] erunt & baſes CD, BF, & anguli BCD, CBF, ſuper has baſes, cum opponantur æqualibus lateribus BD, CF, æquales. Ablatis igitur hiſce angulis æqualibus BCD, CBF, ex angulis FCB, DBC, per hypotheſin, æqualibus; [a] remanebunt anguli FCD, DBF, æquales. Conſiderentur rurſus triangula DBF, FCD. In quibus quoniam latera DB, BF, æqualia ſunt lateribus FC, CD, vtrumque vtrique, nempe DB, ipſi FC, per conſtructionem, & BF, ipſi CD, vt modo oſtenſum eſt; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus DBF, FCD, æquales, vt etiam fuit nuper demonſtratum: [b] erit angulus BDF, ſuper baſim DF, trianguli DBF, æqualis angulo CFD, ſuper eandem baſim FD, trianguli FCD. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, ſint æquales, vt nunc oſtendimus, [c] erunt latera AD, AF, æqualia. A quibus ſi rectæ BD, CF, per conſtructionem, æquales demantur, [d] remanebunt AB, AC, latera trianguli ABC, æqualia. Quod erat oſtendendum.*

b 3. primi.
c 4. primi.
a 3. pron.
b 4. primi.
c 6. primi.
d 3. pron.

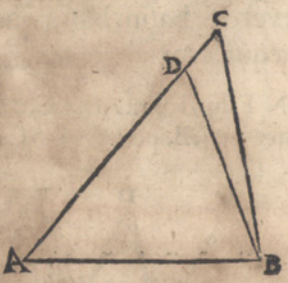
THEOR. 4. PROPOS. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales,

vtraque

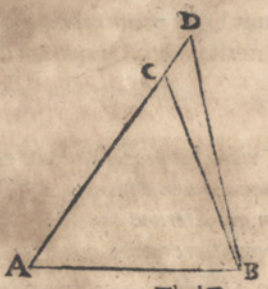
vtraque vtrique, non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum: ad eaſdem partes, eoſdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta AB, conſtituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ AC, BC. Dico ſuper eandem rectam AB, verſus partem eandem C, non poſſe ad aliud punctum, vt ad D, conſtitui duas alias rectas lineas, quæ ſint æquales lineis AC, BC, vtraque vtrique, nempe AC, ipſi AD, quæ eundem habent terminum A; & BC, ipſi BD, quæ eundem etiam terminum poſſident B. Sint enim, ſi fieri poteſt, rectæ AC, AD, inter ſe, & rectæ BC, BD, inter ſe etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum AC, BC, ita vt recta AD, in ipſam rectam AC, vel BD, in ipſam BC, cadat; aut intra triangulum ABC; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum AC, BC, nempe in AC, vt AD, ſit pars ipſius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis. Quod fieri non poteſt. Sit deinde punctum D, intra triangulum ABC; & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, vſque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, æqualia,[a] erunt anguli ACD, ADC, ſuper baſim CD, æquales;[b] Eſt autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDF, pars ipſius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rurſus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia,[c] erunt anguli CDF, DCE, ſub baſi CD, æquales. Oſtenſum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo ſit minor angulo DCE. Idem ergo Angulus CDF, & minor eſt angulo DCE, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Sit poſtremo punctum D, extra triangulum ABC. Aut igitut in tali erit loco, vt vna linea ſuper alteram cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C. ipſum D; ex quo rurſus colligetur pars æqualis toti, quod eſt abſurdum. Aut in tali erit loco, vt poſteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in poſteriori figura, ſi modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo poſito, in idem abſurdum incidemus, nempe angulum DCF, & minorem eſſe angulo CDE, & eidem æqualem, vt perſpicuum eſt. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum ABC, vt altera linearum poſteriorum, nempe AD, ſecet alteram priorum, vt ipſam BC. Ducta igitur recta CD, cum in triangulo ACD, latera AC, AD, ponantur æqualia,[d] erunt anguli ACD, ADC, ſupra baſim CD, æquales: Ac proinde[e] cum angulus ADC, minor ſit angulo BDC, pars toto, erit & angulus ACD, minor eodem angulo BDC. Quare multo minor erit angulus BCD, pars anguli ACD, angulo eodem BDC. Rurſus, cum in triangulo BDC, latera BC, BD, ponantur æqualia,[a] erunt anguli BCD, BDC, ſuper baſim CD, æquales: Eſt autem iam oſtenſum, angulum BCD, multo eſſe minorem angulo BDC. Idem igitur angulus BCD, & minor eſt angulo BDC, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe AC, AD, & inter ſe quoque BC, BD. Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

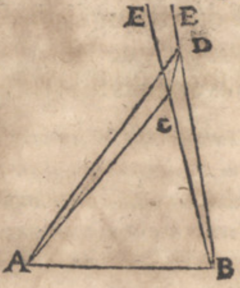




a 5. primi.
b 9. pron.



c 5. primi.

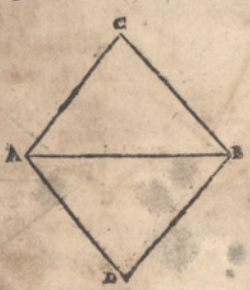


d 5. primi.
e 9. pron.
a 5. primi.



SHOLIVM.

FIERI poteſt, vt duæ lineæ AD, BD, æquales ſint duabus AC, BC, vtraque vtrique, vt AD, ipſi BC, & BD, ipſi AC, vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ ſunt æquales inter ſe, vt conſtat. Solæ enim AC, AD, eundem limitem poſſident A; Item BC, BD, eundem B; optimeque demonſtratum fuit ab Euclide, fieri non poſſe, vt AC, AD, inter ſe ſint æquales, ita vt BC, BD, quoq; inter ſe æquales exiſtant; Recte igitur in propoſitione appoſita ſunt hæc verba: eoſdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rurſus poſſunt eſſe duæ lineæ ſimul ſumptæ AD, BD, æquales duabus lineis AC, BC, ſimul ſumptis, vt in eadem figura perſpici poteſt: Sed hoc non oſtendit Euclides fieri non poſſe. Dixit enim non poſſe vtramq; vtriq; eſſe æqualem, &c.



Eadem ratione poſſunt ex A, & B, infra AB, baſim trianguli ABC, hoc eſt, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ AD, BD, conuenientes ad aliquod punctum, ita vt AD, exiens è puncto A, æqualis ſit ipſi AC; & BD, egrediens ex B, æqualis ipſi BC, vt perſpicuum eſt in appoſita figura. Non igitur ſine cauſa adiecit Euclides: ad eaſdem partes. Denique eſſe poterunt duæ lineæ AC, AD, æquales inter ſe eundem terminum A, poſſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ BC, BD, terminum habentes eundem B; inter ſe quoque ſint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide eſt demonſtratum. Appoſite igitur dictum eſt in propoſitione: duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane ſcopus Euclid: in hac propoſitione propoſitus intelligatur, diligenter ſingula verba propoſitionis ſunt ponderanda.



THE.

viij.

THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & baſim baſi æqualem: Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera AB, AC, trianguli ABC, duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqualia, vtrumq; vtrique, nempe AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; ſit autem & baſis BC, baſi EF, æqualis. Dico angulum A, æqualem



eſſe angulo D, quorum videlicet vterq; dictis lateribus continetur. Nam

a 8. pron. ſi mente intelligatur baſis BC, ſuperponi baſi EF, [a] neutra excedet alteram, ſed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ baſes ponantur æquales inter ſe. Deinde ſi triangulum ABC, cogitetur cadere ſuper triangulum DEF, cadet punctum A, aut in ipſum pun-

a 8. pron. ctum D, aut alio. Si punctum A, in ipſum punctum D, cadet, congruent ſibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea [a] angulus A, æqualis erit Angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod ſi punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocumque id contingat, hoc eſt, ſiue in latus ED, ſiue intra triangulum EDF, ſiue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo EG, (quæ eadem eſt, quę BA,) æqualis ipſi ED;

b 7. primi. & FG, (quæ eadem eſt, quæ CA,) æqualis ipſi FD, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non poſſe, iamdudum [b] demonſtratum eſt, cum tam rectæ EG, ED, terminum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, poſſideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare ſi duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

SHOLIVM.

VT vides, hæc propoſitio conuertit primam partem propoſitionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit baſium æqualitas; ita hic ex æqualitate baſium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Poſſumus eodem modo ex prima, & tertia pate concluſionis quartæ propoſitionis inferre totum antecedens eiuſdem, ita vt theorema proponatur in hanc formam.

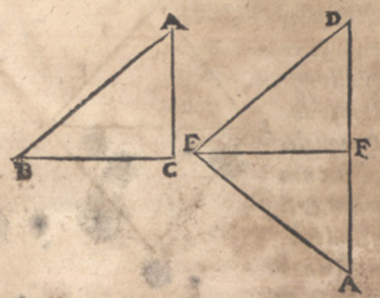
SI duo triangula baſes habuerint æquales, & angulos ſuper baſes conſtitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis ſubtenduntur, anguloſque reliquos hiſce lateribus incluſos æquales.

a 8. pron. *SIT enim baſis BC, æqualis baſi EF, & angulus B, angulo E, anguluſque C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale eſſe, angulumque A, angulo D. Nam ſi baſis baſi ſuperponatur, [a] congruent ſibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia ſibi congruent, proptereaque omnia inter ſeſe æqualia erunt. Verum hoc idem theorema à nobis propoſitum, quod quidem magis proprie conuertere videtur quartam propoſitionem, quam illud Euclidis, aliter demonſtrabit Euclides in prima parte propoſitionis 26. vt eo loco monebimus.*

COROLLARIVM.

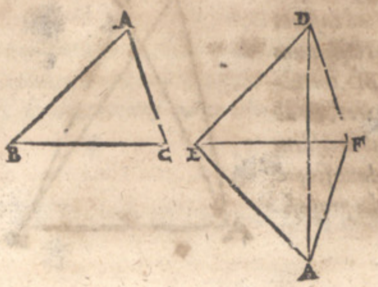
PORRO ex antecedente huius octauæ propoſitionis non ſolum colligi poteſt, angulos lateribus æqualibus contentos æquales eſſe, verum etiam reliquos angulos, qui ad baſes conſtituuntur, vtrumq; vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totum triangulum toti triangulo, vt conſtat ex eadem ſuperpoſitione vnius trianguli ſuper alterum. Nam ſibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perſpicuum eſt. Quod etiam ex quarta propoſ. colligi poterit, poſtquam demonſtratum fuerit, angulos æqualibus comprehenſos lateribus æquales eſſe. Inde enim fiet, cum latera quoque ſint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula eſſe æqualia, vt in propoſ. 4. demonſtratum eſt.

EX PROCLO.



PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum oſtendunt demonſtratione affirmatiua, hac ratione. Poſito enim eodem antecedente, ſuperponi intelligatur baſis BC, baſi EF, ita vt triangulum ABC, cadat in diuerſas partes, & non ſuper triangulum DEF, quale eſt triangulum AEF. Aut igitur duo latera, nempe DF, FA, conſtituunt vnam lineam rectam, quod quidem continget, ſi duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si conſtituant vnam lineam rectam, veluti DA, ita propoſitum concludetur. Quoniam in triangulo AED, duo latera AE,

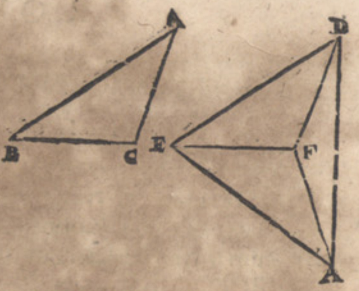
a 5. primi. *DE, ponuntur æqualia (eſt enim nunc AE, recta eadem, quæ AB, quæ per hypotheſin rectæ DE, æqualis eſt) [a] erunt anguli A, & D, ſuper baſin AD, æquales, quod erat oſtendendum. Si vero neque DF, FA, neque DE, EA, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta DA, quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primum intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, ſunt acuti. Quoniam igitur in tri-*



b 5. primi. *angulo AED, duo latera AE, DE, æqualia ponuntur, [b] erunt duo anguli EAD, EDA, æquales ad baſin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, æqualia ſint per hypotheſin, erunt duo anguli FAD, FDA, ſuper ba-*

c 2. pron. *ſin DA, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur, [c] fient toti anguli*

anguli EAF, EDF, æquales. Quod erat oſtendendum. Cadat deinde recta DA, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtuſi. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia,[d] *erunt anguli EAD, EDA, æquales ſuper baſin DA. Eademratione, cum duo latera AF, DF, in triangulo AFD, ſint per hypotheſin æqualia, erunt anguli FAD, FDA, ſuper baſin DA, æquales.* d 5.primi. *His ergo à prioribus ablatis,*[e] *remanebunt anguli EAF, EDF, æquales; Quod demonſtrandum proponebatur.* e 3.pron.



PROBL. 4. PROPOS. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam facere. ix.

SIT diuidendus rectilineus angulus BAC, bifariam, hoc eſt, in duos angulos æquales. In recta AB, ſumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD, *a* ſecetur ex AC, recta AE, æqualis, ducaturque recta DE. Deinde ſuper DE, *b* conſtituatur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, diuidens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter ſe eſſe æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia ſint lateribus EA, AF, trianguli EAF, vtrumq; vtrique, quod DA, ipſi EA, per conſtructionem, ſit æquale, & AF, commune; Sit autem & baſis DF, baſi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, conſtructum eſt æquilaterum: *c* Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, diuiſus bifariam, quod erat faciendum.

a 3.primi. b 1.primi. c 8.primi.



SCHOLIVM.

Quod ſi loco trianguli æquilateri conſtruamus triangulum Iſoſceles, nihilominus idem demonſtrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propoſitionibus, quæ ſequuntur, fieri poteſt.

PRAXIS.

DICTO *citius angulus quilibet rectilineus, vt BAC, bifariam ſecabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abſcindantur rectæ æquales AD, AE, cuiuſcunque magnitudinis. Et circino non variato (poſſ. tamen ipſum variare, ſi velles) ex centris D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta igitur ducta AF, ſecabit angulum BAC, bifariam. Si enim ducerentur rectæ DF, EF, eſſent hæ æquales, nempe ſemidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonſtrabitur, angulum DAF, æqualem eſſe angulo EAF. Non deſcripſimus autem dictas lineas, vt nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoq; praxibus, quoad eius fieri poterit, obſeruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatque confuſionem.*



QVOD *ſi quando angulus rectilineus breuiſſimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani poſitus diuidendus ſit bifariam, deſcribemus ex D, & E, duos arcus ſeſe mutuo interſecantes in F ſupra angulum A, quia infra puncta D, & E, ſpatium deeſt, in quo deſcribi poſſint. Recta enim ex F, per A, vſque ad B, eiecta ſecabit angulum A, bifariam, vt prius; vt in appoſita figura apparet.*



SCHOLIVM.

HINC *aperte colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi poſſe etiam in 4 angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, ſemper procedendo per augmentum duplex. Nam poſtquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuiſus, ſi horum vterque iterum bifariam ſecetur, habebimus 4. angulos æquales. Quod ſi ſinguli rurſus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & ſic deinceps; Non docuit autem Euclides vſquam quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales poſſit diuidi, quia id à nemine vſq; ad illum diem fuerat demonſtratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiuſdam lineæ curuæ, vel inflexæ, ad finem lib. 6. Interim vero, ſi quis angulum rectilineum quemcunq; propoſitum in quotuis partes æquales diuidere deſideret rudi, vt dicitur, Minerua, vti eum neceſſe erit circino, vt quaſi attentando, & ſæpius repetendo praxim ipſam, ad finem deſideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus BAC, diuidendus in 5 angulos æquales. Ex A, centro deſcribatur arcus circuli BC, ad quodcunq; interuallum, ſecans rectas AB, AC, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo reſtringendo, donec debitã habeant diſtantiã) diuidatur in tot partes æquales, in quot angulus propoſitus eſt diuidendus, vt in exemplo propoſito in quinque partes in punctis D, E, F, G. Si namq; ad hæc puncta ex A, rectæ ducantur lineæ, diuiſus erit angulus BAC, in quinq; æquales angulos. Cũ enim circino ſumpta ſint æqualia interualla BD, DE, &c. ſi ducantur rectæ BD, DE, &c. erunt hæ omnes inter ſe æquales. Quare erunt duo latera BA, AD, trianguli BAD,*[a] *æqualia duobus lateribus EA, AD, trianguli EAD, vtrumq; vtriq;, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam vſque.* a 15. defin. *Baſis autem BD, baſi quoq; DE, vt dictum fuit, æqualis eſt:*[b] *Angulus igitur BAD, angulo EAD, æqualis exiſtet; Eademq; ratione demonſtrabitur, angulum EAD, angulo EAF, æqualem eſſe, & ſic de cæteris.* b 8.primi. *Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, eſſe inter ſe æquales, ex 27. propoſ. tertij lib. propterea quod circumferentiæ BD, DE, &c. acceptæ ſunt omnes æquales inter ſeſe. Nemo vero miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonſtrationes ex ſequentibus propoſitionibus pendent. Hoc enim, vt ſupra ad defin. 10. diximus, eo conſilio facimus, vt quoad eius fieri poteſt, ſingula proprijs in locis tractentur, diuiſio nimirum anguli rectilinei cuiuſuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuiſionem eiuſdem anguli in duas partes æquales. Et diuiſio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de ſingulis. Neq; enim ad praxes huiuſmodi requiruntur ſemper ſequentes demõſtrationes, ſed ſolum, vt probetur recte eſſe per ipſas effectũ, quod imperabatur. Quãobrem is, qui non contentus nuda praxi demonſtrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, poſtquam demonſtrationes ad eam neceſſarias diligenter perceperit. Nam ſemper propoſitiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonſtrationibus noſtrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propoſitionem 27. tertij libri.*



PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 10.

x.

DATAM rectam lineam finitam bifariam ſecare.



a 1. primi. b 9. primi. c 4. primi.

Sit recta finita AB, diuidenda bifariam, id eſt in duas partes æquales.[a] Deſcribatur ſuper AB, triangulum æquilaterum ABC, cuius angulus C, per rectam CD, [b] diuidatur bifariam, rectaque CD, rectam AB, ſecet in D. Dico rectam AB, bifariam eſſe diuiſam in D. Quoniam duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia ſunt duobus lateribus BC, CD, trianguli BCD, vtrumque vtrique, nempe AC, ipſi BC, cum ſint ambo latera trianguli æquilateri, & CD, eſt commune; Eſt autem & angulus ACD, angulo BCD, æqualis, per conſtructionem: [c] Erit baſis AD, baſi BD, æqualis. Datam ergo rectam AB, bifariam ſecuimus in D, quod facere oportebat.

P R A X I S.



d 8. primi. a 4. primi.

EX centro A, ad quoduis interuallum, quod tamen dimidium lineæ AB, excedat, deſcribantur duo arcus, vnus ſuperne, alter inferne; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores ſecent in C, & D. Recta enim ducta CD, ſecabit rectam AB, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter ſe æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualiũ circulorum cadant; Nam arcus circulorum deſcripti ſunt eodem interuallo. Quoniam igitur latera AC, CD, æqualia ſunt lateribus BC, CD, vtrumque vtrique, & baſis AD, baſi BD, [d] erit angulus ACD, angulo BCD, æqualis. Rurſus quia latera AC, CE, æqualia ſunt lateribus BC, CE, vtrumque vtrique, & angulus ACE, angulo BCE, vt oſtenſum fuit;[a] erit baſis AE, baſi BE, æqualis.



IAM vero ſi linea bifariam diuidenda poſita ſit in extremo plani cuiuſpiam, ita vt infra ipſam locus non ſit, in quo commode duo arcus ſeſe interſecantes poßint deſcribi; deſcriptis ſupra eam duobus arcubus ſeſe interſecantibus in C, deſcribemus ad eaſdem partes alios duos arcus ſeſe interſecantes mutuo in D, ſiue hoc fiat infra punctum C, vt in appoſita figura, ſiue ſupra C. Nam recta per C, D, educta ſecabit rectam AB, bifariam in E.

S C H O L I V M.

PERSPICVVM eſt, eodẽ modo diuidi poſſe eandem lineam rectam AB, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. ſicuti in propoſitione præcedenti diximus de diuiſioue anguli rectilinei. Qua vero ratione quæuis recta linea propoſita diuidenda ſit in quotcunque partes æquales, vberrime tademus ad propoſ. 40. huius lib. Idemque longe facilius poſtea efficiemus ad propoſ. 10. lib. 6. vbi varias, & non iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur eſſe proprius huic rei locus, cum huiuſmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demonſtrentur. Neque vero vnquam diuiſione lineæ in plures, quam in duas partes æquales, ad eum locum vſque indigebimus.

PROBL. 6. PROPOS. 11.

xj.

DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.



a 3. primi. b 1. primi. c 8. primi. d 10. defin.

RECTA linea data ſit AB; & in ea punctum C, à quo iubemur erigere ſuper AB, lineam ad Angulos rectos, ſeu perpendicularem. A puncto C, ſumatur recta CD,[a] cui æqualis auferatur CE. Deinde ſuper DE, [b] conſtituatur triangulum æquilaterum DEF, atq; ex F, ad C, ducatur recta FC, quam dico eſſe perpendicularem ad AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF, æqualia ſunt lateribus EC, CF, trianguli ECF, vtrumque vtrique, nempe DC, ipſi EC, per conſtructionem, & CF, commune; Eſt vero & baſis DF, baſi EF, æqualis, ob triangulum æquilaterum: [c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. [d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeo FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

P R A X I S.

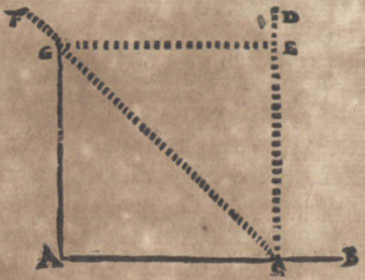


EX puncto C, abſcindantur vtrinque lineæ æquales CD, CE, & ex D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta namque ducta FC, erit perpendicularis. Demonſtratio eadem eſt, quæ Euclidis, ſi modo ducantur rectæ DF, EF, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, deſcriptos, qui ſe interſecant in puncto F. Quod ſi punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur ſecundum praxim datam linea perpendicularis. Vt ſi linea data fuerit AC, & punctum datum C, extremum; protrahenda erit AC, in B, & ſumendæ æquales CD, CE, &c. Si vero ad aliquam lineam conſtituenda ſit linea perpendicularis, non quidem in puncto aßignato, ſed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & E, quibuſcunque lineæ propoſitæ deſcribantur tam ſuperne, quam inferne duo arcus ſeſe interſecantes in C, & D. Nam recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc eſt, faciet duos angulos ad E, rectos, ſeu æquales. Quod non aliter probabis, quam ſupra praxim, qua lineam in duas æquales diuiſimus partes, demonſtrauimus. Nam per 4. propoſ. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui ſuper æquales baſes AE, BE, conſiſtant, opponanturque æqualibus lateribus AC, BC, quæ ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.



EX PROCLO.

SI punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta AB, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis CD, vt docuit Euclides; & [a] abſcindatur CE, æqualis ipſi AC: Deinde [b] diuidatur angulus C, bifariam, ducta recta CF: Et ex E, rurſus, vt docuit Euclides, educatur EG, perpendicularis ad CD, ſecans rectam CF, in G. Ducta enim recta GA, perpendicularis erit ad AB. Quoniam cum latera AC, CG, trianguli ACG, æqualia ſint lateribus EC, CG, trianguli ECG, vtrumq; vtrique, & anguli hiſce lateribus contenti æquales quoque, per conſtructionem: [c] Erunt anguli A, & E, oppoſiti communi lateri CG, æquales; Sed E, eſt rectus per conſtructionem; igitur & A, rectus erit, [d] ideoq; AC, ad AB, perpendicularis.



a 3. primi.
b 9 primi.
c 4. primi.
d 10. defin.

SCHOLIVM.

BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, ſiue extremum illud ſit, ſiue non, hoc modo. Sit data linea AB, punctumq; in ea A. Ex centro C, extra lineam aſſumpto, vbi libuerit, (dummodo recta AB, producta cum ipſo non conueniat) interuallo vero accepto vſq; ad A, deſcribatur arcus circuli ſecans AB, in D. Et ex D, per C, recta ducatur ſecans arcum in E Recta enim ducta EA, erit perpendicularis ad AB. Nam angulus A, eſt rectus, cum ſit in ſemicirculo DAE, vt oſtendemus propoſitione 31. lib. 3.



ALIAM praxim, quando punctum datum eſt in extremo lineæ, inuenies in ſcholio propoſ. 31. huius lib.

PROBL. 7. PROPOS. 12. xij.

SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere.

SIT recta AB, interminatæ quantitatis, & extra ipſam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectã AB. Centro C, interuallo vero quolibet circulus deſcribatur ſecans AB, in D, & E, (quoniam interuallum aſſumptum tantum eſſe debet, vt tranſcendat rectam AB; alias eam non ſecaret.) *a* Diuiſa autem recta DE, bifariam in F, ducatur recta CF, quam dico perpendicularem eſſe ad AB. Si enim ducantur CD, CE, erunt duo latera DF, FC, trianguli DFC, æqualia duobus lateribus EF, FC, trianguli EFC, vtrumq; vtrique, per conſtructionem; eſt autem & baſis CD, baſi CE, æqualis, cum hæ ſint ex centro C, ad circumferentiam. Quare *b* erit angulus DFC, angulo EFC, æqualis, & propterea vterque rectus: Ducta eſt igitur CF, perpendicularis, quod faciendum erat.



a 10. primi.
b 8. primi.

SCHOLIVM.

PROBE appoſuit Euclides hanc particulam: infinitam. *Si enim linea eſſet finita, non poſſet ſemper à puncto dato extra ipſam perpendicularis ad eam deduci. Vt ſi linea finita eſſet BE, & punctum C, non poſſet ex C, deſcribi circulus ſecans BE, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendicularis duci ad BE. Hac igitur de cauſa vult Euclides, rectam datam eſſe infinitam hoc eſt, non habere magnitudinem determinatam, vt ſaltem ad ipſam productam perpendicularis poſſit deduci. Ita enim fiet hic, ſi BE, producatur, donec circulus ex C, deſcriptus, ſecet totam BA, productam in D, & E, &c.*

PRAXIS.

CENTRO facto C, & interuallo quouis, eodem, deſcribantur duo arcus ſecantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodemque interuallo, vel alio, ſi placuerit, alij duo arcus deſcribantur ſecantes ſe in D. Nam ducta recta CD, ſecans AB, in E, erit perpendicularis ad AB. Demonſtratio huius operationis non differt à demonſtratione tradita in praxi propoſitionis 10. Nam anguli ad E, erunt recti, [a] nempe inter ſe æquales.



a 4. primi.

IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo quolibet vſque ad C, aſſumpto, arcus circuli deſcribatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interualloq; vſque ad idem C, alius arcus deſcribatur priorem ſecans in C, & D; Eritque ducta recta CD, ſecans AB, in E, perpendicularis ad AB. Demonſtratio eadem eſt, quæ prior. Non eſt autem neceſſe, vt interuallum BC, æquale ſit interuallo AC, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio, ſi idem ſemper interuallum accipiatur.

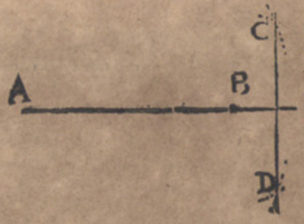


QVOD ſi punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ AB, ita agendum erit. Centro C, ad quoduis interuallum ſecetur recta AB, in duobus punctis A, B, ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quam AC, vel BC, bini arcus tam ſupra, quam infra deſcribantur, ſe interſecantes in D, E. Nam ducta recta DCF, quæ producta neceſſario per punctum E, tranſibit, perpendicularis erit ad rectam AB, in F. Quod ita demonſtrabimus, ductis rectis AD, BD, AC, BC. Quoniam duo latera DA, DC, trianguli ACD, duobus lateribus DB, DC, trianguli BCD, æqualia ſunt, nec non & baſes AC, BC, æquales ſunt, [a] erunt anguli ad D, æquales. Quare cum duo latera DA, DF, trianguli ADF, duobus lateribus DB, DF, trianguli DBF, æqualia ſint, contineantque angulos ad D, æquales, vt oſtendimus; [b] erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c.

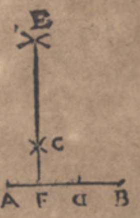




a 8. primi.
b 4. primi.

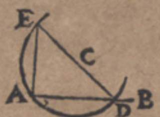


IAM vero ſi punctum datum ſit iuxta extremum plani cuiuſpiam, ita vt linea data non poßit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quaſi eſſe poſitum, hoc eſt, fere in extremitate lineæ datæ AB, deſcribantur duo arcus ſupra, & infra lineam AB, ad interuallum BC. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B (Quo autem magis diſtabunt inter ſe puncta A, & B, eo commodius puncta interſectionum arcuum cognoſcentur) alij duo arcus ad interuallum AC, deſcribantur, ſecantes priores in C, & D. Nam recta CD, perpendicularis erit ad datam rectam AB.



SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea eſt, dato, linea ſit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commode ſe interſecare non poßint, ſiue punctum datum C, ſit propinquum lineæ AB, ſiue non, abſoluemus problema hoc modo. Ad interuallum AC, vbicumque punctum A, ſumatur, deſcribatur ex C, arcus ſecans rectam AB, in D; atque ex A, D, duo arcus deſcribantur verſus punctum C, ſeſe interſecantes in E. Recta namque ex E, per C, ducta ſecans AB, in F, perpendicularis erit ad AB, vt ſupra demonſtratum eſt, quando punctum C, erat prope lineam AB.

QVO vero modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum eſt iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commode ſe interſecare poßint in D, infra datam rectam AB, docebimus in ſcholio propoſitionis 31. huius lib.



VERVM hoc etiam efficiemus hoc modo In figura ſcholij propoſ. 11. ſit ad rectam AB, ex puncto E, deducenda perpendicularis ad extremum quodammodo lineæ. Ducta vtcunque recta ED,
a 11. prim. *[a] ſecetur bifariam in C; & centro C, per E, arcus circuli deſcribatur ſecans rectam datam in A. Quòd ſi non ſecet, producenda erit, donec ab arcu ſecetur. Recta enim EA, erit ad AB, perpendicu-*
b 31. tertij. *laris; [b] cum angulus A, ſit in ſemicirculo rectus.*

xiij.

THEOR. 6. PROPOS. 13.

CVM recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit, Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea AB, conſiſtens ſuper rectam CD, faciat duos angulos ABC, ABD. Si igi-
c 10. defin. tur AB, fuerit perpendicularis ad CD, *c* erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtuſum, alterum vero acutum. Dico igitur ipſos
d 11. primi duobus eſſe rectis æquales. *d* Educatur enim BE, ex B, perpendicularis ad CD, vt ſint duo anguli EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD, *e* æqualis eſt duobus angulis DBA, ABE;
e 19. pron.
f 2. pron. *f* erunt, appoſito communi angulo recto EBC, duo recti EBD, EBC, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æqua-
g 19. pron. les. Rurſus quia *g* angulus ABC, duobus angulis ABE, EBC, æqualis eſt; *a* erunt, appoſito communi angulo
a 2. pron. ABD, duo anguli ABC, ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Sed eiſdem his tribus oſtendimus, æ-
b 1. pron. quales etiam eſſe duos rectos EBD, EBC; quæ autem eidem æqualia, *b* inter ſe ſunt æqualia. Duo igitur anguli ABC. ABD, æquales ſunt duobus rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea ſupra rectam conſiſtens lineam, &c. Quod oſtendere oportebat.

SCHOLIVM.

VIDETVR hæc propoſitio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus ABC, ſuperat rectum angulum EBC, eo reliquus angulus ABD, ſuperatur ab angulo recto EBD. Nam ſicut ibi exceſſus eſt angulus ABE, ita hic defectus eſt idem angulus ABE. Quocirca anguli ABC, ABD, duobus rectis æquales eſſe conuincuntur: ſiquidem tantum vnus eorum ſupra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

xiv.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.



Ad punctum C, lineæ rectæ AB, in diuerſas partes eductæ ſint duæ rectæ CD, CE, facientes cum AB, duos angulos ACD, ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipſas CD, CE, inter ſe eſſe conſtitutas in directum, ita vt DCE, ſit vna linea recta. Si enim non eſt recta DCE;
a 13. primi. producta DC, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut ſupra CE, vt ſit recta DCF, aut infra CE, vt ſit recta DCG. Si cadit ſupra, cum AC, cōſiſtat ſuper rectam DCF, *a* fient duo
b 12. pron. anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis;
c 3. pron. *b* & omnes recti ſunt inter ſe æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt ęquales, Ablato igitur communi angulo ACD, *c* remanebunt anguli ACF, ACE, inter ſe æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non igitur recta DC, producta cadet ſupra CE; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; propertereaque, ſi ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

EST hæc propoſitio præcedentis conuerſa. In ea enim probatum fuit, ſi DCE, ſit recta, angulos ACD, ACE, duobus eſſe rectis æquales. In hac vero demonſtratum eſt, ſi dicti anguli ſint duobus rectis æquales, rectas DC, EC, eſſe vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propoſitione hac (& non ad eaſdem partes.) Quoniam, vt ait Porphyrius, fieri poteſt, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad eaſdem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non conſtituant vnam lineam, eo quod non ad diuerſas ſint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea AB, datum. Ducatur CD,[d] perpendicularis ad AB,[e] diuidaturque rectus angulus ACD, bifariam per rectam CE. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ CD,[f] ducatur DE, perpendicularis ad CD, ſecans rectam CE, in E. Producta autem ED, ad partes D,[g] ſumatur DF, æqualis rectæ DE, & ducatur recta FC. Quoniam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia ſunt lateribus FD, DC, trianguli FDC, vtrumq; vtrique, & anguli D, ipſis cõtenti æquales, nempe recti;[a] erit baſis EC, baſi CF, æqualis, & angulus ECD, angulo FCD. Sed angulus ECD, dimidium eſt recti. (Eſt enim rectus ACD, diuiſus bifariam.) Igitur & FCD, dimidium erit recti. Quare CF, cum AC facit angulum ACF, conſtantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem CE, cum eadem AC, angulum ACE, dimidium etiam recti. Duo igitur anguli ACF, ACE, quos ad eaſdem partes faciunt rectæ CF, CE, cum AB; æquales ſunt duobus rectis: Et tamen CF, CE, non ſunt vna linea recta, propterea quod non ſunt ductæ ad diuerſas partes, ſed ad eaſdem.



d 11. primi.
e 11. primi.
f 11. primi.
g 3. primi.
a 4. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 15. XV.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

SECENT ſe duæ rectæ AB, CD, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter ſe eſſe æquales, angulum videlicet AED, angulo BEC, & angulum AEC, angulo BED. Quoniam recta DE, conſiſtit ſuper rectam AB, *b* erũt duo anguli AED, DEB, æquales duobus rectis. Rurſus quia recta BE, ſuper rectam CD, conſiſtit, erunt eadem ratione duo anguli CEB, BED, duobus rectis æquales. Cum igitur *c* omnes recti anguli inter ſe ſint æquales; erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis DEB, BEC, æquales. Dempto igitur communi angulo DEB, *d* remanebit angulus AED, angulo BEC, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos AEC, BED, inter ſe æquales eſſe. Nam duo anguli AEC, CEB, *e* qui duobus ſunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angulis DEB, BEC, qui duobus rectis ſunt æquales. Ablato igitur angulo communi BEC, *f* remanebunt anguli AEC, BED, æquales inter ſe. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, &c. Quod oſtendere oportebat.



b 13 primi.
c 12. pron.
d 3. pron.
e 13. primi.
f 3. pron.

COROLLARIVM I.

EVCLIDES colligit ex demonſtratione huius theorematis, (ex ſententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas ſe mutuo ſecantes, efficere ad punctum ſectionis quatuor angulos, quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonſtratione oſtenſum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus eſſe rectis æquales, per 13. propoſ. Omnes igitur quatuor anguli ad E, conſtituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales exiſtunt.

COROLLARIVM II.

EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum conſtitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales eſſe. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur ſolummodo illi quatuor anguli ad E, conſtituti, in plurimas partes, *a* quæ omnes ſimul ſumptæ totis ſuis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales ſint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij ſimul ſumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perſpicuum eſt, omne ſpatium punctum aliquod in plano circumſtans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores aſſerunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum conſtitui poſſunt, quatuor ſunt rectis angulis æquales. Simili modo conſtat, quotlibet lineas rectas ſe inuicem ſecantes, facere ad punctum ſectionis angulos æquales quatuor rectis.

a 19. pron.

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiuſque ſignum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipſæ rectę lineæ in directum ſibi inuicem erunt.

EX puncto C, rectæ AB, in diuerſas partes egrediantur duæ rectæ CD, CE, facientes angulos ACE, BCD, inter ſe æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE, æqualis eſt angulo BCD; addito communi angulo BCE,[b] erunt duo anguli ACE, ECB, duobus angulis DCB, BCE, æquales: Sed[c] anguli ACE, ECB, ſunt æquales duobus rectis. Igitur & duo DCB, BCE, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem CD, CE,[a] erunt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuerſum eſt propoſitionis decimæquintæ.



b 2. pron
c 13. primi.
a 14. primi.

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppoſitos inter ſe æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduerſæ in rectum ſibi, & continuum coniunctæ.

EX puncto A, quatuor lineæ eductæ AB, AC, AD, AE, faciant duos angulos oppoſitos BAE, CAD, inter ſe æquales: Item duos BAC, DAE, inter ſe æquales. Dico tam BA, AD, facere vnam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam æquales ſunt anguli BAE, CAD, ſi æquales illis addantur anguli BAC, DAE,[b] erunt duo anguli BAE, BAC, æquales duobus angulis CAD, DAE. Tam ergo illi, quam hi, dimidium ſunt quatuor angulorum circa punctum A, conſiſtentium: At hi quatuor æquales ſunt quatuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propoſ. Igitur duo anguli BAE, BAC, æquales ſunt duobus rectis;[c] atque adeo CA, AE, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto oſtendetur, duas BA, AD, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis DAC, CAB. Quare, vt prius, concludetur propoſitum. Peletarius autem demonſtrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonſtrationem noſtram oſtenſiuam eius demonſtrationi iure optimo præpoſuimus.



b 2. pron
c 14. primi.

 THEO-

xvj. THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & oppoſito, maior eſt.

TRIANGVLI ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem eſſe in-
a 10.primi. terno, & oppoſito ACB, itemque maiorem interno, & oppoſito ABC. Diuidatur *a* enim AC, bifariam in E; &
b 3.primi. ex B, per E, extendatur recta BEF, ita vt EF, *b* abſciſſa ſit æqualis rectę EB; ducaturque recta FA. Quoniam igi-
tur latera CE, EB, trianguli CEB, æqualia ſunt lateribus AE, EF, trianguli AEF, vtrumque vtrique, per con-
c 15.primi. ſtructionem; Sunt autem & Anguli ad E, dictis lateribus comprehenſi, *c* inter ſe æquales, cum ſint circa verti-
d 4.primi. cem E, & oppoſiti: Erit *d* baſis CB, æqualis baſi AF, & angulus ECB, angulo EAF; Eſt



autem angulus DAC, externus maior angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno, & oppoſito angulo ACB. Quod ſi latus CA, producatur ad G; & AB, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta CHI, vt HI, æqualis ſit rectæ HC, & ducatur recta IA; demonſtrabitur eadem prorſus ratione, angu-
e 15.primi. lum externum GAB, maiorem eſſe interno angulo, & oppoſito ABC; Eſt autem *e* angulus DAC, angulo GAB, æqualis, cum lineæ BD, CG, ſe mutuo ſecent in A. Igitur & angulus DAC, maior erit interno & oppoſito angulo ABC. Eſt autem idem angulus DAC, maior quoque oſtenſus angulo interno & oppoſito ACB. Cuiuſcunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonſtrandum erat.

S C H O L I V M.

NON dixit Euclides, angulum externum DAC, maiorem eſſe angulo BAC, interno, qui ſibi eſt deinceps: ſed ſolum magnitudine ſuperare vtrumlibet ACB, ABC, internorum, ſibique oppoſitorum: quoniam externus angulus æqualis poteſt eſſe angulo interno ſibi deinceps, quando ſcilicet externus rectus eſt. Tunc enim neceſſario is, qui ſibi eſt deinceps, rectus quoque erit: Poteſt & eſſe minor, quando nimirum eſt acutus. Hoc enim poſito, angulus illi deinceps obtuſus erit. Solum ergo, quando obtuſus erit externus, ſuperabit internum ſibi deinceps; Hic enim neceſſario acutus exiſtet. Quæ omnia facile colliguntur ex propoſ. 13. per quam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales ſunt duobus rectis.

ID vero, quod in ſcholio propoſ. 6. huius libri nos demonſtraturos recepimus, nimirum hanc propoſ. non poſſe conuerti; cum & vno latere figuræ quadrilateræ producto, externus angulus quolibet interno, & oppoſito poſſit eſſe maior; hac ratione abſoluemus.

SIT figura quadrilatera ABCD, cuius angulus BAD, obtuſus, & ABC, rectus conſtituatur, hac tamen lege, vt rectæ AB, DC, productæ ad partes B, & C, in puncto E, necnon & rectæ DA, CB, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Quod quidem fiet, ſi conſtituatur triangulum ADE, obtuſangulum, & producta DA, verſus A, ducatur ex quouis puncto F, ad AE, perpendicularis FB, ſecans latus DE, in C. Dico, ſi AD producatur ad G, angulum externum CDG, maiorem eſſe quolibet trium internorum BAD, ABC, BCD, ſibi oppoſitorum.



a 16.primi. *Cum enim ADE, triangulum ſit,[a] erit angulus externus EDG, maior interno oppoſito DAE. Rurſus cum DAB, obtuſus maior*
b 16.primi. *ſit recto ABC, maior quoque multo erit EDG, ipſo ABC. Poſtremo quia & in triangulo CDF,[b] angulus externus CDG, maior eſt interno, & oppoſito FCD; manifeſtum eſt, in quadrilatero ABCD, externum angulum CDG, maiorem eſſe internis, & oppoſitis BAD, ABC, BCD. Quamobrem propoſitio hæc 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & conſequens non reciprocentur, vt demonſtratum eſt.*

E X P R O C L O.



SEQVITVR ex hac propoſitione, ab eodem puncto ad vnam eandemque lineam rectam non poſſe duci plures lineas rectas, quam duas inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineæ rectæ æquales AB, AC, AD. Quoniam igitur latera AB, AC,
a 5.primi. *ſunt æqualia,[a] erunt anguli ACB, & ABC, æquales ſuper baſim BC. Rurſus quia latera*
b 5.primi. *AB, AD, ſunt æqualia,[b] erunt anguli ADB, & ABD, ſuper baſim BD, æquales. Quare cum vterque angulus ACD, & ADB, æqualis ſit angulo ABC,[c] erit angulus ADB, æqualis*
c 1.pron. *angulo ACD, externus interno oppoſito, quod eſt abſurdum, cum per hanc 16. propoſ. externus interno maior ſit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter ſe æquales, ex A, ad BC poſſunt duci. Quod eſt propoſitum.*

xvij. PROBL. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.



SIT triangulum ABC; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores eſſe duobus rectis; Item duos CBA, & CAB; Itemque duos BAC, & BCA. Producantur enim duo quæuis la-
d 16.primi. tera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur *d* angulus ABD, externus maior eſt in-
e 4. pron. terno & oppoſito angulo ACB; ſi addatur communis angulus ABC, *e* erunt duo anguli
f 13. primi. ABD, ABC, maiores duobus angulis ABC, ACB: *f* Sed ABD, ABC, æquales ſunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores ſunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli
g 16.primi. CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, *g* maior ſit an-
h 4. pron. gulo CAB, interno, & oppoſito; *h* erunt, appoſito communi angulo ABC, duo anguli
i 13.primi. ABD, ABC, maiores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo *i* duo illi duobus rectis ſint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non ſecus oſtendemus, duos BAC,
m 16.prim. BCA, duobus eſſe rectis minores. Cum enim angulus externus BAE, *m* maior ſit interno & oppoſito angulo
n 4. pron. BCA; ſi apponatur communis angulus BAC, *n* erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, ma-
o 13.primi. iores: ac proinde cum illi duo *o* ſint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuſcunque igitur trianguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

EX PROCLO.

HINC perſpicuum eſt, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quam vnam. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad rectam BC, duæ perpendiculares AB, AC. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum ſint duo recti, quod eſt abſurdum. a Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque oſtenſi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam vna, ex A, ad BC, deduci poſſunt. Quod eſt propoſitum.



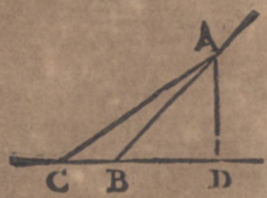
a 17. primi.

COROLLARIVM I.

Conſtat etiam ex his, in omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propoſ. duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, ſi vnus fuerit rectus, vel obtuſus, quemcunque reliquorum eſſe acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores eſſe fateamur.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex hac propoſ. ſi linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutũ, & obtuſum alterum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demiſſam cadere ad partes acuti anguli: Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtuſum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam ſi non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat ſi fieri poteſt, ad partes anguli obtuſi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtuſus & rectus, in triangulo ABC, maiores ſunt duobus rectis; b ſed & duobus rectis ſunt minores, quod eſt abſurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtuſi. Quare ad partes acuti anguli cadet.



b 17. primi.

COROLLARIVM III.

PARI ratione fit ex hac propoſ. manifeſtum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Iſoſcelis ſupra baſin, eſſe acutos. Nam c cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Iſoſcele ſupra baſin ſint inter ſe æquales; d ſintque ſimul tam illi duo, quam hi duobus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc eſt, acutus. Si enim rectus foret, aut obtuſus, eſſent ambo vel duobus rectis æquales, aut maior.

c 5. primi.
d 17. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 18. xviij.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

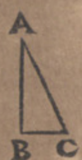
IN triangulo ABC, ſit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, ſubtenſum à maiori latere AC, maiorem eſſe angulo ACB, qui à minori latere AB, ſubtenditur. Nam ex AC, a auferatur AD, æqualis ipſi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia ſunt per conſtructionem, b erunt anguli ABD, ADB, æquales: Eſt autem c angulus ADB, maior angulo ACB. Igitur & angulus ABD, maior erit angulo ACB. Quamobrem cum d angulus totus ABC, maior adhuc ſit angulo ABD; erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione, ſi latus AC, maius ponatur latere BC, oſtendes angulum ABC, maiorem eſſe angulo BAC; ſi nimirum ex CA, abſcindatur linea æqualis ipſi CB, &c. Quare c   is trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. Quod demonſtrandum erat.



a 3. primi.
b 5. primi.
c 16. primi.
d 9. pron.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni eſſe inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiuſdem omnes angulos inæquales eſſe. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit per hanc propoſ. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter vtrumq; tenens.



THEOR. 12. PROPOS. 19. xix.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

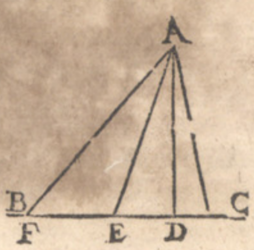
IN triangulo ABC, angulus B, maio ſit angulo C. Dico latus AC, ſubtendens maiorem angulum B, maius eſſe latere AB, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus AC, maius non eſt latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale eſſe ipſi AB, a erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si vero AC, minus eſſe dicatur latere AB, erit angulus B, ſubtenſus à minori latere AC, minor angulo C, ſubtenſo à maiore latere AB; Ponitur autem maior, quod magis eſt abſurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale ſit lateri AB, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus AC, maius eſſe latere BC, ſi angulus B, maior eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur; Quod demonſtrandum proponebatur.



a 5. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propoſ. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunq; ductarum, eam, quæ perpendicularis eſt, eſſe minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarũ AD, ſola ſit perpendicularis ad BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam ſola vna perpendicularis duci poſſit, vt ex Proclo ad propoſ. 16. demonſtrauimus. Dico omnium minimam eſſe AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, b ſint duobus rectis minores, ponaturq; ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare c maius erit



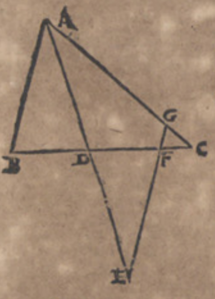
b 17. primi.
c 19. primi.

ius erit latus AE, latere AD. Eodem modo oſtendemus, omnes alias rectas maiores eſſe recta AD, ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.

EX PROCLO.

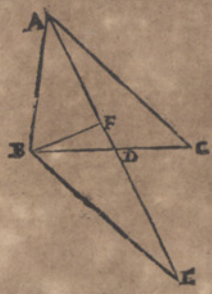
POSSVMVS hoc idem theorema oſtendere affirmatiua demonſtratione, ſine adminiculo præcedentis, ſi tamen prius demonſtretur hoc ſequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam ſectus fuerit, ſecansque angulum recta linea ad baſin ducta in partes inæquales ipſam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori baſis ſegmento coincidit, minus vero, quod cum minori.



TRIANGVLI ABC, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, quæ ſecet baſin BC, in partes inæquales, maiuſque ſegmentum ſit DC. Dico latus AC, maius eſſe latere AB. Producatur
a 3.primi. *enim AD, ad E,[a] vt ſit DE, æqualis ipſi AD. Deinde ex maiori ſegmento DC, auferatur recta DF, æqualis minori ſegmento DB, & per F, ex E, extendatur recta EFG. Quoniam igitur latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia ſunt lateribus ED, DF, trianguli EDF, vtrumq; vtrique, per cõſtructionem;*
b 15. primi. *ſunt autem &[b] anguli ADB, EDF, dictis lateribus contenti æquales:[c] Erunt baſes AB, & EF, æqua-*
c 4.primi. *les, & angulo BAD, angulus FED, æqualis: Eſt vero & angulus CAD, angulo BAD, æqualis, per hypo-*
d 1.pron. *theſin: Igitur[d] anguli CAD, GEA, trianguli AGE, æquales erunt:[e] ideoque latera AG, EG, æqualia*
e 6.primi. *erunt. Eſt autem recta AC, maior quam AG: quare & AC, maior erit, quam EG. Et quia EG, maior eſt, quam EF, erit & AC, multo maior, quam EF. Cum igitur demonſtratum ſit rectam EF, æqualem eſſe rectæ AB, erit AC, latus maius latere AB, quod erat oſtendendum.*

HOC oſtenſo theoremate, ita propoſitio 19. demonſtrabitur. In triangulo ABC, angulus ABC, maior ſit angulo C. Dico latus AC, maius eſſe latere AB. Diuiſa enim recta BC, (ſuper quam conſtituti ſunt dicti anguli inæ-



f 3. primi. *quales) bifariam in D: ex A, per D, extendatur recta ADE,[f] vt ſit DE, æqualis ipſi AD: ducaturque recta BE. Quoniam igitur latera AD, DC, trianguli ADC, æqualia ſunt lateribus ED, DB, trianguli*
g 15.primi. *EDB, vtrumque vtrique, per conſtructionem,[g] ſunt autem & anguli ADC, EDB, dictis comprehenſi*
a 4.primi. *lateribus æquales:[a] Erunt baſes AC, & BE, æquales, anguluſque ACD, angulo EBD, æqualis: Et quia angulus ACD, ponitur eſſe minor angulo ABC, erit & angulus EBD, minor eodem angulo ABC. Ideoque angulus ABE, per rectam BD, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam ſecetur per rectam BF, cadet BF, ſupra ED, eo quod angulus ABD, maior ſit angulo EBD. Quia vero EF,*
b 9. pron. *[b] maior eſt, quam ED, & ED, poſita eſt æqualis ipſi AD, erit EF, maior, quã AD.[c] Sed adhuc AD,*
c 9. pron. *maior eſt, quam AF. Multo igitur maior erit EF, quam AF. Itaque quia recta BF, diuidens angulum ABE, bifariam, ſecat baſin AE, inæqualiter in F, eſtq; maius ſegmentum EF, minus autem AF; erit per theorema à Proclo proxime demonſtratum, latus BE, maius latere AB. Oſtenſum eſt autem BE, æquale eſſe lateri AC. Igitur & AC, latus latere AB, maius erit. Quod erat demonſtrandum.*

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio 19, conuerſa eſt propoſitionis 18. vt perſpicuum eſt. Campanus autem duarum iſtarum propoſitionum ordinem prorſus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos eſt 18. apud ipſum ſit 19. & contra. Quarum vtramque oſtendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides propoſitionem 18. directe, & oſtenſiue confirmauerit, vt ex dictis liquido conſtat.

POTERIMVS quoque theorema à Proclo demonſtratum conuertere, hoc modo.

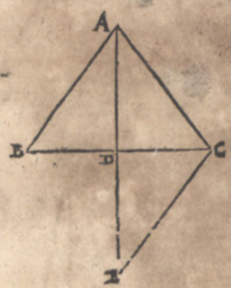
SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipſis contentum, ſecabit baſin in partes inæquales, maiuſque ſegmentum erit prope maius latus.



DVO latera AB, AC, trianguli ABC, ſint inæqualia; AC, maius, & AB, minus. Recta autem AD, diuidens angulum BAC, bifariam, ſecet baſin BC, in D. Dico ſegmentum DC, maius eſſe ſegmento DB. Si enim non eſt maius, erit vel æquale, vel minus. Si dicatur eſſe æquale; producatur AD,
a 3.primi. *ad E,[a] vt DE, æqualis ſit ipſi DA, ducaturque recta EC. Quoniam igitur latera AD, DB, æqualia ſunt lateribus ED, DC, vtrumque vtrique; AD, videlicet ipſi ED, per conſtructionem, & DB, ipſi DC, per*
b 15.primi. *hypotheſin aduerſarij. Sunt autem &[b] anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales:[c] erit baſis AB,*
c 4.primi. *baſi EC, æqualis, & angulo BAD, angulus CED. Poſitus autem eſt & angulo BAD, angulus CAD,*
d 6.primi. *æqualis. Igitur & anguli CED, CAD, æquales erunt.[d] Ideoq; latus AC, lateri EC, æquale. Cum igi-*
e 1.pron. *tur oſtenſum ſit, lateri EC, æquale eſſe quoque latus AB,[e] erunt latera AC, AB, æqualia; quod eſt abſurdum, quia AC, maius ponebatur, quam AB. Non erit igitur ſegmentum DC, ſegmento DB, æquale. Quod ſi DC, dicatur eſſe minus, & DB, maius; erit per theorema Procli, latus AB, maius latere AC. Ponebatur autem minus, quod multo magis eſt abſurdum. Non igitur minus erit DC, quam DB. Quare erit neceſſario maius.*

Eodem modo demonſtrari poterit hoc theorema.

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, baſin bifariam quoque ſecet, erunt duo latera angulum continentia inter ſe æqualia: Quod ſi latera æqualia fuerint, baſin etiam bifariam ſecabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.



PRIMVM recta AD, ſecans angulum BAC, bifariam, diuidat quoq; baſin BC, in D, bifariam. Dico latera AB, AC, inter ſe æqualia eſſe. Hoc autem demonſtrabimus eadem ratione, qua in præcedenti theoremate oſtenſum fuit, latus AC, æquale eſſe lateri AB, ſi DC, ſegmentum ſegmento DB, æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo conſtruas. Cum enim latera AD, DB, æqualia ſint lateribus ED, DC,[a] & anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales;[b] erunt
a 15.primi. *baſes AB, EC, æquales, & angulus CED, angulo BAD, hoc eſt, angulo CAD, æqualis. Quare[c] AC*
b 4.primi. *æquale erit ipſi EC, hoc eſt, ipſi AB.*
c 6.primi.

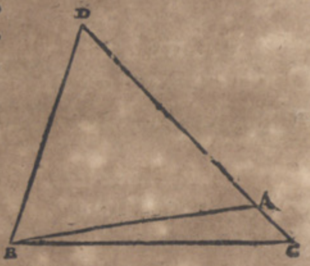
Deinde ſint latera AB, AC, æqualia, & recta AD, ſecans baſin BC, in D, diuidat angulum BAC, bifariam. Dico ſegmentum DC, æquale eſſe ſegmento DB. Cum enim latera AD, AB, æqualia ſint lateribus, AD, AC, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis late-
d 4.primi. *ribus æquales per hypotheſin,[d] erunt baſes BD, DC, æquales.*

THE-

THEOR. 13. PROPOS. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta. xx.

SIT triangulum ABC. Dico quælibet eius duo latera, nempe AB, AC, ſimul maiora eſſe reliquo latere
BC. Producatur vnum ex illis, vt CA, vſque ad D, *e* ſitque recta A D, æqualis alteri lateri non producto A B, & e 3. prim.
ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia inter ſe ſunt,
per conſtructionem, *f* erunt anguli ABD, ADB, æquales inter ſe: Eſt autem an- f 5. primi.
gulo A B D, *g* maior angulus C B D. Igitur & angulus C B D, maior erit angu- g 9. pron.
lo ADB. In triangulo ergo CBD, latus CD, oppoſitum maiori angulo C D B,
h maius erit latere BC, quod minori angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo h 19. primi
latera AB, A C, ſimul æqualia ſint ipſi C D, (ſi enim æqualibus A B, A D, com-
mune addatur AC, *i* fient tota æqualia; nimirum linea compoſita ex A B, AC, & i 2. pron.
linea compoſita ex AD, AC,) erunt quoque latera AB, AC, ſimul maiora latere
BC. Eodem modo demonſtrabitur, quęlibet alia duo latera maiora eſſe reliquo.
Quare omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, &c. Quod demonſtrandum erat.



EX PROCLO.

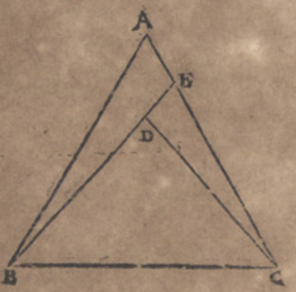
ALITER hoc theorema à familiaribus Heronis, & Porphyrij demonſtratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli ABC, maiora eſſe latere BC. Diuidatur angulus BAC, illis lateribus
contentus [a] *bifariam per rectam AD. Quoniam igitur trianguli CDA, latus CD, protractum eſt ad B,* [b] *erit*
angulus externus BDA, maior interno & oppoſito CAD. Igitur & maior angulo B A D. Quare in triangu- a 9. prim.
lo ABD, latus AB, maiori angulo ADB, oppoſitum [c] *maius erit latere BD, quod minori angulo BAD, opponi-* b 16. primi
tur. Eadem ratione oſtendetur, latus A C, maius eſſe, quam CD, quia angulus CDA, [d] *maior eſt angulo BAD, hoc eſt, angu-* c 19. primi
lo CAD, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademq; eſt ratio quorumcunq; duorum laterum, ſi d 16. primi
angulus ipſis comprehenſus bifariam ſecetur.



THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt. xxj.

IN triangulo ABC, ſuper extremitates B, & C, lateris BC, intra triangulum conſtituantur duæ rectæ lineæ
BD, CD, in puncto D, concurrentes. Dico BD, CD, ſimul minores eſſe duobus lateribus BA, CA, ſimul; At
vero angulum B DC, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum
interiorum, nempe BD, ad punctum E, lateris CA. Quoniam igitur in triangulo
BAE, duo latera BA, AE, *e* maiora ſunt latere BE, ſi addatur commune E C, *a* e- e 20. primi
runt BA, AC, maiora, quam BE, EC. Rurſus quia in triangulo CED, duo latera a 4. pron.
CE, ED, *b* maiora ſunt latere CD, ſi commune apponatur DB, *c* erunt C E, E B, b 20. pri.
maiora, quam C D, D B. Oſtenſum vero iam fuit, A B, C A, maiora eſſe, quam c 4. pron.
BE, EC. Multo igitur maiora erunt BA, CA, quam BD, CD, quod primo pro-
ponebatur. Præterea, quoniam angulus BDC, *d* maior eſt angulo DEC, externus d 16. primi.
interno; & angulus DEC, angulo BAC, maior quoque eſt, eandem ob cauſam.
Erit angulus BDC, multo maior angulo BAC, quod ſecundo proponebatur. Si
igitur ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat oſtendendum.



SCHOLIVM.

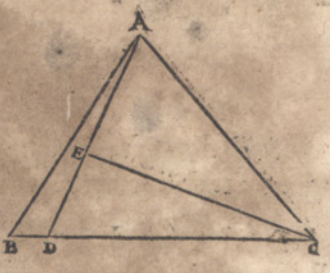
QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum conſtitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperte intelligi poteſt ex eo, quod mox ex Proclo demonſtrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum conſtitui poſſe duas lineas ſuper vnum latus circa angulum rectum, vel obtuſum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera vero à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiuſdem educitur, quæ maiores ſint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis ſcalenis eodem modo ſuper maximum latus duas rectas intra triangulum conſtitui poſſe, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum ABC, obtuſum. Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D,
prope aliud extremum B, lateris BC, duci poſſe duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum,
quæ maiores ſint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniam in triangulo
ABD, duo anguli ABD, ADB, [c] *minores ſunt duobus rectis. Ponitur autem ABD, maior recto, nem-* c 16. primi.
pe obtuſus; erit ADB, minor recto, ideoq; minor angulo ABD. Quare latus AD, [a] *maius erit latere* a 19. primi
AB. Ex D A, [b] *abſcindatur recta DE, æqualis rectæ A B. Et reliqua linea AE,* [c] *bifariam diuidatur* b 3. primi.
in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur CF, erunt duæ lineæ rectæ conſtitutæ CF, DF, in- c 10. primi.
tra triangulum maiores duobus lateribus BA, AC. Quoniam enim in triangulo A F C, duo latera
AF, FC, [d] *maiora ſunt latere AC. Eſt autem recta AF, ipſi FE, æqualis, per conſtructionem; erunt CF, FE, maiores quoq; latere* d 20. primi
CA. Si igitur æqualia addantur ED, & AB, fient rectæ CF, FD, [e] *maiores lateribus C A,* e 4. pron.
AB. Quod eſt propoſitum. Quod ſi ad F, ex B extremo, recta duceretur, eſſent duæ rectæ
conſtitutæ CF, BF, minores duobus lateribus CA, AB, vt Euclides demonſtrauit.



Rurſus ſit triangulũ ſcalenũ ABC, cuius latus maximũ BC, minimũ AB. Ex BC, [f] *au-* f 3. primi.
feratur BD, æqualis rectæ AB, & ducatur AD, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad
E, ab extremo C, recta ducatur C E. Conſtitutæ igitur erunt intra triangulum duæ li-
neæ C E, D E, quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera AB,
AC. Cum enim duo latera BA, BD, æqualia ſint, [g] *erunt duo anguli BAD, BDA, æquales:* g 5. primi.
Sed BDA, angulus [h] *maior eſt angulo CED. Maior igitur erit & angulus B A D, angulo* h 16. primi
CED. Quare multo maior erit totus angulus BAC, angulo C E D. Quod eſt propoſitum.
Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum conſtitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem ſint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem vero complectantur angulum. Alias enim propoſitio vera non eſſet, vt iam eſt demonſtratum.



VERVM de conſtitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores ſint, vel æquales duobus lateribus, plura oſtendemus ex Pappo ad propoſ. 34. huius lib.

xxij.

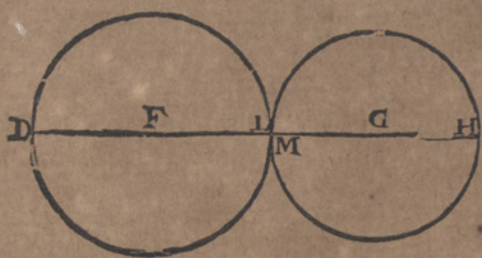
PROBLEMA 8. PROPOSITIO 22.

EX tribus rectis lineis, quæ ſint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

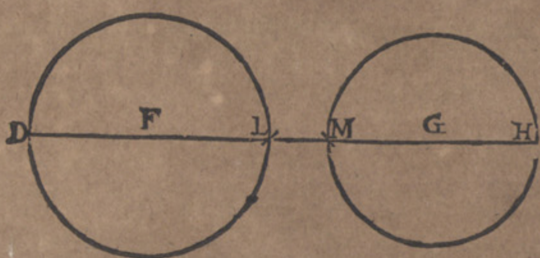
TRES lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, vt conſtat ex propoſition. 20. in qua oſtenſum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo eſſe maiora.) oporteatque conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta quauis DE, infinitæ



a 3. primi. magnitudinis *a* abſcindatur recta D F, æqualis rectæ A. Et ex reliqua F E, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo vero FD, circulus deſcribatur DIK. Item centro G, interuallo autem GH, alius circulus deſcribatur HIK, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K, (cum enim duæ FD, GH, maiores ponantur recta FG; ſi ex FE, ſumatur recta FL, æqualis ipſi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipſi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in L, punctum, eſſent G L, FL, hoc eſt, GH, & FD, æquales rectæ F G: Si vero M, caderet inter G, & L, eſſent eædem duæ F L, GM, hoc eſt, DF, GH, minores recta FG, quorum vtrumque eſt contra hypotheſin. Id quod ex appoſitis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta, F, G, rectæ K F, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia eſſe datis rectis A, B, & C. Cum enim



b 15. def. recta FK, *b* æqualis ſit rectæ FD, & recta A, per
a 1. pron. conſtructionem eidem FD, æqualis; *a* erit latus FK, rectæ A, æquale. Rurſus quia G K, æqualis eſt ipſi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Poſitum autem fuit per conſtructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia ſunt. Conſtituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

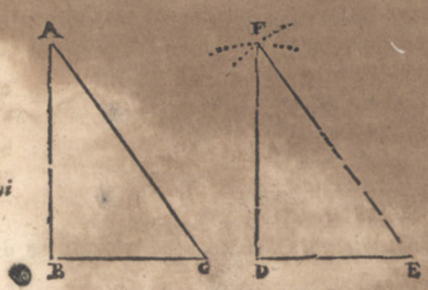


PRAXIS.

SVMATVR recta DE, æqualis cuicunq; rectarum datarum, nempe ipſi B, quam nunc volumus eſſe baſin. Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus deſcribatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus ſecans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus DF, æquale rectæ A, propter interuallum ipſius A, aſſumptum: & latus EF, ipſi C, propter aſſumptum interuallum C: DE, vero latus, acceptum eſt rectæ B, æquale ab initio.



SCHOLIVM.



HAC arte cuicunq; triangulo propoſito alterum prorſus æquale & quoad latera, anguloſq; & quoad aream ipſius, conſtituemus. Sit namq; triangulum quodcunq; A B C, cui æquale omni ex parte eſt conſtruendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas AB, BC, CA, quarum quælibet duæ
b 20. primi *b maiores ſunt reliqua. Deinde ſumo rectam DE, æqualem vni lateri, nempe BC; & ex D, interuallo lateris AB, arcum deſcribo, item alium ex E, interuallo reliqui lateris CA, qui priorem ſecet in F, &c.*

xxiij.

PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

DATA recta ſit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum conſtituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta vtcun-
a 22. prim. que G, H, quæ recta GH, conectantur: Deinde *a* conſtituatur triangulum CIK, habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita vt C I, æquale ſit ipſi E G; & C K, ipſi E H; & I K, ipſi GH. (Quod facile fiet, ſi CI,

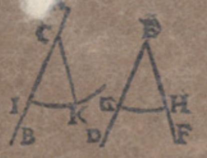
ſi CI, ſumatur æqualis ipſi E G, & CL, ipſi EH, & IM, ipſi G H. Deinde ex centris C, & I, interuallis vero CL, & IM, circuli deſcribantur ſecantes ſeſe in K, &c.) Dico angulum C, æqualem eſſe angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia ſunt duobus lateribus EG, EH, vtrumq; vtrique, & baſis IK, baſi G H, per conſtructionem; *b* erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulũ ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.



a 8. primi.

PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum conſtituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perſpicuum eſt. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumq; in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus deſcribatur G H: Eodemq; interuallo ex centro C, arcus deſcribatur IK, ſumaturq; beneficio circini arcus IK, arcui GH, æqualis. Recta enim ducta CK, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam ſi ducerentur rectæ IK, GH, eſſent ipſæ æquales, propterea quod circino non variato vtrãq; diſtantiã IK, GH, accepimus. Cũ ergo & duo latera IC, CK, æqualia ſint duob. GE, EH, ob æqualia interualla, quib. arcus ſunt deſcripti; [a] erũt anguli I C K, GEH, æquales. a 8. primi.



CÆTERUM qua ratione ex puncto extra datam rectam propoſito recta duci poſſit, quæ cum data recta angulum conſtituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propoſ. 31. huius lib.

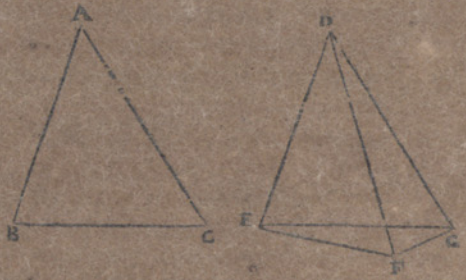
THEOREMA 15. PROPOS. 24.

xxiv.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſin baſi maiorem habebunt.

DVO latera A B, AC, trianguli A B C, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, vtrumque vtrique, nempe A B, ipſi DE, & AC, ipſi DF; Angulus vero A, maior ſit angulo EDF. Dico Baſin B C, maiorem eſſe baſe EF. Ad lineam enim DE, ad eiuſque punctum D, *b* conſtituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta DG, extra triangulum DEF, cum angulus EDF, minor ponatur angulo A) ponaturque DG, æqualis ipſi DF, hoc eſt, ipſi AC. Ducta deinde recta EG; *c* cadet ea aut ſupra rectam EF; aut in ipſam, aut infra ipſam. Cadat primum ſupra EF, ducaturq; recta FG. Quia ergo latera AB, AC, æqualia ſunt lateribus DE, D G, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per conſtructionem; *d* Erit baſis BC, baſi EG, æqualis. Rurſus quia duo latera D F, D G, inter ſe ſunt æqualia; *e* erunt anguli DFG, DGF, æquales: Eſt autem angulus DGF, *f* maior angulo EGF. Igitur & angulus DFG, eodem angulo EGF, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In triangulo igitur EFG, *a* maius erit latus E G, latere E F. Eſt autem oſtenſum E G, æquale eſſe ipſi B C. Maior igitur erit quoque B C, quam E F. Quod eſt propoſitum.

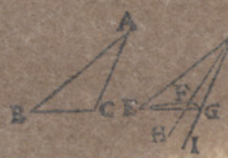
b 23. primi.
c 3. primi.
d 4. primi
e 5. primi.
f 9. pron.
a 19. prim.



CADAT deinde E G, in ipſam EF. Et quia rurſus, vt prius, baſis E G, *b* æqualis eſt baſi B C: & E G, *c* maior quam EF, erit & BC, maior, quam EF, quod eſt propoſitum. b 4. primi c 9. pron.

CADAT tertio EG, infra EF, producanturque rectæ DF, DG, vſque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit autem rurſus, vt prius, *d* baſis EG, baſi BC, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqualia ſunt inter ſe, per conſtructionem, *e* erunt anguli G F H, F G I, infra baſin F G, æquales: Eſt autem angulus F G I, *f* maior angulo F G E. Igitur & angulus G F H, eodem angulo FGE, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangulo ergo E F G, *g* maius erit latus E G, latere EF. Eſt autem oſtenſum EG, æquale eſſe ipſi BC. Maior igitur erit quoque BC baſis, baſi EF. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat oſtendendum.

d 4. primi.
e 5. primi.
f 9. pron.
g 19. primi.



SCHOLIVM.

Si quis forte roget, cur in 4. propoſ. Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtriq; & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluſerit non ſolum æqualitatem baſium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtriq;, anguli vero lateribus illis comprehenſi inæquales, colligat tantum inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum. Huic reſpondendum eſt, neceſſario id ab Euclide peritiſſimo Geometra eſſe factum. Nam ex antecedente huius theorematis ſemper conſequitur baſium inæqualitas, ita vt baſis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus aſſumptis eſt maior, ſuperet baſin alterius, cuius angulus minor exiſtit, vt demonſtratũ eſt; non autẽ neceſſe eſt, triangulũ illud maius hoc eſſe. Vt n. clariſſime ex Proclo demonſtrabimus ad propoſ. 37. huius 1. libri, Triangulũ maiorẽ habẽs angulũ, aliquando æquale eſt triangulo minorẽ habenti angulũ, aliquando vero minus eodẽ, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuerſum inferri, ex eo, ꝙ angulus vnius trianguli maior eſt angulo alterius, triangulum etiã maius eſſe cũ modo æquale ſit, modo minus, & modo maius. Idẽ dici poteſt de angulis reliquis. Nã in prima figura huius theorematis angulus ABC, minor eſt ſemper angulo DEF; cũ angulus DEG, (qui æqualis eſt per 4. propoſ. angulo A B C,) [a] minor ſit eodem angulo DEF, pars toto. In ſecunda autem figura, exiſtit quidem angulus ABC, angulo DEF, æqualis, per 4. propoſ. At vero angulus A C B, minor eſt angulo D F E, cum angulus D F E, [b] maior ſit angulo DGF, externus interno, & oppoſito; & angulus D G F, æqualis ſit angulo A C B. In tertia denique figura angulus A B C, maior quidem eſt angulo D E F, propterea quod angulus D E G, (æqualis exiſtens per 4. propoſ.

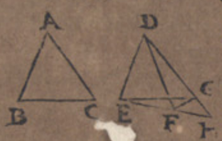
a 9. pron.
b 16. pri.

angulo

e 9. pron. d 16. primi. *angulo ABC,)[c] maior eſt eodem angulo DEF, totum parte. Sed angulus ACB, minor eſt eodem angulo DFE. Nam ſi recta EF, producatur ſecans rectam DG, in K, fiet angulus DFE, [d] maior angulo DKE, externus interno; Eſt autem & angulus DKE, maior adhuc angulo DGE, externus quoq; interno, & oppoſito. Multo igitur maior erit angulus DFE, angulo DGE, qui per 4. propoſ. æqualis eſt angulo ACB. Quod etiam conſtat ex 2. parte propoſ. 21. Nam interiores lineæ DF, EF, continent angulum maiorem angulo DGE, quem exteriores lineæ DG, EG, continent. Quare neq; certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo vnus altero ſit maior, modo minor, & modo æqualis.*



a 17. primi. *QVONIAM verò in triangulo DEF, duo anguli E, F, [a] ſemper minores ſunt duobus rectis, erit neceſſario ſaltem alter eorum acutus. Si igitur ad partes acuti anguli (vt in 1. figura ad partes anguli DFE, in 2. verò & 3. ad partes anguli DEF.) fiat angulus EDG, æqualis angulo A, & reliqua fiant, vt in propoſ. dictum eſt, cadet ſemper ducta recta EG, ſupra punctum F. Nam cum angulus DFE, acutus ſit, [b] erit eideinceps, producto latere EF, obtuſus. Producta ergo recta DG, ſecante latus EF, productum in H; [c] maior erit recta DH, latere, DF, cum opponatur angulo obtuſo in triangulo DFH; ac proinde recta EG, auferens DG, æqualem ipſi DF, cadet neceſſario ſupra F. Si namq; vel per F, tranſiret, vel infra caderet, abſcinderet ex DG, maiorem lineam latere DF; nimirum vel DH, vel maiorem, quam DH. Hoc ſi obſeruetur, ſatis erit primus caſus propoſitionis, quæ fortaſſis cauſa fuit, vt Euclides apud Theonem primo caſu contentus fuerit.*

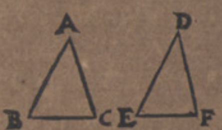


b 13. primi.
c 19. primi.

XXV.

PROBL. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, baſin vero baſi maiorem: Et angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.



DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF; vtrumque vtrique, hoc eſt, AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; Baſis autem BC, maior ſit baſe EF. Dico angulum A, maiorem eſſe angulo D. Si enim non eſt angulus A, maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur eſſe æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia ſint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypotheſin; *a* e[illegible] & baſis

a 4. pri. BC, æqualis baſi BF; quod eſt abſurdum. Ponitur enim baſis BC, baſe EF, maior: Si vero angulus A, dicatur

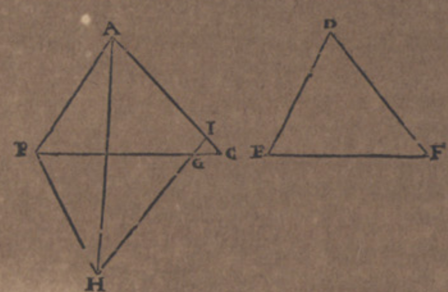
b 24. primi eſſe minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa iſtos angulos, baſis EF, *b* maior baſe BC; quod magis eſt abſurdum, cum EF, ponatur eſſe minor quam BC. Quare angulus A, cum neque poſſit æqualis eſſe angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuerſum eſt præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonſtratum eſt, baſin illi reſpondentem eſſe maiorem: In hoc autem ex maiori baſi oſtenſum fuit, angulum illi reſpondentem maiorem eſſe. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata ſunt propoſ. 18. & 19. Nam in 19. demonſtratum eſt, in vno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus reſpondere: At in 24. idem oſtenſum fuit in duobus diuerſis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia ſunt duobus lateribus alterius &c. Idemq; diſcrimen reperies inter propoſ. 18. & 25.

MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonſtrat hoc idem theorema oſtenſiue, hac ratione. Poſitis eiſdem triangulis, ex baſe maiore BC, [c] abſcindatur recta BG, æqualis baſi minori EF. Fiat quoq; angulus GBH, [d] æqualis angulo DEF, [e] & ſit BH, æqualis ipſi BA, atq; adeo ipſi DE. Ducta autem recta linea AH, ducatur quoq; recta per G, ex H, ſecans AC, in I. Quoniam igitur duo latera BA, BH, æqualia ſunt, [f] erunt anguli BAH, BHA, æquales. Rurſus quia latera BG, BH, æqualia ſunt lateribus EF, ED, vtrumq; vtriq;, & angulus GBH, æqualis angulo DEF, per conſtructionem: [a] erit baſis HG, baſi DF, atq; adeo ipſi AC, æqualis, anguluſq; GHB, angulo EDF. Et quoniam recta HI, [b] maior eſt quam HG, quæ eſt oſtenſa æqualis ipſi AC, erit quoq; maior HI, quam AC: Sed AC, [c] maior eſt adhuc, quam AI. Multo ergo maior erit HI, quam AI. Quare angulus IAH, [d] maior erit angulo IHA. Additis igitur duobus angulis BAH, BHA, qui oſtenſi ſunt æquales, fiet [e] totus angulus BAC, toto angulo BHG, maior: Sed angulus BHG, demonſtratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus BAC, angulo D, quod eſt propoſitum. Quod ſi quando contingat, rectam AH, cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli æquales BAH, BHA, &c. vt reliquus fiat angulus BAC, maior reliquo angulo BHG. Quando autem recta AH, per punctum B, tranſit, nihil addendum erit, aut demendum, vt perſpicuum eſt.

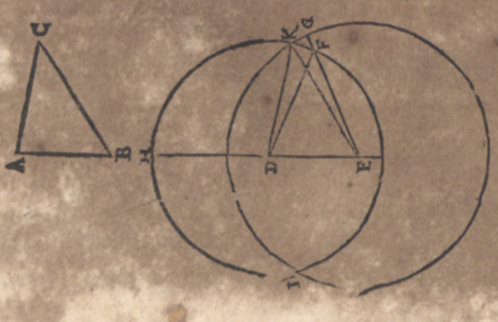
c 3. pri.
d 23 primi.
e 3. pri.



f 5. pri.
a 4. pri.
b 9. pron.
c 9. pron.
d 18. pri.
e 4. pron.

HERON autem idē ex eodem Proclo hoc modo demonſtrat. Poſitis eiſdem triangulis, producatur baſis minor EF, ad G, vt ſit EG, [f] æqualis baſi maiori BC. Deinde centro D, interuallo autem DF, deſcribatur circulus, producaturq; ED, ad H, in circumferentiam. Quoniã igitur DH, [g] eſt æqualis ipſi DF, erit quoq; DH, æqualis ipſi AC. Additis igitur æqualibus DE, AB, [h] fient AC, AB, ſimul æquales toti HE: Sed AC, AB, [i] ſimul maiores ſunt, quam BC, atq; adeo quam EG. Igitur & HE, maior erit, quam EG. Quare circulus deſcriptus ex centro E, & interuallo EG, interſecabit rectam EH, atq; adeo circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis: ad K, autem ducantur rectæ DK, EK. Et quoniam duo latera AB, AC, æqualia ſunt duobus lateribus DE, DK, vtrumq; vtriq;, (eſt enim DK, æquale ipſi DF, per definitionem circuli: DF, autem poſitem eſt æquale lateri AC.) & baſis BC, baſi EK, æqualis: (cum EK æqualis ſit ipſi EG, per definitionem circuli: EG, vero recta per conſtructio-

f 3. pri.
g 15. defin.
h 2. pron.
i 20. pri.



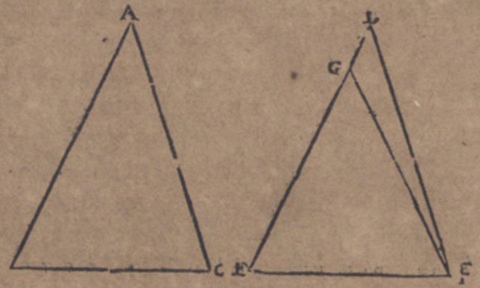
ſtructionem facta ſit æqualis baſi CB.) [a] *Erit angulus BAC, angulo EDK, æqualis: Sed angulus EDK, maior eſt* [b] *angulo* a 5. primi.
EDF. Quare & angulus A, angulo EDF, maior exiſtet. Quod eſt propoſitum. Atq; hæc demonſtratio generalior eſt priore, b 9. pron.
cum omnibus caſibus conueniat.

THEOR. 17. PROPOS. 26.

xxvj.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, vterque vtrique, hoc eſt, B, ipſi E, & C, ipſi EFD; Sitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adiacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia eſſe, vtrumque vtrique, hoc eſt, AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, ea nimirum, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus
AB, non eſt æquale lateri DE, ſit DE, maius, à quo [c] abſcindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturque c 3. primi.
recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia ſunt lateribus GE, EF, vtrumque vtrique, & anguli B, & E, æquales
per hypotheſin: [d] Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidem angulo EFD, æqualis erit, pars toti; Quod eſt abſurdum. Non eſt igitur latus AB, inæquale lateri DE, ſed æquale. Quamobrem, cum latera AB, BC, æqualia ſint lateribus DE, EF, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; [a] erunt & baſes AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod eſt propoſitum. d 4. primi. a 4. primi.



SINT deinde latera AB, DE, ſubtendentia æquales angulos C, & EFD, inter ſe æqualia. Dico rurſus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, eſſe æqualia, vtrumque vtrique, hoc eſt, BC, ipſi EF, & CA, ipſi FD; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, non eſt æquale lateri EF, ſit EF, maius; [b] ex quo ſumatur recta EG, æqualis ipſi BC, ducaturque recta DG. Quoniam b 3. primi.
igitur latera AB, BC, æqualia ſunt lateribus DE, EG, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypotheſin; [c] Erit angulus C, angulo EGD, æqualis: Ponitur c 4. primi.
autem angulus C, angulo EFD, æqualis; Igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & oppoſito, quod eſt abſurdum. [d] Eſt enim maior. Non ergo eſt latus BC, lateri d 16. primi.
EF, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur inſtitutum ex 4. propoſ. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

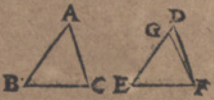


COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, eſſe æqualia. Nã ſi latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia ſint, vt oſtenſum fuit, contineantque ex hypotheſi angulos æquales B, E, [e] erunt tota quoque triangula æqualia inter ſe. e 4. primi.

SCHOLIVM.

PRIOR huius theorematis pars conuerſa eſt 4. propoſitionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipſis contentorum, collecta fuit æqualitas baſium, & angulorum ſuper baſes. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate baſium BC, EF, & angulorum ſuper has baſes, demonſtratum eſt, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus æqualia eſſe, reliquumq; angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonſtrauimus ad propoſitionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus.



HOC loco demonſtrandum eſt theorema quoddam admodum neceſſarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, ſiue Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidenſque vel angulum, vel baſin bifariam, perpendicularis eſt ad baſim, & ſi quidem angulum bifariam diuidat, ſecabit quoque baſin bifariam. Si vero baſim ſecet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad baſin ducta, diuidit & baſin, & angulum bifariam.

SINT in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, diuidatq; primum recta AD, angulum A, bifariam. Dico rectam AD, eſſe ad BC, perpendicularem, ſecareq; baſin BC, bifariam. Cum enim duo latera AB, AD, duobus lateribus AC, AD, ſint æqualia, anguloſq; æquales contineant, ex hypotheſi, [a] *erunt & baſes BD, CD, æquales, & anguli ad D, atq; adeo recti.* a 4. primi.

DIVIDAT deinde recta AD, baſin BC, bifariam. Dico rectã AD, ad BC, perpendicularem eſſe, & angulum A, ſecare bifariam. Cum enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia ſint, & baſis AB, baſi AC, ex hypotheſi, [b] *erunt quoq; anguli ad D, æquales, atq; adeo recti, ac proinde ex coroll. propoſ. 8. huius lib. & anguli ad A, æquales erunt.* b 8. prim.

SED iam recta AD, ſit ad BC, perpendicularis. Dico & baſim BC, & angulum A, ſecari bifariam. [c] *Erunt enim anguli B, C, ſupra baſin BC, æquales. Itaq; quoniam duo anguli D, B, trianguli ABD, duobus angulis D, C, trianguli ACD, æquales ſunt, vterq; vtriq;, latuſq; AD, æqualibus oppoſitum angulis B, C, commune;* [a] *erunt & reliqua latera BD, CD, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonſtrandum.* c 5. primi. a 26. primi.



SED & hoc theorema verum eſt.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad baſim perpendicularis diuidit vel baſim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et ſi quidem baſis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam ſecabitur: ſi vero angulus bifariam ſecetur, baſis quoque diuidetur bifariam.

IN eodem triangulo ABC, ſit AD, ad BC, perpendicularis, diuidatq; primum baſin BC, bifariam. Dico & latera AB, AC, eſſe æqualia, & angulos ad A, æquales. Quoniã enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia ſunt, angu-
b 4. primi. *losq; comprehendunt æquales, nempe rectos; [b] erunt quoq; & baſes AB, AC, & anguli ad A, æquales, quod eſt primum.*

SECET deinde perpendicularis AD, angulum A, bifariam. Dico & latera AB, AC, æqualia eſſe, & rectas BD, CD. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli ABD, duobus angulis D, A, trianguli ACD, æquales ſunt, latusq; AD, illis adiacens,
c 26. primi. *commune; [c] erunt quoq; & latera AB, AC, & latera BD, CD, æqualia. Quod eſt ſecundum.*

xxvij.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

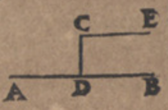
SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.



IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter ſe æquales. Dico lineas AB, CD, eſſe parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, coibunt tandem, ſi producantur infinite. Si namque non coirent vnquam, parallelæ eſſent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum eſt GIH, (cum AB, recta continuata ſit, item recta CD, vſque ad punctum I;) & angulus AGH, poſitus eſt æqualis angulo DHG; erit externus angulus AGH, æqualis interno, & oppoſito
a 16. primi. DHG; quod eſt abſurdum; *a* quoniam externus interno maior eſt. Quod ſi AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rurſus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis interno & oppoſito, AGH, quod eſt abſurdum. Non igitur coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, ſi ponantur anguli alterni BGH, CHG, æquales, demonſtrabitur, lineas AB, CD, eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

NECESSE eſt, vt lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem exiſtant plano, vt ex definitione conſtat. Quare non ſatis eſt, duos angulos alternos æquales inter ſe eſſe, vt duæ lineæ probentur eſſe parallelæ, niſi ponatur, eas in vno, eodemq; exiſtere plano. Fieri enim poteſt, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano exiſtentes, faciat alternos angulos æquales.

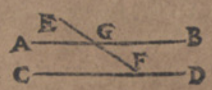


Sit enim CD, perpendicularis ad AB, rectam, quæ in ſubiecto plano exiſtit; & ex C, in alio plano, ad CD, ducatur alia perpendicularis CE, ita vt punctum E, intelligatur in ſublimi. Quo poſito, perſpicuum eſt, rectam CD, incidentem in rectas CE, AB, facere duos angulos ECD, ADC, alternos æquales, cum ſint recti; & tamen CE, AB, non ſunt parallelæ, quod non in eodem exiſtant plano. Non appoſuit autem Euclides in propoſitione hanc conditionem; in eodem plano exiſtentes: ſicut neq; in ſubſequentibus; quoniam cum in prioribus ſex libris agatur de planis duntaxat, vt ſupra diximus, omnia intelligenda ſunt neceſſario in eodem plano exiſtere. In vndecimo vero libro, & alijs, qui ipſum ſequuntur, monebit ſemper, lineas aliquas in eodem eſſe plano, vel in diuerſis planis, quia in illis libris diſſeritur de ſolidis, in quibus diuerſa plana conſiderari poſſunt. Quod idem dicendum eſt de punctis extra lineas & ſuperficies, &c.

xxviij.

THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.



IN duas rectas AB, CD, recta incidens EF, faciat primo externum angulum EGA, æqualem angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes GHC. Dico rectas AB, CD, eſſe parallelas. Quoniam enim angulo EGA, æqualis ponitur angulus GHC; & eidem an-
a 15. pri. gulo EGA, *a* æqualis eſt angulus HGB; *b* erunt anguli alterni GHC, HGB, æquales. Qua-
b 1. pron. re lineæ AB, CD, *c* parallelæ erunt. Idem oſtendetur, ſi angulus externus EGB, æqualis ponatur interno
c 27. pri. GHD.

DEINDE faciat recta EF; angulos internos ex eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rurſus rectas AB, CD, eſſe parallelas. Quoniam enim anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales
a 13. pri. ponuntur; Sunt autem & anguli AGE, AGH, *a* duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis AGE, AGH, æquales. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & oppoſito ad eaſdem partes æqualis. Quare vt iam oſtenſum eſt, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem oſtendetur, ſi duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

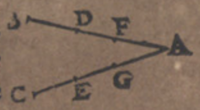
SCHOLIVM.

IAMDVDVM pronunciatum tertiumdecimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur ſequens propoſ. 29. cum multis alijs illi ita innitatur, vt ſine eius auxilio demonſtrari nequeat, operæ pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonſtratis theorematibus, atq; problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonſtratione confirmare, vt in expoſitione dicti Axiomatis polliciti ſumus. Primo autem loco demonſtrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accurate, atque euidentius demonſtrabimus. Proclus igitur, antequam illud demonſtret, duo præmittit. Primum eſt.

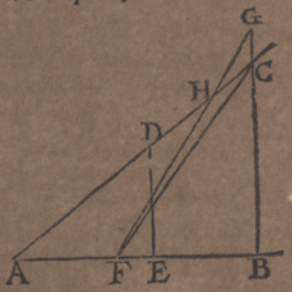
SI

SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, ipſarum di-
ſtantia omnem finitam magnitudinem excedet.

*EXEANT à puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus
inter ſe diſtant, quam F, & G. Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, ſi producantur vl-
tra rectæ lineæ AB, AC, perſpicuum eſt, extrema earum puncta infinito ſpatio inter ſe diſtare, ſi infinite
ipſæ producantur. Si enim non infinito ſpatio diſtarent, augeri poſſet eorum diſtantia; igitur & lineæ ipſæ
vltra produci, quod eſt abſurdum, cum ponantur infinite iam eſſe productæ. Quare ſi dictæ lineæ AB, AC,
producantur infinite, ipſarum diſtantia excedet omnem finitam diſtantiam. Hoc pronunciato vſus eſt & Ariſtoteles lib. 1. de
cælo, vbi demonſtrauit, mundum non eſſe infinitum.*



*Quod autem rectæ AB, AC, quo longius protrahantur, eo magis inter ſe diſtent, (Hoc enim Proclus ſine demonſtratione
aſſumpſit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter ſe diſtare, quam F, & G. Item B, & C, plus quã D, & E, &c.)
hac ratione demonſtrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunq; in recta AC, acceptis, ad
AB, perpendiculares CB, DE, quæ diſtantias punctorum C, D, à recta AB, metientur, cum
ſint minimæ omniũ rectarũ ex C, D, ad AB, ductarũ, vt in coroll. propoſ. 19. oſtendimus. Dico
CB, maiorẽ eſſe, q̃ DE; ac proinde plus diſtare rectã AC, à recta AB, in puncto C, remotiore, q̃
in puncto propinquiore D. Si n. CB, non eſt maior, q̃ DE, erit vel æqualis, vel minor: Sit primũ
æqualis, & rectæ AE, abſcindatur æqualis BF, ita vt punctum F, cadat vel inter A & E, vel in
E, vel deniq; inter E, & B, ducaturq; recta FC. Quoniam igitur duo latera AE, ED, trianguli
AED, duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, æqualia ſunt, vtrumq; vtriq;, angulosq; con-
tinent æquales. vtpote rectos:[a] erunt & baſes AD, FC, & anguli DAE, CFB, inter ſe æquales.* a 4. pri.
Igitur externus angulus CFB, interno DAE, æqualis erit;[b] quod eſt abſurdum. Vel cum ex- b 16. primi.
ternus angulus CFB, interno DAE, æqualis ſit,[c] parallelæ erunt AC, FC, quod etiam abſurdum eſt, cum in C, concurrant. c 27. primi

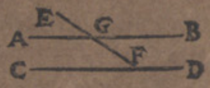


*Sit deinde CB, minor quam DE, ſi fieri poteſt, & producta BC, fiat BG, ipſi DE, æqualis, iungaturq; recta FG. Quia igi-
tur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BG, æqualia ſunt, vtrumq; vtriq;, angulosq; continent æquales, pu-
ta rectos;[d] erunt & baſes AD, FG, & anguli EAD, BFG, inter ſe æquales. Igitur externus angulus BFG, interno EAD, æqua-* d 4. primi.
lis erit, quod eſt abſurdum. Vel cum externus angulus BFG, interno EAD, æqualis ſit,[a] erunt AC, FG, inter ſe parallelæ, quod a 27. prim.
*abſurdum eſt, cum ſe mutuo ſecent in H. Quocirca BC, ipſa ED, maior erit, cum neq; æqualis, neq; minor eſſe poſſit, vt demon-
ſtratum eſt.*

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiuſmodi eſt.

Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quædam recta linea, reliquam
quoque productam ſecabit.

*SINT duæ parallelæ AB, CD, & recta EF, ſecet ipſam AB, in G. Dico rectam EF, ſi producatur, ſecturam eſſe quoq; ipſam
CD. Quoniam duæ rectæ GB, GF, in puncto G, angulum faciunt, ſi producantur infinite, excedent omnem finitam diſtantiam;
igitur & diſtantiam, qua parallela AB, à parallela CD, diſtat, cum hæc diſtantia ſit finita, alias enim
non eſſent lineæ parallelæ. Quare quando diſtantia GB, à GF, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas
eſt, neceſſe eſt rectam GF, productam ſecuiſſe rectam CD. Nam quamdiu GF, continebitur inter duas
parallelas, minori diſtantia à GB, remouebitur, quam CD, ab eadem GB, vt conſtat. His igitur ita ex-
poſitis, facile demonſtrabitur hoc theorema, quod eſt apud Euclidem, tertiumdecimum pronunciatum.*



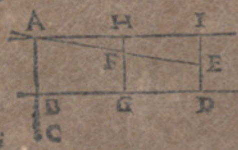
SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes, angulos duo-
bus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ ſibi mutuo incident ad eas par-
tes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

*In rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt BGH, DHG, duobus rectis minores.
Dico rectas AB, CD, coire ad eaſdem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli BGH, DHG, minores po-
nuntur eſſe duobus rectis: Sunt autem duo anguli DHG, DHF,[a] duobus rectis æquales: Erunt duo anguli* a 13. primi.
*DHG, DHF, maiores duobus angulis DHG, BGH. Ablato ergo communi angulo DHG, remanebit angulus
DHF,[b] maior angulo BGH. Si igitur ad rectam FG, & ad punctum G,[c] conſtituatur angulus KGH, æ-* b 5. pron.
qualis angulo DHF, cadet GK, ſupra GB,[d] ſecabitq; producta rectam AB. Quoniam igitur in duas rectas IK, CD, recta inci- c 23. pri.
dens EF, facit angulum externum DHF, æqualem interno, & oppoſito KGH.[e] Erunt rectæ IK, CD, parallelæ. Secat autem re- d 11. pron.
cta AB, ipſam IK, in G. Producta igitur ſecabit quoq; ipſam CD, vt demonſtratum eſt. Quare AB, cum CD, conueniet ad par- e 28. primi
tes B, & D, nimirum in puncto L, quod eſt propoſitum.



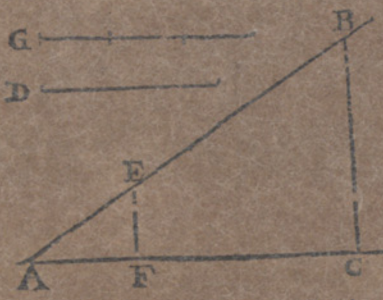
*Hac ergo ratione conatur Proclus Axioma tertiumdecimum demonſtrare. Sed quoniam principium, quod primo loco
præmiſit, æque dubium, & obſcurum eſſe videtur, atque illud Axioma, afferemus nos demonſtrationem magis accuratam, ſi
prius doceamus, in quo difficultas, ſiue obſcuritas principij illius à Proclo aſſumpti conſiſtat. Quemadmodum igitur ex Procli,
& aliorum Geometrarum ſententia, ſine demonſtratione concedendum non eſt, duas rectas, quæ ſemper ſibi mutuo fiunt
propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet ſit veriſſimum, cuiuſmodi ſunt duæ rectæ, in quas recta incidens faciat in-
ternos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus ſit, & alter acutus: Hæ enim ſibi mutuo appro-
pinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores exiſtunt, vt mox demonſtrabimus. Quemadmodum, inquam,
concedendum hoc ſine probatione non eſt, propterea quòd dari poſſunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa,
nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, ſibi ſemper mutuo magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coe-
ant, licet in infinitum ambæ producantur, quorum illud ab Apollonio Pergæo, hoc vero à Nicomede demonſtratum eſt: Ita
quoq; non videtur ſine demonſtratione admittendum eſſe, (quamquam veriſſimum ſit) duas rectas lineas angulum efficien-
tes omnem finitam magnitudinem excedere, ſi in infinitum producantur ambæ, licet ſemper magis ac magis inter ſe diſtent,
vt nos ſupra demonſtrauimus. Nam exhiberi poſſunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & alte-
ra inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, ſemper magis ac magis inter ſe diſtantes, quarum tamen diſtantia datam
quamcumque rectam lineam nunquam ſuperet, aut exæquet, licet ambæ extendantur in infinitum. Data namq; ſit recta
AB. Dico deſcribi poſſe lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera ſemper magis recedat, diſtantiam tamen earum*

 nunquam



nunquam æqualem eſſe rectæ AB, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ. Productæ enim re-
cta AB, quantumlibet vſq; ad C, ducatur per B, ad A C, perpendicularis B D; & polo C, interuallo
autem AB, deſcribatur linea conchoideos AE, inflexa nimirum linea, quæ rectæ BD, fiat quidem ſem-
per propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per A, excite-
tur recta AI, ad AC, perpendicularis, [a] quæ ipſi B D, parallela erit. Poſtremo ex duobus punctis HI,
a 28. primi
b 28. primi vtcunq; in recta AI, acceptis demittantur ad BD, perpendiculares HG, I D, [b] quæ parallelæ, [c] atq; adeo æquales inter ſe erunt,
c 34. primi. angulosq; [d] conſtituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propoſitum oſtendamus, omnes demonſtrationes Euclidis,
d 29. primi ac ſi ex axiomate 13. non penderent, aut etiamſi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac ſi axioma illud iam ſit de-
monſtratum ante propoſ. 29. huius lib. vbi primum vſus illius apparere incipit, vti vere à nobis mox ante propoſ. 29. demon-
ſtrabitur. Itaq; quoniam FG, maior eſt, quam ED, vt Nicomedes demonſtrauit, erit F H, reliqua minor, quam reliqua EI. Ma-
gis ergo inter ſe diſtant lineæ AI, AE, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atq; ita ſemper eas probabimus magis ac magis di-
ſtare, ſi longius protendantur. Diſtantia nihilominus ſemper minor erit, quam recta AB, hoc eſt, quam perpendicularis ex re-
cta AI, ad rectam BD, demiſſa, cum inflexa linea AE, ad rectam BD, numquam perueniat, vt demonſtratum eſt à Nicomede.

Scio principium illud Procli in lineis rectis eſſe veriſſimum, & quod facili negotio, ſi omnes demonſtrationes Euclidis,
quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonſtrari poſſit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A, & da-
ta ſit recta D, cuiuſuis magnitudinis. Dico diſtantiam rectarum AB, AC, in infi-



nitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex quouis puncto E, in re-
cta AB, ſumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, quæ ſi maior fuerit,
quàm D, conſtat propoſitum: ſi vero non eſt maior, ſumatur eius multiplex pro-
xime maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem AB, ipſius AE, ita multiplici, vt
multiplex eſt G, ipſius EF, demittatur ex B, ad AC, perpendicularis BC, quam di-
co maiorem eſſe data recta D. Quoniam enim [e] eſt, vt AB, ad BC, ita AE, ad EF,
e 4. ſexti. (quod ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Eucl. triangula ABC, AEF, ſimilia ſint, ob rectas
BC, EF, quæ [f] parallelæ ſunt.) Et permutando, vt AB, ad AE, ita BC, ad EF: e-
f 32. primi. rit ita multiplex BC, ipſius EF, vt multiplex eſt AB, ipſius AE, hoc eſt, vt multi-
plex eſt G, ipſius EF. Cum ergo BC, & G, æque multiplices ſint ipſius EF, ipſæ erunt inter ſe æquales. Eſt autem, ex conſtru-
ctione, maior G, quam D. Igitur & BC, diſtantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. Quod eſt propoſitum.

Verum demonſtratio hæc ſine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam ha-
bet, ac proinde principium illud Procli aſſumi non poteſt ad illud axioma 13. demonſtrandum, ne principium in eo demonſtrã-
do petatur. Quæ cum ita ſint, ſedulo dedimus operam, vt illud ipſum Euclidis axioma demonſtraremus ex ijs ſolum, quæ ante
propoſ. 29. primi libri demonſtrata ſunt. Ante enim propoſ. 29. vſus illius axiomatis apud Euclidem nullus eſt. Id quod in Eu-
clide quodam Arabico factum etiam eſſe accepi, ſed nunquam facta mihi eſt copia demonſtrationem illam legendi, etſi obnixe
illud iterum atq; iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum poſſidet, flagitaui. Quare hanc, quæ ſequitur, excogitauimus.
Primum autem præmittenda quoq; ſunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonſtrandum requirantur neceſſario,
multo tamen euidentiora ſunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione excluſa, firmum ei aſſenſum præ-
bere poſſimus. Primum ſit huiuſmodi.

I.

LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano exiſtit, æquali-
ter diſtant, recta eſt.



Vt ſi omnia puncta lineæ AB, à recta DC, æqualiter diſtent, hoc eſt, omnes per-
pendiculares, quales ſunt AD, EH, FG, BC ad DC, demiſſæ æquales ſint, (perpendicu-
laris enim quælibet, cum ſit omnium ex eodem puncto ad rectam DC, ductarum mi-
nima, ex coroll. propoſ. 19. huius lib. diſtantiam puncti, à quo ducta eſt, metitur.) erit
AB, linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquido conſtare poteſt. Nam ſi omnia
puncta lineæ AB, æqualiter diſtant à recta DC, ex æquo ſua interiacebit puncta, hoc
eſt, nullum in ea punctum intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel huc,
atq; illuc deflectendo ſubſultabit, nihilq; in ea flexuoſum reperietur, ſed æquabiliter
ſemper inter ſua puncta extendetur, quemadmodum recta DC. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta DC, diſtan-
tiam haberent; quod eſt contra hypotheſin. Neq; vero cogitatione apprehendi poteſt aliam lineam præter rectam, poſſe habere
omnia ſua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano exiſtat, æqualiter diſtantia. Eſt ſane principium hoc, ex quo ſolo
concesſo, vna cum ijs, quæ vſq; ad propoſ. 29. huius lib. oſtenſa ſunt, Axioma 13. demonſtrabimus, adeo clarum, vt lumine na-
turali cognitum ſit, nemoq; ſanæ mentis illud negare poſſit. Aut certe citra omnem controuerſiam eſt eiuſmodi, vt longe faci-
lius ei quilibet aſſentiatur, quam illi axiomati 13. Euclidis.

Idem prorſus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta
æqualiter à circulari diſtant, id eſt, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales ſunt, cir-
cularis quoq; eſt; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali ſemper diſtantia abeſt, induat: quemadmodũ linea æqualiter
ſemp à recta linea diſtãs, naturã lineæ rectæ, cui ſemper æquidiſtat, induit, ꝓptereaq; recta eſt, vt diximus. Quòd autẽ inflexa
illa linea circa lineam circularem ſit quoq; perfecte circularis, facile oſtendemus, ſi prius



demonſtremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos
æquales; & contra, rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos conſtituat, per cen-
trum tranſire. Sit igitur circulus ABCDEF, cuius centrum G. Dico rectam GC, ex centro
ductam efficere tam angulos internos GCB, GCD, quàm externos ICB, ICD, inter ſe æqua-
les. Producta enim IG, vſq; ad A, ſi ſemicirculus ABC, circa diametrũ AC, intelligatur cir-
cumuerti, congruet is ſemicirculo AEC, cum ſemicirculi eiuſdem circuli ſint inter ſe æqua-
les. Quod ſi quis dicat, vnum ſemicirculum alterum interſecare, ducenda erit recta linea ex
centro G, ſecans vtramq; circunferentiam, colligendumq; partem toti eſſe æqualem, nimi-
rum ſemidiametrum vſq; ad interiorem circunferentiam, ſemidiametro ad exteriorẽ vſq;
circunferentiam ductæ, quod abſurdum eſt. Anguli igitur ad C, tam interni, quam externi
inter ſe congruent, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta HAK, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum tranſire. Si
enim non tranſeat, ducatur ex centro G, ad A, recta GA, quæ ex proximè demonſtratis angulos GAB, GAF, conſtituet æquales.
Non ergo æquales ſunt KAB, KAF. Quod eſt contra hypotheſin.

HOC

HOC oſtenſo, ambiat inflexa linea HLIMNO, circularem lineam ABCDEF, omniaq́ eius puncta ab hac æqualiter abſint, id eſt, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficienteſq́ angulos æquales, ſint inter ſe æquales, cuiuſmodi ſunt HA, LB, IC, MD, NE, OF. Hæ enim cum, vt demonſtratum eſt, per centrum tranſeant, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentium, minimæ; (Hoc enim demonſtratum eſt ab Eucl. propoſ. 8. lib. 3. quæ ſolum ex propoſitionibus, quæ 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri poſſit) atq́ adeo eorum diſtãtias à ſubiecta linea circulari metientur. Dico lineam HLIMNO, eſſe circularem. Cum enim omnes illæ, vt proxime oſtendimus, per centrum G, tranſeant; ſi æqualibus HA, OF, addantur æquales AG, FG, erunt totæ HG, OG, æquales; eademq́ ratione omnes aliæ ex linea inflexa HLIMNO, ad G, ductæ æquales erunt & rectis HG, OG, & inter ſe. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis eſt. Quod erat demonſtrandum. Ex hoc primo, quod præmiſimus, ſequitur ſecundum: videlicet.

II.

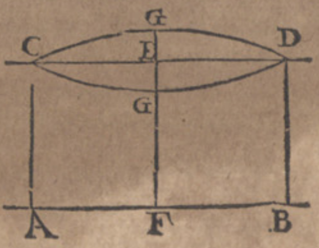
SI recta linea ſuper aliam rectam in tranſuerſum moueatur, conſtituens in ſuo extremo cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

VT ſi in priore figura recta AD, ad DC, perpendicularis moueatur in tranſuerſum ſuper rectam DC, conſtituens cum ea in D, ſemper rectos angulos, hoc eſt, non titubans, aut vacillans, ſed æquabiliter ſemper incedens, deſcribet extremum A, rectam quoq́ lineam, nempe AB. Conſtat hoc ex eo, quod primo loco præmiſimus; propterea quod omnia puncta lineæ AB, deſcriptæ æqualiter à recta DC, diſtant, nimirum per rectã AD. Ex quo fit, ipſam lineam rectã eſſe, cum, vt ibi dictum eſt, eius media ab extremis non ſubſultent, ſed æqualiter inter ipſa iaceant, quippe cum nullum eorum magis aut minus à recta CD, abſcedat ſurſum, aut deorſum vergendo, quam aliud. Patet hoc etiam ex ijs, quæ ad definitionem lineæ rectæ ſcripſimus. Cum enim duo puncta D, A, ſimilibus prorſus motibus ferantur, (quod recta AD, in ſuo motu non titubet, aut vacillet, ſed puncta D, A, æque velociter incedant, æqualiterq́ ſemper inter ſe diſtent.) deſcribent vtiq́ lineas ſimiles, vt in eadem definitione docuimus. Cum ergo punctum D, rectam DC, deſcribat, erit quoq́ linea AB, quam punctum A, deſcribit, recta. Neque vero imaginari quis poterit, ſi linea recta in tranſuerſum moueatur vniformiter ſine vlla titubatione huc atq́ illuc, duo puncta eius extrema deſcribere duas differentes inter ſe lineas; ſed qualem vnum extremum deſcribit, talem quoq́ ab altero extremo deſcribi neceſſe eſt, propter vniformem illum, æquabilemq́ motum vtriuſq́ puncti extremi. Eſt principium hoc æque clarum, & euidens, atq́ antecedens.

CONTINGIT autem idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea ſuper lineam circularem in tranſuerſum fluens æquabiliter, conſtituens nimirum in ſuo extremo cum circulari æquales ſemper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atq́ illuc, circularem lineam altero ſuo extremo deſcribit, ita vt naturam circularis lineæ ſubiectæ, à qua æqualiter ſemper diſtat, linea illa deſcripta induat: quemadmodum linea recta AD, ſuper rectam DC, in tranſuerſum fluens æquabiliter, conſtituens nimirum cum ea in ſuo extremo D, angulos ſemper rectos, ita vt nuſquam declinet, huc atq́ illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam AB, altero extremo A, delineat: adeo vt linea deſcripta AB, naturam induat rectæ lineæ ſubiectæ DC, à qua æqualiter ſemper recedit. Rectam autẽ, quæ ſuper lineam circularem in tranſuerſum fluit æquabiliter, deſcribere altero ſuo extremo lineam quoq́ circularem, facile demonſtrabimus. Moueatur enim in figura poſteriore recta HA, in tranſuerſum ſuper peripheriam ABCDEF, æquabiliter, faciens ſemper in extremo A, cum ea angulos æquales. Dico lineam HLIMNO, ab altero extremo H, deſcriptam eſſe quoq́ circularem. Cum enim recta HA, in omni ſitu motus illius imaginarij faciat æquales angulos cum peripheria ABCDEF, fit, vt ea producta in centrum G, cadat, vt ſupra oſtendimus. Quare additis rectis æqualibus HA, OF, ad rectas æquales AG, FG, fient totæ rectæ HG, OG, & omnes aliæ, inter ſe æquales: ac propterea ex defin. circuli HLIMNO, circumferentia circuli erit. Quod oſtendendum erat. Hinc ſequitur tertium.

III.

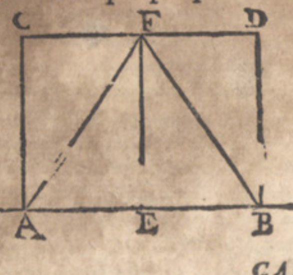
SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demiſſa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



SINT ad rectam AB, erectæ duæ perpendiculares AC, BD, inter ſe æquales: Et ducta recta CD, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad AB, perpendicularis EF. Dico EF, vtriq́ AC, BD, eſſe æqualem. Si namq́ æqualis non eſt, erit vel maior, vel minor. Abſciſſa ergo æquali FG, ſi intelligatur recta AC, moueri in tranſuerſum per rectam AB, faciens cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet punctum C, lineam rectam per G, tranſeuntem, vt ſupra oſtenſum eſt, qualis eſt CGD. Duæ ergo rectæ CED, CGD, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Æqualis igitur eſt EF, vtriq́ AC, BD. Quod erat oſtendendum. Ex hoc quartum, quod ſequitur, demonſtrabimus.

IV.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarũ extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.



SINT ad rectam AB, erectæ duæ perpendiculares AC, BD, æquales inter ſe, ducaturq́ recta CD. Dico vtrumq́ angulum C, D, rectum eſſe. Secta namq́ recta AB, biſariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, iunganturq́ rectæ AF, BF. Quoniam igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, æqualia ſunt, vtrumq́ vtriq́, anguloſq́ continent æquales, puta rectos [a] erunt quoq́ & baſes AF, BF, & tam anguli FAE, FBE, quam AFE, BFE, inter ſe æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis FAE, FBE, ex rectis æqualibus CAE, DBE, reliqui erunt æquales anguli

[a] 4. pri.

a 4. primi. CAF,DBF. Itaq; cum duo latera CA,AF,trianguli CAF,duobus lateribus DB,BF, trianguli DBF, æqualia ſint, anguloſque complectantur æquales,vt oſtendimus, [a] erunt quoq; & baſes CF,DF,& tam anguli C, D,quam CFA,DFB,inter ſe æquales. Si ergo æqualibus angulis CFA,DFB, addantur anguli AFE,BFE,oſtenſi æquales,fient toti anguli CFE,DFE, æquales,ac proinde recti. Quia vero perpendicularis EF,vtriq; AC,BD,æqualis eſt, vt proximo theoremate oſtendimus, erunt duæ rectæ AC, EF,ad AE,perpendiculares,inter ſe æquales. Quare,vt de angulis C, D, proxime probatum eſt, anguli C,& EFC, æquales inter ſe erunt. Eſt autem EFC,oſtenſus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D,qui oſtenſus eſt ipſi C, æqualis.

Cæterum angulos C,D,rectos eſſe,demonſtrabimus alio modo,hoc prius theoremate præmiſſo.

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum,& cum altera ex eadem parte acutũ, duæ illę rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera vero parte ſemper inter ſe magis diſtabunt.



Recta linea AB,in rectas AC,BD,incidens,faciat angulum ABD,rectum,&BAC, acutum.Dico rectas AC,BD,minus ſemper inter ſe diſtare verſus C,D, productas,magis
b 12.primi. vero,ſi verſus E,F, producantur. [b] Ducatur enim ex B,ad AC,perpendicularis BG, quæ ex coroll.2. propoſ.17. huius lib.ad partes acuti anguli BAC,cadet, ac propterea angulus GBD,pars recti anguli ABD,acutus erit.Demiſſa ergo ex G,ad BD,perpendicularis GH, cadet quoq; ad partes anguli acuti GBD, ex eodem coroll. anguluſq; propterea HGC, pars recti anguli BGC, acutus erit. Rurſus ergo ducta perpendicularis HI, ad AC,per idem coroll. ad partes acuti anguli HGC, cadet, ideoq; angulus IHD, pars recti anguli GHD,acutus erit. Atq; ita deinceps in infinitum,ſi ex I,ad BD,perpendicularis IK,ducatur,& ex K, perpendicularis KC, ad AC,& ex C,ad BD,perpendicularis CD, &c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum,vna poſt aliã. Quoniã igitur in
c 19.primi. triangulo ABG,angulus BAG,acutus eſt,& AGB,rectus [c] erit recta AB,maior q̃ BG:& in triangulo BGH,recta BG,angulo recto GHB,oppoſita,maior q̃ GH;& in triangulo GHI,recta GH, maior q̃ HI:Atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ,quæ ipſi AB, ꝓpiores ſunt,maiores ijs,q̃ remotiores ſunt,& nunquã finis erit huius decremẽti ꝑpendicularium. Quapropter recta AC,in G, minus diſtabit à recta BD,q̃ in A,& in I,minus q̃ in G,& in C,minus q̃ in I,&c.quãdoquidẽ perpendiculares AB,GH,IK,CD, &c.quæ ordinatim decreſcũt,vt oſtẽdimus,minimæ ſunt omniũ à punctis A,G,I,C,in rectã BD,cadentiũ, vt ex coroll. propoſ. 19.huius lib.liquet,ac proinde eorundẽ punctorũ diſtantias ab eadem recta BD,metiuntur.Conſtat ergo,rectas AC,BD,ad partes C,D,productas continenter fieri minus inter ſe diſtantes,quod eſt primum.

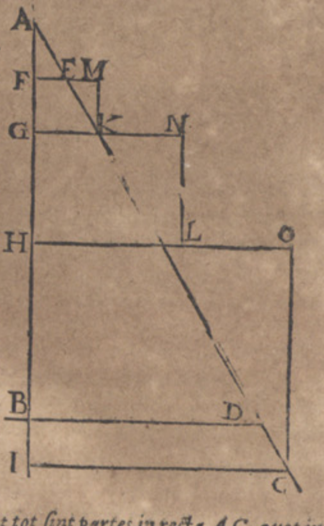
d 11. primi. Ducatur rurſus [d] ex A,ad AC,perpendicularis AL,quæ angulum obtuſum BAE,partietur in rectum EAL,& acutũ LAB,hoc eſt,
e 17.pri. cadet inter AB,& AE,eritq; angulus ALB,acutus,cum ambo ABL, ALB,[e] ſint duobus rectis minores,atq; ABL, rectu[s], ac proinde angulus ALF,obtuſus erit.Eadẽ ratione perpendicularis LM,ex L, ad BF,ducta,cadet inter LA,LF,facietq; angulum LMA,acutum,& LME,obtuſum:Item perpẽdicularis MN,ex M,ad AE,erecta cadet inter ML,ME,angulumq; MNB,acutum, & MNF,obtuſum conſtituet. Atq; ita deinceps in infinitum,ſi ex N,ad BF, perpendicularis erigatur NO, & ex O,ad AE, perpendicularis OP,& ex P,ad BF,perpendicularis PE,& ex E,ad AE,perpendicularis EF, &c. diuident omnes ſigillatim angulos obtuſos,vnæ poſt aliam.
f 19. pri. Quoniam igitur in triangulo ABL,angulus ABL, rectus eſt,& ALB,acutus [f] erit AL,recta maior,quã AB, & in triangulo ALM, recta LM, angulo recto LMA,oppoſita,maior quam AL; atq; in triangulo LMN, recta MN, recto angulo MLN, oppoſita, maior quam ML:atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ,quæ ab AB,longius abſunt,maiores ijs,quæ propinquiores ſunt,in infinitũ. Quamobrem recta AE,in M,magis à recta BF,diſtabit,quam in A,& in O,magis,quam in M,& in E,magis,quam in O,&c.quandoquidẽ perpendiculares AB,ML,ON,EP,&c.quas ordinatim augeri oſtenſum fuit, minimæ ſunt omniũ ex punctis A, M, O,E,in rectã BF,cadentiũ,&c.Liquido ergo conſtat,rectas AC,BD,ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter ſe diſtantes, quod eſt ſecundum. Quod ſi proteruus quiſpiã vellet cõtendere,rectã AL,quæ ad AC,perpendicularis eſt,non concurrere cũ DB,producta, conſtabit multo magis id,ꝙ demõſtrandũ proponitur.Nã linea DB,vltra punctũ B,multo magis à recta CA diſtabit,quã in puncto B,quãdoquidẽ AL, ad AC,perpendicularis in infinitũ producta non cõcurrit cũ DB,cũ tamẽ GB,ad eandẽ AC,perpendicularis cũ DB,concurrat in B,&c.

Hæc cũ ita ſint,nullo negotio demõſtrabimus,in ſuperiori figura angulos C,D,eſſe rectos.Nã ſi angulus C, verbi gratia,non dicatur eſſe rectus,erit vel acutus,vel obtuſus. Sit primũ acutus.Quoniã ergo recta CA,in rectas AB,CD,incidens efficit angulũ CAB,rectũ,& C,acutũ,minus ſemper inter ſe diſtabũt rectæ CD,AB,ad partes D,B,productæ,h.e. perpendiculares ex CD,in AB,demiſſæ ordinatim minores fient,quã CA,vt proxime demonſtratũ eſt.Minor ergo eſt perpendicularis DB,q̃ CA, quod eſt abſurdũ,cũ ponatur æqualis.Non igitur acutus eſt angulus C.Eademq; ratione neq; angulus D,acutus erit.Sit deinde angulus C,obtuſus.Quia igitur recta CA,in rectas CD,AB,incidens facit angulũ CAB,rectũ, & B, obtuſum, magis ſemper inter ſe diſtabunt rectæ CD,AB,ad partes D,B,productæ,h.e.perpendiculares ex CD,in AB, demiſſæ continenter augebũtur, vt proximè oſtendimus. Maior ergo eſt perpendicularis DB,q̃ CA,quod eſt abſurdũ,cum æqualis ponatur. Non igitur obtuſus eſt angulus C.Eademq; ratione neq; angulus D,obtuſus erit.Sed neq; acutus eſt oſtenſus.Rectus igitur vterq; eſt,quod erat oſtendendum.

Ex his demonſtratis,facile iam Axioma 13.demonſtrabimus hoc modo.

V.

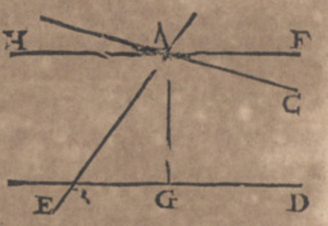
Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.



Hoc eſt Axioma 13.apud Euclidem in noſtris commentrrijs:apud alios eſt vndecimũ, quod demonſtrandũ ſuſcepimus.Incidens ergo recta AB,in rectas AC,BD,faciat internos,ad eaſdẽq; partes angulos ABD, BAC,duob.rectis minores. Dico rectas AC,BD,ad partes C,D,productas coire. Sit n.primũ alter angulorũ, nempe ABD,rectus,& alter BAC, acutus.Sumpto in recta AC,pũ-
g 12 primi. cto quolibet E,[g] ducatur ex eo ad rectã AB,perpendicularis EF, & rectæ AF, æqualis accipiatur FG,& GH,æqualis ipſi AG,& HI,ipſi AH,ita vt AG,ipſius AF,& AH, ipſius AG,& AI,ipſius AH,dupla ſit.Et quoniam ſi rectæ AF,abſcindantur continue æquales rectæ ex AB,aliqua tãdẽ pars vltra B,punctũ cadet,ꝙ finita recta AB,per continuã ablationẽ vnius eiuſdẽq; quãtitatis abſumatur tandẽ,quandoquidẽ linea AF,ita multiplicari poteſt,(ꝙ fit, ſumendo ipſi in AB,continenter partes æquales) vt tandẽ aliquando finitã lineã AB,ſuperet. Id ꝙ Euclid. frequenter aſſumit in lib.5.& alijs ſequentib.vbi datis duab.magnitudinib. inæqualib. proportionẽ inter ſe habentib.iubet plerunq; minorem ita multiplicari, donec maiorẽ ſuperet. Fit vt multo magis, ſi ipſi AF,æqualis abſcindatur FG,& toti deinde AG,non autẽ ſoli AF,æqualis auferatur GH:Itẽ toti AH,non autẽ ſoli AF,vel AG,æqualis dematur HI,& ſic deinceps,cadat tandẽ pars aliqua vltra punctũ B.Statuatur ergo punctũ I,terminans tertiã duplã in dato exẽplo,exiſtere vltra punctũ B. Accipiatur quoque in recta AC, recta EK,ipſi AE, & KL, ipſi AK,& LC,ipſi AL,æqualis,ita vt tot ſint partes in recta AC, quot in recta AI:ducanturq; rectæ KG,LH,CI,producanturq; vna cũ EF,vt EM,KN,LO,ipſis EF,KG, LH, fiant æquales, ac tandẽ rectæ iun-
h 15. primi. gantur MK, NL, OC. Itaq; quoniam duo latera KE, EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli AEF,per
i 4.primi. conſtructionem æqualia ſunt, vtrumque vtrique, [h] anguloſque ad verticem E, continent æquales, [i] erit & baſis MK,

baſi AF, & angulus M, angulo F, æqualis. Eſt autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus, ex conſtructione. Igitur c1. pron.
& MK, FG,[c] æquales inter ſe erunt, & angulus M, quoq; rectus. Quare cum ad FM, excitatæ ſint duæ perpendiculares æqua-
les FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rurſus ergo, quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus la-
teribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia ſunt, ex conſtructione,[d] anguloſq; cõprehendunt æquales ad K, verticem,[e] erit & d15. primi
baſis NL, baſi AG, & angulus N, angulo G, æqualis. Eſt autem & GH, ex conſtructione, eidem AG, æqualis, & angulus G, re- e 4. prim.
ctus, vt proxime demonſtratum eſt. Igitur & NL, GH, inter ſe[f] erunt æquales, & angulus N, quoq; rectus. Quocirca per f 1. pron.
præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione oſtendemus angulum I, rectum eſſe: atq; ita deinceps, ſi
plures eſſent partes rectæ AB. Eſt autẽ & angulus B, per hypotheſin rect⁹ igitur rectæ IC, BD,[g] parallelæ ſunt: ac propterea BD g 28. primi
producta, rectam AC ſecabit, ſupra punctũ C; atq; adeo in puncto illo ſectionis rectæ AC, BD, coibũt. Quod erat demonſtrandũ.

SIT deinde neuter angulorum ABD, BAC, rectus, ſed ABD, quidem acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtuſus. Quia
igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis ponuntur minores;[h] ſunt autem duo anguli ABD, DBE, duobus rectis æquales: h 13. primi
erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus DBE,
reliquo BAC.[a] conſtituatur in A, ad rectam AB, angulus BAF, angulo DBE, æqualis: Ca- a 23. pri.
detq; recta AF, ſupra rectam AC, cum AF, maiorem angulum cum AB, conſtituat, quàm
AC. Quia igitur externus angulus DBE, interno BAF, ex eadem parte oppoſito æqualis b 28. primi
eſt,[b] erunt rectæ AF, BD, inter ſe parallelæ. Demittatur quoq; ex A. ad BD,[c] perpendi- c 12. primi.
cularis AG, quæ ex coroll. 2. propoſ. 17. huius lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet: Erit-
que angulus quoq; GAF, rectus. Nam ſi acutus eſſe dicatur, efficiet recta AG, in rectas
AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum, ac proinde, vt proxime de-



monſtrauimus, rectæ AF, BD, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod eſt abſurdum. Oſtenſæ enim ſunt parallelæ. Si
autem angulus GAF, dicatur eſſe obtuſus, erit GAH, acutus. Quare ex proxime demonſtratis, coibunt rectæ AF, BD, ad partes
H, B, productæ, quod eſt abſurdum, cum parallelæ ſint oſtenſæ. Non eſt ergo angulus GAF, acutus, aut obtuſus. Igitur rectus,
ac proinde eius pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC,
acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ, vt proxime demonſtrauimus. Si igitur recta AB, in rectas AC,
BD, incidens, faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipſæ rectæ AC, BD,
ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat oſtendendum. Quòd ſi quando accidat, rectam AC, exiſtere inter AB, & per-
pendicularem AG, liquido conſtat, rectas AC, BD, coire, quòd tunc AC, baſem BG, trianguli ABG, ſecaret. Quod vt facilius
capias, ducere poteris rectam AC, inter AB, AG.

QVAMVIS autem, conceſſo principio noſtro, optime à nobis demonſtratum ſit tertiumdecimum hoc Axioma, & à Proclo etiam, ſi eius principium difficilius quidem, quam noſtrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia poſſit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propoſitionibus, quarum demonſtrationes ex ipſo pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad ſeriem propoſitionum Euclidis reuertamur.

THEOR. 20. PROPOS. 29. xxix.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter ſe æquales efficit; & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB, CD, recta incidat EF. Dico primum, angulos alternos AGH, DHG, inter ſe eſſe æqua-
les. Si enim non ſunt æquales, ſit alter, nempe AGH, maior. Quoniam igitur angulus AGH, maior eſt angulo
DHG, ſi addatur communis angulus BGH, *a* erũt duo AGH, BGH, maiores duobus DHG, a 4. pron.
BGH: At duo AGH, BGH, *b* æquales ſunt duobus rectis. Igitur duo DHG, BGH, minores b 13. primi.
ſunt duobus rectis. Quare cum ſint interni, & ad eaſdem partes, B, & D, *c* coibunt lineæ AB, c 13. pron.
CD, ad eas partes, quod eſt abſurdũ, cũ ponãtur eſſe parallelæ. Non eſt igitur angulus AGH,
maior angulo DHG: Sed neque minor. Eadem enim ratione oſtenderetur, rectas coire ad



partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli, alterni AGH, DHG. Eademque eſt ratio de angulis alternis
BGH, CHG.

DICO ſecundò, angulum externum AGE, æqualem eſſe interno, & ad eaſdem partes oppoſito CHG.
Quoniam enim angulo BGH, æqualis eſt alternus CHG, vt oſtenſum eſt; & eidem BGH, *d* æqualis eſt angulus d 15. pri.
AGE. Erunt anguli AGE, CHG, *e* inter ſe quoq; æquales. Eodem modo demonſtrabitur, angulum BGE, æ- e 1. pron.
qualem eſſe angulo DHG.

DICO tertiò, angulos internos ad eaſdem partes, AGH, CHG, æquales eſſe duobus rectis. Quoniam
enim oſtenſum fuit, angulum externum AGE, æqualem eſſe angulo CHE, interno; ſi addatur communis
AGH, *a* erunt duo AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo AGE, AGH, *b* æquales ſunt duobus a 2. pron.
rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, du- b 13. pri.
obus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod
erat demonſtrandum.

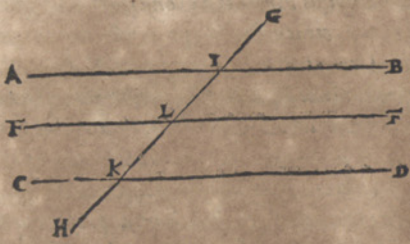
SCHOLIVM.

CONVERTIT autem hoc præſens theorema duo præcedentia theoremata, vt perſpicuum eſt.

THEOR. 21. PROPOS. 30. xxx.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ & inter ſe ſunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipſas AB, CD, eſſe inter ſe paralle-
las. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur eſſe plano, (Nam propoſ. 9. vndecimi libri age-
tur de lineis in diuerſis planis) ducta recta GH, ſecabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L.
Quia igitur AB, ponitur parallela ipſi EF, *c* erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rurſus quia CD, c 29. pri.



d 29. primi

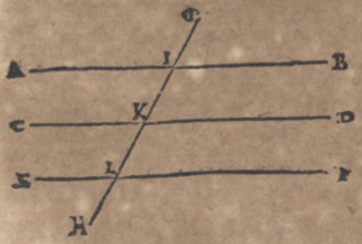
e 1. pron.

f 27. primi.

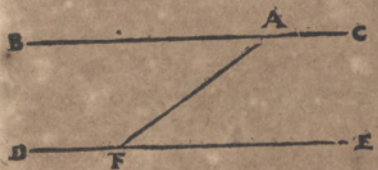
ponitur etiam parallela ipſi EF, *d* erit angulus D KI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, *e* æquales inter ſe quoque erunt. Cum igitur ſint alterni, *f* erũt rectæ AB, CD, parallelæ inter ſe. Quæ igitũ eidẽ rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ. Quod demonſtrandũ erat.

S C H O L I V M.

QVOD ſi quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas eſſe rectæ C D, & tamen ipſas non eſſe parallelas; Occurrendum eſt, duas AI, BI, non eſſe duas lineas, ſed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim eſt animo, quaslibet parallelas infinite eſſe productas; Conſtat autem A I, productam coincidere cum B I. Quamobrem propoſitio hæc generalius ita poterat proponi.



QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ: vel certe, quando inter ſe coeunt, vnam eandemq; lineam conſtituunt.



a 29. pri.

b 2. pron.

c 29. primi.

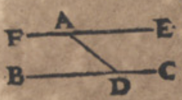
d 14. primi.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, coeuntes in A, parallelæ ipſi DE. Dico illas in rectum eſſe conſtitutas. Ex pũcto enim A, ducatur recta AF, ſecans DE, in F, vtcũq; Quoniam igitur AB, DE, ſunt parallelæ, [a] *erunt anguli alterni BAF, AFE, æquales. Addito ergo communi angulo CAF,* [b] *erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis CAF, AFE. Sed hi duo* [c] *æquales ſunt duobus rectis, cum ſint interni inter duas parallelas AC, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erunt rectis æquales; ac propterea* [d] *in rectum erunt conſtitutæ ipſæ AB, AC. Quod eſt propoſitum.*

xxxj.

PROBLEMA 10. PROPOSITIO 31.

A Dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.



e 23. primi.

f 27. pri.

EX puncto A, ducenda ſit linea parallelæ lineæ B C. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, vtcumque, faciens angulum quemcunque ADB; Cui ad A, *e* æqualis conſtituatur EAD. Dico rectam E A, extenſam ad F, quantumlibet, parallelam eſſe ipſi B C. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales ſint, per conſtructionem, *f* Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

S C H O L I V M.

DEBET *autem punctum datum in tali eſſe loco ſitum extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipſa conſtructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda eſt linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non poſſet, ſi punctum in directum iaceret cum ipſa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt oſtendimus propoſ. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quam vna, duci nequeunt: Si enim duæ ducerentur, conuenirent ipſæ in puncto illo eodem, quod eſt abſurdum,* [a] *cum ſint parallelæ inter ſe, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, ſunt parallelæ.*

a 30. primi.

EX *hoc porro problemate, & illo, quod propoſ. 23. continetur, facili negotio conſtituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illũ comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.*

SINT *enim datæ rectæ A, B, oporteatq; conſtituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta DE, quæ rectæ A, ſit æqualis,* [b] *fiat angulus EDF, angulo C,* [c] *& recta DF, rectæ B, æqualis. Deinde per E,* [d] *agatur recta EG, ipſi DF, parallela, & per F, recta FG, ipſi DE, parallela ſecans EG, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela ſunt, ex conſtructione;* [e] *parallelogrammũ erit DEGF. Quod cum ex conſtructione habeat angulũ D, angulo dato C, æqualẽ, & latera DE, DF, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factũ erit, quod proponitur.*

b 23. prim.

c 3. primi.

d 31 primi.

e 35. deſin.



PARI *ratione ex hoc problemate, & propoſ. 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam propoſito lineæ rectam, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propoſ. 23. polliciti ſumus.*

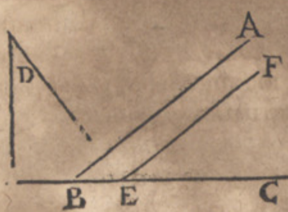
SIT *enim datum punctum A, extra rectam BC, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A, ad rectam BC, ducere lineam rectam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea BC,* [a] *conſtituatur in eo angulus CEF, angulo D, æqualis. Si igitur recta EF, per datum punctum A, tranſeat, factum erit, quod iubetur. Si vero non tranſeat per A,* [b] *ducatur per A, recta AB, ipſi EF, parallela ſecans BC, in B. Dico angulum ABC, angulo D, æqualem eſſe. Cum enim parallelæ ſint, AB, EF,* [c] *erit angulus CE F, externus interno ABC, ex eadem parte oppoſito æqualis. Cum ergo & angulus D, angulo E, per conſtructionem ſit æqualis,* [d] *æquales inter ſe erunt anguli A B C, & D, quod eſt propoſitum.*

a 23. primi.

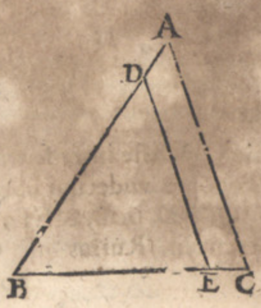
b 31. primi.

c 29. primi.

d 1. pron.



NON *videtur autem alienum oſtendere hoc loco, recte Euclidem propoſ. 26. vt demonſtraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris, præcepiſſe, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certe ſubtendere angulum æqualem. Nam niſi altera harum conditionum adſit, nihil colligetur.*



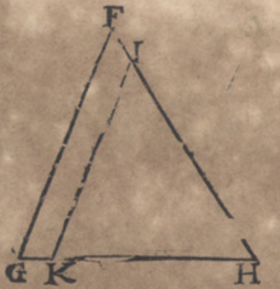
e 31. pri.

f 29. pri.

Sit enim triangulum A B C, ſintq; latera AB, AC, latere BC, maiora. Abſcindatur BD, æqualis ipſi BC, [e] *ducaturq; DE, ipſi AC, parallela,* [f] *eritq; angulus B E D, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli ABC, duobus angulis B, E, trianguli DBE, æquales ſunt, vterque vtrique, latusq; BC, lateri DB, æquale; cum tamẽ reliqua*

latera

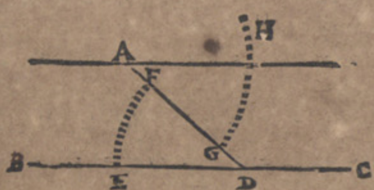
latera reliquis lateribus æqualia non ſint. Eſt enim BE, minus, quam BC, atq; adeo neque lateri AC, neque lateri AB, æquale eſſe poteſt; quod hæc latera maiora ponantur latere BC. Cauſa huius rei eſt, quod latus BC, in triangulo ABC, adiacet angulis dictis, at latus DB, in triangulo DBE, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo DEB, qui angulo C, æqualis eſt.



SIT rurſus triangulum FGH, ſintque iterum latera FG, FH, latere GH, maiora, & FH, maius quam FG. Abſcindatur HI, ipſi FG, æqualis, [g] ducaturque IK, ipſi FG, parallela: [h] eritque angulus HKI, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli FGH, duobus angulis H, K, trianguli IKH, æquales, vterque vtrique, latusque FG, lateri IH, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non ſint. Eſt enim HK, minus, quam HG, atque adeo neque lateri HG, neque lateri FH, æquale eſſe poteſt; quod latus FH, maius etiam ponitur, quàm GH. Ratio huius rei eſt, quod latus FG, in triangulo FGH, opponitur angulo H, at latus IH, opponitur angulo K, in triangulo IKH, qui non ponitur æqualis angulo H. ſed angulo G, eſt æqualis, [i] qui maior eſt angulo H, propterea quod latus FH, maius poſuimus latere FG. Diſtulimus hanc demonſtrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

g 31. primi.
h 29. primi.
i 18. primi.

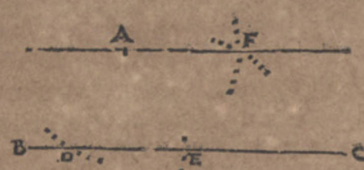
PRAXIS.



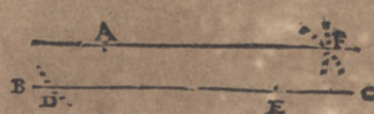
SIT ducenda parallela ipſi BC, per punctum A. Ducatur recta AD, vtcunque ad BC, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet deſcribantur duo arcus ad diuerſas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C. Deinde beneficio circini arcui EF, abſcindatur ex arcu altero arcus GH, æqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, [k] erit hæc parallela ipſi BC. Nam alterni anguli EDF, HAG, ſunt æquales, vt conſtat ex praxi propoſ. 23. &c.

k 27. primi.

ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela lineæ datæ BC, hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum deſcribatur arcus ſecans BC, in puncto D; & eodem interuallo ex D. ſumatur punctum E, in eadem recta BC. Deinde eodem interuallo ex A, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Nã ducta recta AF, erit parallela rectæ BC. Quoniam enim propter idem interuallũ aſſumptũ recta [illegible], æqualis eſt rectæ DE; & recta AD, rectæ EF, ſi ducerentur hæ lineæ; erit AF, oppoſitæ DE, parallela, vt poſtea demonſtrabimus propoſ. 34.

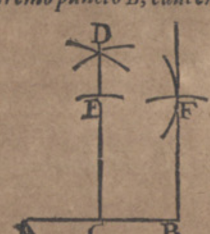


QVOD ſi punctum A, vicinum fuerit rectæ BC, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, ſumatur punctum D, in BC, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiuſdem rectæ BC, nempe E, quod tamen aliquantulum diſtet à puncto D, (Quo enim maior fuerit diſtantia inter D, & E, eo facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus deſcribatur ad partes A: Deinde ex A, interuallo DE, alter arcus deſcriptus ſecet priorem arcum in F. R[illegible] namque ducta AF, erit parallela rectæ BC, vt prius; quia recta AF, æqualis eſt rectæ DE, ob idem interuallum; & recta AD, rectæ EF, ſi hæ rectæ ductæ eſſent, &c.



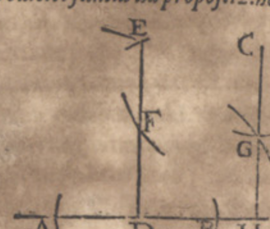
SED longe facillimam rationem ducendi parallelam alicui lineæ per datum punctum tradidimus in noſtro Aſtrolabio lib. 1. lemmate 4.

EX his facile ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularem lineam ad ipſam datam lineam, etiamſi linea produci non poſſit, quod in ſcholio propoſ. 11. promiſimus. Sit enim recta AB, ex cuius extremo puncto B, educenda ſit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abſcindatur rectæ CB, æqualis CA, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus deſcribantur ſecantes ſeſe in D, ducaturque recta DC, quæ ad AB, perpendicularis erit, vt ad propoſ. 11. ſcripſimus. Deinde per B, ducatur ipſi CD, parallela, hoc modo, ſecundum praxim huius 31. propoſitionis proxime explicatam. Ex CD, abſciſſa recta quantacunque CE, deſcribatur ex B, ad interuallum CE, arcus, quem in F, ſecet alius arcus ex E, ad interuallum CB, deſcriptus; ducaturque recta BF. Hæc namque ipſi CD, parallela erit, vt ex praxi huius propoſ. 31. liquet. Igitur cum angulus ACD, [l] æqualis ſit interno CBF; ſit autem ACD, rectus, erit & CBF, rectus, ac proinde BF, ad AB, perpendicularis erit.



l 29. primi

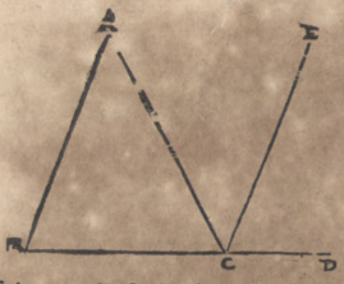
SIMILITER ſi data ſit recta AB, & punctum extra ipſam C, in extremo fere plani, in quo recta illa iacet ducemus ex C, ad AB, perpendicularem, neque producta linea, neque extenſo plano infra rectam AB, vt polliciti ſumus ad propoſ. 12. hoc modo. Sumpto pũcto D, vtcunq; in linea AB, abſcindãtur vtrinq; inter ſe æquales DA, DB, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus deſcribantur ſecantes ſeſe in E, ducaturque recta ED, quæ ex praxi propoſ. 11. ad AB, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipſi DE, parallela, hoc modo, ſecundum praxim huius propoſ. 31. Ex dato puncto C, ad quoduis interuallum deſcribatur arcus ſecans rectam DE, in F, eodemq; interuallo ex D, verſus C, alius arcus deſcribatur, quem in G, interſecet alius arcus ex C, ad interuallum DF, delineatus. Recta namq; ducta ex C, per G. ſecãs AB, in H, parallela erit rectæ DE, ex praxi huius propoſ. 31. Quare, vt proxime ſcripſimus, CH, ad AB, perpendicularis erit, ſicuti & ED, ad eandẽ perpendicularis eſt.



THEOR. 22. PROPOS. 32.

xxxij.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.



PRODVCATVR in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primò, angulum externum ACD, æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis ſimul A,
b 31.primi. & B. *b* Ducatur enim ex C, linea CE, parallela rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, *a* erunt anguli alterni A, & ACE, æqua-
a 29.primi. les. Rurſus, quia recta BD, in eaſdem parallelas incidit, *b* erit angulus exter-
b 19 primi. nus DCE, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus ACE, & A, *c* fiet totus
c 2. pron. ACD, (qui ex duobus DCE; ACE, componitur) duobus A, & B, ſimul ęqualis. Quod eſt propoſitum.

DICO ſecundò, tres angulos internos eiuſdem trianguli A, B, & ACB, duobus eſſe rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, vt oſtenſum
d 2. pron. fuit, æqualis ſit duobus internis A, & B; ſi addatur communis ACB, *d* erunt duo anguli ACD, ACB, æquales
e 13.primi. tribus A, B, & ACB: Sed duo ACD, ACB, *e* æquales ſunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, ACB, duobus ſunt rectis æquales. Quare cuiuſcunque trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit propoſ. 16. angulum externum cuiuſuis trianguli maiorem eſſe vtrolibet interno, & oppoſito, hic autem, eundem externum eiſdem internis ſimul eſſe æqualem, perſpicuum eſt, alterutrum internorum, & oppoſitorum ſuperari ab externo, reliquo interno angulo oppoſito. Vt in triangulo propoſito angulus A, internus ſuperatur ab angulo externo ACD, angulo B, interno: Et angulus B, internus ſuperatur ab eodem externo angulo ACD, angulo A, interno, quandoquidem angulus ACD, duobus angulis A, & B, eſt oſtenſus hoc loco æqualis. Rurſum, quia demonſtratum eſt propoſ. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque ſumptos, duobus eſſe rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales eſſe; manifeſtum eſt, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, à duobus rectis deficiunt angulo ACB, &c.

OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei
a 31.primi. *demonſtrarunt hac ratione. Sit triangulum ABC, & per punctum A,[a] ducatur rectæ BC, parallela DE. Quoniam igitur[b] an-*
b 29.prim. *guli alterni DAB, & ABC, æquales ſunt; ſi addantur æquales EAC, & ACB, (ſunt enim & hi alterni)[c] erũt*
c 2. pron. *duo anguli DAB, EAC, duobus ABC, ACB, æquales. Addito ergo communi angulo BAC,[d] erunt tres anguli*
d 2.primi. *DAB, BAC, CAE, æquales tribus angulis ABC, BAC, ACB. Sed anguli DAB, BAC, CAE, æquales ſunt duobus rectis, vt conſtat ex propoſ. 13. Igitur & in triangulo ABC, anguli ABC, BAC, ACB, duobus ſunt rectis æquales, quod eſt propoſitum, Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum ACF, ſi latus BC, ſit protractum, æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis ABC, BAC. Quoniam enim anguli ABC, BAC, ACB, æquales ſunt duobus rectis, vt oſtenſum fu-*
e 13. primi. *it.[e] Sunt autem & anguli ACF, ACB duob. rectis æquales; Erunt anguli ABC, BAC, ACB, angulis ACF, ACB, æquales. Dem-*
f 3. pron. *pto igitur communi angulo ACB,[f] remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis.*



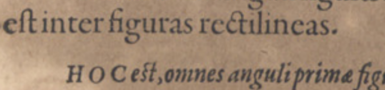
FACILE etiam conuerti poterit prima pars propoſitionis Euclidis: Hoc eſt, ſi ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis ſit duobus internis, & oppoſitis, illam lineam eſſe in directum ipſi lateri conſtitutam. Ex C, enim ducatur CD, recta, ſitque angulus ACD, æqualis duobus angulis ABC, BAC. Dico rectas BC, CD, in directum iace-
g 2. pron. *re. Cum enim angulus ACD, æqualis ſit angulis ABC, BAC, ſi addatur communis angulus ACB,[g] erunt anguli ACD,*
h 32.prim. *ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC, BAC, ACB,[h] æquales ſunt duobus rectis. Igitur & anguli ACD,*
i 14.primi. *ACB, duobus erunt rectis æquales.[i] Quare BC, CD, vnam lineam rectam conſtituunt.*

QVOT ANGVLIS RECTIS ÆQVIVALEANT ANGVLI OMNES INTERNI CVIVSCVNQVE FIGVRÆ RECTILINEÆ.

DVOBVS modis ex hac propoſ. 32. colligemus, quotnam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic eſt.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis ſunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas.

HOC eſt, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis vni recto, id eſt duobus rectis; Anguli vero ſecundæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis tribus rectis, ſex videlicet rectis, Et ſic de reliquis. Eum autem locum quælibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, ſeu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ ſuperficiem non concludunt, vnde nec figuram conſtituunt, ſed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ conſtitutionem requiruntur. Ex quo fit, triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, eſſe primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera ſeu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius ſubtractus ex 20. relinquat 18. Idem iudicium de aliis figuris eſt habendum. Itaq; figura contenta 20. lateribus, cum ſit decimaoctaua, habebit 20. angulos æquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum eſt. Ita quoque omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura ſit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonſtrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipſa eſt inter figuras, ſeu quot ipſa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam à quouis angulo ipſius ad omnes angulos oppoſitos duci poſſunt lineæ rectæ, ſolum ad duos propinquos angulos nos poſſunt duci. Quare in tot triangula diſtribuetur, quot ipſa habet angulos, demptis duobus illis angulis.



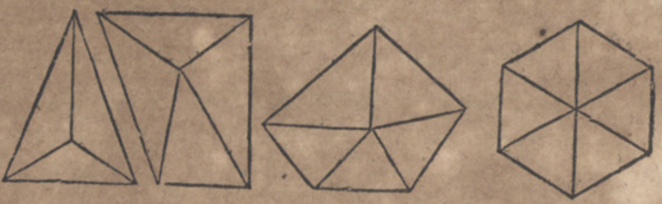
Sic vides, triangulum non poſſe diuidi in alia triangula; quadrangulum vero in duo ſecari; quinquangulum in tria; ſexangulum in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum conſtituant omnes angulos rectilineæ figuræ propoſitæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli æquales ſint duobus rectis; perſpicuum eſt, omnes angu-

los figuræ cuiuſuis rectilineæ æquales eſſe bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc eſt, quota ipſa eſt inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeſte perſpicitur in propoſitis figuris.

SECVNDVS modus, quo ſcitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic eſt.

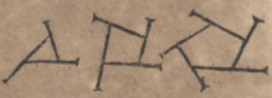
OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis, æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipſa continet lateta, ſeu angulos.

HOC eſt, anguli cuiuslibet trianguli æquales ſunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20. latera æquiualebunt bis 20. angulis rectis minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demonſtratio autem huius rei talis eſt. Si à quouis puncto intra figuram aſſumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, anguloſue figura ipſa continet. Cum igitur anguli cuiuſcunq; trianguli [a] *æquales ſint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram aſſumptum conſiſtentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propoſitæ, vt conſtat. Quare ſi hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli conſtituentes angulos figuræ propoſitæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum aſſumptum conſtitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot ſint, circa dictum punctum exiſtentes æquales 4. rectis tantummodo, vt collegimus ex propoſ. 15. Quamobrem anguli cuiuſque figuræ bis tot rectis ſunt æquales, ablatis quatuor, quot ipſa figura continet angulos, ſeu latera, quod eſt propoſitum.*



a 32. primi.

EX hoc porro ſecundo modo liquet, ſi ſingula latera figuræ cuiuuis rectilineæ producantur ordinatim verſus eandẽ partem, omnes angulos externos æquales eſſe quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, [b] *æquantur duobus rectis; atq; adeo omnes externi vna cum omnib. internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, anguloſue figura continet. Sũt autem & ſoli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonſtrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantum rectis æquales, qui nimirum deſunt internis angulis, vt interni & externi ſimul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propoſitam ambiunt. Exemplum. In triangulo quouis, anguli interni & externi ſimul æquales ſunt ſex rectis. Cum igitur interni* [c] *duobus ſint rectis æquales, erunt ſoli externi æquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni ſimul æquales ſunt octo rectis. Cum igitur interni ſoli æquales ſint quatuor rectis, vt oſtendimus, erunt & ſoli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, ſeu quinquangulo, anguli interni & externi ſunt æquales 10. rectis. Quoniam vero interni adæquantur ſex rectis, vt demonſtrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appoſitis figuris conſpiciuntur. Eademq; eſt ratio in aliis omnibus figuris.*



b 13. primi.

c 32. prim.

EX CAMPANO.

SI pentagoni ſingula latera producantur in partem vtramque, ita vt quælibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus ſolum rectis.

IN pentagono ABCDE, latera in vtramque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinq; angulos F, G, H, I, K, æquales tantum eſſe duobus rectis. In triangulo enim BHK, cũ latus HB, ſit protractum ad F, [d] *erit externus angulus FBK, duobus internis, & oppoſitis H, K, æqualis. Eadẽ ratione in triangulo AIG, erit externus angulus FAG, æqualis duobus internis, & oppoſitis I, G. Quare duo anguli FBA, FAB, æquales ſunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F,* [e] *erunt tres anguli A, B, F, trianguli ABF, æquales quinque angulis F G H I K. Sed anguli A, B, F, trianguli ABF,* [f] *æquales ſunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus ſunt rectis æquales. Quod eſt propoſitum.*



d 32. primi.

e 2. pron.
f 32. primi.

COROLLARIVM I.

Ex hac propoſ. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli ſimul ſumptos æquales eſſe tribus angulis cuiuſque alterius trianguli ſimul ſumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi [g] æquales ſunt duobus angulis rectis. Vnde ſi duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaque erunt ipſa triangula. g 32. primi.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Iſoſcele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehenſus rectus fuerit, quemlibet reliquorum eſſe ſemirectum. Nam reliqui duo ſimul conficiunt vnum rectum, [h] cum omnes tres ſint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare [i] cum duo reliqui inter ſe ſint æquales, erit quilibet eorum ſemirectus. At vero ſi angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtuſus, quemlibet aliorum eſſe ſemirecto minorem. Reliqui enim duo ſimul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquorum maiorem eſſe ſemirecto. Quoniam reliqui duo ſimul maiores erunt vno recto, &c. h 32. prim. i 5. primi.

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoque eſt, quemuis angulum trianguli æquilateri eſſe duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, [k] quibus æquales ſunt tres anguli trianguli æquilateri, diuiſi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti. k 32. primi.

COROL-

COROLLARIVM IV.

LIQVET etiam, ſi ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppoſitum ducatur, conſtitui duo triangula ſcalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum ſcilicet, qui eſt & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHOLIVM.



b. 1.primi.
c 9.primi.

PORRO ex tertio corollario depromi poteſt methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus ABC. Super rectam AB,[b] conſtituatur triangulum æquilaterum ABD. Et quia per corollarium 3. angulus ABD, facit duas tertias partes anguli recti ABC; erit angulus CBD, pars tertia eiuſdem recti. Diuiſo igitur angulo ABD,[c] bifariam, per rectam BE, erit vterque angulus ABE, EBD, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus ABC, diuiſus eſt in tres angulos æquales. Quod eſt propoſitum.

xxxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

RECTÆ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.



d 29.prim.
a 4.primi.
b 27.prim.

SINT rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipſas autem coniungant ad eaſdem partes rectæ AC, BD. Dico AC, BD, æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta AD. Quoniam igitur AD, incidit in parallelas AB, CD, *d* erunt anguli alterni BAD, CDA, æquales. Quare cum duo latera BA, AD, trianguli BAD, æqualia ſint duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus incluſi æquales; *a* erunt baſes BD, AC, æquales, & angulus ADB, angulo DAC, æqualis. Cum igitur hi anguli ſint alterni inter rectas AC, BD, *b* erunt AC, BD, parallelæ: Probatum autem iam fuit, eaſdem eſſe æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonſtrandum

SCHOLIVM.

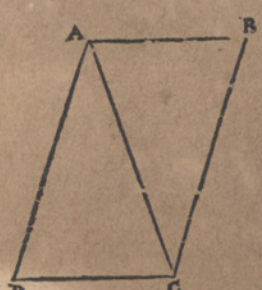
DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas, ad eaſdem partes debere coniungi, vt ipſæ coniungentes ſint & æquales & parallelæ. Nam ſi ad partes diuerſas coniungerentur, vt ad A, & D. Item ad B, & C, neque coniungentes lineæ eſſent parallelæ vnquam, ſed perpetuo ſe mutuo ſecarent, neque eſſent æquales, niſi raro admodum, vt ex ſequenti propoſitione conſtabit.

xxxiv.

THEOR. 24. PROPOS. 34.

PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo & latera, & anguli; atque illa bifariam ſecat diameter.

SIT parallelogrammum ABCD, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita AB, DC, inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita AD, BC. Item angulos oppoſitos B, & D, æquales inter ſe eſſe; nec non & angulos oppoſitos DAB, & DCB: Denique ducta diametro AC, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari.



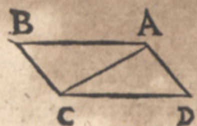
c 29.primi.
d 29.primi.
e 26 primi.
a 2. pron.
b 4.primi.

Cum enim AB, DC, ſint parallelæ, *c* erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. Rurſus quia AD, BC, ſunt parallelæ, *d* erunt & anguli alterni BCA, DAC, æquales. itaq; cum anguli BAC, BCA, trianguli ABC, æquales ſint duobus angulis DCA, DAC, trianguli ADC, vterque vtrique, & latus AC, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; *e* erit recta AB, æqualis oppoſitæ rectæ DC, & recta BC, oppoſitæ rectæ AD, quod eſt primum. Erit rurſus eadem de cauſa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia ſi æqualibus angulis BAC, DCA, addantur æquales anguli DAC, BCA, toti quoque anguli BAD, BCD, *a* fiunt æquales; conſtat ſecundum, angulos nimirum oppoſitos eſſe æquales. Quoniam vero duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia ſunt duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam oſtendimus; *b* erunt triangula ABC, CDA, æqualia, ideoque parallelogrammum ABCD, diuiſum erit bifariam à diametro AC, quod tertio loco proponebatur, Parallelogrammorum igitur ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo, &c. Quod oſtendendum erat.

SHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, ſolummodo parallelogramma à diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro; At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perſpicua erunt, ſi prius oſtenderimus, quatuor haſce figuras, Quadratum, Altera pa:te longius, Rhombum, & Rhomboidem, eſſe parallelogramma. Hoc autem demonſtrabimus tribus ſequentibus theorematibus, quorum primum eſt.

OMNE quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum.



c 8. primi.
a 4.primi.

SINT in quadrilatero ABCD, latera oppoſita AB, DC, æqualia; Itē oppoſita latera AD, BC. Dico ABCD, eſſe parallelogrammū; hoc eſt, lineas AB, DC, eſſe parallelas; Itemque lineas AD, BC. Ducta enim diametro AC, erunt duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia duobus laterib. CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & baſis AB, communis. Igitur[c] erit angulus B, angulo D, æqualis. Rurſus quia latera AB, BC, æqualia ſunt lateribus CD, DA, vtrumque vtrique, & anguli B, D, oſtenſi æquales;[a] erit angulus alterno

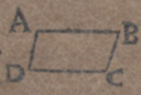
gulus BAC, angulo DCA, alterno æqualis, & angulus BCA, alterno angulo DAC. Quare [a] erunt AB, & DC. parallelæ; Item AD, & BC, quod eſt propoſitum. a 27. primi.

HINC conſtat, Rhombum, & Rhomboidem eſſe parallelogramma; quoniam oppoſita eorum latera ſunt inter ſe æqualia, vt manifeſtum eſt ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera oppoſita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter ſe æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propoſitionis 34, vt patet.

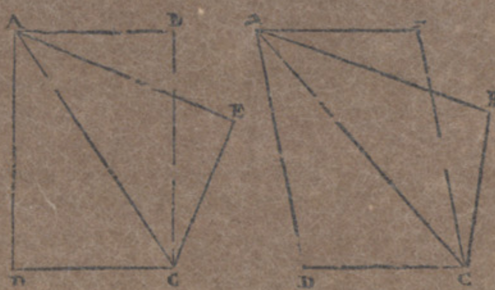
Secundum theorema tale eſt.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, anguli oppoſiti A, & C, æquales: Item oppoſiti anguli B, & D. Dico ABCD, eſſe parallelogrammum: hoc eſt, lineas AB, DC, eſſe parallelas: Itemque lineas AD, BC. Nam ſi æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D: [b] erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales, & idcirco anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales ſint quatuor rectis, vt ad propoſ. 32. demonſtrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare AD, BC, [c] parallelæ ſunt. Eadem ratione erunt AB, DC, parallelæ. Erunt enim duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod eſt propoſitum. Ex hoc etiam manifeſtum eſt, Rhomboidem eſſe parallelogrammum, cum eius anguli oppoſiti æquales ſint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppoſiti æquales, cum ſint recti, ex eorum definitionibus. b 2. pron. c 28. prim.



HOC theorema conuertit ſecundam partem propoſitionis 34. vt conſtat. Tertia autem pars non poteſt conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam ſecari poteſt à diametro, & tamen non eſt parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum eſſe oſtenſum eſt: in quo, ducta diametro AC, conſtituatur ſuper AC, triangulo ABC, æquale triangulum AEC, inuerſo ordine, ita vt latus CE, ſit æquale lateri AB, & AE, ipſi CB, vt in ſcholio propoſ. 22. docuimus; fiatque trapezium AECD. Quoniam vero triangulum ABC, triangulo ADC, æquale eſt, [d] quod diameter AC, bifariam ſecet parallelogrammum DB: Erit & triangulum AEC, triangulo ADC, æquale: Ac proinde trapezium AECD, bifariam diuidetur à diametro AC. d 34. prim.

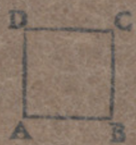


QVOD ſi quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraque diametro, illud parallelogrammum erit, vt oſtendemus ad propoſ. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri poteſt.

Tertium Theorema huiuſmodi eſt.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, omnes quatuor anguli recti. Dico ipſum eſſe parallelogrammum: hoc eſt, lineas AB, DC, eſſe parallelas: Itemque AD, BC. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales ſunt duobus rectis, cum ſint duo recti: [e] erunt AD, BC, parallelæ. Eodem modo erunt AB, DC, parallelæ: atque adeo ABCD, parallelogrammum, quod eſt propoſitum. e 28. primi.

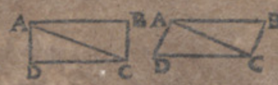


HINC rurſum conſtat, Quadratum, & altera parte longius, eſſe parallelogramma, cum eorum anguli omnes exiſtant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

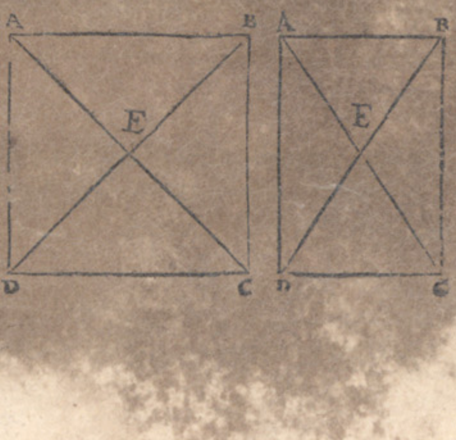
HIS in hunc modum demonſtratis, Quadratum ſcilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, eſſe parallelogramma, facile oſtendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam ſecari à diametro: Angulos vero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus ABCD, in quo diameter AC. Quoniam igitur duo latera BA, AC, trianguli BAC, æqualia ſunt duobus lateribus DA, AC, trianguli DAC, vtrumque vtrique, & baſis BC, baſi DC, (ſunt enim hæ figuræ æquilateræ) [f] erunt anguli BAC, DAC, æquales. Quare angulus BAD, diuiditur bifariam. Eodem modo demonſtrabimus, reliquos angulos bifariam ſecari à diametro. f 8. primi.



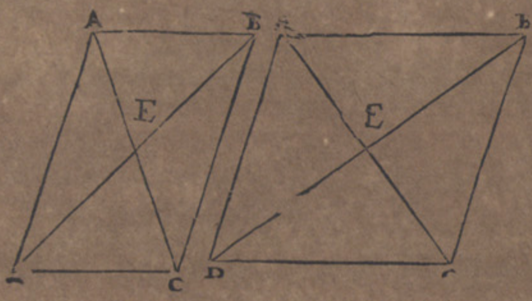
SIT rurſus Altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, in quo diameter AC, ſitque maius latus AB. Quoniam igitur in triangulo ABC, latus AB, maius eſt latere BC, [g] erit angulus BCA, maior angulo BAC. Eſt autem angulus BCA, [h] æqualis angulo DAC, alterno: quod BC, AC, parallelæ ſint. (Eſt enim ABCD, oſtenſum eſſe parallelogrammum.) Igitur & angulus DAC, maior erit angulo BAC. Atque propterea angulus BAD, inæqualiter diuiditur à diametro AC. Eadem eſt ratio aliorum angulorum. Quamobrem appoſite Euclides in tertia parte huius propoſitionis dixit, ſolum parallelogramma bifariam à diametro ſecari, non autem & angulos. g 18. primi. h 29. primi.



EODEM fere pacto oſtendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales eſſe; At vero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem vero eam, quæ obtuſos angulos diſpertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius ABCD, in quo diametri AC, BD, quas dico eſſe æquales. Cum enim duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus AB, AD, trianguli BAD, vtrumque vtrique, & angulus ABC, angulo BAD, quia vterque rectus: [i] erit baſis AC, baſi BD, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales ſunt. i 4 primi.



SIT



SIT rurſus Rhombus, vel Rhomboides, ABCD, in quo diametri AC, BD; ſitq; angulus BAD, maior; ABC, minor. Non enim æquales a 29. prim. *ſunt, quia alias, vterq; eſſet rectus, cũ ambo*[a] *æquales ſint duobus rectis; q̃ eſt abſurdũ, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum BD, maiorem eſſe diametro AC. Quoniam* b 24. prim. *enim duo latera AB, AD, trianguli BAD, æqualia ſunt duobus lateribus AB, BC, trianguli ABC, vtrumque vtrique, & angulus BAD, angulo ABC, maior exiſtit;*[b] *erit baſis BD, maior baſe AC, quod eſt propoſitum. Ex quo manifeſtum eſt, cur in propoſitione 33. Euclides aſſeruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad eaſdem partes, æquales eſſe, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ AC, BD, inæquales ſunt, licet coniungant parallelas æquales AB, DC, quia non ad eaſdem partes ipſas coniungunt, vt perſpicuum eſt.*

IN omni tamen parallelogrammo diametri ſe mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli EAD, EDA, trianguli c 29. primi. *AED,*[c] *æquales ſint alternis angulis ECB, EBC, trianguli BEC, vterque vtrique; &*[d] *latus AD, æquale lateri BC, oppoſito in* d 34. prim. e 26. primi. *parallelogrammo ABCD, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis;*[e] *Erit & AE, recta rectæ CE, & recta DE, rectæ BE, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E.*

HVIVS autem, quod modo diximus, conuerſum etiam demonſtrabimus, nimirum

OMNE quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum eſt.

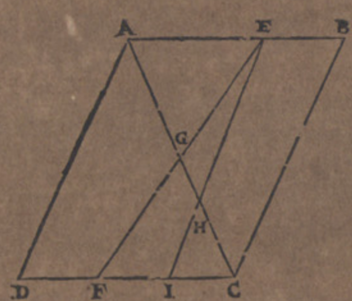


IN quadrilatero enim ABCD, diametri AC, BD, ſe mutuo bifariam diuidant in E. Dico f 15. prim. *ABCD, parallelogrammum eſſe. Cum enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia ſint late-* g 4. primi. *ribus CE, ED, trianguli CED, & anguli contenti ad verticem E,*[f] *æquales quoque;*[g] *erunt &* h 27. prim. *baſes AB, CD, æquales, & angulus ABE, angulo alterno CDE, æqualis.*[h] *Quare rectæ AB, CD, parallelæ ſunt. Eadem ratione parallelæ oſtendentur AD, CB, Parallelogrammum ergo eſt ABCD.*

ITAQVE, ſi quis expedite parallelogrammum deſcribere velit, ducat duas lineas AC, BD, vtcunque ſe in E, interſecantes. Si namque tam EA, EC, inter ſe, quam EB, ED, inter ſe æquales abſcindet, conſtituent ductæ AB, BC, CD, DA, parallelogrammum, vt hic demonſtratum eſt. Quod ſi anguli ad E, ſint recti, & omnes quatuor rectæ EA, EC, EB, ED, inter ſe æquales, conſtitutum parallelogrammum erit quadratum, propterea quod octo anguli ad A, B, C, D, ſunt ſemirecti, vt facile demonſtrabitur, per 5. & 32. huius.

HVC quoque referri poteſt hoc theorema.

RECTA linea ſecans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, ſecat quoque diametrum bifariam.



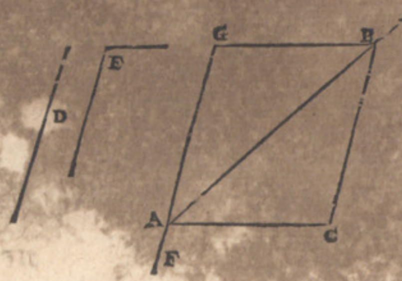
IN parallelogrammo ABCD, diametrum AC, bifariam ſecet recta EF, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam enim i 29. primi. *angulus EAG,*[i] *æqualis eſt angulo alterno FCG, &*[k] *angulus EGA, angulo* k 15. primi. *FGC. Eſt autem & latus AG, lateri CG, æquale, per hypotheſin, quæ ambo* l 26. prim. *æqualibus angulis adiacẽt;*[l] *erunt & latera EG, FG, æqualia. Quare cum latera AG, GE, æqualia ſint lateribus CG, GF, & anguli quoque contenti* m 4. primi. *æquales;*[m] *erunt triangula AGE, CGF, æqualia. Addita igitur communi* n 2. pron. *quantitate BCGE,*[n] *erit triangulum ABC, trapezio BCFE, æquale:* o 34. primi *Sed triangulum ABC,*[o] *dimidium eſt parallelogrammi ABCD. Igitur & trapezium dimidium erit eiuſdem parallelogrammi, ideoque recta EF, parallelogrammum bifariam ſecat.*

SECET iam EF, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum AC, bifariam ſecari in G. Si enim diameter AC, p 10. prim. *non bifariam diuiditur in G,*[p] *diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta EHI. Erit ergo, vt iam demonſtrauimus, EICB, trapezium dimidium parallelogrammi ABCD, atque adeo æquale trapezio EFCB, quod etiam dimidium ponitur eiuſdem parallelogrammi, pars toti, quod eſt abſurdum. Diuiditur igitur AC, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propoſitum.*

HINC facile colligitur, ſi in latere aliquo parallelogrammi cuiuſque punctum ſignetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non ſit in diametro, niſi ipſum ſecet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, quæ parallelogrammum bifariam ſecet. Si enim diameter ducatur, & à puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt ſi punctum ſit E, in latere AB, ducenda eſt recta EF, per G, punctum, in quo diameter AC, bifariam diuiditur; & ſic de aliis punctis.

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non iniucundum, videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores eſſe duobus rectis.



DVÆ rectæ infinitæ AB, AC, contineant angulum BAC, ſitque data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, vt duo anguli E, & BAC, minores ſint duobus rectis. Oportet igitur inter rectas AB, AC, collocare rectã q 23. prim. *æqualem quidem rectæ D, cum alterutra vero illarum, nimirum cum AC, facientem angulum æqualem angulo dato E.*[q] *Fiat angulus CAF, æqualis angulo* r 3. primi. *E, & producta FA, ad G,*[r] *ſit AG, æqualis rectæ D; & per G,*[s] *ducatur GB, pa-* s 31. primi *rallela ipſi AC. ſecans AB, in B. Deinde per B, ducatur BC, parallela ipſi AG, ſecans AC, in C. Dico rectam BC, collocatam inter rectas AB, AC, æqualem eſſe rectæ D, angulumque BCA, angulo E. Cum enim parallelogrammum ſit,*

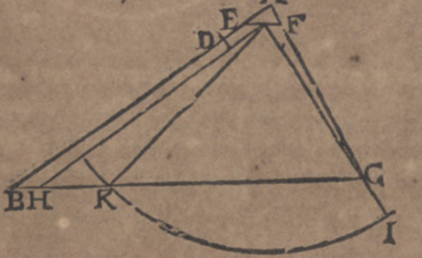
per con-

per conſtructionem ACBG,[a] erit recta BC, rectæ GA, æqualis: At GA, æqualis eſt, per conſtructionem, rectæ D. Igitur & BC, rectæ D, æqualis erit. Rurſus quia angulus BCA, angulo alterno CAF, æqualis eſt[b]; & eidem angulo CAF, æqualis eſt, per conſtructionem, angulus E; erunt anguli E, & BCA, æquales. Quod eſt propoſitum. Cæterum ex conſtructione manifeſtum eſſe cuilibet poteſt, cur duo anguli dati minores eſſe debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum ABC, ſi anguli BAC, & BCA, æquales eſſent duobus rectis, vel maiores, vt conſtat ex propoſ. 17. vel 32. a 34. prim. b 29. primi

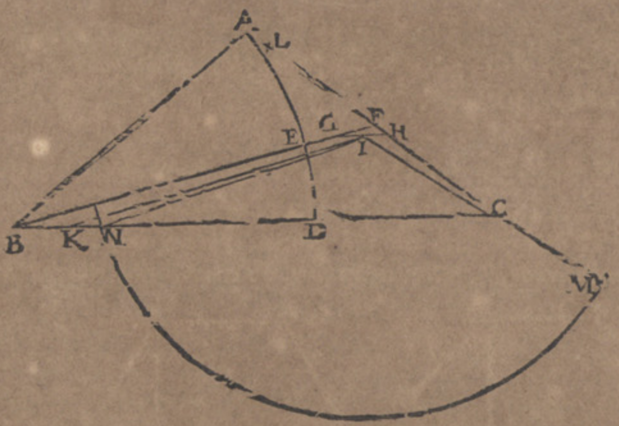
SCHOLIVM II.

Non alienum erit à noſtro inſtituto, adijcere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum conſtitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionum demonſtrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad prop. 21. Primum igitur in omni triangulo, quod non ſit æquilaterum, vel Iſoſceles habens baſim vtrouis latere minorem, non ſolum à duobus punctis baſis conſtitui poſſunt duæ rectæ intra triangulum, quæ ſimul ſumptæ maiores ſint duobus lateribus ſimul ſumptis, vt à Proclo in triangulis, rectangulis, vel obtuſangulis oſtenſum eſt ad propoſ. 21. ſed etiam æquales.

SIT enim primum triangulum ABC, habens latus AB, latere AC, maius, ſitque BD, dimidium vtriuſque lateris AB, AC, ſimul: Sumpto autem inter A, D, puncto E, vtcunque, agatur EF, ipſi BC, parallela; & ex quouis puncto G, lateri AB, parallela ducatur GH, rectaque iungatur GC. Et quoniam EA, AF, [c] maiores ſunt, quam EF: Item CF, FG, maiores, quam GC: erunt EA, AC, FG, ſimul maiores, quam EF, GC, ſimul: ablataque communi FG, erunt EA, AC, ſimul maiores, quam EG, GC, ſimul: ac proinde multo maiores, quam GC, ſola. Producatur ergo GC, fiatq; GI, ipſis EA, AC, ſimul æqualis. Quia vero BE, maior eſt, quam vtraque EA, AC, ſimul, quod BE ſuperet BD, dimidium vtriuſque BA, AC, ſimul, at EA, AC, ſimul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraq; DA, AC, ſimul: erit quoque BE, maior, quam GI, quæ ipſis EA, AC, ſimul eſt æqualis. Cum igitur [d] ipſi BE, æqualis ſit GH, in parallelogrammo BEGH: erit quoque GH, maior, quam GI. Si igitur centro G, & interuallo GI, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam GH, ac propterea & ipſam CH, prius ſecabit in K. Connectatur GK. Dico vtramque GH, GK, ſimul æqualem eſſe vtrique AB, AC, ſimul. Id quod ex conſtructione perſpicuum eſt. Nam GH, ipſi BE, æqualis eſt, & GI, hoc eſt, GK, ipſis EA, AC, ſimul. Atque hoc infinitis modis fieri poteſt, prout punctum E, remotius à D, ſumptum fuerit, & punctum G, à puncto E: hoc eſt, prout tam AD, quam EF, infinitis in punctis ſecari poteſt. c 20. prim. d 34. prim.

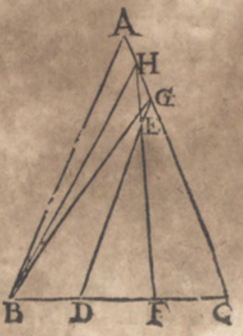


SIT deinde Iſoſceles ABC, habens baſim BC, vtrouis latere maiorem. Deſcripto ex centro B, per A, arcu AD, ſecante rectam BC, in D, ducatur vtcunque recta BF, ſecans arcum in E, & latus AC, in F: & in EF, per quoduis punctum G, ipſi BC, parallela agatur GH, & per quodcunque eius punctum I, ipſi BF, parallela ducatur IK, rectaque iungatur IC: atque ipſi EG: æqualis abſcindatur AL. Erit igitur BG, ipſis AB, AL, ſimul æqualis, at LC, minor quam BE, ſiue AB, & ob id multo minor, quam BG. Et quia ipſi BG, [e] æqualis eſt IK, in parallelogrammo BGIK: erit quoque IK, ipſis AB, AL, ſimul æqualis, maior autem, quam LC. Itaque [f] quia GF, FH, maiores ſunt, quam GH: & HC, HI, maiores, quam IC: erunt GF, FC, HI, ſimul maiores, quam GH, IC: & ablata communi HI, erunt reliquæ GF, FC, ſimul maiores, quam GI, IC, ſimul: ac proinde appoſita communi BG, fient BF, FC, ſimul maiores, quam BG, GI, IC, ſimul. Sed ipſis BF, FC, [g] maiores ſunt BA, AC, ſimul. Ergo multo maiores erunt BA, AC, ſimul quam BG, GI, IC, ſimul. Cum ergo BG, ipſis BA, AL, ſimul æqualis ſit, erit reliqua LC, maior, quam reliquæ GI, IC, ſimul, ac proinde multo maior, quam IC, ſola. Ponatur IM, (producta IC,) ipſi LC, æqualis. Et quia IK, oſtenſa eſt maior, quam LC, hoc eſt, quam IM: ſi ex centro I, per M, arcus circuli deſcribatur, ſecabit is rectam IK, ac proinde prius ipſam CK, ſecabit in N. Connectatur IN. Dico vtramque IK, IN, ſimul æqualem eſſe vtrique AB, AC, ſimul. Id quod ex conſtructione patet. Eſt namque IK, ipſis AB, AL, ſimul æqualis, & IN, hoc eſt, IM, ipſi LC, æqualis. Atque hoc infinitis modis fieri poteſt: cum BF, infinitis modis duci poſſit: & tam EF, quam GH, infinitis modis ſecari. e 34. primi f 20. primi. g 20. prim.



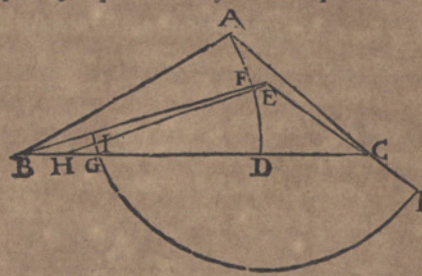
CONSTAT autem, ſi intra idem triangulum ABC, ducantur duæ rectæ, quæ rectas HG, GK, in priori triangulo, vel rectas KI, IN, in poſteriori includant, eas maiores fore ſimul ſumptas lateribus AB, AC, ſimul ſumptis: quippe quæ [h] maiores forent rectis HG, GK, in priori triangulo, vel rectis KI, IN, in poſteriori. h 21. prim.

AT vero in triangulo æquilatero, vel Iſoſcele habente baſim vtrouis latere minorem, non poſſe intus conſtitui duas lineas maiores, vel æquales ſimul ſumptas duobus lateribus ſimul ſumptis, ſed quaſcunque interiores eſſe minores, ita oſtendi poteſt. In triangulo enim ABC, cuius duo latera AB, AC, æqualia, & baſis BC, non maior, ſed vel æqualis, vel minor; ita vt angulus A, maior non ſit, quam angulus B, vel C,[i] ſed vel æqualis, vel minor: conſtituantur duæ rectæ DE, EF, vtcunque, quas dico minores eſſe ſimul ſumptas duobus lateribus AB, AC, ſimul ſumptis. Producatur enim DE, ſecans latus AC, in G, iungaturque recta GB. Quoniam igitur [k] duo anguli ABC, & C, æquales ſunt, eſtque ABC, maior angulo GBC, erit quoque C, maior angulo GBC. Eſt [l] autem & angulus GDB; angulo C, maior, externus interno. Igitur multo maior erit angulus GDB, angulo GBC; [m] ac proinde latus GB, latere GD, maius erit. Quia vero [n] angulus BGA, maior eſt angulo C, externus interno; angulusque C, vel æqualis eſt angulo A, vel maior, vt oſtendi- i 5. vel 18. primi. k 5. primi. l 16. primi. m 19. prim. n 16. prim.



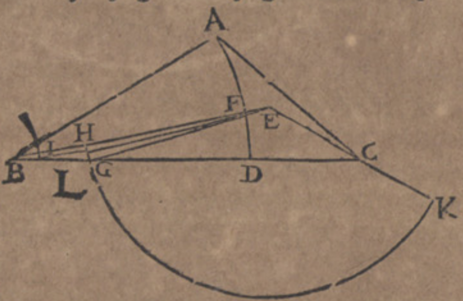
a 19. primi. mus: erit quoque angulus BGA, angulo A, maior. Quare [a] latus AB, latere GB, maius erit: Sed recta GB, oſtenſa eſt maior, quam GD, ac proinde multo maior, quam DE. Igitur latus AB, multo etiam maius erit, quam DE. Eadem ratione, ſi FE, producatur ſecans AC in H, iungaturque recta HB, oſtendemus latus AB, ac proinde & AC, maius eſſe, quam FE. Quocirca latera AB, AC, ſimul maiora ſunt duabus rectis DE, EF, ſimul ſumptis. Quod ſi FE, producta ſecaret latus AB, demonſtraremus eodem modo, latus AC, maius eſſe recta EF.

IAM vero, ſi admirabile videatur iis, qui Geometriæ ignari ſunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci poſſe lineas interiores, quæ ſimul ſumptæ maiores ſint, vel æquales duobus lateribus ſimul ſumptis; admirabilius ſane erit, intra eadem illa triangula conſtitui poſſe duas lineas, quarum ſingulæ ſingulis lateribus maiores ſint, vel æquales. Sint ergo primum conſtituendæ ſingulæ lineæ ſingulis lateribus maiores in triangulo ABC, cuius latus AB, minus non ſit latere AC, at latus BC, vtrouis latere AB, AC, maius. Deſcripto ex centro B, arcu circuli AD, ſumatur quoduis punctum E, inter arcum AD, & latus AC, ducaturque recta BE, ſecans arcum in F; ita vt BE, maior ſit, quam BF, hoc eſt, quam BA, iungaturque EC. Quia vero [b] BE, EC, ſimul minores ſunt, quam AB, AC, ſimul, eſtque BE, maior, quam AB, erit EC, multo minor, quam AC. Producta igitur EC, fiat EK, ipſi AC, æqualis, ac propterea minor, quam EB; deſcribaturque ex E, per K, arcus circuli, qui rectam EB, ſecabit, ac proinde & ipſam CB, prius ſecabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta EH, ſecans arcum in I, factumque erit, quod proponitur. Nam BE, maior eſt, quam BA, & EH, maior, quam EI, hoc eſt, quam EK, vel AC.



b 21. primi.

DEINDE ſint ſingulæ lineæ ſingulis lateribus æquales conſtituendæ intra idem triangulum: fiatque eadem conſtructio, dempta linea EH, ſed arcus KG, ſecet rectam EB, in H. Et latus BA, latere AC, ponatur maius, eritq; BE, recta maior, quam AB, cum maior ſit, quam BF, quæ æqualis eſt ipſi AB. Sumpta igitur EI, æquali ipſi AB, cadet punctum I, inter B, & H; quandoquidem EB, maior eſt, quam AB, & EH, minor, quam AB. Ex E, per I, deſcribatur arcus circuli ſecans BC, in L, iunganturque rectæ EL, EG: factumque erit, quod proponitur. Nam EL, ipſi EI, hoc eſt, ipſi AB, æqualis eſt, & EG, ipſi EK, hoc eſt, ipſi AC.

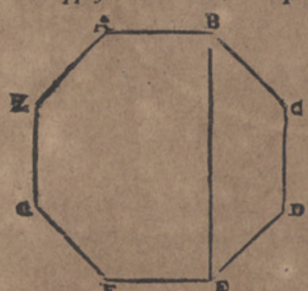


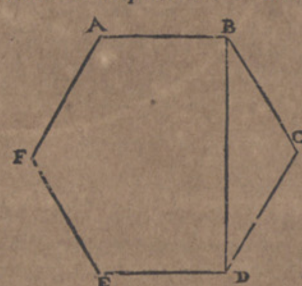
PRÆTER hæc demonſtrat Pappus, intra eadem, quæ diximus, triangula conſtitui poſſe duas rectas duobus lateribus maiores, & quæ habeant ad eadem latera proportionem datam, quæ tamen dupla proportione minor ſit: quod incredibile cuipiam videri poſſit. Quæ res hoc loco demonſtrari non poteſt, cum ex proportionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera oppoſita, parallela inter ſeſe.

LATERA oppoſita dicuntur illa duo, quæ ex vtraq; parte latera habent æqualia numero: vt in hexagono ABCDEF, latera oppoſita erunt AB, ED: quoniam tam ad partes A, & E, duo ſunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono vero ABCDEFGH, latera oppoſita erunt AB, FE, quia tam ad partes A, & F, tria ſunt latera, quam ad partes B, & E. Et ſic in aliis figuris æquilateris parium laterum, ex vtraq; parte oppoſitorum laterum erunt tot latera, quot ſunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinq;, &c. Dico igitur quælibet latera oppoſita eſſe parallela; AB, nimirum ipſi ED, in hexagono; & AB, ipſi FE, in octogono, & ſic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppoſitorum laterum ad eaſdem partes linea recta, qualis eſt in hexagono BD, & in octogono BE. Et quoniam, vt ad 32. propoſ. demonſtrauimus, ſex anguli hexagoni æquales ſunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiuſdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales; Sunt autem anguli BCD, CBD, CDB, trianguli BCD,





c 32. primi. [c] duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli ABD, EDB, duobus rectis æquales erunt. Quare [d] parallelæ erunt AB, & ED.

d 28. prim. Rurſus quia octo anguli octogoni æquales ſunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, ſex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri BCDE, æquales quatuor rectis Igitur duo reliqui anguli ABE, FEB, duobus erunt rectis æquales, [e] atq; adeo AB, FE, parallelæ erunt. Eodem modo demonſtrabitur, in omnibus aliis figuris huiuſmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppoſitorum laterum coniungentem exiſtentes, duobus eſſe rectis æquales. Nam in decagono auferet ea linea pentagonum, cuius anguli æquales ſunt ſex rectis: At quinq; anguli decagoni æquales ſunt octo rectis. Ablatis igitur ſex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum eadem linea abſcindet hexagonum, cuius anguli ſunt octo rectis æquales: At ſex anguli totius figuræ æquales ſunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

e 28. prim.

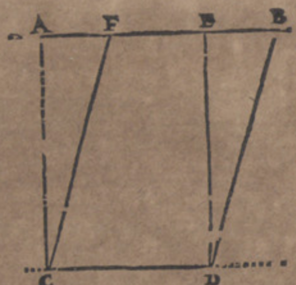
QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera oppoſita parallela, vt oſtendimus; tamen ſola quadrilatera figura latera oppoſita habens parallela, ab Euclide, & aliis Geometris parallelogrammum dici conſueuit, proptereaq; in definitionibus, Parallelogrammum diximus eſſe figuram quadrilateram, &c.

XXXV.

THEOR. 25. PROPOS. 35.

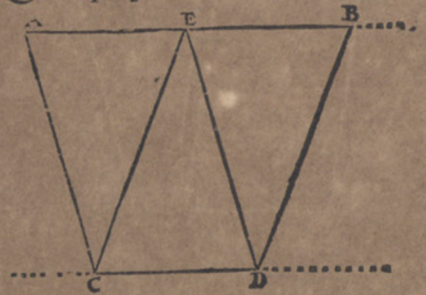
PARALLELOGRAMMA ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

INTER



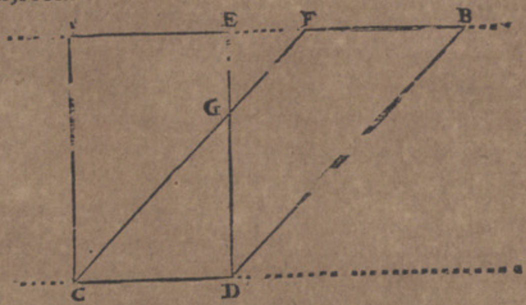
INTER duas parallelas AB, CD, ſuper baſi CD, exiſtant duo parallelogramma CDEA, CDBF. (Dicuntur autem parallelogramma in eiſdem eſſe parallelis, quando duo latera oppoſita partes ſunt parallelarum, vt in exemplo propoſito cernitur.) Dico ipſa parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quoad angulos & latera, ſed quoad aream, ſeu capacitatem. Cadet enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo CDEA, recta AE, *a* æqualis eſt rectæ CD, oppoſitæ; & eidem CD, æqualis eſt FB, in parallelogrammo CD, BF, oppoſita; Erunt AE, *b* FB, inter ſe æquales. Dempta igitur communi FE, *c* remanebit AF, ipſi EB, æqualis: *d* Eſt autem & AC, ipſi ED, oppoſitæ æqualis in parallelogrammo CDEA; *e* & angulus BED, angulo FAC, externus interno. *f* Quare triangulum FAC; triangulo BED, æquale erit. Addito igitur communi trapezio CDEF, *g* fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Quod eſt propoſitum.

a 34. prim. b 1. pron. c 3. pron. d 34. prim. e 29. primi f 4 primi. g 2. pron.



CADAT ſecundo punctum F, in punctum E. Dico rurſus, parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia eſſe. Erunt enim, vt prius, rectæ AE, EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC; atque adeo *h* triangula, EAC, BED, æqualia. Addito igitur communi triangulo CDE, *i* fient parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.

h 4. prim. i 2. pron.



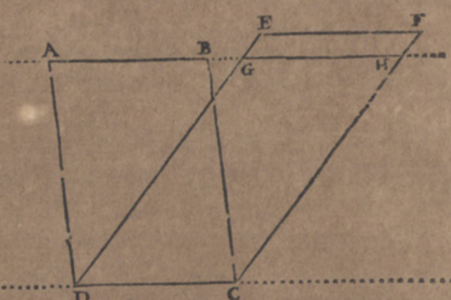
CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta CF ſecet rectam DE, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ AE, FB, ſunt æquales; ſi communis addatur EF; *k* erit tota AF, toti EB, æqualis, nec non & anguli BED, FAC, æquales erunt; atque adeo *l* triangulum FAC, triangulo BED, æquale. Ablato ergo communi triangulo EGF, *m* remanebit trapezium AEGC, trapezio. FGDB, æquale. Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

k 2. pron. l 4. primi. m 3. pron.

SCHOLIVM.

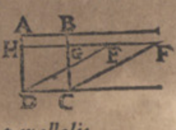
CONVERTEMVS facile hanc propoſitionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemque partes conſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, CDEF, ſuper eandem baſin CD, & ad eaſdem partes. Dico rectam AB, productam in directum iacere ipſi EF, & propterea ipſa parallelogramma inter eaſdem eſſe parallelas. Alias enim AB, producta vel cadet infra EF, vel ſupra. Cadat primo infra, qualis eſt AH. Erit igitur parallelogrammum CDGH, n æquale parallelogrammo ABCD; Ponitur autem eidem parallelogrammo ABCD, æquale parallelogrammum CDEF. Quare parallelogramma CDEF, CDHG, æqualia erunt, totum & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet AB, infra EF.

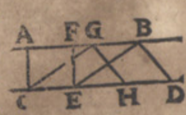
n 35. primi.



CADAT ſecundo AB, producta ſupra EF. Cadet igitur FE, protracta infra AB. Quare, vt prius, erunt parallelogramma ABCD, CDHG, æqualia, totum & pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum conſequeretur, ſi CF, DE, producerentur vſq; ad AB, protractam. Eademque demonſtratio conueniet omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſiue punctum E, ſit vltra B, ſiue non, vt perſpicuum eſt. Non ergo cadet AB, ſupra EF; ſed nec infra, vt demonſtratum eſt; ergo producta in directum iacet ipſi EF; ac proinde parallelogramma ABCD, CDEF, in eiſdem ſunt parallelis.

THEOR. 26. PROPOS. 36. XXXVI.

PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta; inter ſe ſunt æqualia.



SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, ſuper æquales baſes CE, HD, inter eaſdem parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, o æqualis eſt GB, in parallelogrammo GHDB, oppoſita; erunt CE, GB, p æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & CG, EB, ipſas coniungentes, q parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque cum parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, r erit parallelogrammum ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallelogramma GCEB, GHDB, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin s GB, erit quoque parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, *t* inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.

o 34. prim. p 1. pron. q 33. primi. r 35. primi. s 35. primi. t 1. pron.

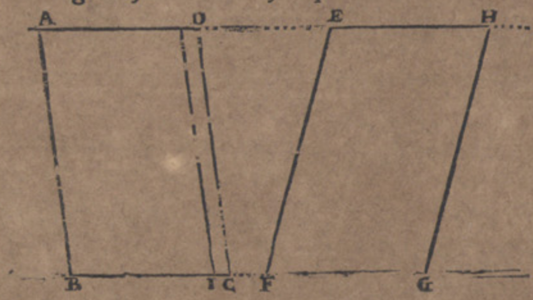
S C H O L I V M.

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, ad hunc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.



SINT primum duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, ſuper baſes æquales BC, FG, & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt, AD, protractam coire in directum cum EH. Nam alias cadet aut infra EH, aut ſupra. Quo poſito ſequitur, totum & partem eſſe æqualia, quemadmodum in conuerſa præcedentis propoſitionis eſt dictum, & figura facile commonſtrat. Intelligendæ ſunt autem baſes æquales datæ in eadem linea recta BG.



SINT ſecundo eadem parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas AH, BG. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Si enim altera, nempe BC, dicatur
a 3. primi. *maior* [a] *abſcindatur BI, æqualis rectæ FG, &* [b] *duca-*
b 31. primi. *tur IK, parallela ipſi CD. Erit ergo parallelogrammũ*
c 36. primi. *ABIK,* [c] *æquale parallelogrammo EFGH, & ideo parallelogrammo ABCD, pars toti, quod eſt abſurdum. Non ergo BC, maior eſt, quã FG. Eadẽ ratione neq; minor erit. Quare baſes BC, FG, æquales ſunt.*

SEQVENS quoq; theorema facile hinc demonſtrabitur.

SI duo parallelogramma inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contra ſi duo parallelogramma ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

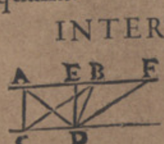
SINT enim in poſteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, ſitque baſis BC, maior baſe FG.
d 3. primi. *Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius eſſe* [d] *Auferatur enim recta BI, ipſi FG, æqualis,* [c] *ducaturque IK,*
e 31. primi. *ipſi AB, parallela. Erunt ergo* [f] *parallelogramma BK, FH, ſupra æquales baſes BI, FG, æqualia. Cum igitur BD,* [g] *maius ſit,*
f 36. primi. *quam BK, erit idem BD, maius, quam FH.*
g 9. pron. *SINT rurſum parallelogramma BD, FH, inæqualia, & BD, maius. Dico baſim BC, maiorem eſſe baſe FG. Nam ſi*
h 36. primi. *foret æqualis,* [h] *eſſent parallelogramma æqualia, quod eſt abſurdum, cum BD, ponatur maius. Si autem eſſet minor, foret parallelogrammum FH, maius, quam BD, vt proxime oſtendimus, quod multo magis eſt abſurdum, cum BD, maius ponatur, quam FH. Baſis ergo BC, cum neque æqualis ſit ipſi FG, neque minor, erit maior, quam FG, quod eſt propoſitum.*

XXXVII.

THEOR. 27. PROPOS. 37.

TRIANGVLA ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, ſint conſtituta duo triangula ACD, BCD. (Dicitur autem triangulum inter duas eſſe parallelas conſtitutum, quando baſis eſt pars vnius, & angulus



i 31. primi. oppoſitus alteram attingit.) Dico ea triangula eſſe æqualia. Per D, enim *i* ducatur DE, paral-
k 35. prim. lela rectæ AC, & DF, parallela rectæ BC. *k* Erunt igitur parallelogramma ACDE, BCDF, æqualia. Sunt enim ſuper eandem baſin CD, & inter eaſdem parallelas. Sed horum dimidia
l 34. primi ſunt triangula ACD, BCD; *l* quod AD, BD, diametri bifariam ſecent parallelogramma ACDE, BCDF. Igitur
m 7. pron. & triangula ACD, BCD, *m* æqualia erunt. Triangula igitur ſuper eadem baſi, &c. Quod erat demonſtrandum.

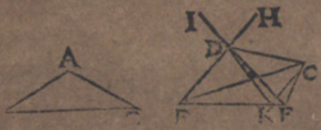
S C H O L I V M.

CONVERSA huius propoſitionis demonſtrabitur ab Euclide propoſ. 39. Porro ex hac propoſitione facile cum Proclo demonſtrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando eſſe æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propoſ. 24. polliciti ſumus. Sint enim duo triangula ABC, DEF, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, & angulus A, maior angu-
n 23. prim. *lo EDF, ſintque primum hi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula eſſe æqualia. Producatur enim ED, ad H, & FD,*

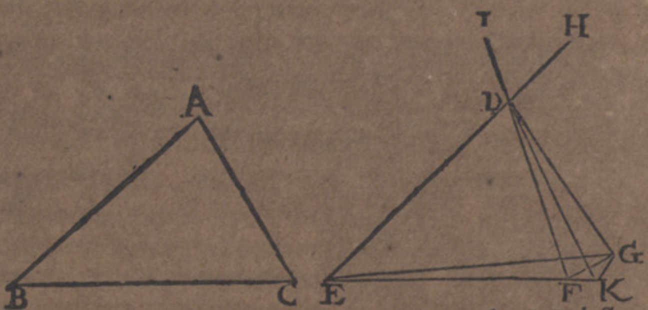


ad I; fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, verſus angulum acutum DFE. Nam ſem-
o 17. prim. *per alter angulorum DEF, DFE, acutus erit* [o] *cum ambo minores ſint duobus rectis.*
p 3. primi [p] *& recta DG, rectæ DF, ſeu AC; ducãturque rectæ EG, GF, cadetq; ſemper EG, ſupra F, ob angulum acutum DFE, vt ad finem ſcholij propoſ. 24. oſtendimus. Quoniam igitur duo anguli A, & EDF, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus EDG, æqualis*
q 13. primi. *factus eſt angulo A; erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli EDG, GDH,* [q] *duobus rectis æ-*
r 3. pron. *quales. Igitur anguli EDG, EDF, angulis EDG, GDH, æquales erunt. Quare ablato communi angulo EDG,* [r] *remanebit angu-*
s 15. primi. *lo EDF, æqualis angulus GDH: Eſt autem eidem angulo EDF,* [s] *æqualis angulus HDI. Igitur & anguli GDH, HDI, æquales erunt; atque adeo angulus GDH, dimidium erit totius anguli GDI. Rurſus quia latera DF, DG, ſunt æqualia in triangulo*
t 5. primi. *DFG;* [t] *erunt anguli DFG, DGF, æquales; qui cum* [u] *æquales ſint externo angulo GDI, erit vterlibet eorum, nempe DGF, di-*
u 32 primi. *midium anguli GDI: Oſtenſum eſt autem, angulum GDH, dimidium quoque eſſe eiuſdem anguli GDI.* [x] *Quare anguli GDH,*
x 7. pron. *DGF, æquales erunt. Et quia ſunt alterni inter EH, FG,* [y] *erunt EH, FG, parallelæ. Quamobrem* [z] *triangula DEG, DEF, æqua-*
y 27. primi *lia erunt, cum habeant eandem baſin DE, ſintque inter eaſdem parallelas DE, FG. Quoniam vero triangulum DEG,* [a] *æquale*
z 37. primi. *eſt triangulo ABC, propterea quod latera DE, DG, æqualia ſunt lateribus AB, AC, & angulo A, æqualis angulus EDG, erit*
a 4. primi. *triangulum ABC, triangulo DEF, æquale, quod eſt propoſitum.*

SINT deinde anguli A, & EDF, duobus rectis maiores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, minus
eſſe triangulo DEF. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I; [a] fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, [b] & recta DG, recta a 23. primi.
DF, ſeu AC, æqualis, ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, po- b 3. primi.
nuntur maiores duobus rectis, erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis maiores: Sunt
autem anguli EDG, GDH, [c] æquales duobus rectis. Igitur anguli EDG, EDF, maiores c 13. primi.
ſunt angulis EDG, GDH. Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior
angulo GDH. Quoniam vero [d] angulus EDF, angulo HDI, æqualis eſt, erit quoque HDI, d 15. primi.
maior quam GDH; Atque adeo GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rurſus quia latera DG, DF, æqualia ſunt: [e] erunt e 5. primi.
anguli DFG, DGF, æquales: qui cum ſint [f] æquales externo GDI, erit vterius eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: O- f 32. primi.
ſtenſum eſt autem, angulum GDH, minorem eſſe dimidio eiuſdem GDI. Quare DGF maior erit, quam GDH. Abſcindatur ex
angulo DGF, angulus DGK, [g] æqualis angulo alterno GDH. Erit ergo GK, [h] parallela ipſi DE, ſecabitque GK rectam EF. Du- g 23. primi.
catur ex D, ad K, vbi GK, ſecat rectam EF, recta DK. Erit igitur triangulum DEG, [i] æquale triangulo DEK. Quoniam autem h 27. prim.
triangulum DEG, [k] æquale eſt triangulo ABC, propterea quod latera DE, DG, æqualia ſunt lateribus AB, AC, & angulo A, i 37. primi.
angulus EDG, æqualis; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, æquale. Cum igitur DEK, [l] minus ſit triangulo DEF; erit k 4. prim.
quoque ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod eſt propoſitum. l 9. pron.



SINT tertio anguli A, & EDF, duobus rectis minores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, maius
eſſe triangulo DEF. Producatur ED, ad H, & FD, ad I; [m] fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, [n] & recta DG, rectæ DF, ſeu m 23. prim.
AC; ducanturq́; rectæ EG, GF. Quoniam igitur an- n 3. primi.
guli A, & EDF, ponuntur minores duobus rectis, e-
runt quoque anguli EDG, EDF, duobus rectis mino-
res. Sunt [o] autem anguli EDG, GDH, duobus rectis o 13. prim.
æquales. Igitur EDG, EDF, minores ſunt, quam
EDG, GDH; demptoque communi EDG, remanebit p 15. primi.
EDF, minor, quam GDH. Eſt autem EDF, [p] æqualis
ipſi HDI. Quare & HDI, minor erit, quàm GDH; at-
que adeo GDH, maior eſt dimidio anguli GDI. Quo-
niam autem DGF, dimidium eſt eiuſdem anguli



GDI, vt iam ſupra oſtenſum fuit; erit GDH, maior, quam DGF. Fiat igitur angulus DGK, [q] æqualis angulo GDH, ducta re- q 23. prim.
cta GK, quæ ſecabit rectam EF, protractam in K; & ducatur recta DK. Erit ergo, vt prius GK, [r] parallela ipſi DE; [s] triangu- r 27. prim.
lumque DEG, triangulo DEK, æquale: Eſt autem iterum DEG, [t] æquale ipſi ABC. Igitur & ABC, æquale eſt ipſi DEK, [u] Quo- s 37. primi.
circa cum DEK maius, ſit, quàm DEF; erit & ABC, maius, quam DEF. Quod demonſtrandum erat. t 4. primi.
u 9. pron.

EX his perſpicuum eſt, cur Euclides in propoſ. 24. ſolum collegerit inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, vt
ibidem admonuimus.

THEOR. 28. PROPOS. 38. xxxviij.

TRIANGVLA ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt
æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & ſuper æquales baſes CE, FD, ſint
conſtituta triangula ACE, BFD. Dico ipſa eſſe æqualia. [x] Ducatur enim x 31. primi.
EG, parallela ipſi AC, & DH, ipſi BF: Eruntq; [y] parallelogrāma ACEG, y 36. primi.
BFDH, ęqualia. Cum igitur horum [z] dimidia ſint triangula ACE, BFD; z 34. prim.
[a] erunt hęc inter ſe æqualia. Triangula ergo ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat oſtendendum. a 7. pron.



SHOLIVM.

CONVERSA huius oſtendetur ab Euclide propoſ. 40.

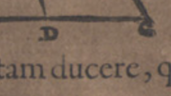
COLLIGITVR autem ex hac propoſitione, ſi à quouis angulo trianguli dati
linea recta ducatur diuidens latus oppoſitum bifariam, triangulum quoque bifariam
ſecari. Ducatur enim in triangulo ABC, ex angulo A, recta AD, diuidens bifariam latus
BC, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoque ſecari. Si enim per A, ducatur paral-
lela ipſi BC, erunt duo triangula ABD, ADC, inter eaſdem parallelas; & ſuper æquales
baſes, [b] Quare æqualia erunt. b 38. primi.



EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propoſiti lineam rectam ducere, quæ bifa-
riam ſecet triangulum datum.

SIT triangulum ABC, & punctum datum D, in latere BC. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam
diuidat triangulum. Quod ſi punctum D, diuidat latus BC, bifariam, recta DA, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt
in hoc ſcholio eſt oſtenſum; Si vero D, non diuidit BC, bifariam, [c] ſecetur BC, bifariam in c 10. primi.
E. Deinde ex D, ad angulum oppoſitum A, ducatur recta DA, & per E, [d] parallela EF, ipſi d 31. primi.
DA, ſecans AC, in F. Si igitur ducatur recta DF, erit triangulum diuiſum bifariam à li-
nea DF. Nam ducta recta EA, [e] erunt triangula EFA, EFD, æqualia, cum ſint ſuper ean-
dem baſin EF, & inter eaſdem parallelas EF, AD. Addito igitur communi CFE, [f] erunt tota triangula AEC, CDF, æqualia: e 38. primi.
Eſt autem AEC, dimidium totius ABC, vt iam fuit oſtenſum. Igitur & CDF, dimidium eſt eiuſdem trianguli ABC, quod e- f 2. pron.
rat probandum.





QVOD ſi punctum D, fuerit in altera medietate EC, eodem modo problema conficiemus: ſed tunc triangulum abſcindetur ad partes B, trapezium vero ad partes C, vt figura præſens ſatis indicat. Demonſtratio autem eadem eſt, ſi in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multo nos vniuerſalius proponemus ad finem ſexti libri.

xxxix.

THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta; & in eiſdem ſunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia, ABC, DBC, ſuper eandem baſin BC, & ad eaſdem partes, Dico ipſa eſſe inter eaſdem parallelas conſtitutã, hoc eſt, rectam ductam AD, parallelam eſſe ipſi BC. Si enim non eſt, *a* ducatur ex A, parallela ipſi BC, quæ vel cadet ſupra AD, vel infra. Cadat primum ſupra, qualis eſt AE, coeatque cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam igitur parallelæ ſunt AE, BC, *b* erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Eſt autem per hypotheſin, triangulum quoque DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur *c* erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis eſt AF; ducta recta FC, erunt eadem ratiocinatione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum; quod eſt abſurdum. Erit igitur AD, parallela ipſi BC. Quare triangula æqualia ſuper eadem baſi, &c. Quod oſtendendum erat.

a 31. primi. b 37. primi. c 1. pron.

S H O L I V M.

EX his infert Campanus ſequens hoc theorema.

LINEA recta ſecans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.



SECET linea DE, latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam in D, & E. Dico DE, parallelam eſſe lateri BC. Cum enim triangula ADE, BDE, ſint ſuper æquales baſes AD, DB, & inter eaſdem parallelas; (ſi per E, duceretur parallela ipſi AB) d erit triangulum BDE, triangulo ADE, æquale: Eadem ratione erit triangulum CED, eidem triangulo ADE, æquale. Quod etiam conſtat ex ſcholio præcedentis propos. Recta enim ED, ſecabit triangulum AEB, bifariam, & recta eadem DE, triangulum ADC, bifariam etiam, quod baſes AB, AC, ſectæ ſint bifariam à recta DE, ex hypotheſi. Igitur triangula DBE, ECD, e æqualia erunt: Habent autem eandem baſin DE, & ſunt ad eaſdem partes conſtituta. Quare f inter eaſdem erunt parallelas, & idcirco DE, BC, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.

d 38. primi. e 1. pron. f 39. primi.

ID autem, quod ad finem ſecundi theorematis in ſcholio propoſ. 34. polliciti ſumus, facile ex hac propoſ. demonſtrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum eſt.



NAM quadrilaterum ABCD, diuidatur bifariam ab vtraque diametro AC, BD. Dico ipſum eſſe parallelogrammum. Cum enim triangula ADC, BDC, dimidia ſint eiuſdem quadrilateri ABCD, g ipſa inter ſe æqualia erunt. Quare cum eandem habeant baſin DC, ad eaſdemque partes ſint, h ipſa in eiſdem parallelis erunt; Atque idcirco rectæ AB, DC, parallelæ ſunt. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe AD, BC. Parallelogrammum igitur eſt ABCD. Quod eſt propoſitum.

g 7. pron. h 39. primi.

xxxx.

THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, & in eiſdem ſunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia ABC, DEF, ſuper baſes æquales BC, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis, hoc eſt, rectam ex A, ad D, ductam parallelam eſſe rectæ BF. Si enim non eſt, cadet parallela ipſi BF, per A, ducta vel ſupra AD, vel infra. Cadat primum ſupra, coeatque cum ED, producta in G, & ducatur recta GF. Quoniam igitur parallelæ ſunt AG, BF, *i* erit triangulum EFG, triangulo ABC, æquale: Ponitur autem & triangulum DEF, eidem triangulo ABC, æquale. Igitur *k* triangula DEF, GEF, æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis eſt, AH; ducta recta HF, erunt eadem argumentatione triangula HEF, DEF, æqualia, pars & totum, quod eſt abſurdum. Eſt igitur AD, parallela ipſi BF. Quare triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

i 38. primi. k 1. pron.

S C H O L I V M.

HÆC propoſitio conuertit vno modo propoſ. 38. Alio autem modo conuerti poteſt, quemadmodum propoſ. 36. conuertimus in eius ſcholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.

Sint triangula æqualia ABC, DEF, inter parallelas AD, BF, & ſuper baſes BC, EF, quas dico eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit BC, maior. [a] Abſciſſa ergo recta CG, æquali ipſi EF, & ducta recta GA; [b] erit triangulum AGC, triangulo DEF, æquale: Ponitur autem & triangulum ABC, eidem triangulo DEF, æquale: Igitur triangula AGC, ABC, [c] æqualia erunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes BC, EF, ſed æquales. Quod eſt propoſitum.



a 3. primi.
b 38. primi.
c 1. pron.

Sequens etiam theorema facili negotio demonſtrabitur.

SI duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contra, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

Sint enim in proxima figura inter parallelas AD, BF, triangula ABC, DEF, ſitq; baſis BC, baſe EF, maior. Dico triangulum ABC, maius eſſe triangulo DEF. Ablata enim recta CG, [d] æquali ipſi EF, ductaq; recta AG; [e] erunt triangula AGC, DEF, ſupra æquales baſes GC, EF, æqualia. Cum ergo [f] triangulum ABC, triangulo AGC, maius ſit; erit idem triangulum ABC, maius quam DEF.

d 3. primi.
e 38. pri.
f 9. pron.

Sint rurſus triangula ABC, DEF, inæqualia, & ABC, maius. Dico baſin BC, baſe EF, maiorem eſſe. Si enim dicatur æqualis, [g] erit triangulum ABC, triangulo DEF, æquale, quod eſt abſurdum, cum maius ponatur. Si vero credatur eſſe minor, erit triangulum DEF, maius triangulo ABC, vt proxime oſtendimus, quod multo magis eſt abſurdum, cum ABC, ponatur maius, quam DEF. Recta igitur BC, maior erit, quam EF, cum neq; æqualis ſit oſtenſa, neq; minor. Quod eſt propoſitum.

g 38. primi.

Quæ porro hactenus de parallelogrammis, triangulisq; inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facile quoque demonſtrari poſſunt de trapeziis inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem ferme ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

Dicuntur trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, parteſq; ſunt earundem parallelarum.

Inter parallelas igitur AB, CD, ſuper eadem baſi CD, conſtituta ſint duo trapezia, ACDE, FCDB, quorum baſes oppoſitæ AE, FB, æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis EC, FD, [h] erunt tam triangula ECD, FCD, ſuper eadem baſi CD, & in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia, [i] quam triangula ACE, FDB, ſuper æqualibus baſibus AE, FB, & in eiſdem parallelis. Si igitur æqualib. ECD, FCD, addantur æqualia ACE, FDB, [k] erunt tota trapezia ACDE, FCDB, inter ſe æqualia.



h 37. primi.
i 38. pri.
k 2. pron.

Sint iam trapezia ACDE, FCDB, æqualia. Dico baſes oppoſitas AE, FB, æquales quoq; eſſe. Erunt enim rurſus [l] triangula ECD, FCD, æqualia. Si igitur ex trapeziis æqualibus auferantur, [m] æqualia erunt reliqua triangula ACE, FDB. Quare, vt in hoc ſcholio oſtendimus, baſes AE, FB, æquales erunt.

l 37. primi.
m 3. pron.

II.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, cuius baſis maior eſt; Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas inæquales, maiorque eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

Vt in eadem figura, ſi baſis AE, dicatur eſſe maior baſe FB; Dico trapezium ACDE, maius eſſe trapezio FCDB. [n] Erunt enim rurſus triangula ECD, FCD, æqualia: At triangulum ACE, triangulo FDB, maius, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus. [o] Totum ergo trapezium ACDE, toto trapezio FCDB, maius erit.

n 37. primi.
o 4. pron.

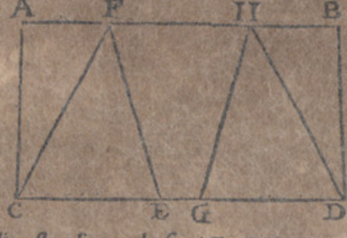
Rurſus ſi trapezium ACDE, dicatur eſſe maius trapezio FCDB; Dico baſin AE, baſe FB, maiorem eſſe. [p] Erunt enim rurſus triangula ECD, FCD, æqualia. Quare reliquum triangulum ACE, reliquo triangulo FDB, [q] maius erit: ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum eſt, baſis AE, maior erit baſe FB. Quod oſtendendum erat.

p 37. primi.
q 5. pron.

III.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.

Inter parallelas AB, CD, ſuper æquales baſes CE, GD, conſtituta ſint duo trapezia ACEF, HGDB, quorum baſes oppoſitæ AF, HB, æquales quoq; ſint. Dico ipſa trapezia æqualia eſſe. Ductis enim rectis FC, HD, [r] erunt tam triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, quam ACF, BDH, ſuper baſes æquales AF, BH, inter ſe æqualia. [s] Tota ergo trapezia æqualia erunt.



r 38. primi.
s 2. pron.

Sint iam trapezia ACEF, HGDB, æqualia ſuper baſes æquales CE, GD. Dico baſes oppoſitas AF, BH, æquales quoq; eſſe. [t] Erunt namq; rurſus triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapeziis æqualibus, reliqua triangula ACF, BDH, [u] æqualia erunt; ac proinde, vt paulo ante in hoc ſcholio oſtendimus, baſes AF, BH, æquales erunt.

t 38. primi.
u 3. pron.

IV.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusque eſt illud, cuius baſis maior eſt: Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent oppoſitas baſes inæquales, maiorque eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

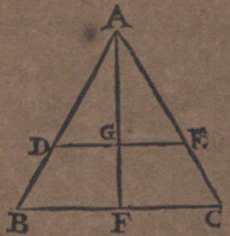
a 38. pri. *VT in eadem figura, ſi baſis AF, dicatur eſſe maior baſe HB, erit trapezium ACEF, trapezio HGDB, maius.* [a] *Erunt*
enim rurſum triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, æqualia. At triangulum ACF, maius triangulo BDH, vt ſu-
b 4. pron. *pra oſtenſum eſt, quod baſis AF, maior ponatur baſe BH.* [b] *Totum ergo trapezium ACEF, toto trapezio HGDB, maius erit.*

c 38. pri. *Rurſus ſi trapezium ACEF, maius ponatur trapezio HGDB, erit baſis AF, baſe BH, maior.* [c] *Erunt enim rurſus tri-*
angula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæqualibus, reliquum triangulum ACF,
d 5. pron. *reliquo triangulo BDH,* [d] *maius erit; ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum fuit, baſis AF, baſe BH, maior erit. Quod erat oſtendendum.*

Porro non videtur hic omittendum theorema ſequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotuis partes æquales diuidemus: quod nos in ſcholio propoſ. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem demonſtrari poſſit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt lib. 6. oſtendemus, iucundū tamen eſt intelligere, nullo labore idem abſolui poſſe per propoſitiones hactenus demonſtratas, ſine proportionum adiumento. Theorema ergo eſt huiuſmodi.

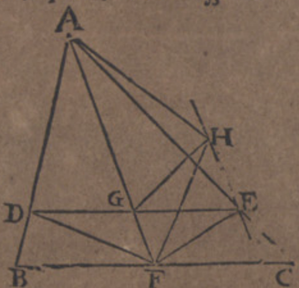
SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensque alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoque alteram bifariam.

IN triangulo ABC, æquidiſtet DE, ipſi BC, & recta AF, ſecet alterutram BC, DE, bifariam in F, vel G. Dico alteram
e 29. primi *quoque bifariam ſecari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quo poſito,* [e] *& anguli ad G, recti erunt. Si igitur BC, diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus A, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 26. huius lib. demonſtrauimus; ac proinde recta AG, ad baſim DE, trianguli ADE, perpendicularis, diuidensque angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoque baſim DE, vt ibidem oſtendimus, quod eſt propoſitum.*



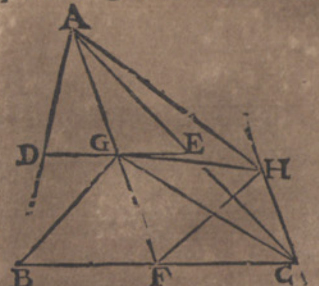
Si vero DE, ponatur diuidi bifariam, diuidetur, per idem ſcholium propoſ. 26. huius lib. angulus quoque A, bifariam; ac proinde recta AF; ad baſim BC, perpendicularis, diuidensque angulum A, bifariam, baſim quoque BC, bifariam ſecabit, quod eſt propoſitum.

Sint deinde anguli ad F, non recti, ſed AFC, obtuſus, & AFB, acutus. Quo poſito, erit &
f 29. pri. *AGE, obtuſus, & AGD, acutus,* [f] *cum hi illis ſint æquales, externi internis. Si igitur BC, diuidi-*
g 23. prim. *tur bifariam,* [g] *conſtituatur acuto angulo AGD, æqualis angulus AGH,* [h] *& recta GH, rectæ*
h 3. prim. *GD, æqualis, ducanturque rectæ AH, HF, FD, FE. Quia igitur tam triangula tota ABF, ACF, ex ſcholio propoſ. 38. huius libri*
i 38. primi. *æqualia ſunt,* [i] *quam triangula ablata DBF, ECF, ob æquales baſes BF, CF;* [k] *erunt quoque*
k 3. pron. *reliqua triangula ADF, AEF, æqualia. Rurſus quoniam duo latera AG, GD, trianguli AGD, duobus lateribus AG, GH, æqualia ſunt, anguloſque comprehendunt æquales AGD, AGH, ex*
l 4. primi. *conſtructione,* [l] *erunt quoque triangula AGD, AGH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera DG, GF, duobus lateribus HG, GF, æqualia ſunt, ex conſtructione, anguloſque continēt*
m 13. pri. *æquales DGF, HGF; (cum enim per conſtructionem anguli AGD, AGH, æquales ſint, erunt quoque reliqui duorum rectorum DGF, HGF, æquales.* [m] *ſunt enim tam AGD, DGF, quam AGH, HGF, duobus rectis æquales.) erunt* [n] *quoque triangula DGF, HGF, æqualia:* [o] *ac*

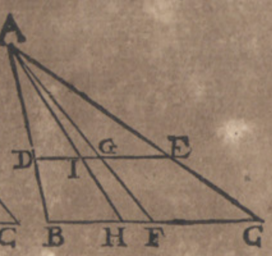


n 4. primi.
o 2. pron. *proinde & tota triangula ADF, AHF, æqualia erunt. Eſt autem eidem triangulo ADF,*
p 1. pron. *æquale oſtenſum triangulum AEF. Igitur & inter ſe* [p] *æqualia erunt triangula AHF,*
q 39. primi *AEF.* [q] *ac propterea inter duas eaſdem erunt parallelas, hoc eſt, ducta recta EH, erit baſi AF, communi parallela. Igitur* [r] *&*
r 37. primi. *triangula HGF, EGF, inter eaſdem parallelas, & ſuper eadem baſi FG, æqualia inter ſe erunt. Eſt autem triangulum HGF, triangulo DGF, oſtenſum æquale. Igitur triangula quoque DGF, EGF, æqualia inter ſe erunt; propterea que baſis quoque DG, baſi GE, æqualis erit, vt in hoc ſcholio demonſtratum eſt, quod eſt propoſitum.*

ſ 23. primi. *Si vero DE, ponatur bifariam diuidi,* [s] *conſtituatur angulo acuto AFB, æqualis angulus AFH,* [t] *& recta FH, rectæ FB,*
t 3. primi. *ducanturque rectæ AH, HG, GB, GC. Quoniam igitur tam triangula AGD, AGE, ex ſcholio propoſ. 38. huius lib. æqualia ſunt,*
u 38. primi. [u] *quam triangula DGB, EGC, ob æquales baſes DG, EG;* [x] *erunt tota etiam triangula AGB, AGC, æqualia. Rurſusquia duo*
x 2. pron. *latera AF, FB, duobus lateribus AF, FH, æqualia ſunt, continentque angulos æquales*
y 4. primi. *AFB, AFH, ex conſtructione;* [y] *erunt triangula quoque AFB, AFH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera GF, FB, duobus lateribus GF, FH, æqualia ſunt, æqualeſque continent an-*
z 4. primi. *gulos GFB, GFH, ex conſtructione;* [z] *erunt quoque æqualia triangula GFB, GFH: quibus*
a 3. pron. *demptis ex æqualibus AFB, AFH,* [a] *æqualia erunt reliqua triangula AGB, AGH: Eſt autem eidem triangulo AGB, oſtenſum æquale triangulum AGC.* [b] *Igitur & triangula*
b 1. pron.
c 39. primi. *AGC, AGH, inter ſe erunt æqualia.* [c] *Quare & inter eaſdem parallelas erunt, h. e. ducta*
d 37. primi *recta CH, ipſi AF, parallela erit ac proinde* [d] *æqualia inter ſe erunt triangula GHF, GFC.*
e 1. pron. *Fuit autem oſtenſum triangulum GHF triangulo GBF, æquale.* [e] *Igitur & æqualia inter ſe erunt triangula GFC, GFB; deoque, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus, & baſes FC, FB, æquales erunt Quod eſt propoſitum.*







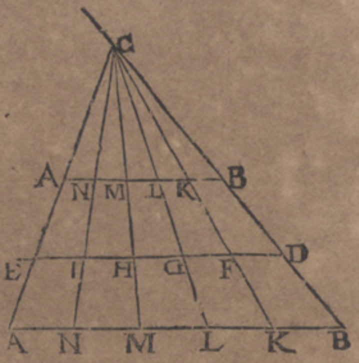
Aliter. Diuiſa ſit primum BC, bifariam in F. Dico & DE, bifariam eſſe diuiſam in G. Si enim DG, GE, non ſunt æquales, ſit maior DG, ducanturque rectæ ID, FE. Erit igitur per ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrauimus, tam trangulum ADG, triangulo AEG, quam triangu-
f 4. pron. *lum FDG, triangulo FEG, maius.* [f] *Totum ergo triangulum ADF, toto triangulo AEF, maius erit: quibus ſi addantur triangula DBF, ECF,*

ECF,[a] quæ propter baſes æquales BF, CF, æqualia ſunt,[b] fiet totum triangulum ABF, toto triangulo A C F, maius; ac proinde, vt in hoc ſcholio monſtrauimus, baſis BF, baſe FC, maior erit: Sed & æqualis ponitur. Quod eſt abſurdum. Biſariam ergo ſecta eſt DE, in G. Quod eſt propoſitum. a 38. primi. b 4. primi.

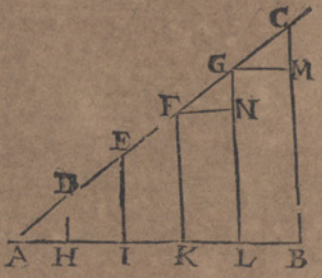
Sit iam DE, ſecta biſariam in G. Dico & BC, diuidi biſariam in F. Sin minus,[c] diuidatur B C, in H, biſariam, ducaturq; recta AH, ſecans DE, in I. Quoniam igitur AH, ſecat BC, biſariam in H, ſecabit eadem ipſam DE, quoq; biſariam in I, vt proxime oſtendimus. Quod eſt abſurdum, cum biſariam ſecta eſſe ponatur in G. Sequeretur enim partem toto eſſe maiorem. Nam ſi DI, æqualis eſt ipſi IE, cum IE, maior ſit, quam GE, erit quoq; DI, maior, quam GE, hoc eſt, quam DG, quæ ipſi GE, æqualis ponitur. Diuiditur ergo BC, biſariam in F. Quod erat demonſtrandum. c 10. primi.

Hoc oſtenſo theoremate, ad diuiſionem lineæ rectæ in quotuis æquales partes iam veniamus.

DATAM rectã lineam finitam in quotlibet partes æquales ſecare.

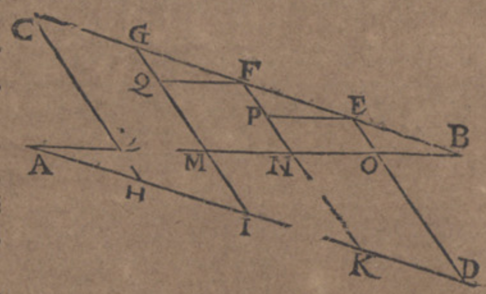


Sit data recta A B, ſecanda in quinque partes æquales. Per extremum punctum B, ducta recta BC, vtcunq; & aſſumpto in BC, puncto quocunq; D, ſiue infra B, ſiue ſupra,[d] ducatur per D, ipſi A B, parallela D E, in qua[e] abſcindantur quinq; partes inter ſe æquales DF, FG, GH, HI, IE, hac tamen lege, vt exiſtente puncto D, infra B, recta DE, ex quinq; partibus æqualibus compoſita maior ſit, quam data AB, minor vero, exiſtente puncto D, ſupra B, vt nimirum recta A C, per alterum extremum A, & per E, ducta cum B D, concurrere poßit in puncto aliquo, vt in C. A quo ſi per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur, ſecta erit data recta AB, in quinq; partes æquales BK, KL, LM, MN, NA. Quoniam enim in triangulo CBL, recta DG, ipſi BL, eſt parallela, vel in triangulo CDG, recta BL, ipſi DG: ſectaq; eſt DG, biſariam in F, ſecta quoq; erit biſariam BL, in K, vt in proximo theoremate demonſtrauimus. Eademq; ratione recta K M, in L, ſecta erit biſariam, quemadmodum & FH, in G, biſariam ſecta eſt. Sunt ergo tres partes BK, KL, LM, inter ſe æquales, ſicuti tres DF, FG, GH, atq; ita de ceteris. d 31. primi. e 3. primi.



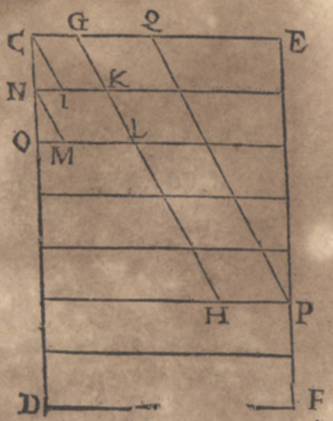
Aliter. Ad extremum A, lineæ A B, ſecandæ in quinq; partes æquales, conſtituatur angulus rectilineus quicunq; A, & ex recta A C,[f] abſcindantur quinq; partes quantæcunq; inter ſe æquales AD, DE, EF, FG, GC: ductaq; recta CB,[g] agantur ei parallelæ G L, FK, EI, DH. Dico rectam AB, ſectam eſſe in quinq; partes æquales.[h] Ductis enim per G, F, ipſi AB, parallelis GM, FN,[i] quæ inter ſe etiam parallelæ erunt,[k] & ipſis BL, LK, æquales in parallelogrammis GB, FL;[l] erunt tam anguli FGN, G C M, externus & internus in parallelis GL, CB, quam anguli C G M, G F N, externus & internus in parallelis GM, FN, æquales inter ſe. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli CGM, duobus angulis G, F, trianguli G F N, æquales ſunt, vterq; vtriq;, lateraq; illis adiacentia C G, G F, æqualia per conſtructionem,[m] erunt quoq; latera GM, FN, æqualia: quæ cum oſtenſa ſint æqualia rectis BL, LK, erunt quoq; BL, LK, inter ſe æquales. Eademq; ratione oſtendemus K L, K I, æquales eſſe, nec non I K, HI, & HI, AH; ac propterea recta AB, in quinq; æquales partes diuiſa erit. Quod eſt propoſitum. f 3. pri. g 31. primi. h 31. primi. i 30. pri. k 34. primi l 29. primi. m 26. pri.

Aliter. Ad extrema puncta A, B, lineæ AB, in quinq; partes æquales diuidendæ conſtituantur duo æquales anguli in diuerſas partes ABC, BAD. Et in vtraq; linea BC, AD,[n] quæ ob alternos angulos æquales A, B, parallelæ inter ſe ſunt,[o] ſumantur quatuor partes inter ſe omnino æquales, tot nimirum, vna minus, in quot partes linea ſecanda eſt, cuiuſmodi ſunt BE, EF, FG, GC; AH, HI, IK, KD, iunganturq; rectæ CH, GI, FK, ED,[p] quæ inter ſe erunt parallelæ, cum coniungant extrema parallelarum æqualium. Dico rectam AB, in quinq; partes æquales ſectam eſſe.[q] Ductis enim per E, F, ipſi AB, parallelis EP, FQ,[r] quæ inter ſe quoq; parallelæ erunt,[s] & ipſis NO, MN, æquales in parallelogrammis EN, FM:[t] erunt tam anguli EFP, FGQ, externus, & internus in parallelis FK, GI, quã anguli GFQ, FEP, externus & internus in parallelis QF, PE, inter ſe æquales. Itaq; quoniam duo anguli G, F, trianguli FGQ, duobus angulis F, E, trianguli EFP, æquales ſunt, vterq; vtriq;, lateraq; illis adiacentia FG, EF, æqualia per conſtructionem,[u] erunt quoq; latera FQ, EP, inter ſe æqualia: quæ cũ oſtenſa ſint æqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter ſe æquales. Eademq; ratione æquales inter ſe erũt OB, NO, MN, LM, AL, proptereaq; recta AB, in quinq; æquales partes diuiſa erit. Quod eſt propoſitum. n 27. prim. o 3. primi. p 31. pri. q 31. primi. r 30. prim. s 34. primi. t 29. primi





u 26. primi.



Praxis hæc breuius ita demonſtrabitur.[x] Quoniam rectæ ED, FK, GI, GH, parallelæ ſunt, quod coniungant extrema æqualium & parallelarũ; ſecabitur recta BL, in quatuor partes æquales, nec non & recta AO, vt in præcedenti praxi oſtendimus. Omnes ergo quinq; partes AL, LM, MN, NO, OB, æquales erunt. x 33. pri.

Aliter. Paretur inſtrumentum diuiſionib. linearũ in partes æquales accommodatũ, hoc modo. Ductis duab. parallelis ſatis magno ſpatio inter ſe diſtantib. CD, EF.[y] ſumantur in vtraq; partes omnino inter ſe æquales quotcunq;, tot videlicet in vna, q̃ in altera, & modicæ quãtitatis, pũctaq; reſpõdẽtia lineis rectis iungãtur,[z] q̃ parallelæ inter ſe erũt, cũ cõiũgãt extrema parallelarũ æqualiũ. Si igitur beneficio circini recta A B, in quinq; diuidenda partes æquales trãsferatur ex quouis pũcto G, vſq; ad pũctũ H, ita vt quinq; ſpatia parallelarũ inter G, & H, includãtur, diuiſa erit ducta GH, ab illis parallelis in quinq; partes æquales, quib. partib. ſi in data AB,[a] ſumãtur partes æquales, diuiſa quoq; erit AB, in quinq; æquales partes. Sectã autẽ eſſe GH, in quinq; partes æquales, ita demonſtrabitur. Ductis ex C, N, ipſi GH, parallelis CI, NM,[b] quæ inter ſe quoq; parallelæ erũt;[c] & ipſis GK, KL, æquales in parallelogrammis GI, KM; erunt[d] tã anguli CNI, NOM, externus & internus in parallelis NK, OL, q̃ anguli ONM, NCI. externus & internus in parallelis NM, CI, æquales inter ſe. Igitur cũ duo anguli N, C, triãguli CNI, duob. angulis O, N, triãguli NOM, æquales ſint, vterq; vtriq;, lateraq; illis adiacentia CN, NO, æqualia, ex conſtructione,[e] erunt quoq; latera CI, NM, inter ſe æqualia: quæ cum oſtenſa ſint æqualia rectis GK, KL, erunt quoq; GK, KL, inter ſe æquales. Eademq; ratione omnes partes rectæ G H, oſtendentur æquales: ac proinde recta GH, in quinq; partes æquales erit diuiſa. y 3. pri. z 33. pri. a 3. primi. b 30. primi. c 34. prim. d 29. prim. e 26. pri.

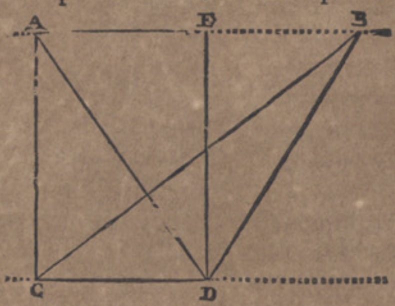
Praxis

Praxis etiam hæc breuius demonſtrabitur, ſi hoc modo fiat. Sumptis quinq; interuallis rectæ EF, ab E, vſq; ad P, transferatur recta AB, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ CE, vt ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta PQ, diuiſa à parallelis in quinq; partes æquales, vt in ſecunda praxi demonſtratum eſt. Quare ſi partes rectæ PQ, quæ datæ rectæ AB, æqualis eſt, ex conſtructione, transferantur in datam rectam AB, diuiſa quoq; erit AB, in quinq; partes æquales. Quod eſt propoſitum.

xlj.

THEOR. 31. PROPOS. 41.

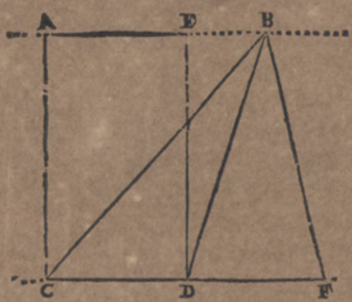
SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.



a 37. primi.
b 34. primi
c 6. pron.

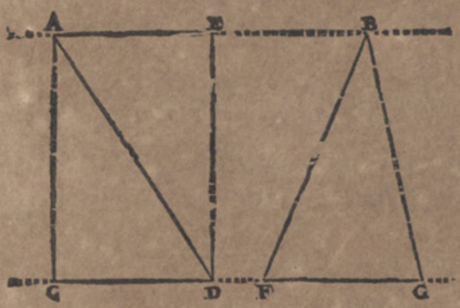
INTER parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, conſtituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum eſſe duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt [a] triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum eſt trianguli ACD; [b] quod triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter ſe ſint. Igitur & trianguli BCD, [c] duplum erit idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem, ſi parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonſtandum.

SCHOLIVM.



d 38. primi.
e 41. pri.
f 6. pron.

Hinc ſequitur, ſi triangulum duplam habuerit baſin, fueritq; in eiſdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam ſi baſis CD, producatur ad F, vt ſit DF, æqualis ipſi CD, ducaturq; recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, [d] quod triangula BCD, BDF, æqualia ſint: Eſt autem & parallelogrammum ACDE, [e] duplum eiuſdem trianguli BCD. [f] Igitur æqualia erunt triangulum BCF, & parallelogrammum ACDE.

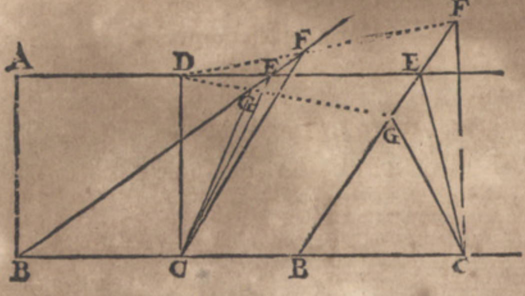


g 38. primi.
h 34. primi.
i 6. pron.

Idem hoc theorema Euclidis demonſtrari poteſt eodm modo, ſi parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint baſes, & non eandem, fuerintq; in eiſdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum baſes CD, FG, æquales ſunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, [g] erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum ſit trianguli ACD: [h] quod diameter AD, ſecet parallelogrammum ACDE, bifariam: [i] erit quoq; idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione ſi baſis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc eſſet duplum etiam trianguli BFG, &c.

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, hoc modo.

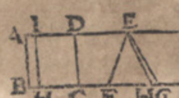
SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eãdemque habuerint baſin, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemque parallelis: erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.



k 41. primi.
l 6. pron.

Sit parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EBC, ſiue eandem habeant baſin, ſiue æquales. Dico parallelam AD, productam cadere in E, punctum. Nam alias cadet aut ſupra E, aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propoſ. oſtendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. [k] Nam erit quoq; parallelogrammum ABCD, trianguli BFC, vel BGC, duplum. [l] Quare triangula EBC, FBC, vel triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum.

m 31. primi



Sit deinde parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EFG, in eiſdemq; parallelis. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe BC, ſit maior, abſciſſa æquali CH, & [m] ducta HI, parallela ipſi AB, demonſtrabimus parallelogramma ABCD, IHCD, eſſe æqualia, totum & partem; (quia vtrumq; duplum eſt trianguli EFG; illud quidem per hypotheſin, hoc vero per 41. propoſ.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis FG, maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi BC, æqualis FH, ducaturque recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam vtrumq; dimidium eſt parallelogrammi ABCD; Illud quidem per propoſ. 41. hoc vero per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.

EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



Inter lineas parallelas AE, BC, ſint conſtituta trapezium A B C D, & triangulum EBC ſuper baſim BC, eandem, quæ ſit tamen maior, quam altera linea AD, parallela in trapezio dato. Dico trapeziũ ABCD, minus eſſe duplo trianguli EBC. Cum enim AD, minor ponatur quam BC, ſumatur A F, æqualis ipſi BC, & ducatur recta CF, [a] *quæ erit parallela ipſi AB; atq; adeo parallelogrammum erit ABCF,* [b] *quod duplum eſt trianguli EBC. Quare trapezium ABCD, cum ſit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiuſdem trianguli E B C. Quod eſt propoſitum.*

a 33. primi.
b 41. primi.

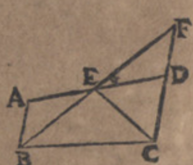


Sint rurſus trapezium, & triangulum, vt prius, ſed baſis BC, ſit minor, quam reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius eſſe duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior ſit, quam BC, abſcindatur DF, æqualis ipſi BC, & ducatur recta BF, [c] *quæ erit parallela ipſi C D; atq; adeo parallelogrammum erit BCDF:* [d] *quod duplum eſt trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod ſuperat parallelogrammum BCDF, maius erit duplo eiuſdem trianguli EBC. Quod eſt propoſitum.*

c 33. primi.
d 41. primi.

Idem concludetur, ſi trapezium, & triangulum conſtituta fuerint ſuper æquales baſes, ita tamen vt nunc quidem baſis trapezii ſit maior latere oppoſito parallelo, nunc vero minor.

TRAPEZIVM habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppoſiti.



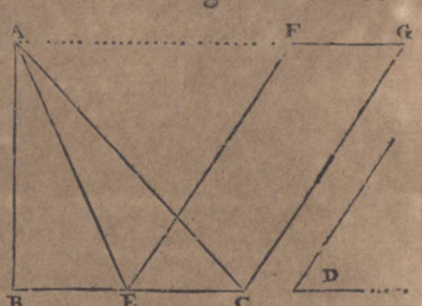
Sit trapezium ABCD, cuius duo latera oppoſita AB, DC, ſint parallela, & ſuper baſin BC, conſtituatur triangulum EBC, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD. Dico trapezium ABCD, duplum eſſe trianguli E B C. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe BE, donec coeat cum CD, protracto in F. Et quia parallelæ ſunt AB, CF, [e] *erunt anguli alterni BAE, FDE, æquales:* [f] *Sunt autem & anguli AEB, DEF, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus A E, trianguli ABE, lateri DE, trianguli DEF, æquale, per hypotheſin.* [g] *Igitur & reliqua latera AB, BE, reliquis lateribus, DF, FE, æqualia erunt, vtrumq; vtriq;, & reliqui anguli A B E, D F E, æquales: atq; idcirco triangula ABE, DFE: ex coroll. propoſ. 26. huius lib. æqualia erunt. Quare addito communi triangulo CDE,* [h] *erunt triangulo CEF, æqualia triangula ſimul ABE, CDE.* [i] *Eſt autem & triangulum BCE, eidem triangulo CEF, æquale, quod baſes BE, EF, oſtenſæ ſint æquales, & ipſa triangula inter eaſdem ſint parallelas, ſi per C, duceretur parallela ipſi BF.* [k] *Igitur triangulum CBE, æquale erit triangulis ABE, CDE; & propterea CBE, triangulum dimidium erit trapezij ABCD, quod eſt propoſitum.*

e 29. pri.
f 15. pri.
g 26. primi.
h 1. pron.
i 38. pri.
k 1. pron.

PROBLEMA II. PROPOSITIO 42.

xlij.

DATO triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.



DATVM triangulum ſit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo A B C, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe BC, [a] bifariam in E, & [b] fiat angulus C E F, æqualis angulo D, prout libet, hoc eſt, ſiue angulus C E F, vergat ad partes C, ſiue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, [c] recta AF, parallela ipſi B C, quæ ſecet E F, in F. Rurſus per C, vel B, ducatur ipſi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G, Eritque in angulo C E F, qui dato angulo rectilineo D, factus eſt æqualis, conſtitutum parallelogrammum C E F G, quod dico eſſe æquale triangulo ABC. Ducta enim recta E A, quoniam parallelogrammum C E F G, [d] duplum eſt trianguli AEC, & triangulum ABC, duplum eiuſdem trianguli AEC, [e] quod triangula AEC, ABE, ſuper æquales baſes EC, BE, & in eiſdem parallelis, ſint æqualia. Erunt parallelogrammum CEFG, & triangulum ABC, [f] æqualia inter ſe. Cum igitur angulus CEF, factus ſit æqualis angulo D, conſtat propoſitum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

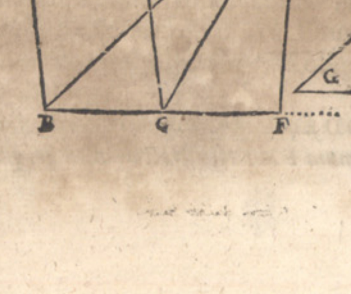
a 10. primi.
b 23. primi.
c 31. primi.
d 41. primi.
e 38. primi.
f 6. pron.

S C H O L I V M.

Praxis huius problematis facilima eſt ex ipſa conſtructione.

Subiungit autem hoc loco Peletarius ſubſequens problema, quod huius propoſ. conuerſum eſt.

DATO parallelogrammo æquale triangulum conſtituere, in dato angulo rectilineo.



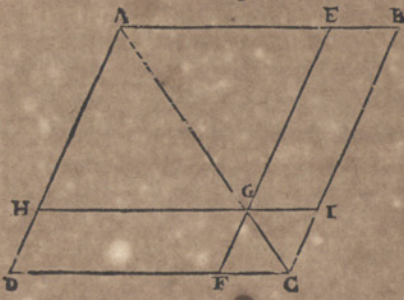
Sit datum parallelogrammum ABCD, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G, æqualis, ſecetq; recta BE, rectam AD, productam in E: Extendatur quoq; BC, ad F, ſitq; CF, æqualis rectæ BC, & iungatur E F. Dico triangulum B E F, habens angulum EBF, angulo dato G, æqualem, æquale eſſe parallelogrammo ABCD. Ducta enim recta C E, [g] *erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli BCE. Item triangulum BEF, eiuſdem trianguli BCE, duplum;* [h] *quod æqualia ſint triangula EBC, ECF. Quare* [i] *æqualia inter ſe erunt parallelogrammum ABCD, & triangulum BEF. Quod eſt propoſitum.*

g 41. primi
h 38. primi.
i 6. pron.

Praxis quoq; huius problematis Peletarij ex ipſa conſtructione perfacilis eſt.

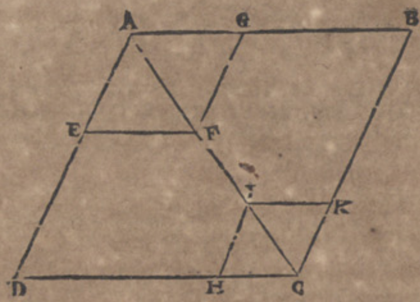
xliij. ## THEOR. 32. PROPOS. 43.

IN omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

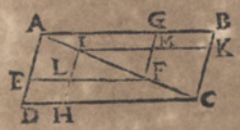


IN parallelogrammo ABCD, ſint circa diametrum AC, parallelogramma AEGH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter ſe eſſe æqualia.
a 34. primi Cum [a] enim triangula ABC, CDA, æqualia ſint; Itemq; triangula AEG, GHA; ſi hæc ab illis demãtur,
b 1. pron. [b] remanebunt trapezia CBEG, CDHG, æqualia:
c 34. primi. [c] Sunt autem & triangula CGI, CGF, æqualia. Quare ſi detrahãtur ex trapezijs,
d 3. pron. [d] remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, cõplementa, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

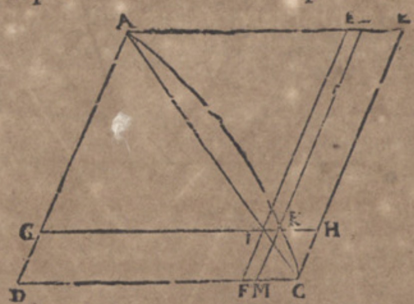


Eodem modo hoc theorema demonſtratur à Proclo etiamſi duo parallelogramma circa diametrum non coniũgantur in puncto G, ſed vel vnum ab altero ſit ſemotum, vel ambo ſe mutuo interſecent. Sit enim prius vnum ab altero diſtans, ita vt complementa ſint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo ABCD, circa diametrum AC, conſiſtant parallelogrãma AEFG, CHIK. Dico complementa DEFIH, BKIFG, eſſe æqualia.
e 34. primi. *Cum enim [e] triangula ABC, CDA, æqualia inter ſe ſint: Item triangula AEF, GHI, æqualia triangulis AGF, CKI:*
f 3. pron. *[f] erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, æqualia. Quod eſt propoſitum.*



Secent ſe iam mutuo parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum conſiſtentia. Ita vt communem partem habeant ILFM. Dico adhuc complementa DELH, BGMK, eſſe æqualia.
g 34. primi. *Cum enim [g] æqualia ſint triangula ABC, CDA: Item triangula AFG, AFE:*
h 3. pron. *[h] erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, æqualia:*
i 34. primi. *Sunt [i] autem rurſus æqualia triangula IFM, IFL. Igitur ſi hæc addantur dictis quadrilateris,*
k 2. pron. *[k] erunt figuræ BCIMG, DCILE, æquales. Cum igitur &*
l 34. primi. *[l] æqualia ſint triangula CIK, CIH: erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam æqualia. Quod eſt propoſitum.*
m 3. pron.
Conuerſum quoq; huius theorematis cum Peletario demonſtrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuiſum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduerſa ſint æqualia: conſiſtent reliqua duo circa diametrum.



Ductis duabus rectis EF, GH, quæ ſint parallelæ rectis BC, CD, ſeq; ſecent in I, diuiſum ſit parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorum aduerſa duo BEIH, DFIG, ſint æqualia. Dico reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrum conſiſtere, hoc eſt, diametrum à puncto C, ad punctum A, ductam tranſire per punctum I. Si enim non tranſit, ſecet diameter CKA, rectam GH, in K; ſi fieri poteſt, & per K,
n 31. primi. *[n] ducatur LM, parallela ipſi BC.*
o 43. primi *[o] Erunt igitur complementa BHKL, DGKM, æqualia:*
p 9. pron. *Eſt [p] autem DGKM, maius, quam DGIF. Quare & maius erit BHKL, quam DGIF. Cum ergo DGIF, æquale ponatur ipſi BEIH;*
q 1. pron. *[q] erit etiam BHKL, maius quam BEIH, pars quam totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, ſecat, ſed per punctum I, tranſit. Quod eſt propoſitum.*

xliv. ## PROBLEMA 12. PROPOSITIO 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

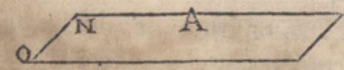
DATA recta linea ſit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A.



a 42. primi Conſtituatur triangulo B, [a] æquale parallelogrammum DEFG, habens angulũ EFG, angulo C, æqualem, producaturque GF, ad H, vt FH, ſit æqualis rectæ A, & per H,
b 31. primi. [b] ducatur HI, parallela ipſi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K; &
c 31. primi. [c] per K, ducatur KL, parallela ipſi GH, ſecans IH, protractam in L, producaturque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, eſſe id, quod quæritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato
d 15. primi. C, æqualem, [d] cum angulus HFM, æqualis ſit angulo EFG, qui factus eſt æqualis angulo C: Denique paral-
e 43 primi. lelogrammum LMFH, æquale eſt triangulo B, [e] cum æquale ſit complemento DEFG, quod factum eſt æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

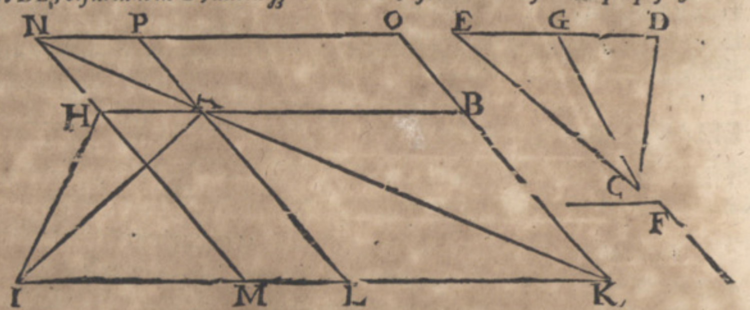
SCHOLIVM.

QVOD ſi quis optet, lineam ipſam A, datam, eſſe vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum FMLH, ad rectam A, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat



A. fiat angulus æqualis angulo MFH, & ſumatur recta NO, æqualis rectæ FM, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto ſcholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.

Sed fortaßis magis ex ſententia Euclidis problema hoc conficiemus, ſi ſuper ipſam rectam datam conſtruamus parallelogrammum, non autem ſuper æqualem, cuiuſmodi fuit recta FH, &c. Sit ergo rurſus data recta AB, datum triãgulum CDE, & datus angulus F, oporteatq; ſuper rectam AB, conſtituere parallelogrãmum æquale triangulo CDE, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt DE, bifariam in G, ductaq; recta CG, ſecante ex ſcholio propoſ. 38. huius lib. triangulum CDE, bifariam, producatur recta AB, verſus eam partem, vbi parallelogrammum conſtruendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic verſus A, fiatq; AH, æqualis ipſi EG, dimidio lateris DE. Deinde in A, [f] conſtituatur angulus HAI, angulo E, æqualis, deorſum quidem, ſi parallelogrammum verſus ſuperiorem partem ſit conſtruendum, ſurſum vero, ſi verſus inferiorem.



f 23. pri.

Poſita autẽ recta AI, æquali ipſi EC; iungatur recta HI. Et quia duo latera HA, AI, duobus lateribus GE, EC, æqualia ſunt, vtrumq; vtriq;, anguloſq; continent æquales; [g] erunt triangula AHI, EGC, æqualia. Poſt hæc [h] ducta per I, ipſi HB, parallela IK, [i] conſtituatur in A, verſus hanc parallelam angulus HAL, angulo dato F, æqualis, ſecetq; AL, rectam IK, in L. [k] Ducta quoq; per H, ipſi AL, parallela HM, ſecante IK, in M, [l] erit parallelogrammum AHML, trianguli AHI, duplum: Eſt autem & triangulum CDE, trianguli EGC, duplum, quòd æqualia oſtenſa ſint triangula EGC, DGC. Igitur cum æqualia ſint demonſtrata triangula AHI, EGC, [m] erunt æqualia parallelogrammum AHML, & triangulum CDE. Iam vero ſumpta recta LK, datæ rectæ AB, æquali ducatur recta KA, producaturq; donec cum MH, producta coeat in N, & per N, agatur ipſi HB, parallela NO, donec in O, coeat cum KB, protracta, ac tandem LA, producatur vſq; ad P, in recta NO. Dico parallelogrammum ABOP, eſſe id, quod quæritur. Eſt enim conſtitutum ſuper datam rectam AB, habetq; angulum BAP, dato angulo F, æqualem, [n] cum æqualis ſit angulo HAL, qui angulo F, factus eſt æqualis. Deinde æquale eſt dato triangulo CDE, [o] cum æquale ſit parallelogrammo AHML, quod triangulo CDE, oſtenſum fuit æquale.

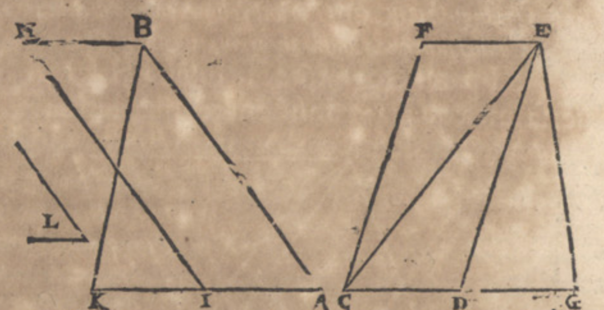
g 4. prim.
h 31. primi.
i 23. pri.
k 31. primi.
l 41. primi.
m 7. pron.
n 15. pri.
o 43. prim.

Praxis vero huius problematis à conſtructione ipſa non differt, niſi quod recta HI, duci nõ debet, neq; recta CG. Hæ enim propter demonſtrationem tantum ductæ ſunt.

Addit hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.

Sit data recta AB, datum parallelogrammum CDEF, & datus angulus L. Producatur CD, ad G, vt DG, æqualis ſit ipſi CD, & iungatur GE, recta: Eritq; triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, æquale, vt demonſtrauimus ſcholio propoſ. 41. [p] Fiat iam ſuper data recta AB, parallelogrãmum ABHI, æquale triangulo CEG, hoc eſt, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur AI, ad K, vt ſit IK, æqualis ipſi AI, iungaturq; recta BK. Dico triangulum ABK, conſtitutum ſuper datam rectam AB, habensq; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale eſſe dato parallelogrammo CDEF.



p 44. prim.

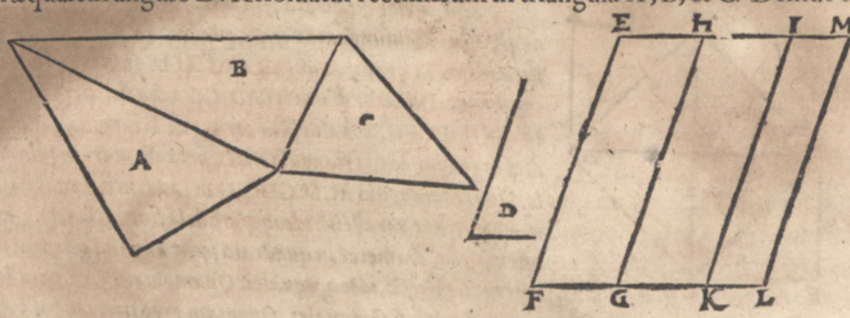
Cum enim triangulum ABK, æquale ſit parallelogrãmo ABHI, ex ſcholio propoſ. 41. quod æquale eſt conſtructum parallelogrammo CDEF, conſtat propoſitum.

Praxis huiuſce problematis à conſtructione non differt; difficiliſq; non eſt, ſi adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo ECG, parallelogrammum ABHI, ſuper data recta AB, in dato angulo A, conſtruatur.

PROBLEMA 13. PROPOS 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema abſolute, non aſtringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propoſ. 44. fecerat; tamen quia in ſequentibus frequenter vſurpatur in data recta linea, placuit ipſum proponere vna cum data recta linea. Sit ergo recta data EF; rectilineum ABC, & datus angulus D. Oportet igitur conſtruere ad datam rectam EF, parallelogrammum æquale rectilineo ABC, quod habeat angulum æqualem angulo D. Reſoluatur rectilineum in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, [a] æquale parallelogrammum conſtituatur EFGH, ſuper rectam EF, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item ſuper rectam GH, parallelogrammum GHIK, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item ſuper rectã IK, parallelogrammum IKLM, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et ſic deinceps procedatur, ſi plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod iubetur. Nam tria parallelo-



a 44. prim.

grāma conſtructa, quæ quidē æqualia ſunt rectilineo dato ABC, cōficiunt totū vnū parallelogrāmū, quod ſic demonſtratur. Duo anguli EFG, HGK, [b] inter ſe ſunt æquales, cū vterq; æqualis ſit angulo D. Addito igitur

b 1. pron. communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, [c] qui duob. rectis æquiualent, [d] æquales duob. angulis

c 29. pron. HGK, FGH, ideoque hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. [e] Quare FG, GK, vnam rectam lineam ef-

d 2. pron. e 14. primi. ficient. Eadem ratione oſtendemus, EH, HI, vnam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG,

f 34. primi. HIK, æquales inter ſe ſunt, ([f] cum ſint æquales oppoſitis angulis æqualibus EFG, HGK.)

g 29. prim. [g] & duo anguli HIK, IHG, duobus ſunt rectis æquales. &c. Cum igitur EI, FK, ſint parallelæ; [h] Itemque EF,

h 30. primi. IK, quod vtraque parallela ſit rectæ HG; Parallelogrammum erit EFKI. Eodem modo demonſtrabitur, parallelogrammum IKLM, adiunctum parallelogrammo EFKI, conſtituere totum vnum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo ABC, conſtituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

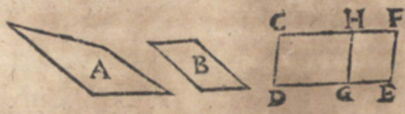
SCHOLIVM.

Pari ratione, propoſitis quotcunq; rectilineis, conſtituemus illis parallelogrammum æquale, ſi omnia reſoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, ſingulis ſingula, per propoſ. 44. veluti factum eſt in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiãt vnum parallelogrammum, vti hic demōſtratum fuit, conſtitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propoſitis. Vt ſi quis intelligat duo rectilinea propoſita AB, & C; Atq; AB, reſoluatur in triangula A, & B, ſingulisq; triangulis A, B, C, ſingula parallelogramma EG, GI, IL, ſuper rectas EF, HG, IK, iuxta artem huius problematis, æqualia conſtituantur, ex propoſ. 44. erit conſtructum parallelogrammum totum EFLM, æquale duobus rectilineis AB, & C. Et ſic de pluribus.

Praxis autem huius problematis ex praxi præcedentis propoſ. ſæpius repetita petenda eſt.

Huc referri poterit problema vtiliſſimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonſtrabimus in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minus inquirere.

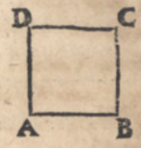


i 45. primi. *Sint data rectilinea A, & B, ſitq; A, maius. Oportet igitur indagare, quæ magnitudine rectilineum A, ſuperet rectilineum B. [i] Fiat parallelogrammum CDEF, in quocunq; angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et ſuper rectam CD, parallelogrammum CDGH, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF, ſuperat parallelogrammū CDGH, parallelogrammo EFHG, ſuperabit quoq; figura A, figuram B, eodem parallelogrammo EFHG. Quod eſt propoſitum.*

PROBLEMA 14. PROPOSITIO 46.

xlvi.

ADATA recta linea quadratum deſcribere.



a 11. primi. SIT data recta AB, ſuper quam oporteat quadratum deſcribere. Ex A, & B, [a] educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, ſintque ipſi AB, æquales, & connectatur recta CD. Dico

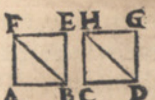
b 28. prim. ABCD, eſſe quadratum. Cum enim anguli A, & B, ſint recti, [b] erunt AD, BC, parallelæ: Sunt au-

c 33. primi. tem & æquales, quod vtraque æqualis ſit ipſi AB. Igitur [c] & AB, DC, parallelæ ſunt & æquales: & ideo parallelogrammum eſt ABCD, in quo, cum AD, DC, CB, æquales ſint ipſi AB, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt; ſunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, [d] æqua-

d 34. prim. les ſint oppoſitis rectis A, & B. Quadratum igitur eſt ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

EX PROCLO.

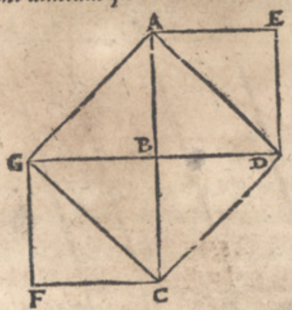
Linearum æqualium æqualia ſunt quadrata: & quadratorum æqualiū æquales ſunt lineæ.



Sint primum rectæ AB, CD, æquales. Dico eorum quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoq; eſſe. Ductis enim diametris BF, DH, erunt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus lateribus DC, CH, trianguli DCH, æqualia, vtrumq; vtriq;, cum ex definitione quadrati rectæ AF, CH, æquales ſint rectis AB, CD.

e 4. prim. *Sunt autem & anguli A, & C, æquales, nempe recti. [e] Igitur triangula BAF, DCH, æqualia erunt. Quæ [f] cū*

f 34. primi. *ſint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod eſt propoſitum.*



Sint deinde quadrata ABDE, BCFG, æqualia. Dico lineas quoq; ipſorum AB, BC, æquales eſſe. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, vt rectæ AB, BC, in directum con-

g 14. prim. *ſtituantur. Et quoniam anguli ABG, ABD, ſunt recti, [g] erunt & rectæ GB, BD, in directum conſtitutæ. Ducãtur diametri AD, CG, iunganturq; rectæ AG, CD. Quoniam igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia ſunt, erunt & triangula ABD, BCG, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi triangulo BCD, fiet totum triangulum ACD, toti triangulo GDC, æqua-*

h 39. prim. *le. Quare triangula ACD, GDC, cum eandem habeant baſin CD, ad eaſdemq; ſint partes, [h] in eiſdem ſunt parallelis: ideoq; parallelæ ſunt AG, CD. Et quoniam, vt in ſcholio propoſ. 34. oſtendimus, diameter in quadrato ſecat angulos quadrati bifariã, erunt anguli DAC, GCA, alterni ſemirecti, ideoq; æquales. Quamobrem, [i] & parallelæ ſunt AD, CG. Igitur parallelo-*

i 27. primi. k 34. prim. *grammum eſt ADCG: ac propterea [k] rectæ AD, CG, æquales. Quoniam ergo in triangulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia ſunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter ſe etiam æquales, cum ſint ſemirecti, vt in ſcholio propoſ. 34. oſtenſum fu-*

26. primi. *it: erunt [l] reliqua latera æqualia, nempe AB, ipſi BC, &c. Quod eſt propoſitum.*

SCHOLIVM.

Poſſent hæc omnia multo breuius probari per ſuperpoſitionem quadrati vnius ſuper aliud. Nam ſi lineæ ſint æquales, ſi vna alteri ſuperponatur, congruent ipſæ inter ſe. Cum ergo & anguli ſint æquales, nempe recti, conuenient quoq; ipſi inter ſe, ideoq; totum quadratum toti quadrato congruet. Quod ſi quadrata ſint æqualia, congruent ipſa inter ſe, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias vnum quadratum alio maius eſſet.

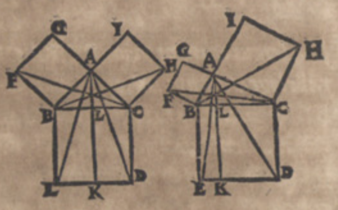
Praxis autem huius problematis perfacilis eſt. Si namq; ad datam rectam AB, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis AD, ipſi datæ rectæ AB, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiuſdem AB, duo arcus deſcribantur ſeſe in C, interſecantes, iunganturq; rectæ BC, DC, conſtructum erit quadratum. Nam ABCD, cum ex conſtructione ſit figura æqualium laterum, adq; adeo latera oppoſita æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initium ſcholij propoſ. 34. demonſtraui- m 29. pri.
mus. Exiſtente ergo angulo A, recto, [m] *erunt & B, D, recti nec non* [n] *& oppoſitus angulus C, &c.* n 34. prim.

xlvj.

THEOR. 33. PROPOS. 47.

IN rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribũtur, quadratis.

IN triangulo ABC, angulus BAC, ſit rectus[a] deſcribanturque ſuper AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE. (a 46. prim.) Dico quadratum BCDE, deſcriptum ſuper latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale eſſe duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ ſuper alia duo latera ſunt deſcripta, ſiue hæc duo latera æqualia ſint, ſiue inæqualia. Ducatur enim recta AK, [b] parallela ipſi BE, vel ipſi CD, ſecans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. (b 31. primi.) Et quia duo anguli BAC, BAG, ſunt recti, [c] erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; (c 14. primi.) eodemque modo IA, AB, vna recta linea erunt. Rurſus quia anguli ABF, CBE, ſunt æquales, cum ſint recti, ſi addatur communis angulus ABC, [d] fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; (d 2. pron.) ſimiliterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE; trianguli ABE, æqualia ſunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumque vtrique, vt conſtat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hiſce lateribus æquales, vt oſtendimus; [e] Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. (e 4. primi.) Eſt autem quadratum, ſeu parallelogrammũ ABFG, [f] duplum trianguli FBC, cum ſint inter parallelas BF, CG, & ſuper eandem baſin BF: (f 41. primi.) Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quòd ſint inter parallelas BE, AK, & ſuper eandem baſin BE. Quare [g] æqualia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. (g 6. pron.) Eadem ratione oſtendetur, æqualia eſſe quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. [h] Erunt enim rurſus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. (h 4. primi.) Quamobrem totum quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL; æquale eſt duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratum, &c. Quod demonſtrandum erat.

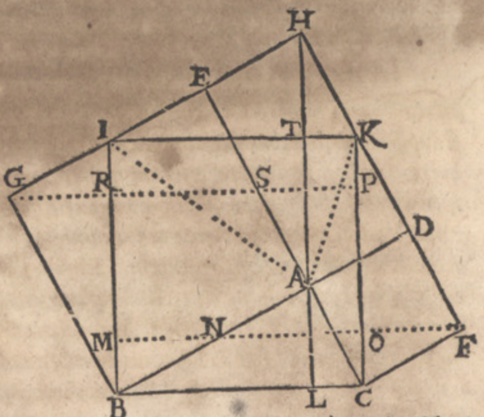


SCHOLIVM.

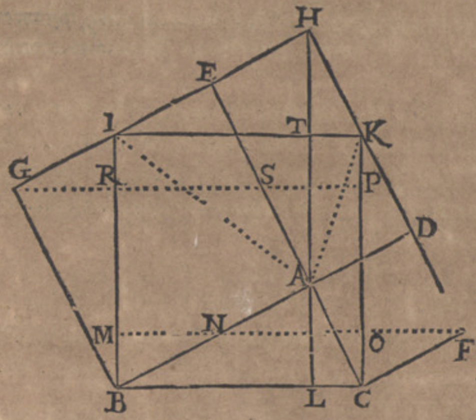
Facile ex theoremate iſto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti maius eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppoſiti minus eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum. Nam ſi angulus coarctaretur donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppoſitum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eum ambientibus, fieret latus oppoſitum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris angulo recto oppoſiti æquale ſit hic oſtenſum duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum; perſpicuum eſt, quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti eſſe maius duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris angulo acuto oppoſiti eſſe minus duobus quadratis ſimul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud maius ſit, & quanto hoc minus, demonſtrabit Euclides lib. 2. propoſ. 12. & 13.

Quoniam vero theorema hoc pulcherrimum eſt, vtilitateſq; habet inſignes, operæ pretium iudicaui tentare, num illud alijs vijs demonſtrari poſſit, variata aliquantulum conſtructione; quod Peletarius ſine proportionibus fieri poſſe negauit. Sit ergo rurſus triangulum ABC, cuius angulus BAC, rectus ſit, productiſq; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiant AD, AE, ipſis AC, AB, æquales; & per C, D, B, E, ipſis AB, AC, parallelæ agantur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE, [i] *tam latera DF, FC, oppoſitis lateribus AC, AD, quam latera EG, GB, lateribus oppoſitis AB, AE, æqualia ſunt, erit vtrunq; parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti ſunt.* [k] *Nam F, G, oppoſitis rectis DAC, EAB, æquales ſunt, ideoq; recti: Anguli autem C, D, B, E, recti ſunt, quod vterius C, D, cum recto DAC, & vterius B, E, cum recto EAB,* [l] *æqualis ſit duobus rectis. Quadrata ergo ſunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, ſecantes GH, FH, in I, K, iungaturq; recta IK. Et quia, ſi à rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, æquales ſunt; ſunt autem & recti anguli BAC, BGI, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, vterq; vtriq;: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia æqualia, ob quadratum BE.* [m] *Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erunt, & reliqui anguli C, I, æquales. Non aliter in triangulis ABC, FKC, æqualia erunt tam latera BC, CK, quam AB, FK, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, trianguli FKC, æquales ſunt: (cum A, F, recti ſint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi ACK) & latera AC, CF, illis adiacentia æqualia, ob quadratum CD. Quare rectæ BI, CK, inter* [n] *ſe etiam æquales erunt.* [o] *Cum ergo quoq; ſint parallelæ,* [p] *erunt etiam BC, IK, æquales, & parallelæ. Quadratum igitur eſt BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera ſint æqualia, & omnes anguli recti, quod anguli I, K, oppoſitis rectis C, B, æquales ſint. Dico ergo, quadratum CI, duobus quadratis BE, CD,*

(i 34. pri. — k 34. prim. — l 29. primi. — m 26. prim. — n 1. pron. — o 28. prim. — p 33. pri.)



q 34. prim. BE, CD, æquales eſſe. Ducta enim ex H, per A, recta HTAL, ipſis BI, CK, parallela erit. Nam quia GE,[q] ipſi BA, æqualis eſt, &



EH, ipſi AD, hoc eſt, ipſi GI, quæ ipſi AC, ſiue AD, oſtenſa fuit æqualis, erit
&, addita communi EI, tota HI, toti GE, hoc eſt, ipſi AB, æqualis. Cum er-
go HI, AB, ſint etiam parallelæ,[r] erunt quoq; BI, AH, parallelæ & æqua-
r 33. pri. les. Eodemq; modo AH, ipſi CK, parallela oſtendetur, & æqualis. Quoniam
igitur[s] tā quadratū BE, parallelogrāmo BH, ſuper eandē baſin AB, q̃ pa-
s 35. primi. rallelogrāmū BT, eidē parallelogrāmo BH, ſuper eādē baſin BI, æquale eſt,
t 1. pron. [t] erit quoq; quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Sic etiā quia tā
u 35. prim. [u] quadratum CD, parallelogrammo CH, ſuper eandem baſin AC, quam
parallelogrammum CT, eidem parallelogrammo CH, ſuper eandem ba-
x 1. pron. ſin CK, æquale eſt,[x] erit quoq; quadratum CD, parallelogrammo CT, æ-
quale. Totum ergo quadratum BCKI, ex duobus parallelogrammis BT,
CT, compoſitum, duobus quadratis BE, CD, æquale eſt. Quod erat demon-
ſtrandum.

Aliter. Loco rectæ HTAL, iungantur duæ rectæ AI, AK, & per A, ipſis
BI, CK, parallela ducatur TAL. Quoniam ergo[y] tam quadratum BE, (o-
y 41. primi. ſtendemus enim vt prius, BK, BE, CD, quadrata eſſe laterum BC, AB, AC.) trianguli ABI, ſuper eandem baſin AB, quam pa-
z 6. pron. rallelogrammum BT, eiuſdem trianguli ABI, ſuper eandem baſin BI, duplum eſt.[z] Erit quadratum BE, parallelogrammo
a 41. primi BT, æquale. Pari ratione, quia[a] tam quadratum CD, trianguli ACK, ſuper eandem baſin AC, quàm parallelogrammum
b 6. pron. CT, eiuſdem trianguli ACK, ſuper eandem baſin CK, duplum eſt,[b] erit quoq; quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale.
Quamobrem, vt prius, totum quadratum BCKI, ex parallelogrammis duobus BT, CT, conflatum, duobus quadratis BE, CD,
æquale eſt. Quod erat oſtendendum.

Aliter. Loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipſis BC, IK, parallelæ FM, GP, ſecantes AB, CK, in N, O, &
c 29. prim. BI, CE, in R, S. Eritq; BR, ipſi KO, æqualis. Quoniam enim[c] anguli O, R, recti ſunt, & OKF, RBG, æquales,
quod vterq; angulo ABC, ſupra oſtenſus ſit æqualis; erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duob. angulis R, B, trianguli GBR,
æquales, vterq; vtriq;: Sunt autē & latera FK, BG, illis adiacentia æqualia, quod vtrumq; ſupra ſit oſtenſum ipſi BC, æquale.
d 26. primi. [d] Igitur & latera KO, BR, æqualia erunt. Itaq; quoniam[e] tam parallelogramma BCFN, BCOM, ſuper eandem baſin BC,
e 33. primi. quam parallelogramma BCSG, BCPR, ſuper eandem baſin BC, æqualia ſunt, eſtq; parallelogrammum BCPR, parallelogrā-
mo IKOM, æquale, ob rectas BR, KO, oſtenſas æquales; (Nam hinc fit, vt ſi vnum alteri ſuperponatur, ſibi mutuo congruant,
propter laterum, angulorumq; æqualitatem) erunt ambo parallelogramma BCFN, BCSG, toti quadrato BCKI, ex duobus
f 35. primi. parallelogrammis BCOM, IKOM, compoſito æqualia.[f] Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, ſuper ean-
dem baſin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, ſuper eandem baſin BG, æquale ſit; erunt quoq; ambo quadra-
ta CD, BE, eidem quadrato BCKI, æqualia. Quod demonſtrandum erat.

Atq; in hunc modum aliæ demonſtrationes excogitari poterunt. Video demonſtrationem Euclidis ſimpliciorem eſſe, & magis expeditam, ſed non iniucundum tamen eſt intelligere, varijs demonſtrationibus eandem veritatem poſſe confirmari.

Inuentio porro admirabilis, atq; pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt ſcribit Vitruuius lib. 9. hoſtias Muſis immolauit, quòd ſe in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolaſſe centum boues: ſi tamen Proclo credendum eſt, vnum tantummodo obtulit. Fortaſſe autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occaſionem ſumpſit; vt theorema hoc inueſtigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter eſſet contemplatus, vidiſſetq; quadratum numerum maioris æqualem eſſe quadratis numeris reliquorū, compoſuit triangulum ſcalenum, cuius maximum latus diuiſum erat in 5. partes æquales, minimum in 3. eiuſdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, conſiderauit angulum ſub his duobus lateribus contentum, inuenitq; eum eſſe rectum. Idq; in quampluribus alijs numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. obſeruauit. Quare inquirendum eſſe iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale eſſet, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem ſecundum dictos numeros, continebant vnum angulum rectum: Atq; ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit: firmaq; ratione demonſtrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propoſ. 31. Vbi demonſtrauit, non ſolum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale eſſe quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam ſuper latus recto angulo oppoſitum conſtructam, ſiue ea ſit triangulum, ſiue quadrangulum, &c. æqualem eſſe duabus figuris, quæ ſuper reliqua latera deſcribuntur, dummodo priori ſint ſimiles ſimiliterq; deſcriptæ, vt ibidem oſtendemus.

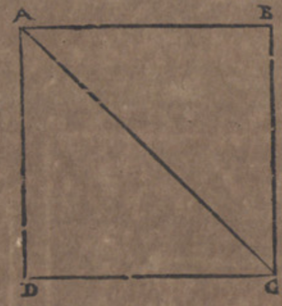
Cæterum quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale eſt quadratis reliquorum, nō abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiuſmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. ſi duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. ſi ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & ſi quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atq; ita reperientur quotcunq; alij, ſi primi illi tres per quemcunq; multiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima aſcribitur Pythagoræ, & eſt huiuſmodi. Sumatur pro minimo quicunq; numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reijce vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui ſi addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale eſt quadratis aliorum. Quod ſi numerus impar acceptus fuiſſet 3. eſſent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis eſt. Accipiatur numerus quicumq; par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem eſt 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula ſi accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.

Colliguntur ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima ſcitu non iniucunda tam theoremata, quam problemata, è quibus viſum eſt ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc ſumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro deſcriptum duplum erit prædicti quadrati.

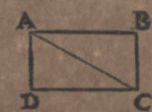
In quadrato ABCD, ducatur diameter A C. Dico quadratum diametri AC, duplum eſſe quadrati ABCD. Cum enim in tri-
angulo ABC, angulus B, rectus ſit, [g] *erit quadratum lateris* g 47.prim.
AC, æquale duobus quadratis laterum A B, B C. Cum igitur quadrata linearum AB, BC, æqualia ſint, quòd lineæ AB, BC, ſint æquales; erit quadratum AC, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ AB, diametri, hoc eſt, quadrati A B C D. Quod eſt propoſitum.



II.

QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale eſt duobus quadratis laterum inæqualium.

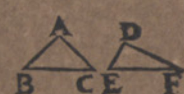
In altera parte longiori ABCD, ducatur diameter A C, & quia in triangu-
lo ABC, angulus B, eſt rectus, [h] *erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadra-* h 47. prim.
tis laterum inæqualium AB, BC, Quod eſt propoſitum.



III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

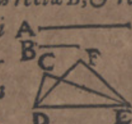
Triangulorum ABC, DEF, anguli A, & D, ſint recti, lateraq; oppoſita BC, EF, æqualia. Dico duo
quadrata laterum AB, AC, ſimul ſumpta æqualia eſſe duobus quadratis laterum DE, DF, ſimul ſumptis.
Nam quadrata linearum B C, E F, æqualia inter ſe ſunt, cum & ipſæ lineæ inter ſe ponantur æquales.
Quadrato autem lineæ BC, [i] *æqualia ſunt quadrata linearum A B, A C. Et quadrato lineæ E F, æqualia* i 47.primi.
ſunt quadrata linearum AB, AC; Et quadrata lineæ EF, æqualia ſunt quadrata linearum DE, DF. [k] *Quadrata ergo rectarum* k 1. pron.
AB, A[illegible] quadratis rectarum DE, DF, æqualia ſunt. Quod eſt propoſitum.



IV.

DVOBVS quadratis inæqualibus propoſitis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia ſint inter ſe, & ſimul ſumpta æqualia duobus inæqualibus propoſitis ſimul ſumptis.

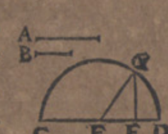
Sint A, & B, latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus DCE, ſitq; DC, recta æqualis rectæ B, & re-
cta CE, rectæ A. Ducta deinde recta DE, coniungente duo puncta D, E, conſtituantur ſuper ipſam duo anguli
ſemirecti DEF, EDF, [l] *coeantq; rectæ DF, EF, in F. Quoniam igitur in triangulo FDE, anguli FDE, FED, æqua-* l 13.pron.
les ſunt; [m] *erunt & latera DF, EF, æqualia, ideoq; & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem* m 6.primi.
quadrata linearum DF, EF, æqualia eſſe quadratis linearum A, & B, hoc eſt, quadratis linearum C E, & C D.
Nam cum in triangulo DEF, anguli FDE, FED, faciant vnum rectum; [n] *erit reliquus angulus F, rectus.* [o] *Quamobrem erunt* n 32.primi.
quadrata linearum DF, EF, æqualia quadrato lineæ DE. [p] *Sed eidem quadrato lineæ DE, æqualia ſunt quoq; quadrata linea-* o 47.primi p 47.prim.
rum CD, CE. Igitur quadrata linearum DF, EF, [q] *æqualia ſunt quadratis linearum DC, EC. Quod eſt propoſitum.* q 1. pron.



V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus poteſt maior, quam minor.

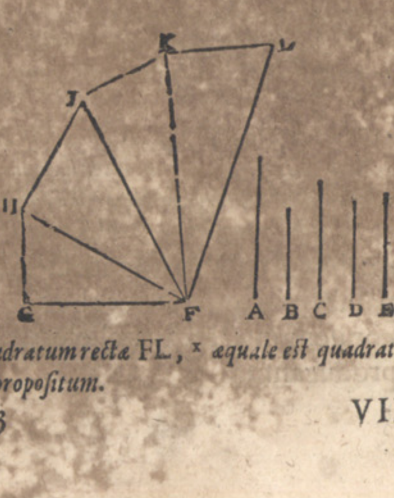
Potentia lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantum enim quæuis recta linea poſſe dicitur, quan-
tum eſt eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, oporteatq; cognoſcere, quanto maius ſit
quadratum maioris lineæ A, quam minoris B. Ex quauis linea recta C D, ſumatur C E, æqualis rectæ A,
& EF, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & interuallo EC, ſemicirculus deſcribatur CGD, & ex F, duca-
tur FG, perpendicularis ad CD. Dico quadratum rectæ A, hoc eſt, rectæ CE, ſibi æqualis, maius eſſe, quam
quadratum rectæ B, hoc eſt, rectæ EF, ſibi æqualis, quadrato rectæ FG. Ductæ enim recta E G, [r] *erit eius quadratum æquale* r 47.primi.
quadratis rectarum E F, F G, hoc eſt, quadratum rectæ EC, illi æquale, ſuperabit quadratum rectæ E F, quadrato rectæ
FG. Quod eſt propoſitum.



VI.

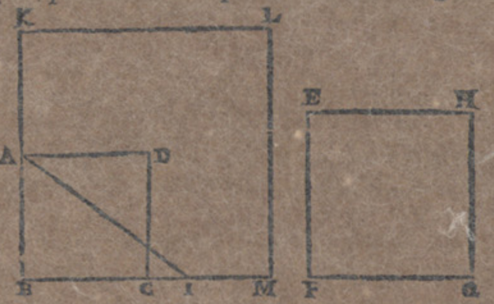
PROPOSITIS quotcunque quadratis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

Sint latera quinq; quadratorum A, B, C, D, E. Oporteatq; inuenire qua-
dratum æquale omnibus illis quinq;. Fiat angulus rectus FGH, ſitq; recta FG,
æqualis rectæ A, & recta G H, rectæ B. Ducta deinde recta H F, fiat angulus re-
ctus FHI, ſitq; HI, æqualis rectæ C. Ducta rurſus recta I F, fiat angulus rectus
FIK, ſitq; IK, æqualis rectæ D. Ducta deniq; recta K F, fiat angulus rectus
FKL, ſitq; KL, æqualis rectæ E, ducaturq; recta FL. Dico quadratum rectæ
FL, æquale eſſe quinq; quadratis propoſitis. Quadratum enim rectæ F H, [s] *æ-* s 47. primi
quale eſt quadratis rectarum F G, G H, hoc eſt, quadratis rectarum A, & B.
Rurſus quadratum rectæ FI, [t] *æquale eſt quadratis rectarum F H, HI, & id-* t 47.primi.
circo quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ FK, [u] *æquale eſt* u 47.prim.
quadratis rectarum FI, IK, ideoq; quadratis rectarum A, B, C, & D. Deniq; quadratum rectæ FL, [x] *æquale eſt quadratis* x 47.prim.
rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod eſt propoſitum.



VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuſcunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita vt tota figura compoſita ſit etiam quadrata.



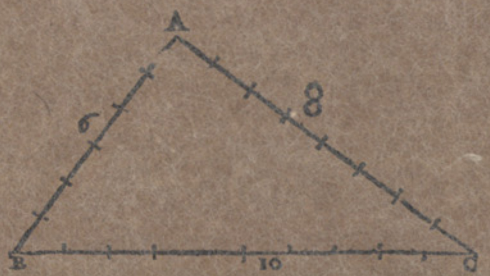
Sint duo quadrata ABCD, EFGH, propoſitumque ſit quadrato ABCD, apponere figuram, quæ ſit æqualis quadrato EFGH, &c. Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, lateri quadrati EFGH. Ducta autẽ recta AI, & producta recta BA, ad partes A, accipiatur BK, æqualis rectæ AI, perficiaturq; quadratum BKLM. Dico figuram ADCMLK, quadrato ABCD, adiunctam, æqualem eſſe quadrato EFGH. Quoniam enim quadratum rectæ AI, hoc eſt, quadratum BKLM, [y] æquale eſt quadratis rectarum AB, BI, hoc eſt, quadratis ABCD, EFGH: ſi auferatur commune quadratum ABCD, [z] remanebit figura ADCMLK, æqualis quadrato EFGH. Quod eſt propoſitum.

[y] 47. primi
[z] 3. pron.

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuſcunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

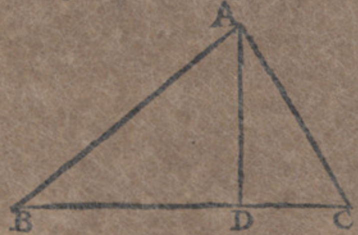
Sit angulus A, rectus in triangulo ABC, ſintq; primum cognita latera AB, AC, circa angulum rectum, quorum AB, ponatur 6. palmorum, & AC, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, nempe quadrati palmi 36. & 64. [a] æqualia ſunt quadrato rectæ BC, ſi illa coniungantur ſimul, efficietur hoc quadratorum palmorum 100. Latus ergo BC, continebit 10. palmos. Tantum enim eſt latus, ſeu radix quadratæ 100. palmorum, vt perſpicuum eſt apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera AB, BC, ſitq; AB, 6. palmorum, & BC, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, [b] æqualia ſunt quadrato rectæ BC, ſi quadratum rectæ AB, quod cõtinet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ BC, quod eſt palmorum 100. remanebit quadratum rectæ AC, 64. palmorum. Latus ergo AC, continebit 8. palmos. Tanta enim eſt radix quadrata, ſeu radix 64. palmorum. Quod eſt propoſitum. Cæterum non ſemper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicemue quadratam, vt notum eſt apud Aritmethicos. Vnde latus inuentum ſæpenumero exprimi nequit, niſi per radicem ſurdam, quam vocant. Sed de his alias.



[a] 47. primi
[b] 47. primi

IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus triangulo comprehenſo ad baſin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, ſecabitur baſis in partes inæquales, maiorq; pars iuxta maius latus erit. Et contra, ſi baſis à perpendiculari ſecetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiuſque illud erit, quod maiori baſis ſegmento adiacet.



Cadat primum in triangulo ABC, cuius latus AB, maius ſit latere AC, perpendicularis AD, ad BC, demiſſa intra triangulum, quod tum demum continget, quando vterq; angulus B, C, acutus eſt, vt ex coroll. 2. propoſ. 17. conſtat. Dico ſegmentum BD, eſſe maius ſegmento CD. Quoniam enim [c] tam quadratum ex AB, quadratis ex AD, BD, quam quadratum ex AC, quadratis ex AD, CD, æquale eſt: Eſt autem quadratum ex AB, maius quadrato ex AC, quod latus AB, latere AC, ponatur maius; erunt quoq; duo quadrata ex AD, BD, maiora duobus quadratis ex AD, CD: Et ablato communi quadrato rectæ AD, reliquum quadratum ex BD, reliquo quadrato ex CD, maius erit. Quare & recta BD, maior erit, quam recta CD, quod eſt primum.

[c] 47. primi

Faciat deinde perpendicularis AD, ſegmentum BD, maius ſegmento CD. Dico latus AB, maius eſſe latere AC. Erit enim quadratum ex BD, quadrato ex CD, maius: Additoq; quadrato communi ex AD; duo quadrata ex BD, AD, duobus quadratis ex CD, AD, maiora erunt. Cum ergo [d] tam quadratum ex AB, quadratis ex BD, AD, quam quadratum ex AC, quadratis ex CD, AD, æquale ſit; erit quoq; quadratum ex AB, quadrato ex AC, maius; proptereaq; & latus AB, latere AC, maius erit. Quod eſt propoſitum.

[d] 47. primi

Atq; in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi poſſunt, quæ conſulto, ne lectori moleſti ſimus, hic omittenda cenſuimus, & in alium locum differenda.

Theoremate porro hoc Pythagoreo multo vniuerſalius eſt illud, quod à Pappo demonſtratur in omni triangulo, ſiue illud rectangulum ſit, ſiue non, & de quibuſcunq; parallelogrammis ſuper latera trianguli conſtructis tam rectangulis, quam non rectangulis etiamſi non ſint inter ſe æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo propoſuimus, & meo iudicio generalius adhuc quam Pappus.

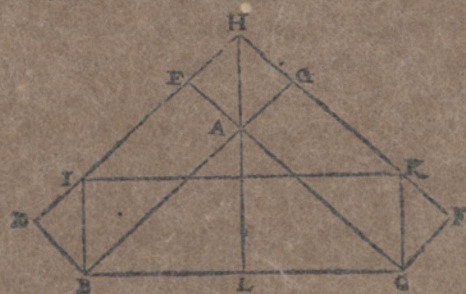
IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque ſuper duobus lateribus deſcripta, æqualia ſunt parallelogrammo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur.

Sit

*SIT triangulum quodcunque ABC, conſtituanturq; ſuper latera AB, AC, parallelogramma quæcunq; ABDE, ACFG,
quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, aſſumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A. dictis lateribus
AB, AC, comprehenſi, conueniant in H, ducaturque recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia eſſe parallelogrammo
ſuper latus BC, deſcripto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, ſe-
cet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallelæ ipſi AH, iungaturq; recta IK. Quoniam igitur paralle-
logramma ſunt BIHA, CKHA;[a] erit vtraque BI, CK, ipſi AH, æqualis; atque adeo & inter ſe æquales e- a 34. prim.
runt BI, CK;[b] quæ cum ſint etiam parallelæ, quod eidem AH, parallelæ ſint;[c] erunt quoq; BC, IK, paral- b 30. primi. c 33. primi.
lelæ, & æquales. Quare parallelogrammum eſt BCKI, ſuper latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH,
æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia oſtendenda ſunt parallelogramma AD, AF.[d] Quia ergo æqua- d 35. primi.
lia ſunt parallelogramma AD, ABIH, quod eandem habeant baſin AB, in eiſdemq; ſint parallelis AB, HD; e 35. primi.
[e] Eſt autem ABIH, parallelogrammo IL, æquale, quod illud cum hoc etiam eandem habeat baſin BI, in
eiſdemq; ſit parallelis BI, LH: Erit quoq; AD, eidem IL, æquale. Non aliter oſtendemus, AF, ipſi KL, eſſe æquale. Quare paralle-
logramma AD, AF, parallelogrammo BK, æqualia ſunt. Quod eſt propoſitum.*



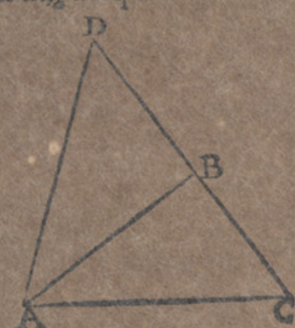
*PAPPVS conſtruit figuram aliter.
Nam ſumit rectas AC, AE; & AB, AG,
in directum poſitas, ita vt parallelogram-
ma AD, AF, ſint æquiangula, habentia
angulos AED, AGF, angulo BAC,[f] in- f 29. prim.
ternos externo æquales, ceu hæc eius figu-
ra indicat. Sed nos vniuerſalius rem pro-
poſuimus, vt manifeſtum eſt.*



THEOR. 34. PROPOS. 48. xxxxviij.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ à reliquis tri-
anguli lateribus deſcribuntur, quadratis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus triangu-
guli lateribus, rectus eſt.

DETVR triangulum ABC, ſitque quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA,
BC. Dico angulum ABC, eſſe rectum. Ducatur namque BD, perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, con- g 47. primi
nectaturque recta AD. Quoniam igitur in triangulo ABD, angulus ABD, rectus eſt; *g* erit quadratum rectæ
AD, æquale quadratis rectarum BA, BD: Eſt autem quadratum rectæ BD, qua-
drato rectæ BC, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ AD,
quadratis rectarum BA, BC, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eiſdem
quadratis rectarum BA, BC, æquale ponatur; *h* erunt quadrata rectarum AD, AC, h 1. pron.
inter ſe æqualia, ac propterea & rectæ ipſæ AD, AC, æquales. Quoniam igitur la-
tera BA, BD, trianguli ABD, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; & ba- i 8. primi.
ſis AD, oſtenſa eſt æqualis baſi AC; *i* erunt anguli ABD, ABC, æquales: Eſt autem
angulus ABD, ex conſtructione rectus. Igitur & angulus ABC, rectus erit. Si igi
tur quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, &c. Quod demon
ſtrandum erat.



SCHOLIVM.

CONVERSVM eſt autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perſpicuum eſt.

TRIANGVLORVM COMPARATIONES.

NOVEM modis duo triangula inter ſe comparauit Euclides hoc libro. Primum quan-
do duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumq; vtrique, continentque angulum angulo
æqualem, *k* collegit æqualitatem baſium, reliquorum angulorum, atque adeo totorum trian- k 4. primi.
gulorum.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumq; vtrique, baſiſque
baſi æqualis, *l* intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehenſorum. Vbi nos conclu- l 8. primi.
ſimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probauimus eſſe æqualia.

TERTIO, cum duo latera duobus lateribus ſunt æqualia, vtrumq; vtrique, comprehen-
dunt autem angulos inæquales, *m* oſtendit baſim maiori angulo oppoſitum eſſe maiorem baſe m 24. pri.
minori angulo oppoſita.

QVARTO, cum duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, at baſes
inæquales, *n* demonſtrauit angulum maiori baſi oppoſitum eſſe maiorem angulo minori baſi n 25. prim.
oppoſito.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales ſunt, vterque vtrique, &
vnum latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualib. angulis adiacet, ſiue quod vni æqualium an-
gulorum opponitur, *o* probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius eſſe æqualia, o 26. prim.

& reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus ſequi etiam, tota triangula eſſe æqualia.

a 37. prim. SEXTO *a* demonſtrauit, duo triangula ſuper eandem baſin, & inter eaſdem parallelas conſtituta, eſſe æqualia.

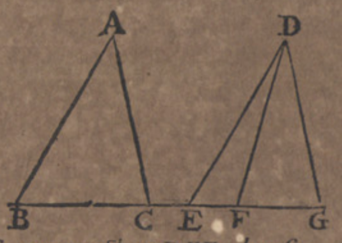
b 38. primi. SEPTIMO *b* oſtendit, duo triangula ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, æqualia eſſe.

c 39. prim. OCTAVO *c* docuit, duo triangula æqualia ſuper eandem baſim, & verſus eandem partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas.

d 40. prim. NONO denique *d* probauit, duo triangula æqualia ſuper æquales baſes in eadem linea, in eandemque partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas.

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propoſitis vniuerſa fere Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi ſint. Quemadmodum autem à propoſ. 26. in ſcholio propoſ. 31. excluſimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales ſunt, & vnum latus vni lateri æquale, non quidem quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo: ſed quod in vno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero vero vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero vero alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas haſce comparationes excluſimus, quod ex iis non ſequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in ſcholio propoſ. 31. demonſtrauimus: Ita quoque à propoſ. 4. excludendæ ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.



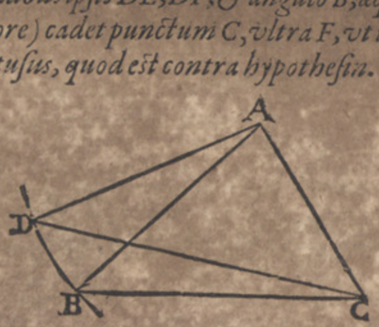
SIT enim Iſoſceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia, & producta baſe GF, vſque ad E, iungatur recta ED, & triangulo DEG, æquale triangulum conſtruatur ABC, cuius latera AB, AC, lateribus DE, DG, æqualia ſint, & baſis BC, baſi EG. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, æqualia, vtrumque vtrique, anguli que B, E, æqualibus lateribus AC, DF, oppoſiti æquales: & tamen baſis BC, maior eſt baſe EF, quod BC, ipſi EG, æqualis ſit. Ratio eſt, quod angulus

e 5. primi. f 17. primi. g 13. primi. *C, acutus eſt, at DFE, obtuſus. Nam cum e anguli DFG, & G, æquales ſint; f & ſimul ſumpti minores duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde DFE, recto maior; quandoquidem g duo anguli ad F, æquales ſunt duobus rectis. Quod ſi duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DG, ſint æqualia, anguluſque B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor, tum demum ſequitur, baſes BC, EG, æquales eſſe, &c. Nam ſi baſis BC, minor eſſet, quam EG: ſi AB, ipſi DE, ſuperponeretur, congrueret quidem BC, ipſi EG, propter æqualitatem angulorum B, E, ſed punctum C, citra G, caderet, vt*

h 5. primi. *in F. Quia igitur latera DF, DG, æqualia ſunt, quod DF, idem ſit, quod AC, ipſi DG, æquale; h erunt an-*

i 17. primi. *guli DFG, & G, æquales, ac propterea vterque minor recto; quod i ambo minores ſint duobus rectis. Cũ*

k 13. primi. *igitur, k duo anguli ad F, ſint duobus rectis æquales, erit DFE, hoc eſt, C, qui à DFE, non differt, recto maior. Non ergo vterq; angulus C, & G, minor eſt, aut non minor recto. ſed G, quidem acutus, & C, obtuſus quod eſt contra hypotheſin. Eodẽ modo, ſi baſis BC, dicatur eſſe maior baſe EF, (poſitis lateribus AB, AC, æqualibus ipſis DE, DF, & angulo B, æquali ipſi E, & vtroque angulo C, & F, vel minore recto, vel non minore) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritque rurſus angulus quidem C, hoc eſt, G, acutus, & DFE, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin.*



DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiã colligi poteſt. Nam ſit triangulum ABC, cuius latus AB, maius ſit latere

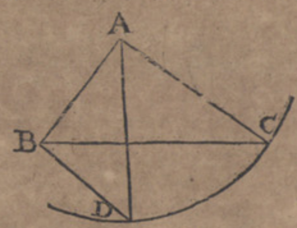
l 18. primi. *AC. Erit l ergo angulus ACB, maior angulo ABC. Fiat angulus ACD, angulo ABC, æqualis: cadetque CD, ſupra CB. Deſcribatur quoque ex A, per B, arcus circuli ſecans CD, in D, iungaturque recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus ABC, lateri AC, oppoſitus, æqualis angulo ACD, lateri AD, oppoſito: Et tamen baſes BC, DC, æquales non*

m 7. primi. *ſunt. Si enim æquales eſſent, eſſent tam duæ rectæ AB, AD, quam duæ CB, CD, æquales m quod eſt abſur-*

n 8. primi. *dum, vel etiam, anguli BAC, DAC, n æquales eſſent, pars & totum, quod eſt abſurdum.*

POSTRE-

POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehenſus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam poteſt inferri. Sit namque triangulum ABC, cuius vtrumque latus AC, CB, maius ſit latere AB; & BC, maius, quam AC, Erit a ergo angulus BAC, maior angulo ABC. Si igitur fiat angulus ABD, angulo BAC æqualis, cadet BD, infra BC. Deſcribatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra BC, cadet, ſecabitque BD, in D. Iuncta igitur recta AD, erunt duo latera AB, AC, duobus lateribus AB, AD, æqualia; vtrumque vtrique, anguluſque BAC, illis lateribus AB, AC, comprehenſus, æqualis angulo ABD, qui lateri AD, opponitur: Et tamen baſes BC, BD, æquales non ſunt. Alias tam rectæ AC, AD, quam BC, BD; æquales eſſent b quod eſt abſurdum. Vel etiam, c anguli BAC, BAD, æquales eſſent, totum & pars, quod eſt abſurdum.



a 18. primi.
b 7. primi.
c 8. primi.

RECTE igitur Euclides propoſ. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehenſum in vno triangulo debere eſſe æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem ſine hac conditione nihil colligere licet, vt demonſtrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

I.

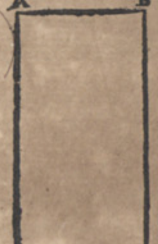
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

AGIT Euclides ſecundo hoc libro de potentiis linearum rectarum, inquirendo, quanta ſint & quadrata partium cuiuſuis lineæ rectæ diuiſæ, & parallelogramma rectangula ſub partibus eiuſdem lineæ diuiſæ comprehenſa, tam inter ſe, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonſtranda ſunt, recte intelligenda maximè neceſſaria.

PRIORI definitione exponit, ſub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunq; rectangulum: Et quid ſit, parallelogrammum contineri ſub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primum eſt, Parallelogrammum illud illud dici rectangulum, cuius omnes anguli ſunt recti. Cuius quidem duo tantum ſunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli ſunt recti, vt perſpicuum eſt ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, ſi vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres neceſſario recti. Sit enim in parallelogrammo ABCD, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoq; eſſe. Nam cum parallelæ ſint AD, BC, [a] erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus eſt, ex hypotheſi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam vero [b] quilibet ſuo oppoſito eſt æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.

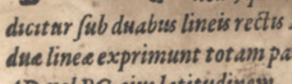
a 29. prim.

b 34. prim.



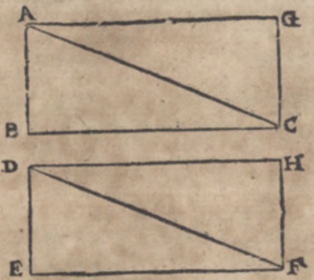
DICIT itaq; Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri ſub duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum ABCD, contineri dicitur ſub duabus lineis rectis AB, AD; vel ſub AD, DC; vel ſub DC, CB, vel deniq; ſub AB, BC: quoniam qualibet huiuſmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem vt AB, vel DC, eius longitudinem, altera vero, vt AD, vel BC, eius latitudinem. Vnde expreſſis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, ſtatim tota eius quantitas concipitur, intelligiturq́;, longitudo nimirum, atq; latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiuſmodi parallelogrammum conficitur. Si namq; animo concipiatur recta AB, deorſum ſecundum rectam AD, moueri in tranſuerſum, ita vt ſemper angulum rectum cum AD, conſtituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, deſcriptum erit totum parallelogrammum ABCD. Idem fiet, ſi AD, ponatur moueri in tranſuerſum ſecundum rectam, AB, &c. Quamobrem iure optimo ſub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

ITAQVE parallelogrammum rectangulum; quod ſub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia ſunt duabus illis rectis lineis, vtrumq; vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum ſub rectis E, & F. contentum, erit idem, quod parallelogrammum ABCD: quoniam latus AB, æquale eſt rectæ E, & latus AD, rectæ F.



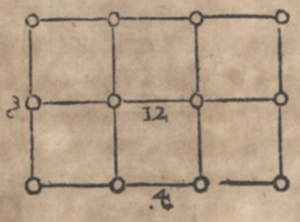
PERSPICVVM autem eſt ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum ſub duabus lineis æqualibus eſſe quadratum. Cum enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis ſit linea oppoſita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

ITEM manifeſtum eſt, ſi duæ rectæ lineæ aliis duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraq; vtriq́;, rectangulum parallelogrammum ſub prioribus duabus comprehenſum, æquale eſſe ei, quod ſub duabus poſterioribus comprehenditur, parallelogrãmo rectan-



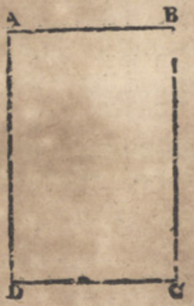
rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia ſunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonſtrari poteſt. Sint rectæ AB, BG, æquales rectis DE, EF, vtraq; vtrique. Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentum ſub AB, BC, æquale eſſe parallelogrammo rectangulo DEFH, contento ſub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cum latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, EF, trianguli DEF, & anguli B, & E, æquales, nempe recti; [c] erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt. c 4. prim.

HABET autem comprehenſio hæc parallelogrammi rectanguli ſub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi conſtituitur, vnde & contineri dicitur ſub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammum ABCD, comprehenſum ſub duabus rectis AB, BC, quarum illa ſit 3. palmorum, hæc autem 4. conſtat 12. palmis quadratis, qui quidem ex ductu lineæ AB, 3. palmorum in lineam BC, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat, notumque eſt Arithmeticis, atque Geometris, demonſtraturque à Ioanne Regiomont. lib. 1. de triangulis, propoſ. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ AB, in lineam BC, vel (quod idem eſt) ex ductu lineæ BC, in lineam AB. Idem enim parallelogrammum procreatur, ſiue minor linea in maiorem, ſiue maior in minorem ducatur: quemadmodum etiam idem producitur numerus, ſiue minor numerus in maiorem, ſiue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonſtratur lib. 7. propoſ. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.





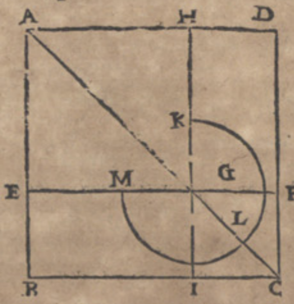
OBITER quoq; monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc ſecundo libro, & in aliis, qui ſequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare ſimpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obſeruant, ita vt nomine rectanguli perpetuo intelligendum ſit parallelogrammum rectangulum. Rurſus, ne toties eadem literæ repetantur, ſolent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duab. duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appoſitum parallelogrammum appellant AC, vel BD.

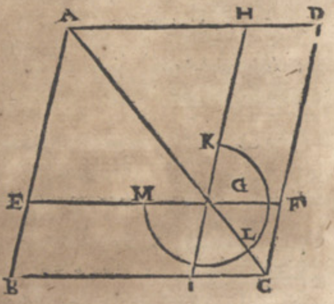


II.

IN omni parallelogrammo ſpatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius ſunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

In parallelogrammo ABCD, ſiue rectangulum illud ſit, ſiue non, ducatur diameter AC, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ EF, HI, parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuiſum ſit in quatuor parallelogramma, quorum duo EH, IF, dicuntur eſſe circa diametrum, alia vero duo BG, GD, complementa, vt manifeſtum eſt ex vltima definitione primi lib. Itaq; figura compoſita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, vt ex IF, vna cum duobus complementis BG, GD, qualis eſt figura EBCDHGE, quam complectitur circunferentia KLM, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura FDABIGF, compoſita ex parallelogrammo EH, circa diametrum, & duobus complementis BG, GD, Gnomon appellabitur.





SED iam ad propoſitiones ſecundi huius lib. veniamus, in quibus ſane operæpretium fuerit, multum laboris in eis exquiſite intelligendis ponere, propter multiplicem earum vſum cum in rebus Geometricis, tum in humanis commerciis. Nam ex nonnullis harum propoſitionum demonſtrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in diſciplinis humanis præſtantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abſtruſa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum ſuperare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur eſſe nihil. Ex aliis deinde propoſitionibus huius lib. eliciuntur demonſtrationes, quibus inter ſe adduntur, ſubtrahuntur, multiplicantur, atq; diuiduntur numeri ſurdi, (quos dicunt) hoc eſt, qui nullo modo exprimi poſſunt; cuiuſmodi ſunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorum, quæ neq; per Diuinam potentiam in numeris poſſunt exhiberi, quod hæc res contradictionem implicet, vt Philoſophi, atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonſtrationem ſciri poſſe, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam num. 18. adiecta, cum vtraq; radix incognita ſit, & nulla ratione exprimi queat, quod illa paulo minor ſit, quam 3. hæc vero paulo maior quam 4. Et tamen ſumma, quæ ex vtraq; fit, colligitur ex vi propoſitionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulo maior eſt, quam 7. Præterea ex propoſ. 12. & 13. eiuſdem huius lib. area, & quantitas cuiuſuis trianguli exquiſitiſſime cognoſcitur, ex qua cognitione rurſus dimenſio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Poſtremo vltima propoſ. huius lib. omnem figuram rectilineam licet irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt vere aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem ſit perexiguus, vtilitates vero contineat prope infinitas.

THEOR.

1.

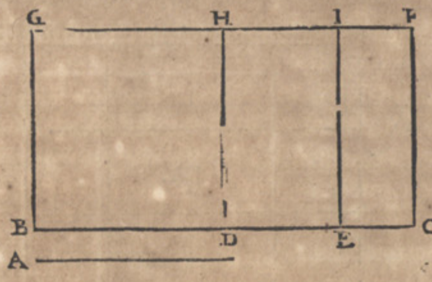
THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & BC, quarum BC, ſecetur quomodocunque in quotlibet ſegmenta BD, DE, EC. Dico rectangulum ſub A, & BC, comprehenſum æquale eſſe omnibus rectangulis ſimul ſumptis, quæ ſub linea indiuiſa A, & quolibet ſegmento comprehenduntur, nempe rectangulo ſub A, & BD; Item ſub A, & DE; Item ſub A, & EC, comprehenſo.

Rectangulum enim BF, comprehendatur ſub A, & BC, hoc eſt, recta GB, æqualis ſit rectæ A. Quod quidem fiet, ſi erigantur ad BC, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, ducaturque recta FG. Nam rectæ BG, CF, *a* parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & *b* æquales inter ſe ſunt, quod vtraque rectæ A, æqualis ponatur. *c* Igitur erunt quoque FG, BC, parallelæ, & æquales inter ſe: ac proinde rectangulum erit BF, contentum ſub A, ſiue GB, & BC, ex defin. 1. huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ DH, EI, parallelæ ipſi BG, vel CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ ſint ipſi BG, *d* inter ſe quoque parallelæ erunt. Rurſus eædem, cum ex conſtructione parallelogrāma ſint BH, BI, *e* æquales erunt rectæ BG, ac propterea rectæ A.

a 28. prim.
b 1. pron.
c 33. primi.
d 30. primi.
e 34. primi.



Quoniam igitur recta BG, æqualis eſt rectæ A, erit rectangulum BH, comprehenſum ſub inſecta linea A, & ſegmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehenſum ſub A, & ſegmento DE. Item rectangulum EF, ſub A, & ſegmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia ſint toti rectangulo BF; perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub A, & BC, æquale eſſe rectangulis omnibus, quæ ſub A, & ſegmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVONIAM lib. 9. propoſ. 14. decem priora theoremata ſecundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonſtrabimus, ſi diuidantur, vt lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonſtrantur, præſertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum reſpondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt ſupra diximus. Itaq; propoſitis duobus numeris quibuſcunque vt 6. & 10. diuidatur poſterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem eſſe tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perſpicuum eſt.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam ſequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, rectum angulum A, continentes, quæ ſecentur in partes AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. Dico rectangulum ſub rectis AB, AC, comprehenſum æquale eſſe rectangulis, quæ ſub AD, AG; AD, GH; AD, HC, DE, AG, DE, GH; DE, HC; EF, AG; EF, GH; EF, HC; FB, AG; FB, GH; FB, HC, continentur. Compleatur rectangulum AI, ducanturque DK, EL, FM; parallelæ ipſi AC, vel BI: Item HN, GO, parallelæ ipſi AB, vel CI; quæ ſecent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum AS, continetur ſub AD, AG; & GP, ſub AD, GH; & HK, ſub AD, HC; (f quod rectæ GS, HP, ipſi AD, ſint æquales:) Item rectangula DT, SQ, PL, continentur ſub DE, AG; DE, GH; DE, HC; (g quod DS, SP, PK, ipſis AG, GH, HC, æquales ſint, & ST, PQ, ipſi DE,) Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur ſub EF, AG; EF, GH; EF, HC: nec non rectangula FO, VN, RI, ſub FB, AG; FB, GH, FB, HC, perſpicuum eſt, rectangulum ſub AB, AC, æquale eſſe rectangulis ſub ſingulis partibus AD, DE, EF, FB, & quolibet ſegmentorum AG, GH, HC, comprehenſis. Quod eſt propoſitum.

f 34. primi.
g 34. prim.



SI ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ vtcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur rectangulis, vna cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.

SINT duæ rectæ AB, AC, angulum continentes rectum A, quæ ſecentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehenſum ſub AB, AC, vna cum rectangulo comprehenſo ſub partibus AD, EC, æquale eſſe rectangulis contentis ſub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo ſub DB, AE, comprehenſo. Compleatur enim rectangulum AF, agaturque per D, recta DG, ipſi AC, vel BF, parallela; necnon per E, recta EH, ſecans DG, in I, parallela ipſi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale eſt rectangulis EF, DH, AI; ſi addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe ſub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehenſa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, ſub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.



IN

IN numeris etiam hæc eadem perſpicuæ ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, [.]. poſterior vero in duas, 3. 5. diuidatur; perſpicuum eſt, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem eſſe ſex numeris 6. 10. 9. [.]5. 15. 25. qui producuntur ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntque ſimul additi 70. vt volebat theorema 1. Federici.

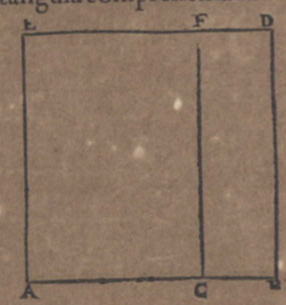
RVRSVS, ſi ijdem numeri ſecentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. poſterior autem in 2. 6. manifeſtum quoq; eſt 80. numerum productum ex 10. in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem eſſe tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

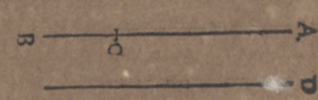
SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur: æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadrato totius lineæ AB. Deſcribatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ *a* æqualis erit rectæ AE, hoc eſt, rectæ AB, cui æqualis eſt recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis eſt rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia ſint quadrato AD, perſpicuum eſt, rectangula comprehenſa ſub AB, & ſegmentis AC, CB, æqualia eſſe quadrato lineæ AB: Si igitur recta linea ſecta ſit vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 34. primi.



ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. Quoniam igitur AB, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehenſum ſub inſecta D, & recta AB, hoc eſt, quadratum rectę AB, *b* æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur ſub [.], inſecta, hoc eſt, ſub AB, & ſingulis ſegmentis AC, CB, quod eſt propoſitum.



b 1. ſec.

SHOLIVM.

QVANQVAM Euclides ſecundum hoc theorema proponat de linea recta diuiſa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eiſdem medijs demonſtrabitur, ſi linea diuidatur in quotcunque partes, vt ex his figuris manifeſtum eſt. In numeris vero idem perſpicitur hoc modo. Numerus 10. diuiſus ſit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales eſſe 100. quadrato ipſius numeri 10. vt manifeſtum eſt. Simili modo ſi numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipſius numeri 10.



SIMILI modo demonſtrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta ſecetur in quotcunque ſegmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta AB, diuiſa in partes quotcunque AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, deſcriptum, æquale eſſe rectangulis, quæ ſub ſingulis partibus AC, CD, DB, & quolibet ſegmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur; hoc eſt, rectangulis ſub AC, AC; AC, CD; AC, DB; CD, AC; CD, CD; CD, DB; DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehenſis. Sumpta enim recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AB, diuiſaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales. Erit ex iis, quæ ad propoſ. 1. huius libri demonſtrauimus, rectangulum ſub AB, EF, hoc eſt, quadratum ipſius AB, æquale rectangulis ſub AC, EG; AC, GH; AC. HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, ſint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis ſub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod eſt propoſitum.

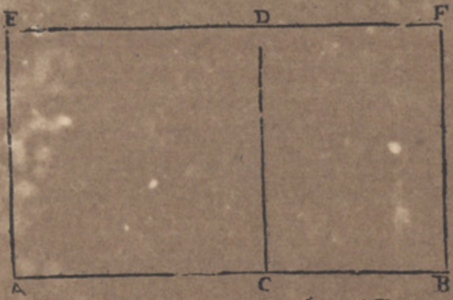


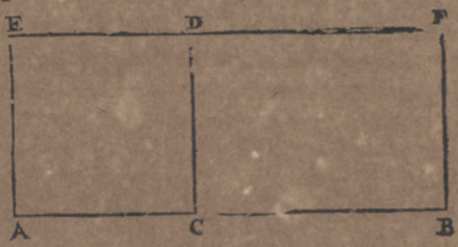
IN numeris idem eſt manifeſtum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perſpicuum eſt.

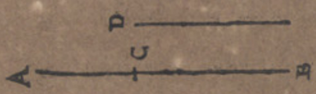
THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.

LINEA recta AB, diuiſa ſit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota & vtrouis ſegmento, vt AC, (ſiue hoc ſegmentum maius ſit, ſiue minus) æquale eſſe rectangulo ſub ſegme[ntis] AC, CB, comprehenſo, & quadrato prioris ſegmenti aſſumpti AC. Conſtituatur enim quadratum dicti ſegmēti AC, quod ſit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipſi AE, donec coeat cū ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta, rectę AC, ęqualis eſt, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Rurſus, quia recta CD, eadem ratione æqualis eſt rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehenſum ſub ſegmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale ſit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido conſtat, rectangulum ſub AB, tota, & ſegmento AC, comprehenſum eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis AC, CB, & quadrato prædicti ſegmenti AC. Itaque ſi recta linea ſecta ſit vtcunque, &c. Quod erat oſtendendum.







ALITER. Accipiatur recta D, æqualis ſegmento AC. Quoniam igitur recta AB, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehenſum ſub D, & AB, hoc eſt, ſub AB, & AC, *a* æquale rectangulo ſub D, & CB, hoc eſt, ſub AC, CB, & rectangulo ſub D, & AC, hoc eſt, quadrato ſegmenti AC. Quod eſt propoſitum.

a 2. ſec.

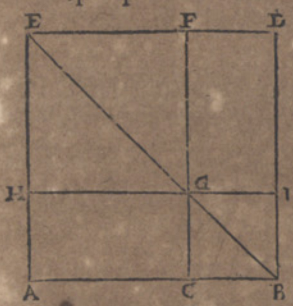
SCHOLIVM.

VT hoc theorema numeris accommodetur, ſit numerus 10. diuiſus in 7. & 3. Dico numerum 70 productum ex 10. in 7. æqualem eſſe numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipſa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. ſimul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

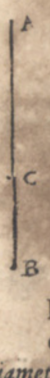
THEOR. 4. PROPOS. 4.

iv. SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Quadratum, quod à tota deſcribitur, æquale eſt & illis, quæ à ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.

RECTA linea AB diuiſa ſit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis AC, CB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, ſecans diametrum in G, puncto, per quod rurſus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, diuiſum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE æqualia ſunt;



a 5. primi. *a* erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui *b* tres anguli ABE, AEB, BAE,
b 32. prim. trianguli ABE, duobus rectis ſunt æquales, & BAE, rectus eſt. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, ſemirecti erunt. Eadē ratione oſtendes angulos DBE, DEB, ſemirectos eſſe. Quod etiam conſtat ex iis, quæ ad 34. propoſ. lib. 1. demonſtrauimus. Nam, vt ibi oſtenſum eſt, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, *c* æquales ſunt
c 32. primi. duobus rectis, & angulus EFG, rectus eſt, *d* cum ſit æqualis recto D, externus
d 29. pri. interno; nec non FEG, oſtenſus ſemirectus; erit & reliquus EGF, ſemirectus; ideoque æqualis angulo FEG. Quare *e* æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum
e 6. primi. ſint *f* æqualia oppoſitis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia eius latera ſint
f 34. prim. æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod exiſtente vno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti ſunt, vt ad defin. 1. huius lib. demonſtrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata ſunt ſegmentorum AC, CB, quod latus HG, *g* æquale ſit rectæ AC.
g 34. prim. Rectangula quoque AG, DG, comprehenſa erunt ſub ſegmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales ſunt rectæ CB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc eſt, *h* rectæ AC. Quocirca
h 34. prim. cum quadratum AD, æquale ſit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; conſtat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo ſub eiſdem ſegmentis AC, CB, bis ſumpto. Igitur ſi recta linea ſecta ſit vtcunque, quadratum, quod à tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.



ALITER. Quoniam recta AB, diuiſa eſt in C, *i* erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ
i 2. ſec. ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, comprehenduntur. Rectangulum autem ſub AB, AC, comprehen-
k 3. ſec. ſum, *k* æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub AC, CB, & quadrato ſegmenti AC: Item rectangulum ſub AB, CB, comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſub CB, AC, comprehenſo, & quadrato ſegmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam eſt quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulis ſub AC, CB, & ſub CB, AC. Quod eſt propoſitum.

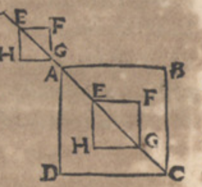
COROLLARIVM I.

Hinc manifeſtum eſt, parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonſtratione, in qua oſtenſum eſt, rectangula CI, FH, quæ ſunt circa diametrum BE, eſſe quadrata. In omnibus enim aliis quadratis eadem erit demonſtratio. Eſt tamen corollarium iſtud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrū quadrati, quæ cōmunem aliquem angulū habent cum toto quadrato, cuiuſmodi ſunt dicta parallelogramma CI, FH. Illud enim angulum habet ABD, communem cum quadrato, hoc vero angulū AED.

Idem

Idem nihilominus verum eſt de quibuſcunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela ſint quadrati lateribus. Circa enim diametrum AC, quadrati BD, conſiſtat parallelogrammum FH, ſiue intra quadratum, ſiue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati BD, parallela. Dico FH, eſſe quadratum. Cum enim parallelæ ſint AB, EF, [l] *erunt anguli BAC, FEG, æquales, internus, & externus; atque eadem ratione anguli BCA, FGE, æquales erunt: Sunt autem anguli BAC, BCA, ſemirecti, vt oſtenſum iam fuit. Igitur & anguli FEG, FGE, ſemirecti erunt:* [m] *proptereaque latera EF, FG, illis oppoſita, æqualia,* [n] *& angulus F, rectus. Quare cum EF, FG, latera æqualia ſint oppoſitis lateribus GH, HE, æquilaterum erit parallelogrammum FH: Sed & rectangulum eſt, ex iis, quæ ad defin. 1. huius lib. oſtendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus eſt demonſtratus. Igitur FH, quadratum erit. Quod eſt propoſitum.*



l 29. prim.
m 6. prim.
n 32. primi.
o 34. prim.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex demonſtratione huiuſ. propoſ. 4. diametrum cuiuſuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit angulos AEB, DEB, eſſe ſemirectos, &c. Id quod etiam ad propoſ. 34. lib. 1. demonſtrauimus.

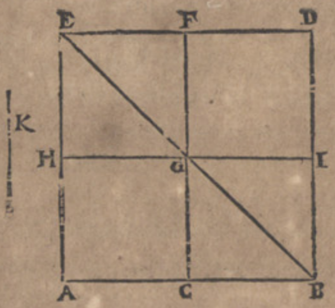
SHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuiſus vtcunque in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale eſſe 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis ſumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonſtrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius.

SIT enim primum linea AB, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum eſſe quadrati rectæ K. Nam diuiſa AB, bifariam in C, ſi fiat conſtructio, vt in 4. hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atque inter ſe æqualia, cum omnia eorum latera ſint æqualia, omneſque anguli recti, vt facile demonſtrari poteſt ex propoſ. 34. lib. 1. Quare cum quadratum AD, æquale ſit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratum lineæ AB, quadruplum quadrati lineæ AC, hoc eſt, lineæ K, quæ æqualis eſt ipſi AC. Eſt enim vtraque dimidium lineæ AB.



BREVIVS. [p] *Quadratum rectæ AB, æquale eſt quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo ſub rectis lineis AC, CB, bis comprehenſo. Cum igitur quadrata rectarum æqualium AC, CB æqualia ſint; & rectangulum ſub æqualibus AC, CB, quadratum quoq; ſit, atq; æquale quadrato rectæ AC; Conſtat quadratum rectæ AB, quadruplum eſſe quadrati rectæ AC; cum æquale ſit quatuor quadratis, quorum vnumquodq; quadrato rectæ AC, æquale eſt.*

p 4. ſec.

SIT deinde quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplum eſſe lateris K. Nam diuiſa rectæ AB, bifariam in C, vt AB, dupla ſit ipſius AC; erit, vt iam demonſtratum eſt, quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ AC. Ponitur antẽ & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum K, &, AC, & ipſæ propterea rectæ K, & AC, æquales: Eſt autem AB, ex coſtructione ipſius AC, dupla. Dupla igitur etiam erit ipſius K. Hæc tamen omnia aliter demonſtrabimus ad propoſ. 20. lib. 6.

CÆTERVM ex hac propoſ. 4. colligi poteſt modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoq; numerum conſtituat. Si namq; ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in ſe multiplicato productus, is qui quæritur. Vt ſi datus ſit numerus 15. inueniendusq; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in ſe multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. conſtituit 64. quadratum numerum, cuius latus eſt 8. nempe numerus vna vnitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hæc eſt. Quoniam quadratum AD, rectæ AB, [q] *æquale eſt duobus quadratis FH, CI, partium AC, CB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub AC, CB; ſi gnomonem HBF, qui cum quadrato FH, conſtituit totum quadratum AD, ponamus 15. quantus nimirum eſt datus numerus: quadratum autem CI, ſtatuamus 1. atque adeo latus quoq; eius CB, 1. erit vtrumuis rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde ſegmentum AC, 7. vt nimirum ex AC, in CB, quæ eſt 1. fiant. 7. Quadratum ergo FH, erit 49. Totum autem latus AB, erit 8. nempe vna vnitate maius, quam AC, latus quadrati FH. Hæc ergo eſt cauſa, cur ex dato numero, hoc eſt, ex gnomone HBF, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium ſtatuamus latus quadrati FH, quæſiti.*

q 4. ſec.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet eſſe impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi poſſit bifariam. Regula nihilominus vera eſt, quicunque numerus datus ſit.

IDEM efficiemus, ſi ex dato numero quemuis quadratum numerum demamus, & reſidui dimidium per latus quadrati ablati partiamur. Quotiens enim erit latus quadrati quæſiti. Vt ſi detur numerus 45. pro gnomone HBF, auferemus numerum quadratum 9. pro quadrato CI, cuius latus eſt 3. Reſidui 36. dimidium eſt 18. pro AG, quod diuiſum per 3. hoc eſt per CG, latus quadrati ablati CI, facit Quotientem 6. pro latere GH, cuius quadratum FH, nimirum 36. additum ad gnomonem HBF, nimirum ad 45. efficit quadratum numerum 81. Vt autem fractiones euitentur, dandus erit numerus, ita vt, ablato quadrato numero aliquo, reſiduus numerus, habeat dimidium numerum, quem latus quadrati ablati numeret.

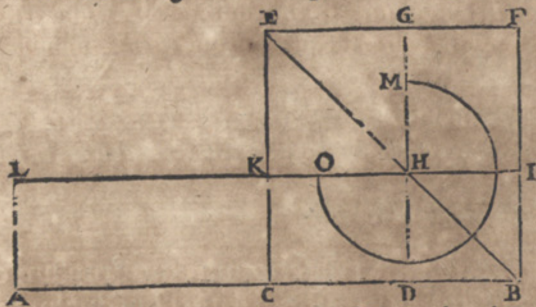
VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus ſubtractus relinquat numerum quoq; quadratum. Nam ſi ex numero dato dematur 1. & reliqui numeri dimidio adijciatur 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi

rurſum datus ſit numerus 15.Detracta 1.erit reliqui numeri 14.dimidium 7. cui addita 1.fiet latus quadrati quæſiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus eſt 7. quod perpetuo eſt vna vnitate minus, quam latus quadrati inuenti.Ratio etiam huius regulæ facilis eſt ex eadem figura huius propo.4.Nam ſi gnomonem HBF,qui ex quadrato AD,ſubtractus reliquum facit quadratum FH, ponamus 15. quantus nimirum eſt numerus datus. Quadratum vero CI,ſtatuamus 1.atque adeo & latus eius CB,1.erit vtrumlibet rectangulorum AG,DG, 7. ac proinde & ſegmentum AC, 7.vt ſupra dictum eſt,& tota linea AB,8.&c.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

v. SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vna cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod à dimidia deſcribitur, quadrato.

DIVIDATVR recta AB,bifariam in C,& per inæqualia in D,vt ſectionum intermedia ſit recta CD, qua nimirum dimidia CB,minus ſegmentum DB,ſuperat, vel qua maius ſegmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus AD, DB, comprehenſum, vna cum quadrato rectæ CD, quæ inter duas eſt ſectiones, æquale eſſe quadrato dimidiæ CB. Deſcribatur enim CF, quadratum ſuper dimidia CB; & ducta diametro BE, ducatur ex D, recta DG, parallela rectæ BF, ſecans diametrum BE,in H, puncto, per quod ducatur rectæ BC, parallela IK: Item ex A, rectæ CE, parallela AL, ſecans IK, productam in L.Erunt igitur per corollarium 1.præcedentis propoſ. DI, KG, quadrata, ideoque DH, recta rectæ DB, æqualis: a 34. prim. *a* Eſt autem & KH, ipſi CD, æqualis. Quare rectangulum AH, comprehendetur ſub AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CD; Probandum itaque eſt, rectangulum AH, vna cum quadrato KG, æquale eſſe quadrato CF. Quoniam ergo *b* complementa CH, FH, æqualia ſunt; ſi addatur commune quadratum DI,erit parallelogrammum DF, parallelogrammo CI,æquale: *c* Eſt autem & AK,eidem CI,æquale, quod & baſes AC,CB,æquales ſint.Igitur DF,AK,æqualia etiam inter ſe erunt: quibus ſi commune apponatur CH, erit gnomon MNO,rectangulo AH,æqualis. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG,æqualia ſint quadrato CF;erit & rectangulum AH,vna cum quadrato KG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergo linea ſecetur in æqualia,& non æqualia,&c.Quod oſtendendum erat.



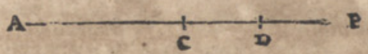
b 43. prim.

c 36. primi.

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Franciſco Maurolyco demonſtrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonſtratur à [illegible]aam monacho,quod etiam cum eodem Maurolyco in ſequentibus propoſitionibus vſque ad 11,excluſiue faciemus.Demonſtrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propoſ.14.lib.9.Ita ergo propoſitum exequemur. Quia quadratum ex CB, [d] æquale eſt quadratis ex CD, DB, vna cum rectangulo bis ſub DB, CD; Rectangulo autem ſub DB, CD, vna cum quadrato ex DB, [e] æquale eſt rectangulum ſub DB, CB;Erit quadratum ex CB, æquale reliquo quadrato ex CD, vna cum reliquo rectangulo ſub DB, CD, & rectangulo ſub DB, CB,vel ſub DB, AC. Atqui rectangulis ſub DB, AC, & ſub DB, CD, [f] æquale eſt rectangulum ſub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CB, æquale erit quadrato ex CD, vna cum rectangulo ſub DB, AD; hoc eſt, rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex CD; æquale erit quadrato ex CB.Quod erat demonſtrandum.

d 4. ſec.



e 3. ſec.

f 1. ſec.

IDEM in numeris eſt manifeſtum. Diuidatur enim numerus 10.æqualiter in 5.& 5.Item inæqualiter in 7.& 3.ita vt medius numerus inter ſectiones ſit 2.quo videlicet dimidius numerus 5.ſuperat minorem partem 3.&c.Vides igitur,numerum 21. ex 7.in 3.productum,vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2.æqualem eſſe 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propoſ.5.inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque conficiat numerum. Nam ſi dato numero adijciatur 1. & à compoſiti numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus numerus ſit 15.Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. ſi dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15.componit numerum quadratum 64.cuius latus eſt 8.quod perpetuo eſt vna vnitate maius latere 7.quadrati inuenti.Ratio huius regulæ ex demonſtratione propoſ.5. difficilis non eſt. Cum enim rectangulum AH, cum quadrato KG,
g 5. ſec. *[g] æquale ſit quadrato CF;ſi rectangulum AH,ponatur 15. ſicut numerus datus;at vero quadratum DI,ſtatuatur 1.ac proinde latus DB,quoque 1.erit recta AD,15.vt nimirum ex AD,in DB,gignatur 15.rectangulum videlicet AH. Addita ergo 1. erit tota linea AB,16.à cuius dimidio 8.dempta 1.relinquetur CD,7.latus nimirum quadrati KG.*

HIC quoque,ſi fracti numeri vitandi ſint,debet numerus datus eſſe impar,vt videlicet,addita 1.diuidi poſſit biſariam.

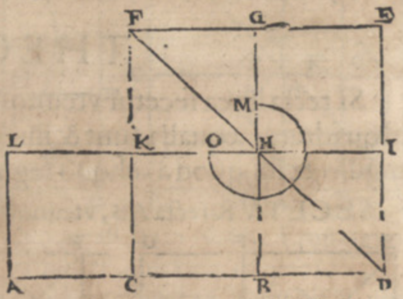
E contrario reperiemus numerum quadratum,à quo ſi datus quiuis numerus ſubtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus.Nam ſi ad datum numerum adijciatur 1.erit dimidium compoſiti numeri latus quadrati quæſiti.Vt ſi rurſum numerus 15.datus ſit.Addita 1.erit compoſiti numeri dimidium 8.latus quadrati 64.quæſiti. Si enim demas datum numerum 15.reliquus fiet quadratus numerus 49.cuius latus 7.perpetuo minus eſt vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perſpicua quoque eſt ex eadem figura huius propoſ.5. Nam ſi rectangulum AH, quod ex quadrato CF, ablatum relinquit quadratum KG, ſtatuatur 15. ſicut datus numerus ;& quadratum DI,ponatur 1.atque adeo & DB,eius latus 1.erit tota AB,16.& eius dimidium CB,8.&c.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

vj. SI recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: Rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, deſcripto.

SECE

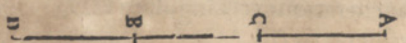
SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD: Dico rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita AD, & DB, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale eſſe quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB, & adiecta BD, componitur. Deſcribatur namque CE, quadratum ſuper CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, parallela rectæ DE, ſecans diametrum DF, in H, puncto, per quod agatur IK, parallela rectæ CD: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela AL, ſecans IK, productã in L. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. BI, KG, quadrata, ideoque recta DI, rectæ DB, æqualis: [a] Eſt autem & KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, comprehendetur ſub rectis AD, DB, & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque eſt, rectangulum AI, vna cum quadrato KG, æquale eſſe quadrato CE. Quoniam ergo parallelogrammum AK, [b] æquale eſt parallelogrammo CH, quod baſes AC, CB, æquales ſint: [c] Eſt autem & parallelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt AK, HE, æqualia inter ſe. Addito ergo communi CI, erit rectangulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, ſint æqualia; erit & rectangulum AI, vna cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque ſi recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 34. prim.
b 36. primi.
c 43. prim.

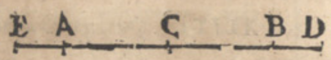
SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex CD, [d] æquale eſt quadratis ex CB, BD, vna cum rectangulo bis ſub DB, CB, hoc eſt, quadratis ex CB, BD, vna cũ rectangulis ſub DB, CB, & ſub DB, AC: (ſumpta AC, ſemel pro CB, quæ illi æqualis ponitur.) Eſt autem rectangulis ſub DB, AC; DB, CB; & ſub DB, DB, (quod eſt quadratum ex DB,) [e] æquale rectangulum ſub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CD, æquale eſt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo ſub DB, AD: Hoc eſt, rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex CB, æquale eſt quadrato ex CD. Quod demonſtrandum erat.



d 4. ſec.
e 1. ſec.

CÆTERVM ſi rem attentius conſiderare velimus, comperiemus propoſitionem hanc 6. per præcedentem 5. facillime poſſe demonſtrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatiſſimus, Mauricius Breſcius Gratianopolita[illegible]s, Regius olim Mathematicarum diſciplinarum in Academia Pariſienſi profeſſor, animaduertit. Sit enim recta AB, ſecta in C, bifariam, & ei addita recta quantacunque BD. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota AD, compoſita, & adiecta BD, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale eſſe quadrato rectæ CD, ex dimidia, & adiecta compoſita. Addita namque rectæ AD, ex altera parte recta AE, quæ adiectæ BD, æqualis ſit, erit tota ED, ſecta in C, æqualiter, & in B, inæqualiter, quod EA, AC, ipſis DB, BC, æquales ſint. Recta quoque EB, rectæ AD, æqualis erit, quod ea, ipſi DB, ſit æqualis, & AB, vtrique communis. [f] Rectangulum igitur ſub partibus inæqualibus EB, BD, vna cum quadrato intermediæ ſectionis CB, hoc eſt, rectangulum ſub AD, BD, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale erit quadrato dimidiæ CD, hoc eſt, quadrato rectæ ex dimidia CB, datæ rectæ AB, & ex adiecta BD, compoſitæ. Quod eſt propoſitum.



f 5. ſec.

SECETVR iam numerus 10. bifariam (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturque ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero compoſito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem eſſe 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas inſignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ conſiſtit in eodem ſemper exceſſu quantitatum proportionalium. Cum enim AD, ſuperet CD, magnitudine AC, hoc eſt, CB; & CD, ſuperet BD, eadem magnitudine BC: habebunt tres lineæ AD, CD, BD, proportionalitatem Arithmeticam; quandoquidem prima AD, ſuperat ſecundam CD, eodem exceſſu AC, ſiue CB, quo ſecunda CD, tertiam BD, ſuperat. Quare cum oſtenſum ſit, rectangulum ſub extremis AD, BD, vna cum quadrato exceſſus CB, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ CD; perſpicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum ſub extremis contentum, vna cum quadrato exceſſus, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ. Sẽper enim tres lineæ Arithmetice proportionales ita inter ſe coniungi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuiſam, (quæ nimirum æqualis ſit exceſſui inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet, ſi tres rectæ ſint datæ AD, CD, BD. Si namque ex prima AD, abſcindatur DC, æqualis mediæ, & ex media hac DC, auferatur tertia DB, erit AB, (exceſſus inter primam & tertiam) ſecta bifariam in C, eique addita tertia BD. Cum enim BC, exceſſus ſit inter mediam CD, & tertiam BD, qui æqualis eſſe debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipſi AC, nempe exceſſui inter primam AD, & mediam CD; erit neceſſario AB, ſecta in C, bifariam. Eademque ratio eſt in alijs. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent exceſſum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem exceſſum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato exceſſus 3. æqualis eſt quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propoſ. 6. reperiemus, vt ex 4. propoſ. numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam ſi ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariam ſecetur, erit quadratus numerus huius dimidij is, qui quæritur. Vt ſi datus numerus ſit 15. D[illegible]ta 1. relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quæſitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerum 64. cuius latus 8. vna vnitate, maius eſt latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifeſta eſt ex hac 6. propoſ. Cum enim rectangulum AI, cum quadrato GK, [g] æquale ſit quadrato CE; ſi rectangulum AI, ſtatuatur 15. at quadratum BI, 1. ideoq; & latus BD, 1. erit tota linea AD, 15. vt nimirum multiplicata in BD, 1. producat rectangulum AI. 15. Ablato igitur 1. BD, remanet AB. 14. cuius dimidium 7. dabit CB, latus quadrati KG, quæſiti. g 6. ſec.

NECESSE autem etiam hic eſt, datum numerum eſſe imparem, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam poſſit diuidi.

VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1 & reliqui numeri dimidio adijciatur rurſus 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus ſit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæſiti 8. Nam ſi ex eius quadato 64. ſubducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. ſemper vna vnitate minus eſt late-

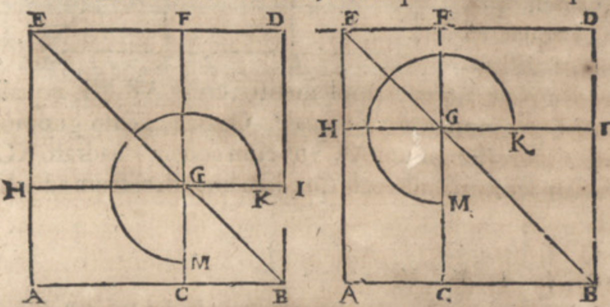
re inuento 8. Ratio eſt, quia ſi rectangulum AI, quod ex quadrato CE, ſubtractum relinquit quadratum KG, ſtatuatur 15. ac quadratum BI, ideoq; & BD, eius latus 1. erit tota linea AD, 15. vt dictum eſt. Dempta ergo 1. BD, erit AB, 14. cuius dimidio CB, quod eſt 7. ſi rurſus apponatur 1. fiet latus CD, 8. quod quæritur, &c.

vij.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI recta linea ſecetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

SECETVR recta AB, vtcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum ſegmenti ſiue maioris, ſiue minoris AC, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub tota AB, & dicto ſegmento AC, vna cum quadrato reliqui ſegmenti CB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, a æqualis eſt rectæ AC, erit HF, quadratum ſegmenti AC. Rurſus quia AE, æqualis eſt ipſi AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehenſum erit ſub eiſdem rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales ſint rectis AB, AC, ob quadrata AD, FH Quoniam igitur rectangulis AF, FI, vna cum quadrato CI, hoc eſt, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale eſt quadratum AD; ſi apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quorum quodlibet comprehenditur ſub tota AB, & ſegmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui ſegmenti CB. Si igitur recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

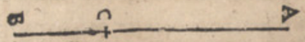


a 34. prim.

SCHOLIVM.

b 4. ſec.

ALITER. Quia quadratum ex AB, [b] æquale eſt quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis ſub AC, CB, ſi addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AC, bis, & quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis ſub AC, CB. Sed rectangulo ſub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, [c] æquale eſt rectangulum ſub AB, AC: Et proinde rectangulo bis ſub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale eſt rectangulum ſub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia ſunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis ſub AB, AC. Quod demonſtrandum erat.

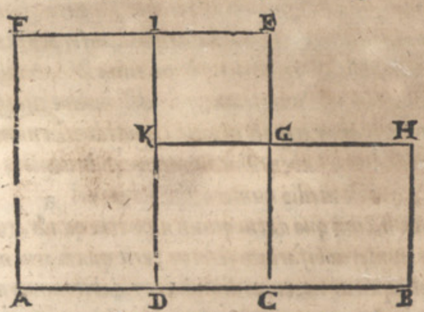


c 5. ſec.

IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales ſunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt conſtat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales ſunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales ſecetur: Earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem.



SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, ſitque maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, ſit exceſſus, quo pars AC, ſuperat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia eſſe rectangulo, quod bis continetur ſub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Conſtituantur enim quadrata AE, CH, & agatur DI, ipſi CE, parallela, producaturque HG, ad K. Itaque quoniam AD, ipſi CB, eſt æqualis, addita communi DC, erit tota AC, hoc eſt, CE toti DB, æqualis: Eſt autem & CG, ipſi CB, æqualis, quod quadratum ſit CH. Igitur & reliqua GE, reliqua DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & IE, ipſi DC, ſit æqualis, erunt GE, IE, æquales; ideoque IG, quadratum erit ab exceſſu DC, deſcriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur ſub partibus AC, CB, (Eſt enim AC, vtrique lineæ AF, DB, & CB, vtrique AD, BH, æqualis) manifeſtum eſt, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia eſſe rectangulis AI, DH, quæ continentur ſub partibus AC, CB, vna cum quadrato IG, exceſſus DC. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

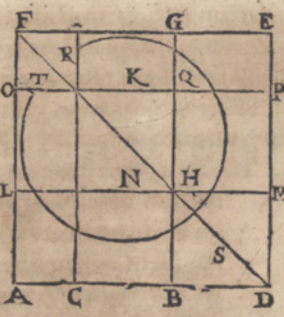
IN numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars ſuperet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales eſſe numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis ſumpto, vna cum 4. quadrato exceſſus 2. vt volebat theorema.

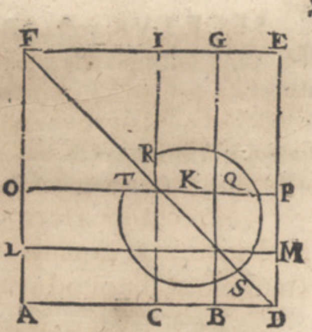
viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI recta linea ſecetur vtcunque: Rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod à tota, & dicto ſegmento, tanquam ab vna linea deſcribitur, quadrato.

SIT recta AB, in C, diuiſa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehenſum ſub AB, & ſegmento ſiue maiore, ſiue minore CB, vna cum quadrato reliqui ſegmẽti AC, æquale eſſe quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto ſegmento CB, componitur. Producatur enim AB, verſus dictum ſegmentum CB, ad D, ſitq; BD, recta æqualis ſegmento CB; & ſuper tota AD, quadratum deſcribatur AE. Ducta autẽ diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipſi DE, ſecantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipſi AD, quæ ſecent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, [a] æqualis eſt rectæ AC, erit OI, quadratum ſegmenti AC. Rurſus [b] quia NH, æqualis eſt rectæ CB, erit NQ, quadratum ſegmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales ſint. Quare rectæ BH, HQ, æquales ſunt ſegmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehenſa erunt ſub AB, & ſegmento CB, [c] cum LH, ſit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehenſa ſub AB, & CB, cum NH, HM, rectæ [d] æquales ſint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FL, hoc eſt, rectæ LH, hoc eſt, rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia ſunt; ſi addatur commune KG, erunt BM, KG, ſimul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonẽ RST, cõponentia, æqualia ſunt rectangulo quater comprehenſo ſub recta AB, & ſegmẽto CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia ſint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehenſum ſub data recta AB, & ſegmento CB, vna cum quadrato reliqui ſegmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compoſitæ ex AB, & dicto ſegmento CB. Quamobrem, ſi recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.





a 34. prim.
b 34. prim.
c 34. prim.
d 34. prim.

S C H O L I V M.

Aliter, quia quadratum ex AD, [e] æquale eſt quadratis ex AB, BD. vna cum rectangulo ſub AB, BD, bis, hoc eſt, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC: At quadrata ex AB. BC, [f] æqualia ſunt rectangulo bis ſub AB, BC, vna cum quadrato ex AC: Erit quadratum ex AD, æquale rectangulo quater ſub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonſtrandum erat.

e 4. ſec.
f 7. ſec.



[illegible]tur iam numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc eſt, numerus 256. æqualis eſt numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt conſtat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc eſt, numerus 196. æqualis eſt quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perſpicuum eſt.

POTEST *propoſitio hæc 8. ita etiam proponi.*

SI linea recta ſecetur vtcunque, eique in rectum adiiciatur alia recta vni ſegmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compoſitæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub data linea, & adiecta ſiue dicto ſegmento, vna cum quadrato alterius ſegmenti.

Nam recta AB, ſecta eſt in C, vtcunq;, eiq; addita BD, ſegmento CB, æqualis, demonſtratumq; eſt, quadratum totius AD, æquale eſſe rectangulo quater comprehenſo ſub data linea AB, & adiecta BD, ſiue dicto ſegmento CB, vna cum quadrato alterius ſegmenti AC.

Item ſic.

SI linea recta ſecetur bifariam, eique in rectum adiiciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compoſitæ lineæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub linea compoſita ex dimidia, & adiecta, & ſub dimidia, vnâ cum quadrato adiectæ.

Nam recta DC, ſecta eſt bifariam in B, eiq; addita CA, probatumq; fuit, quadratum totius AD, æquale eſſe rectangulo quater comprehenſo ſub AB, compoſita ex BC, dimidia, & adiecta AC, & ſub dimidia CB, vna cum quadrato adiectæ AC.

Iam vero ex hac quoq; propoſ. 8. inueniemus alia ratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum ſimiliter quadratum. Nam ſi ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus numerus ſit 32. tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratum 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratum 81. Cuius latus 9. eſt ſemper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis eſt huiuſce rei ratio. Quoniam enim rectangulum AH, quater ſumptum, cum quadrato OI, [g] æquale eſt quadrato AE, ſi rectangulum AH, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at vero quadratum CH, adeoq; & CB, eius latus, 1. erit linea AB, 8. vt ducta in CB, 1. faciat 8. Ablata ergo 1. reliquum erit AC, latus quadrati OI, 7. quod quæritur.

g 8. ſec.

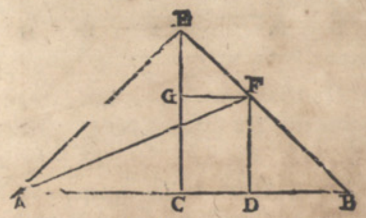
Vt autem fractiones vitentur, neceſſe eſt, datum numerum diuidi poſſe in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

Contra, inueniemus quoq; numerum quadratum, à quo datus numerus ſubtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namq; ad quartam partem numeri dati addatur 1. conflabitur latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus rurſum ſit numerus 32. ſi ad quartam eius partem 8. adijciatur 1. fiet latus 9. à cuius quadrato 81. ſi detrahatur datus numerus 32. remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. ſemper eſt vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio eſt, quia ſi quarta pars gnomonis RST, qui ex quadrato AE, ſublatus relinquit quadratum OI, hoc eſt, ſi rectangulum AH, quod gnomonis RST, quartam partem eſſe demonſtrauimus, ſtatuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratum BM, ideoq; & latus eius BD, 1. erit linea AB, 8. vt dictum eſt, ac proinde totum latus AD, 9. ex cuius quadrato AE, quod eſt, 81. ſi auferatur gnomon RST, quem poſuimus eſſe 32. reliquum fiet quadratum OI, 49. cuius latus AC, eſt 7. quandoquidem AB, erat 8. & CB, hoc eſt, BD, illi æqualis, 1. quod quidem latus AC, perpetuo vna vnitate minus eſt quarta parte numeri dati 32. vt dictum eſt.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, ſimul duplicia ſunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia ſectionum fit, quadrati. viiij.

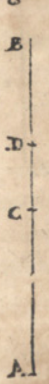
SECETVR recta AB, bifariam in C,& non bifariam in D. Dico quadrata ſegmentorum inæqualium AD,DB,ſimul dupla eſſe quadratorum ſimul,quæ fiunt ex dimidia AC,& ex intermedia ſectionum CD. Educatur enim ex C,ad AB,perpendicularis CE,quæ ſit æqualis dimidiæ AC, vel CB, ducanturque rectæ EA, EB. Deinde ex D,ducatur quoque ad AB,perpendicularis DF,ſecans EB,in puncto F,per quod ducatur FG, parallela ipſi AB,ſecans CE, in G,ducaturque tandem AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA,CE,æ-
a 5. primi. qualia ſunt, [a] erunt anguli CAE,CEA,æquales: Eſt autem angulus ACE,rectus: Reliqui igitur [b] anguli alium
b 32. prim. rectum conficient,ideoque AEC, ſemirectus erit. Eadem ratione angulus BEC,ſemirectus erit;ac propterea totus AEB,rectus. Rurſus,quia tri-
c 29. pri. anguli FGE,angulus EGF, [c] æqualis eſt recto ECB,externus interno; [d]
d 32. primi. erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: Oſtenſum autem eſt,angulum FEG,eſſe ſemirectum. Igitur & EFG,ſemirectus erit,propterea que an-
e 6. prim. guli EFG,FEG,æquales erunt, [e] ideoque & latera EG, GF,æqualia inter ſe. Eodem modo oſtendetur,in triangulo BDF,latera BD,DF,eſſe æqualia. Nam angulus FDB,eſt rectus, & B, ſemirectus, &c. Itaque cum in tri-
f 47. prim. angulo ACE, angulus C, rectus ſit, [f] erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC,CE: Atqui hæc duo quadrata inter ſe ſunt



æqualia, quod & lineæ AC, CE, æquales ſint. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC.
g 47. primi Rurſus,quia in triangulo EGF,angulus G, rectus eſt, [g] erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG,GF: At duo hæc quadrata inter ſe æqualia ſunt,ob æqualitatem linearum EG,GF. Igitur quadra-
h 34. prim. tum lateris EF,duplum erit quadrati lateris FG,hoc eſt,quadrati lineæ CD. Eſt enim CD, [h] recta rectæ FG, æqualis; cum CF,ſit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF, dupla ſunt duorum qua-
i 47. prim. dratorum linearum rectarum,AC,CD: Sunt autem duo quadrata rectarum AE,EF, [i] æqualia quadrato rectæ AF;& quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata rectarum AD,DF,dupla ſunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectæ DF, æquale eſt quadrato rectæ DB. Oſtenſum enim eſt rectas DF, DB,eſſe æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB,ſegmentorum inæqualium,dupla ſunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidiæ lineæ,& intermediæ ſectionum. Si ergo recta linea ſecetur in æqualia,& non æqualia &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

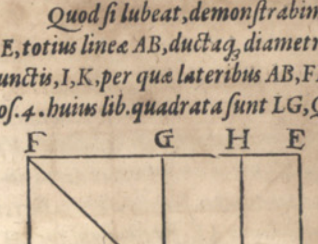
k 4. ſec. *Aliter. Quia quadratum ex linea recta AD, deſcriptum, [k] æquale eſt quadratis deſcriptis ex AC, CD, vna cum parallelogrammo rectangulo bis ſub rectis AC, CD, comprehenſo; ſi commune apponatur quadratum ex DB,erunt duo quadrata ex AD,DB,æqualia tribus quadratis ex AC,CD,DB,vna cum rectangulo bis ſub AC,CD,vel ſub BC, CD; Atqui qua-*
l 7. ſec. *drato ex DB,vna cum rectangulo bis ſub BC,CD, [l] æqualia ſunt quadrata ex BC,ſeu AC,& ex CD. Quadrata igitur ex AD, DB, æqualia ſunt bis quadratis ex AC, CD; Ac propterea quadrata ex AD, DB, dupla ſunt quadratorum ex AC,CD. Quod oſtendendum erat.*



Aliter ex Federico Commandino. Quoniam AC,ipſi CB,æqualis eſt,& ſuperat CB,ipſam CD,recta DB; ſuperabit quoq; AC,ipſam CD, eadem recta DB. Quare,vt ad 7. propoſ. huius libri demonſtrauimus,quadrata rectarum AC,CD,æqualia ſunt rectangulo ſub AC,CD,bis vna cum quadrato rectæ DB; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD,& rectangulum ſub AC,CD,bis,vna cum quadrato rectæ DB,dupla ſunt quadratorum ex AC,CD: Sed quadra-
m 4. ſec. *tis rectarum AC,CD,vna cum rectangulo ſub AC,CD, bis [m] eſt æquale quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarum AD, DB,dupla ſunt quadratorum ex AC,CD.*

Iam vero rurſus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5.& 5. Item inæqualiter in 7.& 3.vt ſit intermedia ſectio numerus 2.ceu in propoſ.5. eſt dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9.partium inæqualium 7.& 3.dupli ſunt quadratorum 25.& 4.dimidij numeri 5.& numeri 2. inter duas ſectiones,vt manifeſtum eſt.

Quod ſi lubeat,demonſtrabimus & hanc 9.propoſ. ex ipſa conſtructione,vt præcedentes,hoc modo. Deſcripto quadrato AE,totius lineæ AB,ductaq; diametro BF,ducantur per C,D,lateribus AF,BE,parallelæ CG, DH,ſecantes diametrum BF, in punctis,I,K,per quæ lateribus AB,FE,parallelæ agantur LM,NO,ſecantes CG,DH,in Q, P. Quoniam igitur ex coroll.1.pro-
n 34. prim. *poſ.4.huius lib.quadrata ſunt LG,QP,DO,CM,NH, [n] eſtq; LI,ipſi AC,& QK, ipſi CD,& NK, ipſi AD,æqualis;erunt NH, DO, quadrata partium inæqualium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatæ lineæ AC,& intermediæ ſectionis CD. Dico illa horum eſſe dupla. Quoniam enim quadrata NH,DO,ſuperant quadrata LG,QP, quadrato DO,& rectangulis NI, IH: Sunt autem quadratum DO,& rectangula NI,IH,æqualia quadratis LG, QP, vt mox demonſtrabitur; liquido conſtat,quadrata NH,DO,quadratorum LG, QP, eſſe dupla,cum hæc bis in illis contineantur. Quod autem tria hæc rectangula DO,NI, IH,æqualia ſint quadra-*
o 36. prim. *tis LG,QP,ita oſtendetur. Rectangulum NI, [o] æquale eſt rectangulo QM, quod rectæ*
p 34. prim. *NQ, QO, [p] æquales ſint æqualibus AC,CB. Igitur NI,complectitur quadratum QP; & inſuper KM. Si ergo KM,DO,IH, æqualia ſint quadrato LG, erunt neceſſario DO, NI, IH,æqualia duobus quadratis LG, QP. Eſſe autem KM,DO, IH, æqualia quadrato LG,*
q 36. primi *ſic demonſtrabimus. [q] Rectangula KM,DO,ſimul æqualia ſunt ipſi PE,quod rectæ BM,*

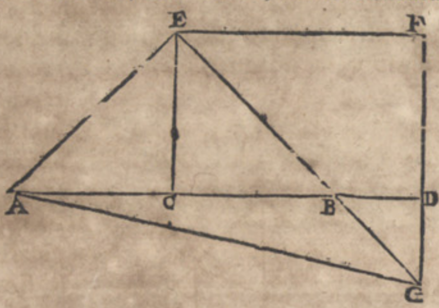


r 34. prim. *ME,æquales ſint,cum BM,æqualis ſit ipſi CB, ob quadratum CM, [r] & ME,ipſi FL,hoc eſt,ipſi LI,ob quadratum LG, hoc eſt,*
s 34. primi. *[s] ipſi AC. Addito ergo communi IH, erunt KM,DO,IH, æqualia ipſi IE,hoc eſt,quadrato LG: [t] quod IE, LG, æqualia ſint,ob*
t 36. primi. *rectas LI,IM, [u] quæ æqualibus AC,CB, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.*
u 34. prim.

x.
THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea ſecetur bifariam,adiiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta,& quod ab adiuncta, vtraque ſimul quadrata, duplicia ſunt, & eius,quod à dimidia,& eius,quod à compoſita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna,deſcriptum ſit, quadrati

SECETVR recta AB, biſariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico duo quadrata rectarum A D, BD, ſimul dupla eſſe quadratorum ſimul, quæ ex rectis AC, CD, deſcribuntur. Super AB, enim ex C, erigatur perpendicularis CE, quæ ſit æqualis dimidiæ AC, vel CB, & iungantur rectæ AE, EB. Per D, deinde educatur DF, ipſi CE, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G, & per E, ducatur recta E F, parallela C D, ſecans DF, in F, iungaturque recta AG. Oſtendetur iam, angulum AEB, eſſe rectum, vt in præcedenti propoſ. & CEB, ſemirectum; [a] ideoq; eius alternũ E G F, ſemirectum quoque; [b] Eſt autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo CF, recto angulo C, opponatur. [c] Igitur & reliquus FEG, ſemirectus erit, & propterea ipſi EGF, æqualis. Quare [d] rectæ E F, F G, angulis FEG, EGF, oppoſitæ, æquales quoque erunt. Eadem arte oſtendes, rectas BD, DG, eſſe æquales, propterea quod angulus BDG, ſit rectus, & BGD, ſemirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, [e] æquale eſt quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rurſus quia quadratum rectæ EG, [f] quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG, æquale eſt; erit quoq; quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc eſt, rectæ CD, [g] cum CD, recta æqualis ſit rectæ EF. Duo igitur quadrata rectarum A E, EG, dupla ſunt quadratorum ex rectis AC, CD, deſcriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale eſt [h] quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ AG, æqualia ſunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, deſcribuntur. Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla ſunt quadratorum ex rectis AC, CD, deſcriptorum. Cum igitur quadratum rectæ DG, æquale ſit quadrato rectæ BD; erunt quoque quadrata rectarum A D, D B, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, deſcribuntur. Itaq; ſi recta linea ſecetur biſariam, &c. Quod oſtendendum erat.

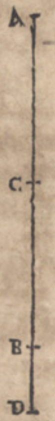


a 29. prim.
b 34. prim.
c 32. prim.
d 6. pri.
e 47. prim.
f 47. prim.
g 34. prim.
h 47. prim.

SCHOLIVM.

Aliter. Quia quadratum ex AD, [i] æquale eſt quadratis ex AC, CD, vna cum rectangulo bis ſub AC, CD, vel ſub B C, C D; ſi commune addatur quadratum ex B D, erunt duo quadrata ex AD, BD, æqualia tribus quadratis ex AC, CD, BD, vna cum rectangulo bis ſub B C, C D. [k] Sed quadrato ex BD, vna cum rectangulo bis BC, CD, æqualia ſunt quadrat[a e]x CD, BC, hoc eſt, quadrata ex AC, CD. Igitur quadrata ex AD, BD, æqualia ſunt quadratis ex AC, CD, bis; Ac proinde quadrata ex AD, BD, dupla ſunt quadratorum ex AC, CD; Quod erat demonſtrandum.

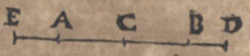
Aliter ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipſi CB, eſt æqualis, & ſuperat CD, ipſam CB, recta BD; ſuperabit quoq; CD, ipſam AC, eadem recta BD. Quare, vt ad 7. propoſ. huius lib. oſtendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia ſunt rectangulo ſub AC, CD, bis, vna cum quadrato rectæ BD; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum ſub AC, CD, bis, vna cum quadrato rectæ BD, dupla ſunt quadratorum ex AC, CD: Atqui quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub AC, CD, bis [l] æquale eſt quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum AD, BD, dupla ſunt quadratorum ex AC, CD.



i 4. sec.
k 7. sec.
l 4. sec.

Numerus 10. biſariam ſecetur in 5. & 5. cui addatur numerus quiuis 3. vt totus numerus compoſitus ſit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. & 3. dupli ſunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perſpicuum eſt.

Sed & hæc propoſ. 10. facile ex præcedente 9. demonſtrabitur, quemadmodum ſupra demonſtrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta AB, ſecta biſariam in C, eiq; addita recta quantacunq; BD. Dico duo quadrata rectarum A D, B D ſimul dupla eſſe duorum quadratorum rectarum AC, CD, ſimul. Addita namq; rectæ AD, ad partes A, recta AE, quæ adiectæ BD, æqualis ſit; erit tota ED, ſecta in C, biſariam, & in B, non biſariam, quod EA, AC, ipſis DB, BC, æquales ſint. Recta quoq; EB, rectæ AD, æqualis erit, quod EA, ipſi DB, ſit æqualis, & AB, vtriq; communis. [m] Quadrata igitur rectarum EB, BD, hoc eſt, rectarum AD, BD, dupla erunt quadratorum rectarum EC, CB, hoc eſt, rectarum CD, AC. Quod eſt propoſitum.



m 9. sec.

Quod ſi lubeat eandem hanc propoſ. 10. demonſtrare ex ipſa conſtructione, quemadmodum præcedentem 9. oſtendimus, fiet id hoc modo. Producta A D, ad E, vt D E, ſit adiectæ lineæ B D, æqualis, deſcriptoq; quadrato AF, totius lineæ AE, ducãtur per C, B, D, lateribus AG, EF, parallelæ CH, BI, DK, ſecantes ductam diametrum EG, in L, M, N. punctis, per quæ lateribus AE, GF, parallelæ agãtur OP, QR, ST, ſecantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniã igitur ex coroll. 1. propoſ. 4. huius lib. omnia rectangula circa diametrũ EG, quadrata ſunt, [n] eſtq; SN, ipſi AD, æqualis, & OL, ipſi AC, & a N, ipſi CD: erit SK, quadratũ rectæ AD, & DT, quadratũ rectæ DE, ſiue BD, & OH, a, X, quadrata rectarũ AC, CD. Dico quadrata SK, DT, ſimul dupla eſſe quadratorũ OH, a X, ſimul. Quoniã n. quadrata SK, DT, ſuperãt quadrata OH, a X, quadrato DT, & rectãgulis SL, LK: Sũt autẽ quadratũ DT, & rectãgula SL, LK, æqualia quadratis OH, a X, vt mox demonſtrabitur; liquido conſtat, quadrata SK, DT, quadratorum OH, a X, dupla eſſe, cum hæc in illis contineantur bis. Quod autem tria hæc rectangula DT, SL, LK, quadratis OH, a X, æqualia ſint, ita patebit. Rectangulum QL, [o] æquale eſt quadrato OH, ob lineas QO, OG, quæ æquales ſunt; [p] propterea quod QO, ipſi YL, æqualis eſt, & YL, ipſi OG, ob æqualia quadrata YV, OH, æqualium laterum OL, LV. Item [q] S T, ipſi a M, & LI, ipſi YV, & V K, ipſi VZ, & DT, ipſi b Z. Igitur quinq; rectangula QL, SY, LI, VK, DT, hoc eſt, tria rectangula DT, SL, LK, æqualia ſunt quinq; rectangulis OH, a M, Y V, V Z, b Z, hoc eſt, duobus quadratis OH, a X. Quod eſt propoſitum.



n 34. prim.
o 36. prim.
p 34. prim.
q 34. prim.

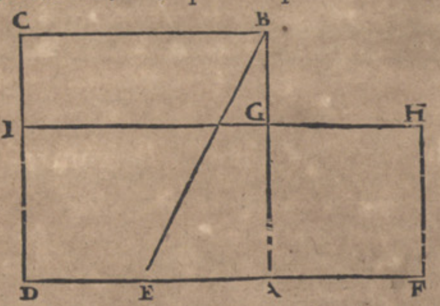
PROBLEMA 1. PROPOSITIO II.

11.

DATAM rectam lineam ſecare, vt comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

Data ſit recta A B, quam ſecare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota A B, & altero eius ſegmento, nempe minori, æquale ſit quadrato reliqui ſegmenti, nimirum maioris. Deſcribatur ex AB, quadratum A C, & diuiſo latere A D, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis ſumatur EF, & ipſi A F, abſcindatur ex recta A B, data æqualis
a 20. prim. AG. Eſt enim AB, maior, quam AF. Nam cum E B, ſit æqualis ipſi E F, ex conſtructione; [a] ſint autem latera AE, AB, maiora latere EB; Erunt quoque rectæ E A, A B, maiores recta EF: ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, maior erit, quam reliqua AF. Dico rectam AB, ſectam eſſe in G, ita vt rectangulum comprehenſum ſub AB, BG, æquale ſit quadrato rectæ AG; adeo vt AG, ſit maius ſegmentum, & B G, minus. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ D F, ſecans CD, in I; Ac per F, ducatur ipſi AG, parallela FH, ſecans H I, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum ſegmenti A G, cum omnia eius quatuor latera ſint æqualia, quippe cum [b] F H, G H, æqualia ſint oppoſitis AG, AF, æqualibus; omneſque anguli eiuſdem recti ob rectum A, vt ad defin. 1. huius libri oſtendimus. Rectangulum quoque CG, comprehenſum erit ſub AB, & ſegmento BG; quod AB, æqualis ſit ipſi B C. Itaque probandum eſt, rectangulum CG, & quadratum A H, æqualia eſſe. Quoniam igitur recta DA, diuiſa eſt bifariam in E, & ei addita in rectum A F; [c] erit rectangulum ſub DF, FA, hoc eſt, rectangulum D H, (cum F H, ſit æqualis ipſi F A;) vna cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc eſt, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis eſt: Eſt autem quadratum rectæ EB, [d] æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum DH, vna cum quadrato rectæ A E, æquale quoque eſt quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo commmuni quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc eſt, quadraro A C. Ablato igitur rurſus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter ſe æqualia. Quod eſt propoſitum. Datam igitur rectam AB, ſecuimus, &c. Quod erat faciendum.

b 34. prim. c 6. ſec. d 47. prim.



S C H O L I V M.

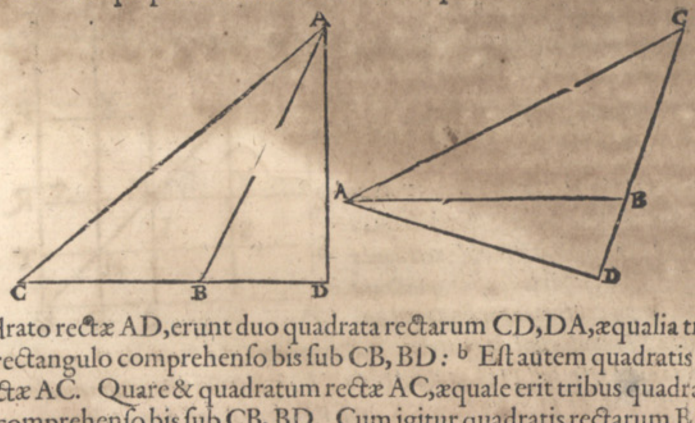
Hoc problema nulla ratione accommodari poteſt numeris. Non enim numerus vllus in duos poteſt numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis ſit quadrato alterius partis, vt demonſtrabimus ad propoſ. 14. lib. 9. Vbi etiã decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonſtrabimus. Clariuſq; ad propoſ. 29. eiuſdem lib. 9. oſtendemus, problema hoc 11. nulla ratione poſſe numeris accommodari.

Praxis autem huiuſce problematis non eſt difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debet maius ſegmentum lineæ datæ A B, excitata perpendiculari AD, ipſi datæ lineæ AB, æquali, eaq; ſecta in E, bifariam; ſi ad interuallum EB, reſecetur EA, producta in F, erit AF, maiori ſegmento AG, æqualis, vt demonſtratum eſt.

xij. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis, quæ fiunt à laterib. obtuſum angulum comprehendẽtibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exterius linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.

Triangulum ABC, habeat angulum ABC, obtuſum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtuſi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuſo angulo opponitur, maius eſſe quadratis laterum A B, B C, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, B D, hoc eſt, quadratum lateris A C, æquale eſſe duobus quadratis laterum AB, BC, vna cum rectangulo ſub CB, BD, bis comprehenſo. Cum enim recta C D, diuiſa ſit in B,
a 4. ſec. vtcunque [a] erit quadratum rectæ C D, æquale duobus quadratis rectarum C B, BD, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum C B, B D, D A, &
b 47. prim rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD: [b] Eſt autem quadratis rectarum C D, D A, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, D A, & rectangulo
c 47. prim comprehenſo bis ſub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum B D, D A, [c] æquale ſit quadratum rectæ A B; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum C B, B A, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. Quod eſt propoſitum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.

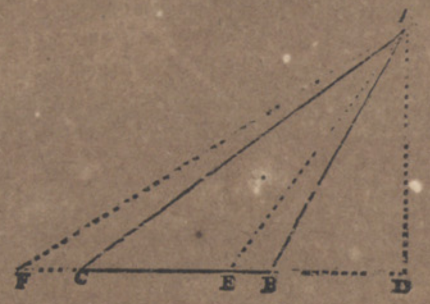


S C H O L I V M.

Iam hoc loco demonſtrauit Euclides, quanto maius ſit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti, quadratis aliorum duorum laterum: In ſequenti autem propoſ. 13. oſtendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppoſiti minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium ſcholij propoſ. 47. lib. 1. monuimus.

Quoniam

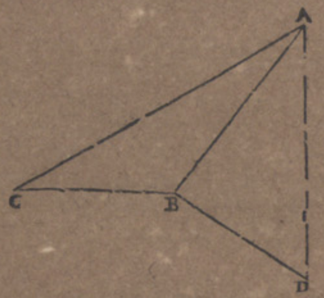
…oniam vero aſſumpſit Euclides, perpendicularem ductam ex … in latus CB, ad partes anguli obtuſi protractum, ideo paucis id dem… …ſtrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtuſus, & latus CB, ad partes B. protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum, cuiuſmodi eſt recta AD. Si enim caderet intra triangulũ, qualis eſt recta AE, eſſent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt contra propoſ. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC. productum ad partes C, qualis eſt recta AF, eſſent rurſus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt abſurdum.



SED & hoc theorema verum eſt.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit.

In triangulo ABC, quadratum lateris AC, maius ſit quadratis laterum AB, BC. Dico angulum B, quem latus AC, ſubtendit, eſſe obtuſum. Ducatur enim ex B, ad AB, perpendicularis BD, lineæ BC, æqualis, iungaturq; recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD,[d] æquale eſt quadratis ex AB, BD, hoc eſt, ex AB, BC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC; Erit quadratum ex AD, minus quadrato ex AC, & idcirco recta AD, minor quam recta AC. Itaq; quia latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, vtrumq; vtriq;, & baſis AC, maior eſt baſe AD:[e] Erit angulus ABC, maior angulo ABD: Sed ABD, rectus eſt. Igitur ABC, recto maior, & obtuſus erit. Quod eſt propoſitum.



d 47. prim.

e 25. primi.

Quin etiam conuerſum huius propoſ. 12. demonſtrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: Demiſſa hæc linea ad latus product… perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus.

In triangulo ABC, ad latus CB. protractum demittatur ex oppoſito angulo A, recta AD, ſitq; quadratum lateris AC, maius, quam quadrata laterum AB, BC, rectangulo ſub CB, BD, bis comprehenſo. Dico AD ad CD, eſſe perpendicularem, & angulum ABC, obtuſum. Si enim AD, perpendicularis non eſt, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quam dico cadere neceſſario in CB. productam ad partes B. Cadat enim ſi fieri poteſt, in B, ita vt AB ſit ad CB. perpendicularis. Erit igitur[f] quadratum ex AC, æquale quadratis ex AB, BC, quod eſt abſurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB. demiſſa, in punctum B. f 47. prim.

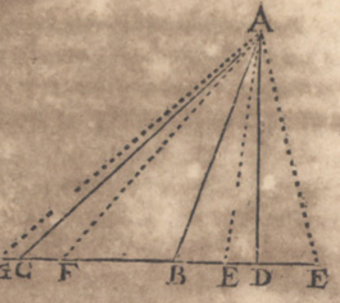
Cadat deinde, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A. demiſſa, in latus BC, qualis eſt AF. Erit igitur[g] quadratum ex AC, æquale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC. quod eſt abſurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quod recta AB, recto angulo AFB, oppoſita[h] maior ſit quam AF, & BC, tota maior parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demiſſa non cadit in CB. g 47. prim. h 19. prim.

Cadat tertio, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, ad latus BC, demiſſa, in C, ita vt AC. ſit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex AB,[i] æquale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC. minus erit quadrato ex AB, & propterea multo minus quadratis ex AB, BC. ꝙ eſt abſurdũ, cũ ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demiſſa, nõ cadit in C. i 47. primi.

Cadat quarto, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, in BC. protractam ad partes C, qualis eſt AG. Quoniam igitur duo anguli AGC, ACG,[k] minores ſunt duobus rectis, eſtq; AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde ACB, obtuſus. Recta ergo AB,[l] maior erit quam AC, & propterea quadratum ex AG, minus erit quadrato ex AB, ac proinde multo minus quadratis ex AB, BC: ſed & maius ponitur, quod eſt abſurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demiſſa ad CB, non cadat in B, neq; inter CB, neq; in C, neq; extra C, cadet extra B, qualis eſt AD, vt demonſtrabitur: Quare angulus ABE,[m] acutus erit, & ABC, obtuſus. Quod ſecundo loco proponitur, demonſtrandum. k 17. primi. l 19. primi. m 17. pri.

Cæterũ angulũ ABC, eſſe obtuſum, ſi quadratũ rectæ AC, maius ſit quadratis rectarum AB, BC, facilius demonſtrauimus in proximo theoremate huius ſcholij. Ex quo fit, (vt ad initium huius ſcholij oſtendimus) perpendicularem ex A, ad CB, demiſſam cadere extra triangulum ABC, ad partes anguli obtuſi.

Quod autem AD, ſit ad CB, perpendicularis, ita demonſtrabimus. Si non eſt, ducatur AE, ad CB, perpendicularis cadens vltra B, vt oſtendimus. Quoniam igitur angulus ABC, oſtenſus eſt obtuſus, erit quadratum rectæ AC, maius quam quadrata rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BE: Sed & quadratum eiuſdem rectæ AC, maius ponitur, quàm quadrata earundem rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BD. Igitur quadrata ex AB, BC, vna cum rectangulo ſub CB, BD comprehenſo æqualia erunt quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo ſub CB, BE, bis comprehenſo: & ablatis quadratis communibus rectarum AB, BC, rectangulum bis ſub CB, BE, comprehenſum æquale erit rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BD, ac proinde & rectangulum ſub CB, BE, ſemel comprehenſum æquale erit rectangulo ſemel ſub CB, BD, comprehenſo, & recta BE, rectæ BD, æqualis, pars toti, vel totum parti. Quod eſt abſurdum. Eſt ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia. Quod eſt propoſitum.



Iam vero, quoniam neq; hoc duodecimum theorema, neq; ſequens 13. per numeros, quando libet, explicari poteſt, quod poſito vno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumq; partes à perpendicularibus lineis factæ plerumq; numeris exprimi nequeant, ſed ſint lineæ illi lateri incommenſurabiles: quod in præcedentibus propoſitionibus non accidebat, quippe cum, poſita diuiſa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes ſtatui poſſint pro libito ei commenſurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum eſt, præſcribemus regulas quaſdam, quibus Geometricè

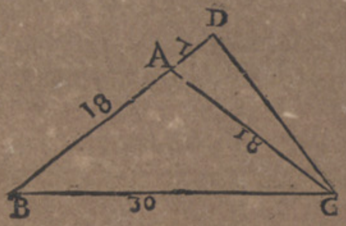
trian-

triangula amblygonia, atq; oxygonia (quotquot quis optauerit) conſtituantur eiuſmodi, vt omnia latera, parteſq; [...] lineis perpendicularibus factæ ſint lineæ commenſurabiles : atq; adeo veritas vtriuſq; theorematis in numeris quoq; app[...] Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in ſcholio ſequentis propoſitionis de Oxygonijs. Quoniam antem amblyg[o]nium triangulum eſt vel Iſoſceles, in quo tertium latus ſemper

m 9. prim. *maius eſt, quod obtuſo angulo opponatur, vel ſcalenum, (æquilaterum enim eſſe non poteſt, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus,) & [in] ſcaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo etiam ſegmentum vtriuslibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum eiſdem lateribus commenſurabile ſit. Secunda conſtituemus triangulum amblygonium ſcalenum laterum etiam commenſurabilium, & in quo ſegmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum lateribus eiſdem ſit commenſurabile. Tertia deniq; triangulum amblygonium ſcalenum proponemus commenſurabilium laterum, & in quo ſegmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtuſum angulum eiſdem lateribus commenſurabile exiſtat.*

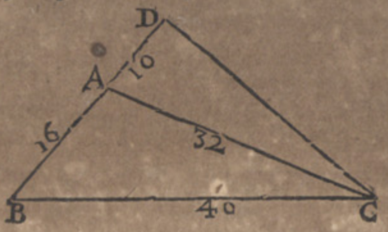
REGVLA I.

Ad conſtruendum triangulum amblygonium Iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo ſegmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtuſum, eiſdem lateribus quoq; ſit commenſurabile; ſtatuatur ſegmētum exterius tot partium æqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde vtrumuis laterum æqualium ponatur dicti ſegmenti duplum ſuperquadrupartiens ſeptimas, maximum autem obtuſo angulo oppoſitum eiuſdem ſegmenti quadruplum ſuperbipartiens ſeptimas, vt in triangulo ABC, ducta ſit CD, ad BA, latus productum. Si igitur AD, conſtituatur partium 7. & vtrumuis laterum AB, AC, partium 18. qui numerus habetur, ſi duplicaueris 7. addiderisq; $\frac{4}{7}$ ipſius. Latus vero BC, partium 30. quem numerum habebis, ſi quadruplicaueris 7. adiunxerisq; $\frac{2}{7}$ ipſius; erit triangulum ABC, quod quæritur. In hoc enim triangulo quadratum lateris BC, eſt 900. cui æqualia ſunt quadrata laterum AB, AC, nempe 324. 324. vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub AB, AD, hoc eſt, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoq; ſummam 900. Quamobrem, vt in hoc ſcholio oſtendimus, erit ducta CD, ad BD, perpendicularis, & angulus BAC, obtuſus. Quod ſi ſingulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commenſurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt ſi inue[nt]os numeros duplices, efficies AD, 14. & tam AB, quam AC, 36. at BC, 60. Propoſitum quoq; triangulum reperies, ſtatuendo ſegmentum exterius AD, quotcunq; partium, etiamſi à 7. non numerentur : ſed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem deniq; triangulum offendes. ſtatuendo latus quodcunq;, à quo incipire vis, quotlibet partium, dummodo maximum fiat ſegmenti AD, quadruplum ſuperbipartiens ſeptimas, vtrumuis autem æqualium ſit eiuſdem ſegmenti duplum ſuperquadrupartiens ſeptimas.



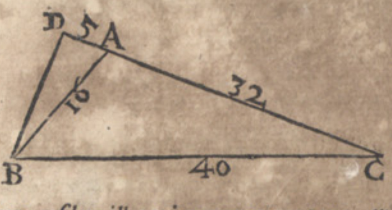
REGVLA II.

Vt efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commenſurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat ſegmentum exterius commenſurabile etiam lateribus : ſtatuatur exterius ſegmentum quotuis partium æqualium à 5. numeratarum, vt 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus ſi addas $\frac{3}{5}$ habebis minimum latus. Si vero eaſdem partes dicti ſegmenti triplices, addaſq; $\frac{1}{5}$ vel ſi partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si deniq; partes eaſdem dicti ſegmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt ſi in appoſito triangulo ſegmentum AD, conſtituatur 10. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Vbi etiam vides, quadrato lateris BC, quod eſt 1600. æqualia eſſe quadrata laterū AB, AC, nimirum 256. 1024. vna cum rectangulo bis ſub AB, AD, comprehenſo, id eſt, cum 160. 160. Ex quo fit, CD, eſſe ad BD, perpendicularem, & angulum BAC, obtuſum, vt ſupra in hoc ſcholio oſtendimus. Iam ſi ſingulos numeros inuētos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præſtabunt. Vt ſi eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, ſi exterius ſegmentum AD, ſtatuas partium 20. quæ duplam quoq; proportionem habent ad priores partes 10. Sic ſi eoſdem numeros triplices, efficies ſegmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96. BC, 120. & ſic deinceps.



REGVLA III.

Pro triangulo amblygonio Scaleno commenſurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoq; ſegmentum lateribus trianguli commenſurabile; accipiatur rurſum exterius ſegmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, vt in præcedenti regula. Quas ſi triplices, addaſq; $\frac{1}{5}$ produces minimum latus : Si vero eaſdem multiplices per 6. adiungaſq; $\frac{2}{5}$ habebis latus medium : Si deniq; eaſdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt ſi in triangulo propoſito ſegmentum AD, fiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atq; ita quadrato lateris BC, nimirum 1600. æqualia exiſtent quadrata laterum AB, AC, nempe 256. 1024. vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub AC, AD, hoc eſt, cum 160. 160. Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, anguluſq; BAC, obtuſus, vt in hoc ſcholio ſupra demonſtrauimus. Quod ſi numeros inuentos per quemuis numerū multiplices, inuēies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc propoſ. 12. examinabitur. Vt ſi eos quadruplices, efficies ſegmentum exterius AD, partium 20. latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si vero eoſdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit ſegmentum exterius AD, 50. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.



Caue autem, exiſtimes, poſito latere aliquo trianguli amblygonij, vel ſegmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo ſeruare neceſſario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus : adeo vt cognito vno, reliqua

ſiqua etiam cognoſcantur. Hoc enim falſum eſt, cum illa variari poßint mille modis, & alias atq; alias proportiones habere. Itaq; ex tribus præſcriptis regulis ſolum colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones ſeruent, conſtitui poſſe triangulum amblygonium, vna cum ſegmento exteriore, in quo veritas propoſitionis 12. poßit examinari.

THEOR. 12. PROPOS. 13. xiij.

IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente minus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.



SINT omnes anguli trianguli ABC, acuti & ex A, perpendicularis AD, demiſſa cadat in latus BC. Dico quadratum lateris AB, quod acuto angulo ACB, opponitur, minus eſſe quadratis laterum AC, CB, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, hoc eſt, quadratum lateris AB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, æquale eſſe duobus quadratis laterum AC, CB. Cum enim recta BC, diuiſa ſit in D, vtcunque, erunt quadrata rectarum BC, CD,[a] æqualia rectangulo cõprehenſo bis ſub BC, CD, & quadrato rectæ BD. Addito ergo cõmuni quadrato rectæ DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA: Duobus autem quadratis rectarum CD, DA,[b] æquale eſt quadratum rectæ CA. Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cum ergo duobus quadratis rectarum BD, DA,[c] æquale ſit quadratum rectæ AB; erunt duo quadrata rectarum BC, CA, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, & quadrato rectæ AB, quod eſt propoſitum. Eodem modo oſtendetur, quadrata rectarum AB, BC, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BD, & quadrato rectæ AC, hoc eſt, quadratum lateris AC, minus eſſe quadratis laterum AB, BC, rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. In oxygoniis ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 7. ſec.
b 47. prim.
c 47. prim.

SCHOLIVM.

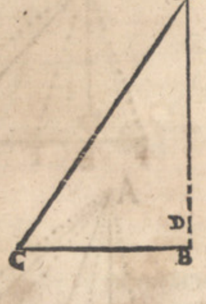
Itaq; ex tribus propoſitionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atq; 13. huius lib. cognoſcimus, quantum ſit quadratum cuiuſuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an ſit illis æquale, an maius, minuſue, & quãto maius ſit aut minus, prout videlicet angulus aſſumpto lateri oppoſitus fuerit rectus, vel obtuſus, aut acutus.



Quamuis autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygoniis, quæ ſcilicet omnes angulos habent acutos; idem tamen verum etiam eſt in triangulis, rectangulis, & amblygoniis, vt conſtat ex poſterioribus duobus triangulis in ſchemate propoſitis. Sunt enim in hiſce triangulis neceſſario duo reliqui anguli acuti, vt perſpicue colligi poteſt ex propoſ. 17. vel 32. primi lib. Hoc ſolum obſeruandum eſt in triangulis, rectangulis, & amblygoniis, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuſo, in oxygoniis vero à quolibet. Ita enim ſemper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonſtratione aſſumpſit. Quod quidem facile demonſtrabitur hac ratione. Sint in triangulo ABC, duo anguli ABC, ACB, acuti, angulus vero BAC, rectus, vel obtuſus, acutusue. Dico perpendicularẽ ex A, demiſſam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in CB, protractam ad partes B, cuiuſmodi eſt recta AE, eſſet in triangulo ABE, angulus exterior ABC, acutus,[d] maior interno & oppoſito recto AEB, quod eſt abſurdum. Si vero caderet extra BC, productam ad partes C, qualis eſt recta AF, in idem incideremus abſurdum, vt manifeſtum eſt.

d 16. prim.

Idem hoc theorema in triangulis, rectangulis, & obtuſangulis demonſtrat Federicus Commandinus, etiamſi perpendicularis AD, non cadat in latus BC, ſed vel eadem ſit, quæ latus AB, vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtuſangulis accidit, ceu in ſcholio propoſ. præcedentis demonſtrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuſo, ſed ab altero acutorum demittitur.

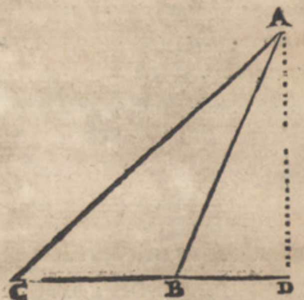


Sit triangulum rectangulum ABC, cuius angulus B, ſit rectus; & ex angulo A, acuto ad BC, perpendicularis ducatur AD, quæ eadem erit, quæ latus AB, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, ſubtendentis, minus eſſe, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo bis comprehenſo ſub latere CB, in quod perpendicularis cadit, & ſub linea CD, quæ interijcitur inter perpendicularem AD, & acutum angulum C. Cum enim quadrata ex AB, CB,[c] æqualia ſint quadrato ex AC; addito communi quadrato ex CB, erunt tria quadrata, nempe quod ex AB, & duplum eius, quod ex CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CB, idẽ eſt, quod rectangulum ſub CB, CD. Igitur & quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis ſub CB, CD, æquale eſt quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex AB, minus eſt, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis ſub CB, CD. Quod eſt propoſitum.

c 47. prim.

Rurſus ſit triangulum obtuſangulum ABC, cuius angulus B, obtuſus, & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, ſubtendentis minus eſſe, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehenſo bis ſub CB, & CD. Quoniam enim quadrata ex AD, CD,

f 47. primi.
g 4. ſec.
h 47. prim.
i 3. ſec.



[f] æqualia ſunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, communi, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CD,[g] æquale eſt quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis ſub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, vna cum quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis ſub CB, BD, æqualia ſunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, æqualia [h] quadrato ex AB. Quare quadratum quoque ex AB, & duplum quadrati ex CB, vna cum rectangulo bis ſub CB, BD, æqualia ſunt quadratis ex AC, CB. Atqui quadrato ex CB, vna cum rectangulo ſub CB, BD, [i] æquale eſt rectangulum ſub CD, CB. Ac propterea duplo quadrati ex CB, vna cum rectangulo bis ſub CB, BD; æquale eſt rectangulum bis ſub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis ſub CB, CD; æquale eſt quadratis ex AC, CB. Ac proinde quadratum ex AB, minus eſt, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis ſub CB, CD. Quod eſt propoſitum.

k 12. ſec.
l 3. ſec.

Aliter, & breuius. Quoniam quadratum ex AC, [k] maius eſt, quam quadrata ex AB, BC, rectangulo bis ſub CB, BD, comprehenſo, hoc eſt, quadratum ex AC, æquale eſt quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo ſub CB, BD, bis comprehenſo; erit quadratum ex AB, minus, quam quadratum ex AC, quadrato ex BC, & rectangulo ſub CB, BD, bis: Ac proinde ſi quadrato ex AC, addatur quadratum ex BC, erit quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, BC, quadrato ex BC, bis ſumpto, & rectangulo bis ſub CB, BD, comprehenſo. Cum ergo quadrato ex BC, vna cum rectangulo ſub CB, BD, contento, [l] æquale ſit rectangulum ſub CB, CD, contentum; erit quoque quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, CB, rectangulo comprehenſo bis ſub CB, CD. Quod eſt propoſitum.

In ſcholio quodam antiquo demonſtratur ſequens theorema, inſtar illius, quod nos in ſcholio præcedentis propoſ. ſecundo loco demonſtrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, acutus erit.

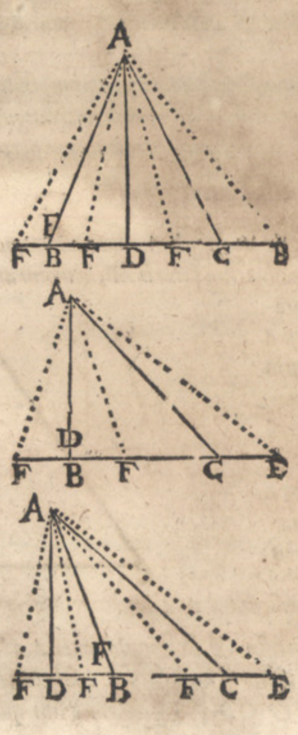
m 47. pri.
n 25. prim.

In triangulo ABC, quadratum lateris AB, minus ſit, quam quadrata laterum AC, CB. Dico angulum C, quem dictum latus ſubtendit, eſſe acutum. Ducatur enim ex C, ad AC, perpendicularis CD, lineæ CB, æqualis, iungaturque recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, [m] æquale eſt quadratis ex AC, CD, hoc eſt, ex AC, CB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB; Erit quadratum ex AD, maius quadrato ex AB; & ideo recta AD, maior quam recta AB. Itaque quia duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqulia ſunt duobus lateribus AC, CB, trianguli ACB, vtrumque vtrique, & baſis AD; maior baſe AB; [n] Erit angulus ACD, maior angulo ACB: Sed ACD, rectus eſt, ex conſtructione. Ergo ACB, recto minor, & acutus erit.



Sed & conuerſum huius propoſ. 13. oſtendemus, nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hæc demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus.



o 47. prim.
p 47. prim.

IN triangulo ABC, ad latus BC, demittatur ex angulo oppoſito A, recta AD; ſitque quadratum lateris AB, minus quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo ſub BC, CD, bis comprehenſo. Dico AD, eſſe perpendicularem ad BC, & angulum ACB, acutum. Si namque AD, perpendicularis non eſt, ducatur ex A, ad BC, perpendicularis, quam dico neceſſario cadere citra punctum C, verſus B, hoc eſt, vel in latus BC, vel in punctum B, vel in latus BC, verſus B, productum. Cadat enim, ſi fieri poteſt, in C, ita vt AC, ſit ad BC, perpendicularis. Erit igitur [o] quadratum ex AB, æquale quadratis ex AC, CB. Quod eſt abſurdum, cum minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, deducta ad BC, in punctum C.

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, demiſſa vltra C, in E, qualis eſt AE. Erit igitur [p] quadra-

tum

tum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB. Igitur & quadrata ex AE, EB, minora erunt quadratis ex AC, CB. Cum ergo quadratum ex AC, [q] æquale ſit quadratis ex AE, EC; erunt quoq; quadrata ex AE, EB, minora quadratis ex AE, EC, CB: Et ablato communi quadrato rectæ AE, erit reliquum quadratum ex EB, minus quoq; quadratis ex EC, CB. Quod eſt abſurdum. Cum enim quadratum ex EB, [r] æquale ſit quadratis ex EC, CB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub EC, CB, maius erit quadratum ex EB, quadratis ex EC, CB. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neq; in C, cadit, vt oſtendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis eſt AD, vt demonſtrabitur, ac propterea [s] angulus ACB, acutus erit. Quod ſecundo loco proponitur demonſtrandum.

q 47. prim. — r 4. ſec. — s 17. primi.

Cæterum angulum ACB, eſſe acutum, ſi quadratum rectæ AB, minus ſit quadratis rectarũ AC, CB, facilius demonſtrauimus in proximo antecedente theoremate huius ſcholij. Ex quo fit, (quemadmodum in coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. oſtenſum eſt) perpendicularem ex A, ad BC, demiſſam cadere citra angulum ACB, acutum verſus B.

Quod autem AD, ſit ad BC, perpendicularis, ita oſtendemus. Si non eſt, ſit AF, ad BC, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum eſt, vbicunq; hoc contingat, ſiue intra triangulum, ſiue in punctum B, ſiue extra triangulum. (In ſecundo tantum triangulo non dicet aduerſarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem eſſet, quæ AD, quod ille negat.) Quia ergo angulus ACB, oſtenſus fuit acutus, [t] erit quadratum ex AB, minus, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CF, hoc eſt, quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CF, æquale eſt quadratis ex AC, CB: Ponitur autem quadratum idem ex AB, minus quoq;, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, hoc eſt, quadratum idem ex AB, vna cum rectangulo bis contento ſub BC, CD, æquale ponitur quadratis ex AC, CB. Igitur quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, æquale erit quadrato eidem ex AB, vna cum rectangulo comprehenſo bis ſub BC, CF: Et ablato communi quadrato rectæ AB, rectangulum ſub BC, CD, bis comprehenſum æquale erit rectangulo bis ſub BC, CF, comprehenſo: ac proinde & rectangulum ſemel comprehenſum ſub BC, CD, æquale erit rectangulo ſemel comprehenſo ſub BC, CF, ideoq; & rectæ CD, CF, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Eſt igitur AD, ad BC, perpendicularis, & non alia. Quod eſt propoſitum.

t 13. ſec.

Quemadmodum autem in ſcholio ſuperioris propoſitionis triangula amblygonia conſtruximus laterum, & linearum commenſurabilium, in quibus per numeros veritas propoſitionis 12. examinari poſſit, ita hoc loco oxygonia triangula conſtituemus laterum, atq; linearum commenſurabilium, in quibus huius 13. propoſ. veritas explicetur. Quia vero triangulum oxygonium eſt vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam ſeptem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Iſoſcele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, ſiue maius illud ſit, ſiue minus vtrouis æqualium. Tertia de Iſoſcele, cuius tertium latus maius eſt, perpendicularisq; in alterutrum æqualium laterum cadit. Quarta de Iſoſcele, cuius latus tertium minus eſt, & perpendicularis rurſus in alterutrum laterum æqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima deniq; de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli ſupra baſin ſunt acuti, ſiue oppoſitus angulus acutus etiam ſit, ſiue non. De his enim propoſitio etiam intelligenda eſt, vt diximus. Quo pacto autem triangala, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipſa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque poſſint accommodari, docebimus ad finem regularum.

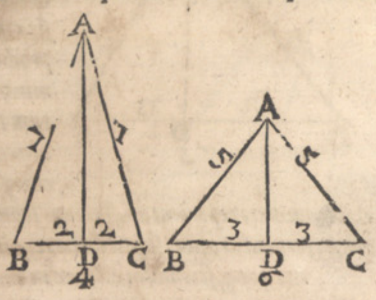
REGVLA I.

Si quodlibet latus trianguli æquilateri ſtatuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter ſe, & ſegmentis à linea perpendiculari factis commenſurabilia. Vt in triangulo æquilatero ABC, diuidet perpendicularis AD, oppoſitum latus BC, bifariam, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 1. demonſtrauimus. Quam ob rem poſito quolibet latere 8. erunt ſegmenta BD, CD, 4. 4. Vbi vides quadratũ lateris AB, angulo acuto C, oppoſiti, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti ſunt, ex coroll. 3. propoſ. 17. lib. 1.) hoc eſt, 64. vna cum rectangulo bis contento ſub BC, CD, id eſt, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum AC, CB, nempe 64. 64.



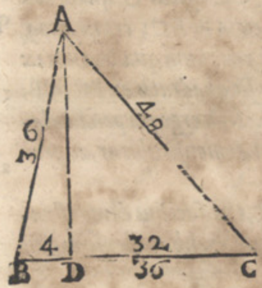
REGVLA II.

Si vtrumq; laterum æqualium trianguli Iſoſcelis ſtatuatur quotcunq; partium æqualium, tertium autem quotlibet parium numero partium, vt fractiones vitentur, ſiue pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet æqualium, ſiue plures, dummodo tot non ſint, quot in vtroq; ſimul, aut plures; quia ſic non poſſet fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non eſſent maiora tertio latere, ſed vel æqualia, vel minora, quod propoſitioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquam latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter ſe commenſurabiles. Vt in priori horum Iſoſcelium vtrumuis latus AB, AC, ſtatuatur 7. & BC, 4. In poſteriori autem vtrumlibet AB, AC, 5. & BC, 6. Cum ergo perpendicularis AD, diuidat baſim BC, bifariam, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 1. erunt ſegmenta BD, CD, in priori quidẽ triangulo 2. 2. in poſteriori vero 3. 3. Vbi etiam perſpicuum eſt, quadratum lateris AB, angulo acuto C, oppoſiti, (vterq; enim angulus B, C, acutus eſt, ex coroll. 3. propoſ. 17. lib. 1.) vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, æquale eſſe quadratis ſimul laterum AC, CB, &c.



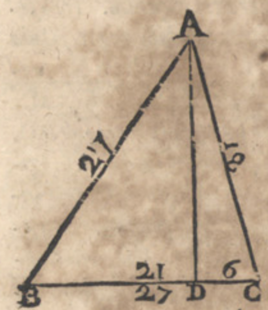
REGVLA III.

In triangulo Iſoſcele; in quo tertium latus maius eſt, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit ſegmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Si igitur minus ſegmentum ſtatuas quotuis partium, eaſq; per 8. multiplices, habebis ſegmentum maius: Si vero eaſdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo deniq; ſegmenta ſimul addita conſlabunt vtrumq; laterum æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris



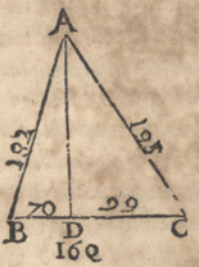
ſegmenti per 9. Vt ſi in Iſoſcele ABC, ſegmentum minus BD, ponatur 4. erit maius CD, 32. latus vero AC, 48. & vtrumq; latus AB, BC, 36. 36. Quadratum igitur lateris AB, angulo acuto C, oppoſiti, nempe 1296. vna cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id eſt, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC, CB, nempe 2304. 1296. Ita quoq; quadratum ex AC, nimirum 2304. vna cum eo, quod bis fit ex CB, in BD, hoc eſt, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum AB BC, nimirum ex 1296. 1296. In huiuſmodi ergo triangulo ſegmenta inæqualia proportionem habent octuplam: vtrumuis vero æqualium laterum ad minus ſegmentum proportionem habet noncuplam: Tertium deniq; latus maius ad idem ſegmentum minus habet proportionem duodecuplam.

REGVLA IV.



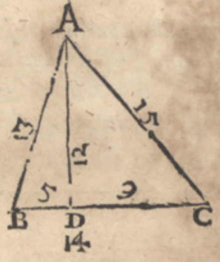
In triangulo Iſoſcele, cuius tertium latus minus eſt & perpendicularis, rurſum in alterum æqualium laterum cadit, erit ſegmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propoſ. 47. lib. 1. oſtenſum eſt. Quod ſegmentum ſi ſtatuas quotuis partium numero parium, vt fractiones fugiantur, easq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adijcias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius ſegmentum: Si vero eaſdem partes minoris ſegmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumq; deniq; æqualium laterum componetur ex duobus ſegmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris ſegmenti per 9. producetur. Vt ſi in Iſoſcele ABC, minus ſegmentum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18. atq; tam AB, quàm BC, 27. Quadratum ergo lateris AB, angulo acuto C, oppoſiti nimirum 729. vna cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id eſt, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum AC, CB, nempe ex 324. 729. &c.

REGVLA V.



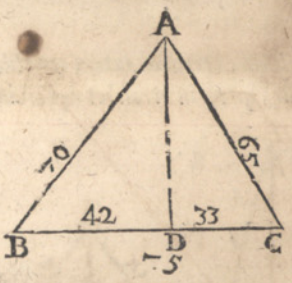
In Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit ſegmentum baſis iuxta medium latus, minus, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtratum eſt. Quod ſegmentum ſi conſtituatur tot partium æqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140. vel 210. &c. eisq; addantur earum $\frac{29}{70}$ confectum erit ſegmentum maius, & ex additione partium horum ſegmentorum gignetur minimum latus. Si vero partes minoris ſegmenti duplicentur, & producto adij[illegible]tur, $\frac{42}{70}$ hoc eſt, $\frac{1}{5}$ earundem partium, procreabitur medium latus. Si deniq; partes eiuſdem minoris ſegmenti duplicẽtur, productoq; $\frac{55}{70}$ id eſt, $\frac{11}{14}$ earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in ſcaleno ABC, ſi minus ſegmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus BC, 169. Mediũ autem latus AB, 182. & maximum AC, 195. Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppoſiti, hoc eſt, 33124. vna cum numero, qui bis fit ex BC, in CD, id eſt, cum 16731. 16731. conficit numerum 66586. æqualem duobus ſimul quadratis 38025. 28561. laterum AC, CB, &c.

REGVLA VI.



In triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex ijs, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus, minus ſegmentum minimo lateri adiacens. Quod ſegmentum ſi ſtatuatur tot æqualium partiũ, vt à 5. numerentur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eisq; addantur $\frac{4}{5}$ confectum erit ſegmentum maius, & partes horum ſegmentorum in vnam ſummam collectæ, component medium latus. Si autem partibus minoris ſegmenti duplicatis adijciantur earundem $\frac{3}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris ſegmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno ABC, ſi minus ſegmentum BD, fiat 5. erit ſegmentum maius CD, 9. & totum latus BC, medium, 14. Minimum vero AB, 13. & maximum AC, 15. &c.

REGVLA VII.



In Scaleno deniq; triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus ſegmentum iuxta latus minimum ex ijs, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. ſcripſimus. Si ergo pro minori ſegmento ſumantur 33. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eiq; addantur $\frac{9}{33}$ hoc eſt, $\frac{3}{11}$. fiet maius ſegmentum: quæ duo ſegmenta ſimul compoſita maximum latus offerent. Si vero numero minoris ſegmenti duplicato adijciantur $\frac{4}{33}$ producetur medium latus. Si deniq; eidem minori ſegmento apponantur $\frac{32}{33}$. exhibebitur minimum latus. Vt ſi in Scaleno ABC, minus ſegmentum CD, ſit 33. erit maius ſegmentum BD, 42. totumq; latus maximum BC, 75. & medium AB, 70. & minimum AC, 65. &c.

Quod ſi ſingulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunq; is ſit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Iidem etiam numeri reperientur, ſi minus ſegmentum, vel maius, vel quodcunq; latus ſtatuatur quotlibet partium; ſi modo proportiones ſeruentur, quas ſupra dictis regulis expreſſimus.

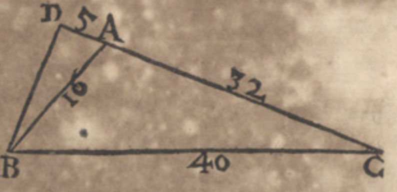
Hic quoq; ſciendum eſt, non in omni triangulo oxygonio proportiones præſcriptas reperiri inter latera, cum mille modis poſſint variari eorum proportiones. Neq; vero hoc regulæ illæ docent, ſed vſus earum in eo ſolum conſiſtit, vt ſeruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari poſſint, in quibus propoſitio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

Iam vero ſi perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum eſt minus eſſe duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita v. triangulum propoſitum ſit rectangulum, quærendi ſunt tres numeri pro lateribus, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſcripſimus. Vt in figura regulæ 6. ſi in triangulo ABD, minimum latus BD, ponatur 5. erit AD, 12. & AB, 13. Vbi cernis quadratum lateris AD, acuto angulo B, oppoſiti, nempe 144. vna cum eo, quod fit bis ex

BD,

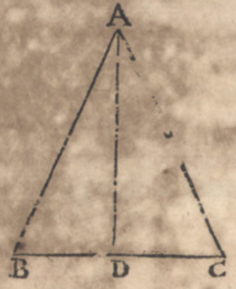
BD,in BD,hoc eſt,cum 25.25.efficere 194.quantum videlicet conficiūt duo quadrata ſimul ex AB,BD,nimirum 169.25.Eadem ratione, ſi minimum latus BD,ſtatuatur partium 6.erit AD,8.& AB,10. Vbi etiam vides, quadratum lateris AD, acuto angulo B,ſubtenſi,nimirum 64. vna cum eo,quod fit ex BD,in BD,hoc eſt,cum 36.36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum AB, BD,nimirum 100.36.Ita quoq; cernis, quadratum numerum lateris BD, acuto angulo A,oppoſiti,hoc eſt,36.vna cum eo,quod fit ex AD,in AD,bis,id eſt,cum 64. 64. efficere 164. quantum ſcilicet conficiunt duo numeri quadrati ſimul laterum AB,AD,nimirum 100.& 64. Deniq; ſi in alio triangulo ACD,minimum latus CD, ponas 6.reperies ex ijs, quæ ad propoſ. 47.lib.1.ſcripſimus,AD,40.& AC,41. Vbi manifeſtum eſt,quadratum numerum lateris AD, angulo acuto oppoſiti,nimirum 1600.vna cum numero,qui fit ex CD,in CD,bis,id eſt, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis eſt quadratis numeris duorum laterum AC, CD, hoc eſt,duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoq; ſummam 1762. Quod ſi minimum latus CD,facias 7. comperies AD,24. & AC,25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris CD,angulo acuto A,ſubtenſi,id eſt,49.vna cum numero,qui bis producitur ex AD,in AD, hoc eſt, cum 576.576. facit 1201. quantum ſcilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum AC,AD;hoc eſt,625.576.

At ſi perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum ſit obtuſangulum, quærendum erit ſegmentum exterius,vna cum lateribus, vt in tribus regulis ſcholij præcedentis propoſitionis docuimus. Segmentum namq; exterius cum latere producto,dabit totum ſegmentum inter acutum angulum aſſumptū & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3.ſcholij antecedentis propoſitionis,erit ſegmentum totum CD,inter angulum acutum C,& perpendicularem BD, cadentem extra triangulum,37. Vbi perſpicuum eſt, quadratum lateris AB, angulo C,acuto oppoſiti,hoc eſt,256.vna cum rectangulo ſub AC,CD, comprehenſo bis,id eſt,cum 1184.1184.componere numerum 2624.qui æqualis eſt duobus quadratis ſimul laterum BC, AC, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024.&c.

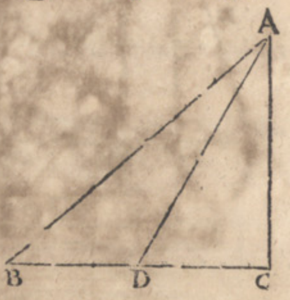


Neq; vero alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino ſequens etiam theorema demonſtrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppoſitum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium ſimul dupla duorum quadratorum ſimul ſumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere deſcribitur.



In triangulo ABC,recta AD,ſecet latus BC,bifariam in D.Dico quadrata ex AB,AC; dupla eſſe quadratorū ex AD,BD. Demittatur enim ex A, ad BC, perpendicularis, quæ primum rectæ AD,congruat,ac proinde triangulum ABC,æquilaterum ſit,vel Iſoſceles, vt ad propoſ.26.lib.1.demonſtrauimus. [u] *Quoniam igitur tam quadratum ex AB, æquale eſt quadratis ex AD, DB, quam quadratum ex AC, quadratis ex AD,DC;erunt duo quadrata ex* u 47.prim. *AB,AC,æqualia quadrato ex AD,bis ſumpto,vna cum quadratis ex DB,DC.Cum ergo quadrata ex DB,DC,æqualia ſint,ſi auferantur duo quadrata ex AD, DC, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum,nimirum quadrati ex AD,bis ſumpti,& quadratorum ex DB, DC.Quare duo quadrata ex AB,AC,dupla ſunt duorum quadratorum ex AD,DB. Quod eſt propoſitum. Quod clarius ita oſtendetur.* [x] *Quoniam quadratum ex AB,duobus quadratis* x 47.pri. *ex AD,DB,æquale eſt: Sunt autem duo quadrata ex AB, AC, quadrati ex AB, dupla, ob æqualitatem linearum AB,AC;erunt quoq; quadrata ex AB,AC,dupla quadratorum ex AD, DB. Quod demonſtrandum erat.*



Congruat deinde perpendicularis AC, lateri AC. Et quia quadratum ex BC, quadruplum eſt tam quadrati ex BD, quam quadrati ex DC, vt in ſcholio propoſ.4. huius lib. oſtendimus;erit idem quadratum ex BC, duplum duorum quadratorum ex DB, DC. Sunt autem duo quadrata ex AC, CD,bis ſumpta,dupla quoq; quadrati ex AD; quòd [y] *quadrata ex AC,CD,ſemel ſumpta æqualia ſint quadrati ex AD. Igitur quadratum ex BC,vna cum quadratis ex AC, CD, bis ſumptis,duplum erit quadratorū ex DB, DC,* y 47.prim. *AD. Cum ergo & quadratum ex CD,bis ſumptum,duplum ſit quadrati ex CD;* [z] *erit reliquum quadratum ex BC,vna cum* z 20. pron. *quadrato ex AC,bis ſumpto,duplum quoq; reliquorum quadratorum ex DB,AD. Sunt autem* [a] *quadrata ex BC, AC, æqualia quadrato ex AB. Igitur quadrata ex AB, AC, (quæ æqualia ſunt quadrato ex BC, vna cum quadrato ex AC,bis ſumpto) dupla quoq; ſunt, quadratorum ex AD,DB. Quod eſt propoſitum.* a 47.prim.

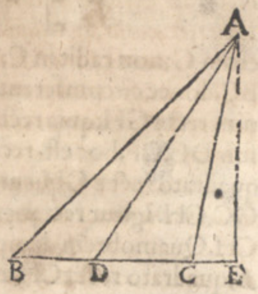


Tertio cadat perpendicularis AE,intra triangulum inter puncta D,C. Quia igitur [b] *quadrata ex BE,EC,dupla ſunt quadratorum ex BD,DE:Item quadrata ex AE,DE, bis ſumpta,* b 9.ſec. *dupla ſunt quadrati ex AD; quod* [c] *quadrata ex AE,ED,ſemel ſumpta quadrato ex AD, æqualia ſint;erunt quadrata ex BE,EC, vna cum quadratis AE,DE,bis ſumptis, dupla quoq; quadratorum ex BD,DE,AD.Cum ergo & quadratum ex DE,bis ſumptum,duplum ſit quadrati ex DE;* [d] *erunt reliqua quadrata ex BE, EC, vnâ cum quadrato ex AE, bis ſumpto, dupla quoq; reliquorum quadratorum ex DB,AD.Quare cum quadratis ex BE, AE,* [e] *æquale ſit quadratum ex AB; & quadratis ex EC, AE,quadratum ex AC; erunt quoq; quadrata ex AB,AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.*

c 47.prim.

d 20.pron.

e 47.prim.



Poſtremo cadat perpendicularis AE,in latus BC, productum. Quoniam igitur [f] *quadrata ex BE,CE,dupla ſunt quadratorum ex BD,DE. Item quadrata ex AE,DE, bis ſumpta,dupla ſunt quadrati ex AD;* [g] *quod quadrata ex AE, DE, ſemel ſumpta,æqualia ſint quadrato ex AD;erunt quadrata ex BE,CE,vna cum quadratis ex AE,DE,bis ſumptis,dupla quoq; quadratorum ex BD,DE,AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis ſumptum,duplum ſit quadrati ex DE;* [h] *erunt reliqua quadrata ex BE,CE,vnâ cum quadrato ex AE,bis ſumpto,dupla quoq; reliquorum quadratorum ex BD,AD. Quare cū quadratis ex BE, AE,* [i] *æquale ſit quadratum ex AB,& quadratis ex CE,AE,quadratū ex AC; erunt quoq; quadrata ex AB,AC,dupla quadratorum ex AD,DB.Quod erat oſtendendum.*

f 10.ſec.

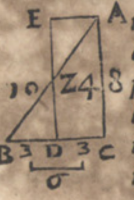
g 47.prim.

h 20.pron.

i 47.primi.

Non te moueat autem, quod ad huius theorematis demonſtrationem adhibuerimus pronū-

ciatum 20. quod vniuerſaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi poteſt ſine demonſtratione, vt in expoſitione eius principij diximus: Vel propoſitio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonſtrari poteſt: Vel certe theorema ipſum poſt librum 5. demonſtrari; ita vt circulus in demonſtrando nulla ratione committatur, etiamſi principium illud, demonſtretur libro 5. quia propoſitio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.



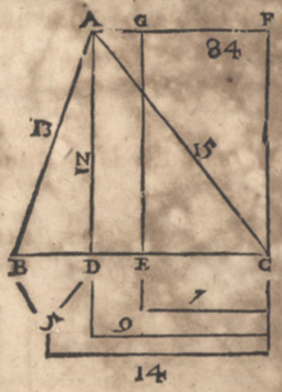
Ex his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propoſ. 47. lib. 1. demonſtrata ſunt, aream cuiuſque trianguli latera habentis nota inueniemus, vt recte hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonſtrat, hac fere ratione. Sit primo triangulum rectangulum ABC, cuius latera nota ſint, nempe AB, 10. palmorum; AC, 8. BC, 6. Diuiſo latere BC, bifariam in D, vt ſint CD, BD, 3. palmorum, perficiatur rectangulum ACDE, quod æquale eſt triangulo ABC, vt in ſcholio propoſ. 41. lib. 1. oſtendimus. Quia vero ex ductu CD, trium palmorum in CA, 8. palmorum, producitur area rectanguli CE, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus: Totidem palmos quadratos continebit triangulum ABC, rectangulo CE, æquale. Quod eſt propoſitum.

Sit deinde triangulum obtuſangulum ABC, cuius latera ſint cognita; AB, 20. palmorum; AC, 13. BC, 11. Primum igitur inuenienda eſt quantitas perpendicularis lineæ AD, ex A, in latus BC, protractum demiſſæ, hoc modo. Quoniam quadratum la-



k 12. ſec. *teris AB, [k] maius eſt, quam quadrata laterum AC, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD; ſi quadrata laterum AC, BC, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris AB, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum ſub BC, CD. Si igitur 55. rectangulum ſub BC, CD, diuidatur per 11. latus notum BC, exibit reliquum latus CD, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonſtrat propoſ. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonſtratum eſt in libro de menſurationibus omnium quantitatum.*
l 47. primi. *Quia vero quadrata laterum AD, CD, [l] æqualia ſunt quadrato lateris AC; ſi quadratum 25. palmorum, nempe lateris CD, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris AC, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare latus AD, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. ſit. 12. Iam vero diuiſo latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BD. perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AG, quæ per A, ipſi BD, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, ſi EC, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in CF, 12. palmorum, (Eſt [m] enim CF, ipſi AD, æqualis,) exurget area*
m 34. pri. *rectanguli CG, 66. palmorum: quod cum æquale ſit triangulo ABC, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. (ſunt enim rectangulum CG, & triangulum ABC, in eiſdem parallelis, &c.) Erit quoque area trianguli ABC, palmorũ quadratorũ 66. Quod eſt propoſitum.*

Sit poſtremo triangulum acutangulum ABC, latera habens nota; AB, 13. palmorum; AC, 15. BC, 14. Primum igitur hic
n 13. ſec. *quoque reperienda eſt quantitas perpendicularis AD, ex A, ad BC, demiſſæ, hac ratione. Quoniam quadratum lateris AB, [n] minus eſt, quam quadrata laterum AC, BC, rectangulo comprehenſo bis ſub BC, CD; ſi quadratum lateris AB, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum AC, BC, hoc eſt, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenſo bis ſub BC, CD, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum ſub BC, CD. Si igitur 126. rectangulum ſub BC, CD, diuidatur per BC, latus notum, vt per 14. exibit reliquum eius latus CD, palmorum 9. vt conſtat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propoſ. 17. & à nobis demonſtratũ eſt, in lib. de menſurationib. omniũ quantitatũ.*
o 47. prim. *Quoniã autẽ quadrata ex AD, CD, [o] æqualia ſunt quadrato ex AC; ſi quadratum 81. palmorũ, nempe lateris CD, 9. palmorũ nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris AC; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare cũ radix quadrata huius numeri 144. ſit 12. erit latus AD, 12. palmorum. Iam vero diuiſo latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BC, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AF, quæ per A, ipſi BC, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, ſi CE, 7. palmorum ducatur in EG, 12. palmorum; ([p] eſt enim EG, recta ipſi AD, æqualis) exurget area rectanguli EF, palmorum 84.*
p 34. prim. *Quod cum triangulo ABC, ſit æquale, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. (ſunt enim rectangulum EF, & triangulum ABC, in eiſdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli ABC, 84. palmorum. Quod eſt propoſitum.*



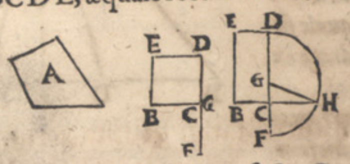
Itaque in vniuerſum, area cuiuſcunque trianguli producitur ex dimidio baſis in perpendicularem, quæ à vertice ad baſim demittitur, vt in exemplis datis eſt manifeſtum. Sed plura hac de re in libro de menſurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoſcantur, demonſtrauimus in noſtris triangulis rectilineis.

xiiij.

PROBLEMA 2. PROPOSITIO 14.

DATO rectilineo æquale quadratum conſtituere.

a 45. prim. Sit datum rectilineum A, cui quadratum æquale conſtituendum eſt. [a] Conſtituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt DC, producatur ad F, ſitque CF, recta æqualis rectæ BC. Diuidatur quoque DF, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta BC, (cum æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum latera DE, EB, [b] æqualia ſint oppoſitis lateribus BC, CD;
b 34. prim. atque adeo conſtitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G; non cadit in C; facto G, centro, deſcribatur interuallo GD, vel GF, ſemicirculus FHD, producaturque BC, donec circumferentiam ſecet in H. Dico igitur, quadratum rectæ CH, eſſe æquale rectilineo A. Ducta enim recta GH; quia recta DF, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehenſum
c 5. ſec. ſub DC, CF, hoc eſt, rectangulum BD, vna cum quadrato rectæ GC, [c] æquale quadrato rectæ GF, hoc eſt,
d 47. prim. quadrato rectæ GH; cum rectæ GF, GH, ſint æquales: At quadratum rectæ GH, [d] æquale eſt quadratis rectarũ GC, CH. Igitur rectangulum BD, vna cum quadrato rectæ GC, æquale quoque erit quadratis rectarum GC, CH. Quamobrem dempto communi quadrato rectæ GC, remanebit rectangulum BD, hoc eſt, rectilineum A, quadrato rectæ CH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum conſtituimus: Quod facere oportebat.



SCHOLIVM.

VERVM quia laborioſum eſt, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum conſtituere æquale, quod ſæpius ſuper datam rectam conſtituendum ſit, ex propoſ. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortaſſe deſcribemus quadratum dato rectilineo æquale, ſi datam figuram rectilineam in triangula reſoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc eſt, latus quadrati, quod cuiuis triangulo æquale ſit, inueſtigemus: quod factu facillimum eſt, vt mox oſtendemus. Nam ſi per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſcripſimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod ſit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.



VT ſi datum ſit rectilineum ABCDEF, reſoluemus illud in triangula ABF, FBC, CFD, DEF, inueniemusque latera G, H, I, K, quorum quadrata ſint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum conſtituemus M, & lineas LM, MN, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta NL, erigemus ad eam perpendicularem NO, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta OL, excitabimus illi perpendicularem OP, lateri K, æqualem, iungemusque rectam PL. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri ſumpta ſit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis OP, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ PL, poſtremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus, atque adeo omnibus triangulis ABF, FBC, CFD, DEF, hoc eſt, datæ figuræ rectilineæ ABCDEF.

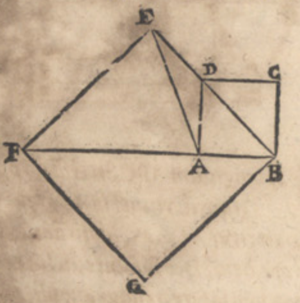
PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis eſt. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo DEF, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe DE, bifariam in A, producaturque quantum libet. Ducta deinde per angulum oppoſitum F, lateri DE, parallela FB, ducatur per E, ad DE, perpendicularis HEB, ſecans FB, in B, ſitque EH, ipſi AE, dimidio lateris DE, æqualis. Poſtremo, diuiſa tota linea BH, bifariam in G, deſcribatur ex G, ad interuallum GH, vel GB, arcus ſecans latus DE, productum in I. Dico quadratum lateris EI, æquale eſſe triangulo DEF. Si namque compleatur rectangulum AEC, & ſemicirculus BH, ducaturque recta GI, oſtendemus, vt in hac propoſ. 14. quadratum ex EI, rectangulo AB, æquale eſſe. Cum ergo rectangulum AB, triangulo DEF, ſit æquale, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. quod baſis DE, ſit dupla baſis AE, conſtat propoſitum.

NON eſt tamen neceſſarium, vt rectangulum conſtruatur AB. Nam ſi fiat angulus rectus IEB, atque in BH, capiatur EH, ſemiſſi lateris DE, æqualis, & recta EB, æqualis perpendiculari ex F, in latus DE, demiſſæ, ſeceturque BH, bifariam in G, auferet circunferentia ex G, circa BH, deſcripta rectam EI, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub BE, EH, hoc eſt, triangulo DEF.

QVONIAM vero ſecundo hoc libro Euclides multa de quadratis, ac rectangulis parallelogrammis diſputauit, recte hic inſeri poterunt ſequentia duo problemata de quadrato, & parallelogrammo rectangulo, neque iniucunda, neque inutilia: quorum poſterius eruditus vir, atque excellens Mathematicus, Marinus Ghetaldus Patricius Racuſinus, mihique familiariſſimus, ingenioſiſſime ſane ſoluit, & longe aliter, breuiusq; quam à quodam alio ſolutum quondã fuit, quam ſolutionem hic ſubiungere ſuperuacaneum eſt, cum illam Marini Racuſini hic appoſuerim, tanquam breuiorem, ac faciliorem.

I.

DATO exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem; Inuenire latus ipſius quadrati.



EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiuſdem recta AB, inueniendumque ſit latus illius quadrati. Ex recta AB, deſcribatur quadratum AC, cuius diameter ducta BD, producatur ad E, vt ſit DE, rectæ AD, æqualis. Dico rectam EB, eſſe latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipſum latus BE, exceſſu dato AB. Ducatur enim EF, perpendicularis ad BE, quæ rectam BA, productam ſecet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus FEB, rectus eſt, & EBF, ſemirectus, ex coroll. 2. propoſ. 4. huius lib. [c] erit & BFE, ſemirectus. [f] Quare rectæ BE, FE, æquales ſunt. Si igitur ex F, ducatur FG, parallela ipſi BE; & ex B, recta BG, parallela ipſi EF, occurrens priori in G, conſtitutum erit quadratum rectæ BE. Quod ſi ducatur recta AE, [g] erunt anguli AED, EAD, æqualibus lineis DE, DA, oppoſiti æquales. Quare ſi demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt anguli AEF, EAF, æquales; [h] ideoque rectæ EF, AF, æquales erunt. Quoniam vero diameter BF, rectam AF, ſuperat data recta AB; ſuperabit eadem diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AB, quod eſt propoſitum.

c 32. pri.
f 6. primi.
g 5. primi.
h 6. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta compoſita ex diametro quadrati ſupra exceſſum datum deſcripti, & ex latere eiuſdem quadrati, exhibet latus quadrati, quod quæritur. Eadem autem diameter cum duplo exceſſus, diametrum quæſiti quadrati conſtituit.

II.

DATIS duobus exceſſibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli ſupra vtrumque latus; Inuenire latera ipſius rectanguli.



SVPERET diameter minus latus recta AB, & maius recta BC. Producta AC, in vtramq; partem, ſumatur AD, ipſi AB, æqualis: deſcriptoq; circa CD, ſemicirculo, erigatur ad AC, perpendicularis BE, ſecans circumferentiam in E, ſumaturque ipſi BE, æqualis CF. Et quia, vt ex demonſtratione propoſ. 14. huius lib. conſtat, quadratum rectæ BE, æquale eſt rectangulo ſub DB, BC, erit BE, maior quam BC, minus latus dicti rectanguli. Igitur & CF, maior erit quam BC. Sumpta ergo FG, ipſi BC, æquali, cadet punctum G, inter C, & FE, recta autem ad AF, perpendiculari GH, ipſi BF, æquali; Dico AG, eſſe maius latus, & GH, minus, ita vt rectangulum qua-

ſitum ſit GK. Eſſe enim rectam AG, maiorem, quam GH, ita probabitur: Quoniam BC, FG, æquales ſunt, addita cõmuni CG, erunt quoque BG, CF, æquales. Additis igitur inæqualibus AB, ipſi BG, & BC, ipſi CF, erit AG, maior, quam BF, hoc eſt, quam GH: quandoquidem addita AB, maior eſt, quam addita BC. Eſſe autem AG, GH, latera quæſita, ita demonſtrabitur. Deſcripto ex A, ad interuallum AG, circulo, ducatur per A, H, recta ſecans circumferentiam in L, M, & recta AD, producatur, circumferentiam ſecans in I. Quoniam igi-



i 2. ſec. *tur rectangulum ſub BC, BD,[i] æquale eſt rectangulis ſub CB, BA, & ſub CB, AD, hoc eſt, duplum rectanguli ſub exceſſibus AB, BC. Eſt autem rectangulo ſub BC, DB, æquale quadratum rectæ BE, vt oſtendimus; erit quoque quadratum rectæ BE, duplum rectanguli ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum rectæ BE, æquale erit duplo rectanguli ſub AB, BC. Addito ergo communi quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli ſub BG, BC, hoc eſt, ſub CF, BC; erũt quadrata rectarum BE, ſiue CF, & BC, vna cum duplo rectanguli ſub CF, BC, æqualia duplo rectanguli ſub AB, BC, & quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli ſub CF, BC. Sunt autem quadrata rectarum CF, BC, vna cum duplo rectanguli ſub CF, BC,[k] æqualia quadrato rectæ BF. Igitur & qua-*

k 4. ſec. *dratum rectæ BF, æquale erit duplo rectanguli ſub AB, BC, & quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli ſub CF, BC, vel ſub BG, BC. Cum ergo duplum rectangulorum ſub AB, BC, & ſub BG, BC, æquale ſit rectangulo ſub IG, (quæ ipſarum AB, BG, ſimul dupla eſt) & BC, vel FG; erit quoque quadratum rectæ BF, æquale rectangulo ſub IG, FG, vna cum quadrato rectæ BC, vel FG. At rectangulo ſub IG, GE, vna cum quadrato rectæ FG,[l] æquale eſt rectangulum ſub IF, FG. Igitur quadratum rectæ*

l 3. ſec. *BF, ſiue GH, æquale etiam eſt rectangulo ſub IF, FG. Addito ergo communi quadrato rectæ AG; erunt quadrata rectarum GH, AG, æqualia rectãgulo ſub IF, FG, vna cum quadrato rectæ AG. Eſt autem quadratis rectarum GH, AG,[m] æquale quadratum*

m 47. pri. *rectæ AH; & rectangulo ſub IF, FG, vna cum quadrato rectæ AG,[n] æquale eſt quadratum rectæ AF. Igitur & quadratum re-*

n 6. ſec. *ctæ AH, quadrato rectæ AF, æquale eſt, rectaque AH, rectæ AF, æqualis: demptisq; æqualibus AL, AG, reliquæ LH, GF, æquales erunt. Diameter ergo AH, rectanguli GK, hoc eſt, recta AF, excedit maius latus AG, recta GF, ſiue exceſſu dato BC: Ipſum vero minus latus GH, ſiue rectam BF, ipſi GH, æqualem, exceſſu dato AB. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

ITAQVE recta BE, vel CF, cuius quadratum rectanguli ſub datis exceſſibus AB, BC, duplum eſt, addita minori exceſſui BC, efficit minus latus quæſitum BF, hoc eſt, GH: Eadem autem recta BE, hoc eſt, BG, addita maiori exceſſui AB, conficit maius latus quæſitum AG: Eadem denique BE, vel CF, cum vtroque exceſſu AB, BC, diametrum AF, vel AH, conſtituit.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLI-

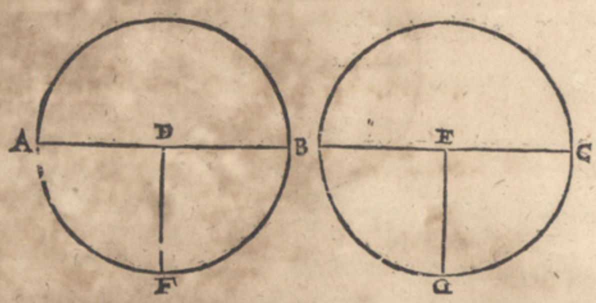
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

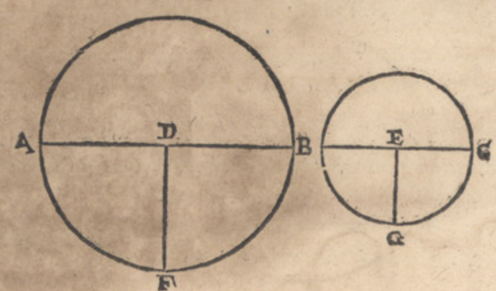
DEFINITIONES.

I.

ÆQVALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ ſunt æquales.

QVONIAM Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonſtrat, idcirco explicat prius terminos quoſdam, quorum frequens in eo futurus eſt vſus. Primum itaque docet, eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, vel ſemidiametri æquales ſunt. Cum enim circulus deſcribatur ex circumuolutione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib 1. diximus, perſpicuum eſt, eos circulos eſſe æquales, quorum ſemidiametri, ſeu rectæ ex centris ductæ, ſunt æquales; vel etiam quorum totæ diametri æquales ſunt. Vt ſi diametri AB, BC, vel rectæ DF, EG, è centris D, & E, ductæ ſint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam è contrario, ſi circuli ſint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ æquales. Ex his liquet, circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris ſunt inæquales, inæquales eſſe; atque adeo illum, cuius diameter, vel ſemidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, ſemidiametroſue inæquales eſſe, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.

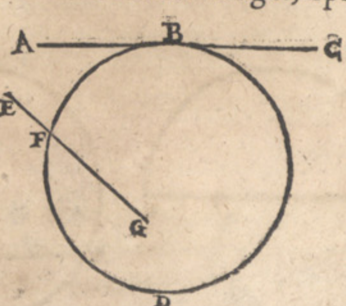




II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.

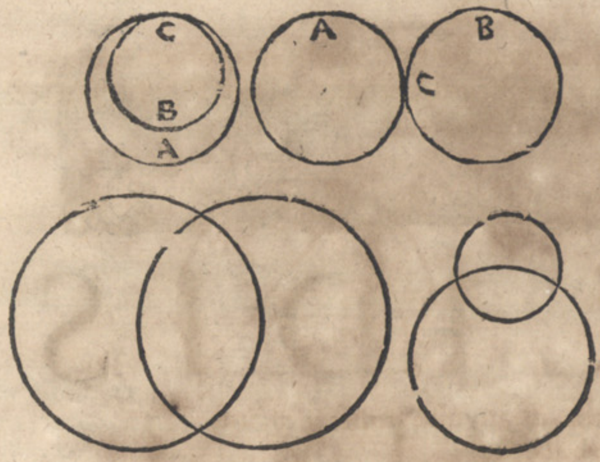
VT recta AB, ſi ita circulum BFD, tangat in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum ſecet, ſed tota iaceat extra ipſum, dicetur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, ſecet circulum, cadatque intra ipſum, non dicetur circulum tangere, ſed ſecare.



III.

CIRCVLI ſe ſe mutuo tangere dicuntur, qui ſeſe mutuo tangentes, ſe ſe mutuo non ſecant.

EODEM



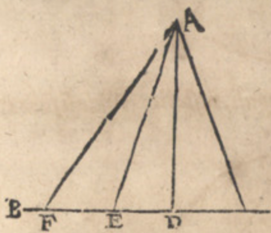
EODEM modo duo circuli AC, BC, ſe mutuo dicuntur tangere in C, ſi ita ſeſe contingant in C, vt neuter alterum ſecet. Eſt autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius ſe ſe circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum eſt poſitus; aut interius, quando vnus intra alterum conſtituitur. Quod ſi duo circuli ita ſe mutuo tangant, vt vnus alterum quoque ſecet, dicentur circuli illi ſe mutuo ſecare, & non tangere.

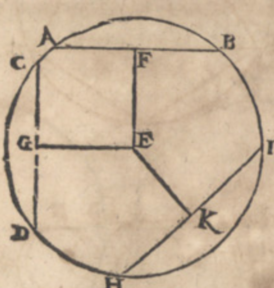
IV.

IN circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Longius autem abeſſe illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuiſſima eſt perpendicularis, & ſemper eadem; aliæ vero infinitis modis variari poſſunt; recte diſtantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt diſtantia puncti A, à recta BC, dicitur eſſe perpendicularis AD, non autem AE, vel AF, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis eſt; quia AD, omnibus eſt breuior, ex coroll. propoſ. 19. lib. 1. Immo non ſolum AE, AF, maiores ſunt, quam AD, ſed etiam ipſæ inter ſe inæquales ſunt. Eſt enim AF, [a] maior, quam AE, cum angulus AEF, ſit obtuſus, & AFE, acutus, & ſic de aliis lineis non perpendicularibus. Quod enim AFE, acutus ſit, conſtat ex eo, quod in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, [b] minores ſunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum ADF, rectus ſit, angulum AFD, recto eſſe minorem. Eadem ratione angulus AED, oſtendetur acutus. propterea quod in triangulo ADE, [c] duo anguli ADE, AED, minores ſunt duobus rectis, & ADE, rectus eſt) ac proinde, cum ambo AED, AEF, [d] æquales ſint duobus rectis, erit AEF, obtuſus. Hinc factum eſt, vt Euclides æqualem diſtantiam rectarum in circulo ab ipſius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem diſtantiam per inæquales. Vt duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD, æqualiter dicentur diſtare à centro E, ſi perpendiculares EF, EG, æquales fuerint. At linea CD, longius abeſſe dicetur à centro E, quam linea HI, ſi perpendicularis EG, maior fuerit perpendiculari EK.

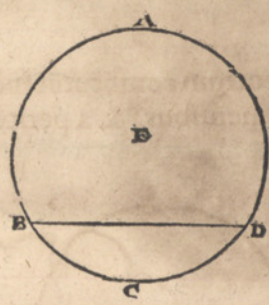
a 19. primi.
b 17. prim.
c 17. primi.
d 13. primi.





V.

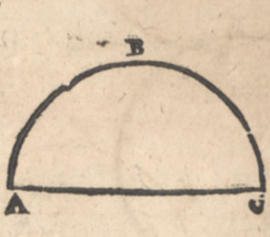
SEGMENTVM circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

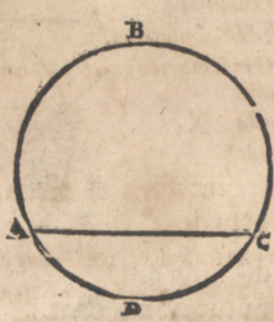


VT ſi ducatur in circulo ABCD, recta BD, vtcunque, dicetur tam figura BAD, contenta circumferentia BAD, & recta BD; quam figura BCD, comprehenſa recta BD, & circumferentia BCD, circuli ſegmentum. Ex his colligitur triplex circuli ſegmentum. Semicirculus, quando recta BD, per centrum E, incedit; Segmentum ſemicirculo maius, quando recta BD, non tranſit per centrum, in ipſo tamen centrum exiſtit, quale eſt ſegmentum BAD; Et Segmentum ſemicirculo minus, extra quod centrum circuli conſtituitur, cuiuſmodi eſt ſegmentum BCD. Id quod ad defin. 18. lib 1. demonſtrauimus. Vocatur à pleriſque Geometris recta BD, chorda, & circumferentia BAD, vel BCD, arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.





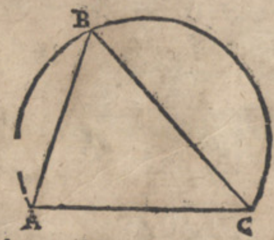
DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis conſiderantur. Primo loco angulum ſegmenti, dicens angulum mixtum BAC, vel BCA, contentum ſub recta linea AC, & circumferentia ABC, appellari angulum ſegmenti. Quod ſi ſegmentum circuli fuerit ſemicirculus, dicetur angulus ſemicirculi: Si vero ſegmentum maius ſemicirculo extiterit, vocabitur angulus ſegmenti maioris: Si denique ſegmentum minus fuerit ſemicirculo, angulus ſegmenti minoris nuncupabitur.

VII.

VII.

IN ſegmento autem angulus eſt, cum in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.

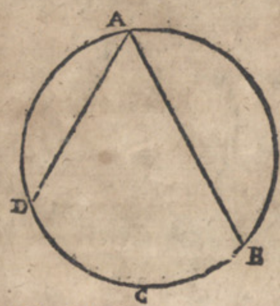
SIT ſegmentum circuli quodcunque ABC, cuius baſis recta AC. Ex ſuſcepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema baſis, rectæ lineæ BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur exiſtere in ſegmento ABC.



VIII.

CVM vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.

EX puncto A, quolibet ſuſcepto in circumferentia circuli ABCD, ducantur rectæ duæ lineæ AB, AD, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ BCD, cuiuſque, quam quidem duæ rectæ AB, AD, aſſumunt. Angulus itaque rectilineus BAD, inſiſtere dicitur circumferentiæ BCD. Perſpicuum autem eſt, hunc angulum à præcedenti non differre, niſi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus BAD, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur eſſe in ſegmento BAD, ſi recta BD, baſis duceretur; ex hac vero inſiſtere circumferentiæ BCD. Non tamen confundendus eſt angulus in ſegmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ inſiſtit, quamuis vnus & idem ſit; ad diuerſa ſiquidem referuntur. Angulus enim in ſegmento, ſegmentum in quo exiſtit, angulus autem inſiſtens circumferentiæ, circumferentiam, quæ baſis eſt ipſius anguli, reſpicit. Vnde ſi ſumatur ſegmentum aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, non erit idem angulus in hoc ſegmento exiſtens, & eius circumferentiæ inſiſtens. Angulus enim in eo exiſte[illegible]erit BCD; at eius circumferentiæ BCD, inſiſtens, erit angulus BAD, qu[illegible] multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati ſunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in ſegmento, & angulus circumferentiæ cuipiam inſiſtens, ad diuerſos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propoſ. lib. 6. quæ ſolum conuenire poteſt circumferentiis circulorum, quibus anguli inſiſtunt, non autem in quibus exiſtunt, vt eo in loco oſtendemus. Idem quoque facile conſtat ex verbo græco βεβηκεναι, *quod aſcendiſſe ſignificat. Aſcendit enim angulus DAB, ſupra circumferentiam BCD.*





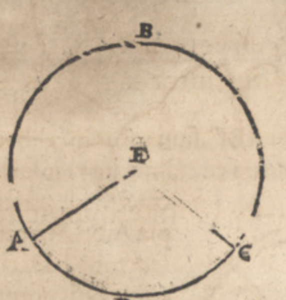
PRÆTER tres dictos angulos conſideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duabus circumferentiis ſe mutuo tangentibus, ſiue hoc exterius fiat, ſiue interius. Exemplum. Si recta AB, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus ACD, vel BCE, dicetur angulus contingentiæ, ſiue contactus: Rurſus, ſi circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus CEF, quam EFH, vel GFI, angulus contactus, ſeu contingentiæ. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo curuilinei.



IX.

SECTOR autem circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis aſſumpta.

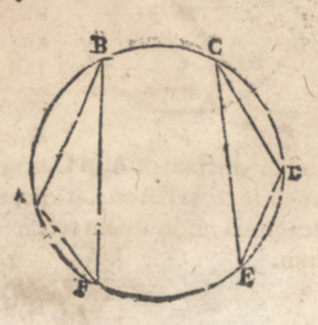
SI in circulo ABCD, cuius centrum E, rectæ AE, CE, conſtituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferētia ADC, quam prædictæ lineæ aſſumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perſpicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipſius baſis eſt, non autem ad eam, in qua exiſtit, vt multi interpretes exiſtimarunt. Nam ſicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC; quæ baſis eſt anguli ad centrum conſtituti, quando mentionem facit peripheriæ à rectis AE, CE, aſſumptæ; Ita quoque in illa intellexiſſe eum neceſſe eſt nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ aſſumunt, eam, quæ baſis eſt anguli ad circumferentiam conſtituti; quandoquidem in vtraque definitione vſus eſt eodem verbo græco ἀπολαμβαν.



X.

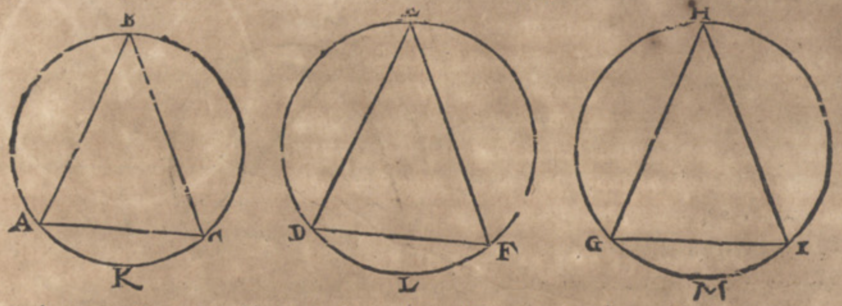
SIMILIA circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.

SEGMENTA videlicet ABDF, DCAE, eiuſdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, DCE, æquales: vel, quod idem eſt, in quibus ijdem anguli æquales exiſtunt, iuxta 7. definitionem, ſimilia dicuntur, & ipſæ circumferentiæ quoque ABDF, DCAE, ſimiles.



EODEM

EODEM modo ſegmenta diuerſorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium, à Geometris dicuntur ſimilia, quæ vel ſuſcipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli exiſtunt. Vt ſi in circulis ABCK, DEFL, GHIM, anguli ABC, DEF, GHI, fuerint æquales, dicentur ſegmenta, ſeu circumferentiæ ABC, DEF, GHI, quæ dictos angulos ſuſcipiunt, vel in quibus prædicti anguli exiſtunt, ſimiles. Conſiſtit autem hæc ſegmentorum, circumferentiarumve ſimilitudo in eo, quod qualis pars eſt vna circumferētia totius ſuæ circumferentiæ, talis quoque ſit altera circumferentia, quæ dicitur huic ſimilis, totius ſuæ circumferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars eſt circumferentia ABC, totius circumferentiæ ABCA, talis & tanta quoque pars ſit circumferentia DEF, totius circumferentiæ DEFD; Item talis, & tanta circumferentia GHI, totius circumferentiæ GHIG. Vel potius ſegmentorum ſimilitudo in hoc conſiſtit, quod ſegmenta, ſeu circumferentiæ ſimiles, ad totas circumferentias ſuas eandem habeant proportionem. Quod autem ſegmenta, quæ vel æquales ſuſcipiunt angulos, vel in quibus exiſtunt æquales anguli, ſint huiuſmodi, demonſtrabimus propoſitione vltima lib. 6. Nunc ſatis ſit, talia ſegmenta circulorum, vel etiam arcus, circunferentiasue, appellari ſimiles.



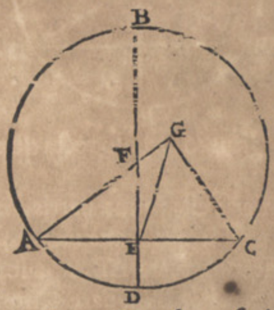
EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ ſimiles, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. inſiſtunt. Vt ſi in iiſdem circulis anguli ABC, DEF, GHI, ſint æquales, dicentur arcus, circumferentiæve AKC, DLF, GMI, quibus inſiſtunt, ſimiles. Immo ſi anguli ad centra inſiſtentes arcubus AKC, DLF, GMI, ſint æquales, erunt adhuc ipſi arcus ſimiles. Id quod à nobis in ſcholio propoſ. 22. huius lib. demonſtrabitur.

I.

PROBL. I. PROPOS. I.

DATI circuli centrum reperire.

a 10. primi. SIT circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, *a* quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam ſecta in F; dico F, eſſe centrum circuli propoſiti. In ipſa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipſam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuiſa fuit æqualiter. Si igitur F, non eſt centrum, ſit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & baſis AG, baſi CG; (à centro



b 8. primi. enim duci dicuntur) *b* erunt anguli AEG, CEG, æquales; ideoque recti: Erat autem & angulus AEF, rectus, ex conſtructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales ſunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non eſt ergo punctum G, centrum; eademque eſt ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos ſecet, in ſecante eſſe centrum circuli. Nam ex eo, quod BD, recta, rectam AC, bifariam ſecat in E, & ad angulos rectos, oſtenſum fuit, punctum eius medium F, neceſſario eſſe circuli centrum.

ij.

THEOR. I. PROPOS. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipſa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

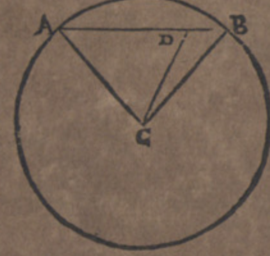
IN circulo ABC, ſumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C,
a 1. tertij. ductam, cadere intra circulum, ita vt ipſum ſecet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis eſt linea ADC, recta, vt vult aduerſarius. Inuento *a* igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta aſſumpta A, & C, nec non ad quoduis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED,



b 5. primi. ſecetque ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli,
c 16. primi. cuius baſis ponitur recta ADC, æqualia ſunt, (è centro enim ducuntur) *b* erunt anguli EAD, ECD, æquales: Eſt autem angulus EDA, *c* angulo ECD, maior externus interno oppoſito, cum latus CD, in triangulo ECD, ſit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus EDA. Quare recta EA, maiori angulo A-
d 19. primi. DE, oppoſita, hoc eſt, recta EB, ſibi æqualis; *d* maior erit, quàm recta ED, minori angulo DAE, oppoſita, pars quàm totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, ſed intra. Eodem enim modo demonſtrabitur, rectam ductam ex A, in C, non poſſe cadere ſuper arcum ABC, ita vt eadem ſit, quæ circumferentia ABC. Eſſet enim recta EA, maior, quam recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum ABC, arcus ſit linea curua, non autem recta. Itaque ſi in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc theorema demonſtrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta AB, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli AB, cuius centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum exiſtant. Aſſumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectæ CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera CA, CB, trianguli CAB, æqualia ſunt, [d] erunt anguli CAB, CBA, æquales: Eſt autem angulus CDA [e] angulo CBA, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD, maior erit, & ob id latus CA, [f] latere CD, maius erit. Quare cum CA, ſit ducta à centro ad circumferentiam vſque, non perueniet recta CD, ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quolibet alio puncto aſſumpto. Tota igitur recta AB, intra circulum cadit. Quod eſt propoſitum.



d 5. primi.
e 16. prim.
f 19. primi.

COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non ſecet, in vno tantum puncto ipſum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, *g* caderet pars rectæ inter ea duo puncta poſita, intra circulum. Quare circulum ſecaret, quod eſt contra hypotheſin.

g 2. tertij.

THEOR. 2. PROPOS. 3. iij.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam non per centrum extenſam bifariam ſecet; & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit.

PER centrum A, circuli BCD, recta CE, extenſa diuidat rectam BD, non per centrum extenſam, bifariam in F. Dico rectam AF, eſſe ad angulos rectos ipſi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & baſes AB, AD, æquales. *a* Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, hoc eſt, recti. Quod erat primo propoſitum.



a 8. primi.

SIT iam AF ad angulos rectos ipſi BD. Dico rectam BD, bifariam ſecari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, ſint æqualia, *b* erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales ſunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: *c* erunt latera FB, FD, æqualia. Quod ſecundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 5. primi.
c 26. prim.

FACILE quoque demonſtrari poterat ſecunda hæc pars, quæ quidem conuerſa eſt, primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis eſt ad BD, erit tam quadratum rectæ AB, *d* æquale quadratis rectarum AF, FB, quam quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratum rectæ AB, æquale ſit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB. æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atque idcirco & rectæ FB, FD, æquales erunt.

d 47. prim.

COROLLARIVM.

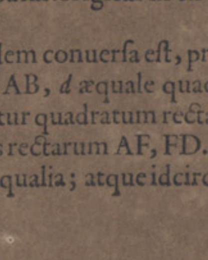
EX hac demonſtratione facile inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, ſiue æquilaterum illud ſit, ſiue Iſoſceles, lineam, quæ baſim bifariam ſecet, perpendicularem eſſe ad baſim. Et contra, lineam, quæ ad baſim ſit perpendicularis, baſim ſecare bifariam. Nam in triangulo ABD, cuius duo latera AB, AD, æqualia ſunt, atque adeo ex centro A, per B, D, circulus deſcribi poteſt: ex eo, quod recta AF, ſecat baſin BD, bifariam, oſtenſum eſt, angulos ad F, eſſe rectos: Et ex eo, quod anguli ad F, recti ſunt, demonſtratum eſt, baſim BD, à recta AF, bifariam ſecari. Sed hoc etiam demonſtrauimus ad propoſ. 26. lib. 1. & quidem vniuerſalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonſtrandum eſſe hoc loco ſequens theorema, ad ea, quæ ſequuntur, non inutile; videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interioris circumferentiam ſecans; erunt eius ſegmenta inter vtramque circumferentiam poſita, inter ſe æqualia.

DVO circuli ABC, DEFG, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primum per centrum H, recta AC, ſecans circumferentiam interiorem in D, G. Dico rectas AD, CG, æquales eſſe. Nam ſi ex HA, HC, quæ [e] æquales ſunt, demantur HD, HG, quæ eadem ratione æquales ſunt, [f] erunt rectæ AD, CG, æquales.



e 15. def.
f 3. pron.

DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta AB, non per centrum, ſecans interiorem circumferentiam in E, F. Dico rurſus, rectas AE, BF, eſſe æquales. [g] Ducta enim ex centro H, ad AB, perpendiculari HI, [h] ſecabit hæc tam rectam AB, in circulo ABC, quam rectam EF, in circulo DEFG, bifariam. Ablatis igitur æqualibus IE, IF, ex æqualibus IA, IB, [i] remanebunt AE, BF, æquales, quod eſt propoſitum.

g 12. primi.
h 3. tertij.
i 3. pron.

iv.

THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, non per centrum extenſæ; ſe ſe mutuo bifariam non ſecabunt.

DVÆ rectæ AB, CD, ſe mutuo in E, ſecent in circulo ACBD, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt mutuo ſeſe bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum, eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diuiſa n. ſit & AB, & CD, ſi fieri poteſt, bifariam in E. *a* Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta FE. Quoniam ergo FE, ponitur ſecare rectam AB, bifariam in E, *b* ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur CD, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 1. tertij.
b 3. tertij.



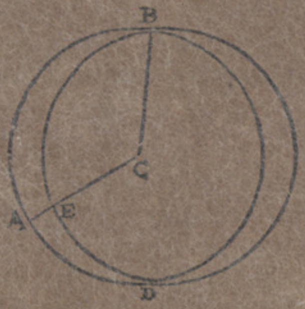
v.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli ſeſe mutuo ſecent, non erit illorum idem centrum.

DVO circuli ABD, EBD, ſe mutuo ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idem centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB, quidem ad ſectionem B; CA, vero ſecans vtramque circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta EC, rectæ CB æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ EC, AC, *a* æquales inter ſe erunt. pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.

a 1. pron.



vj.

THEOR. 5. PROPOS. 6.

SI duo circuli ſeſe mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVO circuli AB, BC, ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; DB, quidem ad tactum B. At DC, ſecans vtramque circumferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æqualis. Quare rectæ AD, & CD, *a* inter ſe erunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 1. pron.



S C H O L I V M.

EVCLIDES propoſuit theorema hoc de circulis ſeſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſeſe tangentium, cùm vnus ſit extra alium non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.

vij.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.



IN diametro AB, circuli ACDEB, cuius centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe GA, in qua eſt centrum, minimam vero reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior eſt, maiorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus diſtat; & eadem ratione GD, maiorem recta GE, atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtraſq; partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantummodo duas lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, *a* maiora ſunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC æquales rectis GF, FA, hoc eſt, toti rectæ GA; erit & GA, maior, quam GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima eſt omnium quæ ex G, in circulum cadunt.

a 20. prim.

DEINDE, quoniam in triangulo EFG, latus EF, *b* minus eſt duobus lateribus FG, GE. Eſt autem EF, ipſi FB æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima eſt omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

b 20. prim.

RVR-

RVRSVS, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia ſunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, maior eſt angulo GFD; *c* erit baſis GC, maior baſe GD. Eadem ratione maior *c 24. prim.* erit GC, quam GE; Item maior erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt ea, quæ remotior.

FIAT iam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia ſunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; *d* erunt rectæ GE, GH, ex vtraque parte ipſius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter ſe. *d 4. prim.* Quod autem nulla alia his duabus poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex G, ducatur alia, quæ cadat ſupra punctum H, erit ea, cum ſit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quam GH: ſi vero cadat infra H, erit ea, cum ſit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, vt oſtenſum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque ſi in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, &c. Quod erat demonſtrandum.

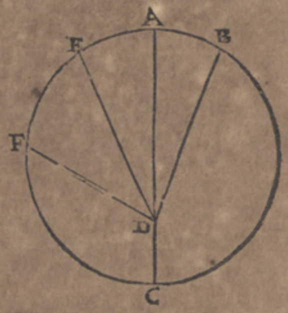
S H O L I V M.



QVAMQVAM autem Euclides ſolum demonſtrauerit, lineam, quæ propinquior eſt rectæ per centrum ductæ, remotiore eſſe maiorem, ſi ambæ lineæ ex eadem parte diametri AB, exiſtant: idem tamen verum etiam eſt, ſi ad diuerſas partes ductæ ſint. Vt ſi quis dicat, rectam GD, propinquiorem eſſe rectæ GA, quam rectam GH; dico GD, maiorem eſſe, quam GH. Si namque ipſi GH, ex altera parte æqualis ducatur GE, vt dictum eſt, nempe ſi fiat angulo GFH, æqualis angulus GFE, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod GH, GE, æqualiter à GA, diſtent, ob æqualitatem angulorum GFH, GFE; & GD, ponatur minus diſtare, quam GH, ac proinde minus, quam GE. Cum [c] *ergo GD, maior ſit, quam GE, maior quoque erit eadem GD, quam GH.* *c 7. tertij.*

HANC porro propoſitionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum ſumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima ſit, vna vero minima; & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter diſtabunt.



IN circulo ABC, punctum ſumatur D, à quo rectæ quotcunque DA, DC, DE, DF, DB, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima ſit DA, minima vero DC; ipſarum vero DE, DF, maior ſit DE, denique DE, DB, ſint æquales. Dico DA, per centrum tranſire, & DC, reliquam partem eſſe diametri, hoc eſt, DC, ipſi DA, eſſe in directum. Item DE, quæ maior ponitur quam DF, propinquiorem eſſe maximæ DA, quam DF. Denique DE, DB, æqualiter ab eadem DA, vel DC, abeſſe. Primum enim ſi DA, non tranſit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, [f] *erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod eſt abſurdum; cum DA, maxima ponatur. Tranſit ergo DA, per centrum.* *f 7. tertij.*

DEINDE ſi DC, non eſt in directum ipſi DA; protracta AD, in directum, [g] *erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipſius AD, protractæ, omnium minima; Quod eſt abſurdum; cum DC, minima ponatur. Eſt ergo DC, reliqua pars diametri.* *g 7. tertij.*

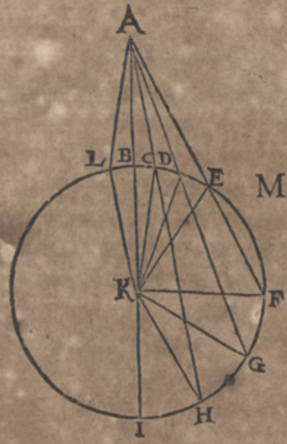
RVRSVS ſi DE, non eſt vicinior maximæ DA, quam DF; aut æqualiter diſtabunt ab ea, aut DE, longius ab ea aberit: Si æqualiter vtrinque à DA, dicantur diſtare, [h] *ipſæ erunt æquales; quod eſt abſurdum. Ponitur enim DE, maior. Si vero æqualiter ex eadem parte à DA, diſtare dicantur, erunt DE, DF, vna eademque linea; atque adeo DE, maior non erit, quàm DF, quod eſt contra hypotheſin. Quod ſi DF, dicatur eſſe propinquior maximæ DA,* [i] *ipſa erit maior, quam DE. Quod magis eſt abſurdum.* *h 7. tertij.* *i 7. tertij.*

POSTREMO ſi DE, DB, non æqualiter diſtant à DA, vel DC, [k] *erit ea, quæ magis à DA, diſtat, reliqua minor. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim æquales DE, DB.* *k 7. tertij.*

THEOR. 7. PROPOS. 8. viij.

SI extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

EX puncto A, extra circulum BCDE, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum tranſeat, aliæ vero AH, AG, AF, vtcunque. Dico omnium eſſe maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam AH, quæ rectæ AI, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, maiorem recta AG, quæ remotior eſt ab eadem AI: Et eadem ratione AG, maiorem quam AF. E contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam AC, quæ vicinior eſt minimæ AB,



mæ AB, minorem eſſe recta AD, remotiore; Et eadem ratione, ipſam AD, minorem quam AE. Denique ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci poſſe tantummodo duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera AK, KH, trianguli AKH, *a* maiora ſunt recta AH; Sunt autem rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc eſt, toti rectæ AI; erit & AI, maior, quam AH. Eadem ratione erit AI, maior, quam AG, & quam AF. Quare AI, eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

a 20. prim.

DEINDE, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH, æqualia ſunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, maior eſt angulo AKG; *b* erit baſis AH, baſe AG, maior. Eadem ratione maior erit AH, quam AF: Item AG, maior, quam AF. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt linea remotiore.

b 24. prim.

c 20. prim. RVRSVS, quia in triangulo ACK, recta AK, *c* minor eſt duabus AC, CK; ſi auferantur æquales BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit AB, minor, quam AD, & quam AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A ducuntur, minima eſt.

d 21. prim. RVRSVS, cum intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; *d* erunt AC, CK, minores, quam AD, DK. Sublatis igitur æqualibus CK, DK. remanebit adhuc AC, minor, quam AD. Pari ratione erit AC, minor, quam AE, item AD, minor quam AE Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor eſt, quam remotior ab eadem.

POSTREMO fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia ſunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ AC, AL, ex vtraque parte minimæ AB, vel maximæ AI, inter ſe æquales. Quod autem nulla alia his poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipſa, cum ſit remotior à minima, maior quam AL. Quod ſi cadat inter B, & L, erit ea, cum ſit minimæ propinquior, minor quam AL, vt oſtenſum eſt. Duæ igitur ſolum rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 4. prim.

S H O L I V M.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtraſque partes maximæ AI.



FIAT enim angulo AKH, æqualis angulus AKM, iungaturque recta AM. Quia igitur latera AK, KH, æqualia ſunt lateribus AK, KM; ſunt autem & anguli AKH, AKM, æquales: f erunt baſes AH, AM, æquales: Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi poteſt. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quam AH, prout citra vel vltra rectam AH, ducta fuerit, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione theorematis.

f 4. prim.

HÆC propoſitio vera etiam eſt, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longius à linea per centrum ducta abeſt, minor erit omnibus alijs in cauam peripheriam cadentibus, qualis eſt recta AM, in priori figura. Nam ducta recta KM, ex centro ad contactum, erunt duo latera AK, KF, trianguli AKF, æqualia duobus lateribus AK, KM, trianguli AKM, angulus vero AKF, angulo AKM, maior. Igitur g baſis AF, baſe AM, maior erit. Eadem ratione maior erit quæcunque alia in cauam peripheriam cadens, quã recta AM.

g 24. prim.

PARI ratione eadem linea tangens AM, maior erit omnibus alijs in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cum duo latera AE, EK, h minora ſunt duobus lateribus AM, MK: ſi auferantur æquales rectæ KE, KM; erit reliqua AE, minor quam reliqua AM. Eademque ratio eſt de cæteris.

h 21. prim.

QVAMQVAM vero Euclides ſolum demonſtrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem eſſe remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem eſſe remotiore, ſi ambæ lineæ ex eadem parte maximæ vel minimæ exiſtãt: idem tamen verum etiam eſt, ſi ad diuerſas partes ductæ ſint. Quod non aliter demonſtrabitur, quàm idem in ſcholio præcedentis propoſitionis de duabus lineis ad diuerſas partes ductis demonſtratum fuit.

ix. THEOR. 8. PROPOS. 9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

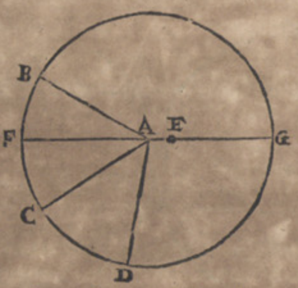


A puncto aſſumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC, AD, inter ſe æquales. Dico A. punctum eſſe centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus diuiſis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB æqualia ſunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & baſes AB, AC, ponuntur etiam æquales; *a* erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo oſtendemus, angulos ad F, eſſe rectos. Quare cum rectæ AE, AF, diuidant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, tranſibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propoſ. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo ſe mutuo ſecant, centrum erit circuli. Si enim eſſet aliud punctum centrum, non tranſiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 8. prim.

ALITER

ALITER. Si punctum A, non eſt centrum circuli, b ſit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter FG. Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum eſt punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; c erit recta AD, quæ propinquior eſt rectæ AG, per centrum E, ductæ maior, quam recta AC, remotior ab AG, quod eſt abſurdum. Poſitæ ſunt enim æquales rectæ AD, AC. Idem abſurdum ſequetur, ſi aliud punctum præter A, centrum ponatur. b 1. tertij. c 7. tertij.

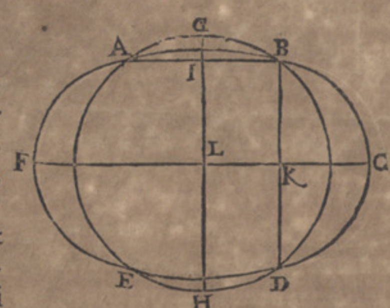


QVOD ſi quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt ſi dicantur æquales tres AB, AF, AC, vbi EA, coincidit cum AF; d erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quam AB, & AC, quod eſt abſurdum. Ponitur enim vtrique æqualis. d 7. tertij.

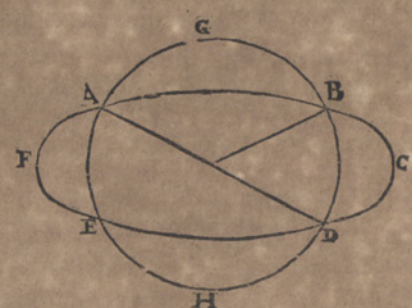
THEOR. 9. PROPOS. 10. x.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non ſecat.

SECET enim, ſi fieri poteſt, circulus ABCDEF, circulum AGDBHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus a bifariam diuiſis in I, & K, b educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, ſecant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; tranſibit vtraque, ex corollario propoſ. 1. huius lib. per centrum ipſius. Quare punctum L, in quo ſe diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonſtrabimus, punctum L, eſſe centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli ſe mutuo ſecantes idem poſſident centrum, c quod eſt abſurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non ſecat. Quod erat demonſtrandum. a 10. primi. b 11. primi. c 5. tertij.



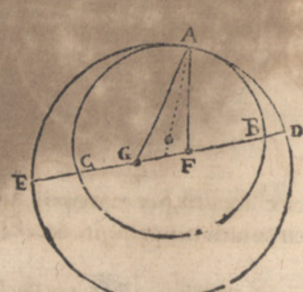
ALITER. Secent ſe iidem duo circuli, ſi fieri poteſt, in tribus punctis A, B, & D. d Inuentum autem ſit I, centrum circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter ſe. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, aſſumptum eſt punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ rectæ æquales, e erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli ſe mutuo ſecantes habent idem centrum. f Quod eſt abſurdum. d 1. tertij. e 9. tertij. f 5. tertij.



THEOR. 10. PROPOS. 11. xj.

SI duo circuli ſe ſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & ſit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod neceſſario ab illo diuerſum erit, cum duo circuli interius ſe tangentes, a non poſſint idem centrum habere. Dico rectam extenſam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit ſecet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, b maiora ſunt latere GA; Eſt autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, poſitum ſit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD. Quare cum FA, æqualis ſit ipſi FB; (quod F, poſitum fuerit centrum circuli ABC,) erit & FB, maior, quam FD, pars quam totum, quod eſt abſurdum. a 6. tertij. b 20. primi.



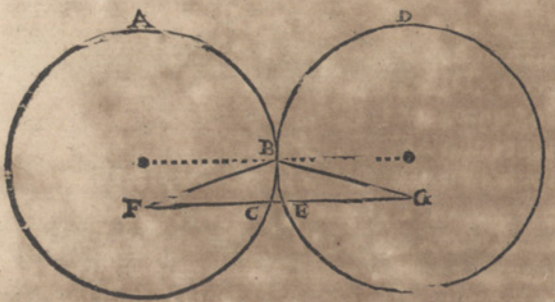
QVOD ſi quis velit contendere F, eſſe centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, inſtituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, c maiora ſunt latere FA: Eſt autem recta FA, rectæ FE, æqualis (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, maiores ſunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, maior, quam GE. Quia igitur GA, æqualis eſt ipſi GC: (propterea quod G, ponitur eſſe centrum circuli ABC,) erit quoque GC, maior, quam GE, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum ſequetur, ſi centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta FG, extenſa vtrumque circulum ſecabit, ſed in contactum A, cadet. Quare ſi duo circuli ſeſe intus contingant, &c. Quod erat demonſtrandum. c 20. primi.

THEOR. 11 PROPOS. 12. xij.

SI duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum tranſibit.

CIRCVLI duo ABC, DBE, tangant ſe exterius in B, & centrum circuli ABC, ſit F, circuli vero DBE, centrum ſit G. Dico rectam extenſam per F, & G, tranſire per contactum B. Si enim non tranſit, ſecet circumferentias in C, & E, ducanturq; à centris F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, *a* maiora ſunt latere FG: Eſt autem recta BF, rectæ FC, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli ABC,) & recta GB, rectæ GE, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE) erunt & rectæ FC, GE, maiores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe exterius contingant, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 20. primi.



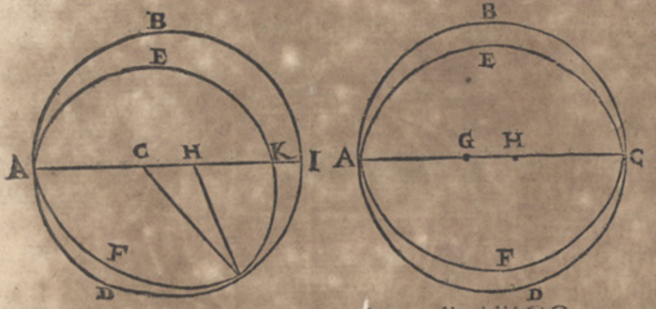
xiij.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in plurib. punctis, quã vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

TANGANT ſeſe circuli ABCD, AECF, intus, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Aſſumantur autem centra horum circulorum G, H, *a* quæ diuerſa erunt, per quæ recta GH, in vtramque partem extendatur, quam neceſſe eſt *b* cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, ſit centrum, & recta AGHC, diameter, diuidetur AGHC, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem AC, bifariam in H, quod eſt abſurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque GC, eſt dimidium totius AC, erit neceſſario HC, dimidio minor, cum ſit pars dimidij GC.

a 6. tertij.
b 11. tertij.

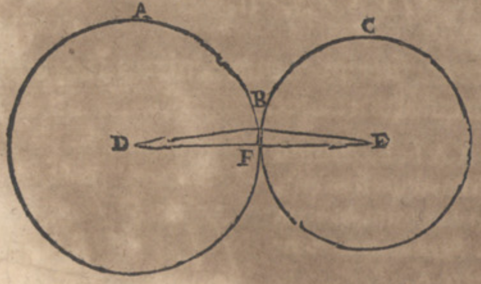


Quod ſi quis dicat rectam GH, extenſam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, ſed ſecare vtrumq; circulum in I, & K, vt in ſecunda figura perſpicuum eſt: (Dicere enim quis poſſet, in præcedenti propoſ. oſtenſum eſſe, rectam per duo centra circulorum ſeſe intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cum demonſtratio præcedentis propoſ. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, oſtendemus, abſurdum illud eſſe) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ GC, HC. Ponatur igitur primo G, centrum circuli ABCD: & H, centrum circuli AECF. Et quia in triangulo GHC, duo latera GH, HC, *c* maiora ſunt latere GC: Sunt autem rectæ GH, HC, æquales ipſi GK: (quod HC, HK, ex centro H, ſint æquales, & GH, communis) & recta GC, rectæ GI; (quod ſint ex G, centro) erit quoque recta GK, maior quam GI, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Ponatur ſecundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoniam igitur rectæ HG, GC, *d* maiores ſunt recta HC; Eſt autem HC, æqualis rectæ HA: (cum vtraque ducta ſit ex centro H,) erunt quoque HG, GC, maiores recta GA. Quare dempta communi HG, erit GC, maior, quam GA, quod eſt abſurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus ſe tangent in pluribus punctis, quam vno.

c 20. prim.
d 20. primi.

TANGANT ſe iam circuli AB, CB, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli AB, ad E, centrum circuli CB, recta DE, *e* quæ per contactum F, neceſſario tranſibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, ſe tangunt, tangant ſeſe in B. Ductis igitur rectis DB, EB, erunt rectæ DB, EB, æquales rectis DF, EF, hoc eſt ipſi DE: *f* Sunt autem & maiores, quod eſt abſurdum. Non ergo ſe tangẽt circuli exterius in pluribus punctis, quã vno.

e 12. tertij.
f 20. primi.



ALITER. Si circuli AB, CB, exterius ſe tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta BF, cadet ipſa intra vnum circulorum, per 2. propoſ. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod eſt contra eandem propoſ. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SI recte conſideretur Euclidis demonſtratio, qua probauit, circulum à circulo intus non poſſe tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potiſſimum concludere, circulum non poſſe tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longo interuallo à ſe diſſideant, non autem eundem contactum plura puncta habere non poſſe; quamuis facile hoc ipſum eodem argumento fere demonſtrari poßit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non poſſe tangere circulum, in plurib. punctis, quam vno, oſtendemus breuiter, in vno eodemq; contactu non poſſe eſſe plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus ABC, circulum ABD, prope A, & per eorum centra E, & F, g *quæ diuerſa ſunt, recta ducatur EF,* h *quæ ad contactum perueniet neceſſario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos ſeſe duntaxat tangere in puncto A. Si n. ſe tangant in alio etiam puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis BE, BF,* i *erunt rectæ EF, FB, maiores recta EB. Eſt autem recta EB, æqualis rectæ EA, cũ vtraq; ſit ex centro E. Igitur & rectæ EF, FB, maiores erunt recta EA. Quare dempta communi EF, remanebit FB, maior, quam FA, quod eſt abſurdum, cum FB, FA, cadant è centro F, ad circumferentiam, ideoq; ex circuli defin. æquales exiſtant. In ſolo ergo puncto A, ſe mutuo tangent circuli ABC, ABD, & non in alio.*

g 6. tertij.
h 11. tertij.
i 20. primi.



NON videtur etiam omittendum hoc loco ſequens theorema, videlicet.

SI in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt

ẞto vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totuſque extra eundem cadet.

Sit circulus A B C, cuius centrum D, & in ſemidiametro A D, producta ſumatur punctum quodcunq; E, ex quo ad interuallum E A, circulus deſcribatur AF, quem dico circulum ABC, in ſolo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, eſt intra circulum ABC, aut extra. Si intra, quoniam AE, maior eſt, quam AD, hoc eſt, quam DC, hoc eſt, à fortiori, quam EC; erit quoq; EF, quæ ipſi AE, æqualis eſt, maior quam EC: ac proinde punctum F, extra circulum ABC, exiſtet, circulusq; AF, extra eundem circulum ABC, prope punctum F, exiſtet. Multo magis punctum F, extra circulum ABC, cadet, ſi E, extra eundem circulum ABC, exiſtet: Si igitur circulus AF, non totus extra circulum ABC, cadat, ita vt eum in ſolo puncto A, tangat; ſecet, vel tangat circulus AF, circulum ABC, in alio puncto B, ſi fieri poteſt, ducaturq; recta DB. Quoniam igitur in diametro circuli AF, ſumptum eſt punctum D, præter centrum E, [k] erit DA, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor eſt ergo DA, quam DB. Quod eſt abſurdum. Sunt enim æquales rectæ D A, DB, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiuſdem circuli ABC. Non ergo circulus AF, circulum ABC, ſecat aut tangit in alio puncto, quam in A, ſed totus extra illum cadit. Quod eſt propoſitum. k 7. ter.



Quod ſi in ſemidiametro non producta punctum ſumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget quoq; priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totusq; intra eundem cadet. Vt ſi in ſemidiametro AE, circuli AF, ſumatur punctũ D, ex quo ad interuallũ DA, circulus deſcribatur ABC, cadet hic totus intra illum, tangetq; eum in ſolo puncto A. Cum enim oſtenſum proxime ſit, circulum A F, cadere totum extra circulum ABC, cadet viciſſim totus hic intra illum, ita vt ſe mutuo in ſolo puncto A, contingant.

THEOR. 13. PROPOS. 14. xiiij.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.

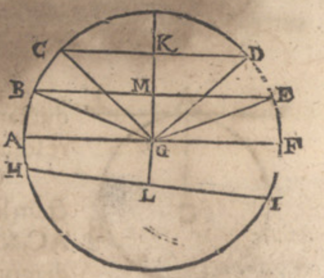


Sint in circulo ABCD, cuius centrum E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipſas æqualiter diſtare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, CD, duæ perpendiculares EF, EG, & coniungantur rectæ E A, E D. [a] Secabunt rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponãtur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter ſe ſunt æqualia; Quadratum autem rectæ EA, [b] æquale eſt quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum F E, GE, æqualia, ideoque & rectæ EF, EG, æquales erunt. Diſtant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. a 3. ter. b 47. tertij.

RVRSVS diſtent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter ſe eſſe æquales. Ducãtur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [c] diuidentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Eſt autem quadratum rectæ EA, [d] æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia ſunt quadratis rectarum D G, G E; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro &c. Quod erat demonſtrandum. c 3. tertij. d 47. prim.

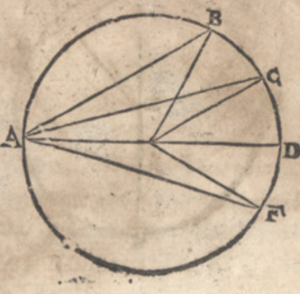
THEOR. 14. PROPOS. 15. xv.

IN circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior.



IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter ſit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium eſſe maximam A F, & HI, maiorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior eſt CD, à centro, quam H I, erit G K, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abſcindatur ex GK, recta GM, ipſi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares G M, G L, æquales ſunt, æqualiter diſtabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. huius lib. [a] & ideo inter ſe æquales erunt. Rurſus quia rectæ GB, GE, [b] maiores quidem ſunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior, quam BE. Eadem ratione oſtendetur AF, maior omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB, G E, trianguli B G E, æqualia ſunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, maior eſt angulo CGD; [c] erit recta BE, maior quam CD; atque adeo HI, quæ æqualis oſtenſa fuit ipſi BE, maior quoq; erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandum. a 14. ter. b 20. prim. c 24. prim.

SCHOLIVM.



Eodem fere modo demonſtrabitur theorema, ſi ab vno, eodemq; circumferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant.

Cadant enim à puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarum A D, per centrum E, tranſeat. Dico AD, eſſe omnium maximam, & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, [d] maiora ſint latere A C; ſintq; rectæ AE, EC, æquales rectis AE, ED, hoc eſt, rectæ AD; maior erit AD, quam AC. Eademq; ratione maior erit, quam AB; & ſic de cæteris. Maxima ergo omnium eſt AD. d 20. prim.

Deinde, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC, æqualia ſunt duobus lateribus AE, EB, trianguli AEB; & angulus AEC, c 24. prim. *totus maior eſt angulo AEB;* [c] *erit baſis A C, maior baſe AB. Eodemq; argumento erit A C, maior quacunq; alia linea, quæ à centro remotior eſt.*

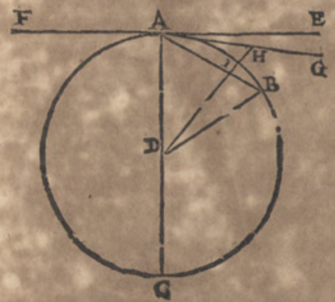
Cæterum & hic duæ tantum æquales lineæ duci poſſunt à puncto A, ad vtraſq; partes maximæ A D. Si namq; angulo AEC; æqualis fiat angulus AEF, iungaturq; recta AF; cum latera AE, EC, æqualia ſint lateribus AE, EF, & anguli contenti quo- f 4. prim. *que AEC, AEF, æquales;* [f] *erunt baſes AC, AF, æquales. Neq; vero vlla alia his duabus æqualis poteſt exhiberi. Quæcunq; enim ducatur ex A, ſupra AC, ea minor erit quam AC; ſi vero infra AC, ea maior erit, vt iam demonſtratum eſt.*

Quod ſi AB, AF, ad diuerſas partes diametri AD, ductæ ſint, & dicatur A F, propinquior centro, quàm AB, demonſtrabitur, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. AF, maiorem eſſe, quam AB. Si namq;, vt proxime oſtenſum fuit, ducatur ipſi AF, æqua- g 14. ter. *lis AC, ex altera parte, nempe ſi fiat angulo AEF, æqualis angulus AEC, &c. cadet punctum C, inter B, & D; quod AF, AC,* [g] *æqualiter diſtent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF, AEC. Hinc enim fit, cum AF, ponatur propinquior centro, quam AB, vt & A C, ipſi A F, æqualis, propinquior ſit centro, quam AB, ac proinde punctum C ſit inter B, & D. Cum ergo AC, maior ſit, quàm AB, vt in hoc ſcholio demonſtratum eſt, maior erit quoq; AF, quam AB.*

xvj. THEOR. 15. PROPOS. 16.

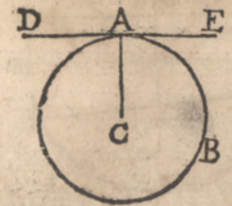
QVÆ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet: & ſemicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter ſit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem neceſſario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipſum, qualis a 5. prim. eſt AB; ducta DB, [a] erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, ſed DAB, rectus eſt, per conſtructionem: Igitur & b 17. prim. DBA, rectus erit, quod eſt abſurdum. Duo enim anguli in triangulo [b] minores ſunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob cauſam in ipſam circumferentiam, ſed extra, qualis eſt EF. Dico iam ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam A B, non poſſe cadere alteram rectam. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, ſecans circumferentiam in I, quæ neceſſario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo c 17. primi. DAH, [c] duo anguli DHA, DAH, minores ſunt duobus rectis; & DHA, rectus d 19. pri. eſt, per conſtructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc eſt, recta illi æqualis DI, [d] maior erit, quam D H, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam A B: ſed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea ſecabit circulum. Dico denique angulum ſemicirculi, contentum diametro AC. & circumferentia AB, maiorē eſſe omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem eſſe omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim oſtenſum eſt, omnē rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet neceſſario ea linea cum AC, angulum rectilineum acutum minorem angulo ſemicirculi, at vero cum A E, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentię, cum ille ſit pars anguli ſemicirculi, hic vero totum quidpiam reſpectu anguli contingentiæ. Id quod liquido conſtat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, vt demonſtratum eſt, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo ſemicirculi contento ſub diametro AC, & circumferentia A B C, cum ille huius ſit pars: Angulus vero contingentiæ contentus ſub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille huius pars ſit. Eademque ratio eſt de omnibus aliis angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro A C, vel tangente AE, & rectis ex A, ſub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonſtrauimus. Angulus igitur ſemicirculi maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaq; quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.



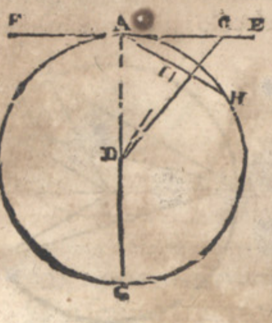
COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipſum circulum tangere. Oſtenſum enim eſt, ipſam cadere extra circulum. Quare ſolum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.



QVARE ſi iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli A B, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonſtratum eſt.

EX ORONTIO.



Poteſt hoc idem theorema demonſtrari oſtenſiue hac ratione. Sit diameter AC, in circulo ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad AC, perpendicularis AE, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta GD. Quoni- e 17. prim. *am igitur in triangulo ADG, duo anguli DAG, DGA,* [e] *minores ſunt duobus rectis, & DAG,* f 19. primi. *factus eſt rectus; erit DGA, recto minor. Quare* [f] *maior erit recta DG, quam DA; ideoq; punctum G, extra circulum erit. Eademq; eſt ratio de omnibus alijs punctis rectæ AE. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quam dico neceſſario ſecare circulum. Fiat enim angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur communi angulo D A H, erunt duo anguli A D I, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoq; minores* g 13. pron. *duobus rectis: Quare* [g] *coibunt rectæ A H, D I, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur pun-*

ctum

ctum I, eſſe intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo D A I, [h] æquales ſunt duobus rectis, & duo anguli D A I, ADI, oſtenſi ſunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atq; adeo maior, quam DAI, acutus. Quare recta DA, [i] maior eſt, quam DI. Non igitur DI, ad circumferentiam perueniet; proptereaq; punctum I, intra circulum exiſtet; atq; adeo recta A H, circulum ſecabit. Reliquæ partes theorematis oſtendentur, vt prius.

h 32. pri.

i 19. pri.



SCHOLIVM.

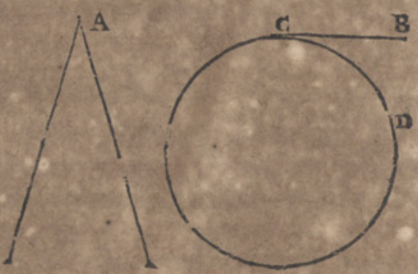
Exiſtimat Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem eſſe omni acuto angulo rectilineo, nihil eſſe, atq; adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem ſententia illius planior fiat, afferemus in medium digreſſionem illam, quam ipſe hoc loco inſtituit. Sic igitur inquit:

Cum huius theorematis caput poſtremum attentitus conſiderarem, mihi ſane in mentem ſubijt prima ſpecie, Geometriam non ſatis ſibi conſtare; immo adeo repugnantiam in ſe admittere.

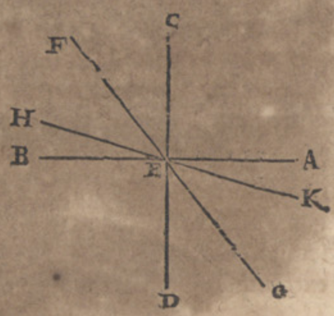
Primum enim extra intelligentiam eſt, vt inter quantitates minima dari poßit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, ſeu rectius, contactus, minorem omni acuto poſuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus ſemicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas eſt, quod partibus conſtet, & ſecundum eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum ſectio eſt. Atq; adeo cum in primam propoſitionem decimi incidiſſem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari poſſet tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

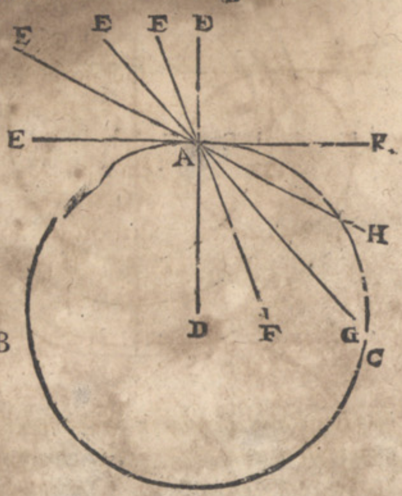
SI à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rurſus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore poſita.

Verbi cauſa, ſint duo anguli, A, quidem rectilineus; B C D, angulus (ſi modo ſit angulus) contactus: Vult prima decimi, ſi auferatur ab angulo A, maius, quam dimidium, ac rurſus à reliqua parte maius, quam dimidium; ſicque continuo ex reſiduis partibus maius, quam dimidium; tãdem relinqui minorem angulum, quam B CD. Cuius demonſtrationem hic non appono, cum ex ſequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propoſitio eſt, quæ (vt ſic dicam) magis naturaliter vera ſit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propoſitis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abſtuleris, vt quinarium; tum à ternario reſiduo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem poſito binario minorem? Neq; vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propoſitionis ſententiam de quantitatibus eiuſdem generis eſſe intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla eſt; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos cum illuc ventum erit, manifeſtum faciemus. Immo & ipſe Campanus ſecum pugnat, cum in ſecunda duodecimi demonſtranda, alijsq; propoſitionibus nonnullis ſolidorum, à curuo rectum auferat.



Nos igitur hanc dubitationem ſic expediemus; vt dicamus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; ſcilicet BCD, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in ſectione conſiſtit, non in contactu. Et vbi ceſſat ſectio, ceſſat quoq; anguli forma. Atq; vt vno verbo dicam, in decuſſatione (Decuſſationem hoc loco, & ſectionem ſine diſcrimine accipio) omnes angulorum ſpecies perficiuntur. Duabus enim lineis AB, & CD, ſe ſcindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligantur CD, ſic moueri in orbem, ſcilicet ſuper puncto E, fixo, vt ex CD, fiat FG; hinc ſane ex recto angulo A E C, fiet obtuſus A E F: Inde ex recto BEC, fiet acutus BEF. Cumq; facta fuerit H K, hinc quidem angulus obtuſior fiet HEA, inde vero acutior BEH; ſicq; continuo, donec peruenerit ad AB, & intra eoſdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immerſa; vt ſic dicam, linea CD, in lineam AB, euaneſcet angulus. Neq; diuerſa ratio eſt in curuo. Sit n. in circulo ABCA, cuius centrũ D, linea DE, præteriens peripheriam, & ſecans ipſam in A, puncto fixo, ſuper quod circumducatur ipſa DE, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo varij cum peripheria, in ipſo puncto A; donec ceſſante decuſſatione, linea ED, facta ſit EK, & tãgat circulum. Ac tum linea DE, non iam inclinata intelligitur, ſed immerſa in lineam BAC, quantum ad angulum attinet: non aliter quam ſi BAH, eſſet linea recta; neq; contra facit, quod deducantur lineæ, faciantq; ſpatium CAK. Nam id ſola AC, linea efficit, quæ rectam refugit; ſed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non conſiſtat, quam vno; ſit, vt punctum A, tam ſit ineptum angulo conſtituendo, quam modo erat punctum ſectionis E, linearum rectarum. Fortaſſe dices, punctum A, lineæ rectæ manere in ſuo recto, punctumq; A, peripheriæ in ſuo rotundo; neq; vtrumq; eſſe idem punctum; ſed lineas ſe tantum inter ſe veluti lambere, quia altera alteram penitus, omniq; puncto refugit; vt contraria contrapoſita fiant manifeſtiora; Id vero ſenſus non recipit. Duo enim circuli ſeſe exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, ſi intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipſum ABC, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe, vt nihil in cogitationem cadat, quod ſemel vſpiam Geometria non repræſentet. Illud tamen minime vrgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus. Hiabit enim vtrinq; ipſarum concurſus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

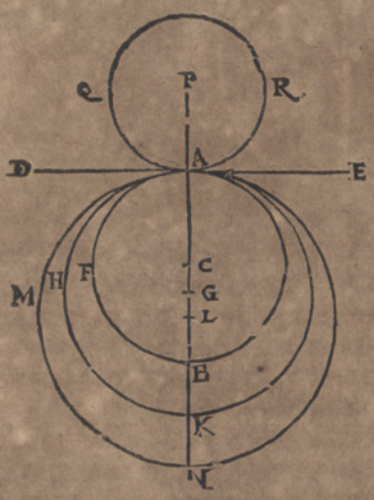




CON-

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non eſt.

Sit enim circulus AFBA, cuius centrum C, diameter vero AB, per cuius extremitatem A, ducatur linea DE, ad angulos rectos. Et conſtat, ex conſectario huius decimæſextæ lineam DE, contingere ipſum AFBA, circulum: ac propterea DAF eſſe minorem omni angulo acuto, ex ipſa Euclidis ſententia: ſcilicet per vltimam partem huiuſce decimæſextæ. Iam vero inter puncta C, & B, ſuſcipiatur in diametro AB, centrum G, & ſpatio GA, deſcribatur alter maior circulus AHKA. Dico FAH, non eſſe quantitatem. Conſtat quippe circulum AHKA, tranſire inter rectam DA, & curuam AF, cum ſit ſemidiameter GA, maior ſemidiametro CA. Manifeſtum quoq; eſt, lineam DE, tangere ipſum AHKA, circulum, ex eodem huiuſce decimæſextæ conſectario: ac propterea DAH, eſſe omni acuto minorem. Deſcribatur tertio, ſecundum maius ſpatium LA, circulus AMNA. Et erit ex eodem conſectario, DAM, omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea DE, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in AB, linea, minores omni acuto rectilineo: ac ſic omnes æquales, ſi modo æqualitas inter non quanta dici poſſit. Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: Fietq; vt MAF, contactus interior circulorum, neq; augeat, neq; minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non eſt. Quod erat demonſtrandum.



Sed & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non eſſe in hunc modum. Nempe cum omnes circuli ſint ſimiles, erunt & ſemicirculi ſimiles. Quapropter anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circul[is] ſunt æquales per conuerſam definitionis ſimilium ſectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, æqualis vtriq; angulorum KAH, NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non eſt. Quod fuit demonſtrandum. Hinc ſequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non eſt.

Manente enim eadem conſtructione, ſi DAF, ſit quantitas; ipſa vtiq; diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæſextæ: neq; per obliquam, vt per lineam AM. Eſſet enim FAM, pars ipſius DAF: Atqui FAM, quantitas non eſt, vt modo probauimus. Non eſt igitur FAM, pars ipſius DAF. Igitur DAF, neq; per lineam rectam, neq; per obliquam diuidi poteſt. Quare DAF, quantitas non eſt: Quod erat proband[um]. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non eſt.

In eadem conſtructione, protrahatur BA, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem PA, deſcribatur circulus AQRA, tangens circulum ABFA, exterius in puncto A. Dico contactum FAQ, non eſſe quantitatem. Id vero manifeſtum eſt ex poſteriori demonſtratione. Nam neq; per lineam obliquam diuiditur, cum FAM, non ſit quantitas per primam harum; neq; per rectam, cum neq; DAF, ſit quantitas, per ſecundam earundem; neq; DAQ, quantitas per eandem. Quare cum FAQ, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

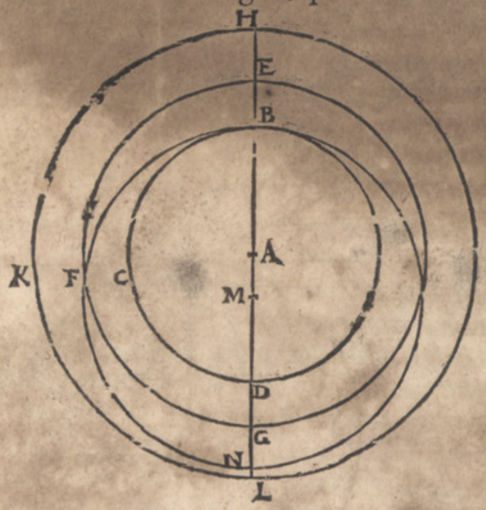
Ex his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum eſſe cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt à diametro, & peripheria, ſiue intra, ſiue extra circulum, recti ſunt, & rectis rectilineis æquales.

Vt in poſteriori figura, angulus BAF, æqualis eſt angulo BAD; cum ipſi nihil accreſcat ob contactum DAF, qui quantitas non eſt: & ob id QAP, rectus quoq; eſt, & æqualis ipſi DAP, cum DAQ, nihil addat: Quod erat probandum.

Hæc Peletarius hoc in loco. In epiſtola autem, quam ad Cardanum ſcribit, affert aliam demonſtrationem, quam ipſe ait pleniorem eſſe. Hanc igitur hic ſubijcere ſtatui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, ſunt æquales.



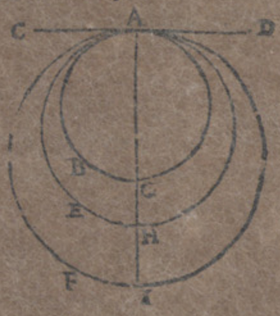
Sint enim ſuper centro A, duo circuli BCDB, & EFGE, quorum diametri BD, & EG; & ſecet EG, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD, & FED, eſſe æquales. Nam ſi ſit FED, maior ipſo CBD; (neq; enim contra, CBD, maior vllo pacto erit ipſo FED) ac deſcribantur plures circuli ſuper eodem centro A, quorum vnus hoc loco ſatis fuerit HKLH: fiet tandem ex continuo augmento, angulus à diametro, & peripheria, verbi gratia, angulus KHL, maior recto: quod eſt contra ipſius Euclidis ſententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter ſe æquales: quod fuit oſtendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neq; in hac demonſtrandi ratione vllus eſt paralogiſmus. Licet enim nulla ſit comparatio angulorum quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex ſectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipſos rectilineos. Eiuſmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeſte maiores, & minores fiunt.

His ad hunc modum demonſtratis, aio contactum circulorum interiorem, non eſſe quantitatem. Super centro M, in eadem linea HL, poſito, deſcribatur circulus BFNB, tanto interuallo, quanto eſt circulus EFGE; poſita ſcilicet MB, ſemidiametro æquali ipſi AE; qui circulus tangat BCDB, circulum in puncto B. Et manifeſtum eſt, angulum FBD, æqualem eſſe angulo FED, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipſe FBD, erit angulo CBD, æqualis. Igitur CBF, contactus nihil addit ad ipſum CBD, angulum. Quare CBF, quantitas non eſt: quod fuit probandum. Atq; hinc procedit demonſtratio eorum, quæ in 3. lib. adduximus, theorematum.

HÆC igitur eſt Peletarij ſententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi eſt contraria. Si enim Euclides ſenſiſſet,

ſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obſecro, tantopere deſudaſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, minus eſſe quocunq; angulo? Quid quoq; magis perſpicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere eſſe angulum, ac quantitatem, affirmamus; atq; adeo angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Vnde diſſoluenda ſunt à nobis omnia Peletarij ſophiſmata, quæ in hac digreſſione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil eſſe.

Primum igitur extra intelligentiam eſſe fatemur, vt inter quantitates minima dari poſſit: ſed inficiamur, nos aſſerere, angulum contactus eſſe minimam quantitatem: Immo vero aſſeueramus, quemuis angulum contactus, etſi ab Euclide minor oſtenſus eſt omni acuto rectilineo, diuidi poſſe in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonſtrauit, & optime; ſed per lineam circularem. Vt propoſito angulo contactus CAB, ſi per A, deſcribatur circulus AEH, maior circulo ABG, tangens rectam CD, in A; fiet angulus contactus CAE, minor angulo contactus CAB. Quod ſi adhuc maior circulus AFI, deſcribatur, erit multo minor angulus contactus CAF, eodem angulo contactus CAB. Atq; ita ſine fine ſemper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor ſit acuto rectilineo quocunq;. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor eſt recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit; cum diuidi poſſit infinite. Vt angulus acutus BAC, minor eſt recto BAF; & tamen ſi ducatur recta AD, inter AC, AB, fiet acutus minor BAD. Quod ſi alia recta AE, inter AB, AD, ducatur, erit multo minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.



Pari ratione aſſerimus, angulum contactus augeri poſſe infinite, ita vt quouis angulo contactus propoſito, dētur alij maiores ſine numero. Vt in ſuperiori figura circulari, angulo cōtactus CAF, maior eſt angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB; Atq; ita deinceps, ſi minores ſemper circuli, quam ABG, deſcribātur, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; ſemper tamen minor exiſtet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior eſt acutus BAD, & multo adhuc maior acutus BAC. Quod ſi alia recta ducatur inter perpendicularem AF, & rectam AC, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiuſmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui ſit æqualis angulo recto, vel maior recto, niſi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtuſum, ſed ſemper recto, vel obtuſo minor eſt angulus acutus: Ita quoq; in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis ſit acuto angulo rectilineo propoſito, vel maior acuto, niſi angulus contactus mutetur in alium angulū mixtum, (qui quidem efficitur à duabus lineis ſe ſecantibus; cuiuſmodi eſt angulus ſegmenti.) Sed angulus contactus acuto ſemper minor eſt.



Eodem modo negamus, nos ponere angulum ſemicirculi maximam quantitatem. Immo aſſerimus, quolibet angulo ſemicirculi propoſito, quamuis oſtenſus ſit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari poſſe maiores. Vt in eadem figura ſuperiori circulari, angulo ſemicirculi BAG, maior eſt angulus ſemicirculi EAH, & multo adhuc maior angulus ſemicirculi FAI: Atq; ita deinceps, ſi maiores ſemper circuli deſcribantur, quam AFI, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus ſemicirculi, ſemper tamen minor exiſtet angulo recto CAI. E contrario vero, angulo ſemicirculi FAI, minor eſt angulus ſemicirculi EAH, & multo adhuc minor angulus ſemicirculi BAG; nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior eſt quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonſtrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

Quod autem anguli contactus ſint inæquales inter ſe, non omnes æquales, vt vult Peletarius, ſimiliter & anguli ſemicirculorum, ex eo manifeſtum eſt, quod angulus quilibet conſiſtit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt conſtat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiuſdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi vnus alteri ſuperponatur; Ea enim æqualia ſunt, quæ ſibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis ſemicirculorum, nequaquam reperiatur ſemper eadem inclinatio, quod (vno ſuperpoſito alteri) lineæ eorum non ſibi reſpondeant, ſed prorſus inter ſe diſſideant, vt ex figuris ſuperioribus perſpicuum eſt; non erunt omnes anguli huiuſcemodi inter ſe æquales. Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam ſecari nequeat, vt recte oſtendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri poteſt cauſa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum ſecabit, donec iterum ipſum contingat: Tunc enim primum ſecare deſinet circulum. Quare ſi vel minime inclinari intelligatur ſuper puncto illo contactus fixo, ſecabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum poſſit tangere, vt ex 2. propoſ. huius lib. collegimus.

Solum igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli ſemicirculorum æquales inter ſe erunt, qui efficiuntur à peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ ſibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur à peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui à peripherijs maioribus, minores. Anguli deniq; ſemicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obſcure intelligi poteſt ex ſuperioribus figuris. Neq; enim lineæ talium angulorum ſibi mutuo conueniunt.

Conſtat ergo, quemuis angulum contactus habere partes: & vnum alteri poſſe æqualem exhiberi, ac rurſus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunq; angulo ſemicirculi dici poteſt. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam eſſe quantitatem, angulum vero ſemicirculi, maximam.

Deinde non eſt, quod anxium reddat Peletarium prima propoſitio decimi libri. Ea enim intelligenda eſt tam de quantitatibus eiuſdem generis, quam diuerſi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere poſſit; cuiuſmodi non ſunt angulus

contactus,

contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus ſiue bis ſumatur, ſiue ter, quaterue, ſiue denique quoties libuerit, ſemper minor eſt angulo acuto rectilineo. Si namq; quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter ſe æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel ſe illis æquarent; eſſet quoq; vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui eſt centeſima pars propoſiti anguli acuti rectilinei; quod eſt abſurdum, cum quilibet angulus contactus minor ſit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonſtratum. Quare nullo modo ex illa propoſitione colligere licebit; ſi ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rurſus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus propoſito; quoniam angulus contactus, vt dictum eſt, per quemcunq; etiam numerum multiplicatus, ſiue quantumuis auctus, ſemper minor exiſtit angulo acuto; nec vnquam ipſum ſuperare poteſt: quod tamen neceſſario requiritur ad demonſtrationem illius propoſitionis. Vt enim demonſtretur, multiplicanda eſt minor quantitas propoſita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipſe Euclides per Campanum, quando in Stereometria à curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propoſ. lib. 10. aſſumit ſemper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere poteſt.

IAM *vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici à duabus lineis ſe ſecantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano ad inuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt conſtat ex anguli plani deſcriptione tradita ab Euclide, quanquam ſe mutuo non ſecent, ſi producantur; cuiuſmodi ſunt peripheriæ ſe tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.*

PORRO *demonſtratio Peletarij, qua conatur oſtendere, contactum interiorem non eſſe quantitatem, nullius eſt momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores ſint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter ſe omnes æquales eſſe neceſſe eſt, ſed poteſt alio alius maior eſſe, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores ſunt angulo recto, & tamen ipſi inter ſe non ſunt omnes æquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoq; naturalibus exemplum afferamus,) minores ſunt homine, vel monte, cum tamen ipſæ inter ſe valde ſint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil eſſe.*

NEGAMVS *deinde, angulos ſegmentorum ſimilium æquales eſſe. ſicut ipſe aſſumit in ſequenti demonſtratione: Neque n. hoc Euclides ſignificauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea ſegmenta eſſe ſimilia, in quibus anguli rectilinei ſunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales exiſtunt. Imo magnum diſcrimen eſt inter angulos in ſegmentis, & angulos ſegmentorum, vt aperte conſtabit ex propoſ. 31. huius lib.*

EX *his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonſtrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur à linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior ſit verè pars eius, cum contrarium nullo modo oſtenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem conſtituunt duo circuli ſe exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrumq; tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo aſſeruit, angulum ſemicirculi æqualem eſſe angulo recto rectilineo. Excedit namq; rectus angulus angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Poſtremo hallucinatus eſt quoq; Peletarius in illa demonſtratione, quam ad Cardanum miſit. Etſi enim angulus ſemicirculi in maiori circulo maior eſt angulo ſemicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus ſemicirculi maior ſit angulo recto. Semper enim rectus angulus ſuperabit quemuis angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto propoſito, dari poſſunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet. Conſtat igitur ex his, angulũ contactus verè eſſe angulum, demonſtrationes autem Peletarij ſophiſticas eſſe, ac nullius momenti, hominéq; Geometra prorſus indignas.*

HÆC *porro mea de angulo contactus diſputatio adeo Peletarium commouit, atq; perturbauit, vt læſam eſſe omnino, atq; offenſam exiſtimationem putauerit ſuam. Quare annis ferè quinq; poſt mei in Euclidem commentarij editionem, hoc eſt, anno 1579. vt ſe defenderet, Apologiam in me conſcripſit: in qua tamen neq; auſus eſt ſolutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neq; opinionem ſuam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (ſcilicet nullas habebat) confirmare, ſed verbis duntaxat, & conuitijs ſe defendere conatur, vt facile ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quam veritatis tuendæ gratia reſpondiſſem, niſi me ab hoc conſilio grauiſſima eruditiſſimorum hominum auctoritas, qui eam reſponſo omnino indignam iudicabant, reuocaſſet. Nunc vero quoniam locus hic à me poſtulare videtur, vt in ſecunda hac editione patrocinium veritatis iterum ſuſcipiam, non alienum eſſe duxi, breuiter calumnias, atq; iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modeſtia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam ſit anno 1586. in meis triangulis ſphæricis, vbi neceſſario de re ipſa, eiuſq; Apologiæ mentio facienda fuit; quia tamen fortaſſis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus ſum me facturum, ſi totam illam reſponſionem hic, vbi proprius eius locus eſt, interſeram, vt benignus lector intelligat, ſine cauſa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ ſe fert, contra me exarſiſſe, falſoq; mihi impoſuiſſe multa: me autem è contrario nullum verbum iniurioſum in illum effudiſſe, aut conuitium, quod fruſtra in epiſtola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuitijs non abſtinere, aperte teſtatur. Atq; in illa Apologia nihil adeo me offendit, quam quod me Peletarius non ſyncere, ſed animoſe, atq; adeo inuidioſe feciſſe inſimulat, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: quæ ſane vitia puſilli ſemper animi eſſe duxi, & ab homine liberaliter, Chriſtianeq; educato alieniſſima. Verum ea quam longe abſint tum à noſtræ Societatis diſciplina, tum à mea conſuetudine, nemo omnino, qui nos ac noſtra norit, ignorat. His vero, qui noſtra minime norunt, hic ipſe liber fidem faciet, ſyncere omnia dici, nihil inuidioſe, nihil animoſe: planè vt veritatem quæſitam, non cuiuſq; auctoritatem contemptam eſſe appareat. Neq; enim mihi tantum derogo, (etſi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, ſi quid in alienis ſcriptis falſum videatur, occaſione oblata, cur id mihi minus probetur, oſtendam; modo (quod prudentium, ac bene moratorum hominum conſuetudo poſtulat) id ſine conuitio, atq; irriſione faciam: Hoc autem liber ipſe, qui in medio eſt, ita à me factum eſſe clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel ſpeciem maledicti habeat, atq; conuitij. Nam in ſcholio hoc de angulo contactus iurare liquido poſſem, nihil me minus cogitaſſe, quam vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; ſed illud habuiſſe propoſitum, (ſi modo conſequi poſſem) vt ſuus eſſet veritati locus. Quod quidem eò liberius feci, quod Peletario ipſo non modo inuito, ſed etiam libenti exiſtimaui me eſſe facturum,*

ſturum, quod vel ipſo auctore facerem: qui n[illegible]ardano ſolum atq; Campano, ſed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratoſthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, [illegible]metriæ luminibus, ab ipſo deniq; omnium magiſtro Euclide diſſentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia vere dictum eſt, in omni doctrina, præſertim vero in Geometria, non auctoritas eſt ſpectanda, ſed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis ſit is, apud quem veritas odium parit; niſi forte aut decipi ſe non poſſe arbitratur, qui columina illa Geometriæ erraſſe interdũ prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potius, quam in ſuis. Equidem ſi quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri poſſe video) erraſſe oſtenderit, næ ego maximam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat ſtudium veritatis Peletarius, conuitia ferre non poteſt: quæ tandem conuitia? rogas? Demonſtrationes meas appellat ſophiſmata. Nũc demum, quæ conuitia dicat, intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro eſſe certo ſcio: ab his (ſi conuitia ſunt) fateor me non abſtinere. At ego homo ſimplex, & ignarus verborum, conuitia eſſe nunquam duxi, cum vere dicerentur. Neq; enim, quo alio vocabulo demonſtrationes plane fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neq; vero philoſophorum, ac Mathematicorum conſuetudo loquendi magis appoſitum mihi verbum ſuppeditabat. Accedit, quod cum à Peletario, homine in loquendo conſideratiſſimo, germanas Campani, Cardaniq; demonſtrationes paralogiſmos appellari viderem, exiſtimaui in falſis eius demonſtrationibus refellendis impunius perſimili me vocabulo vſurum. Quod ſi ſophiſma contumelioſius verbum eſt, quã paralogiſmus, in Gallia, ignoſcat conſuetudinis eius ignaro, atq; exiſtimet, me paralogiſmos dicere voluiſſe. Atq; vt plane intelligat Peletarius, me non contradicendi ſtudio illa ſcripſiſſe, mecum vna conſideret, quantam mihi materiam ſui refellendi dederit, ſi hominem refellere potius, quam rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuiſſet: quanquam occaſionem eius reprehendendi in ſinum delatam ſæpius omiſi, ne illum mihi delegiſſe viderer, in quem potiſſimum incurrerem. Quàm præclara enim occaſ[illegible] fuit in propoſ. 4. & 8. lib. 1. atq; in propoſ. 24. lib. 3. quam ipſe 23. facit? In his enim omnibus reijcit demonſtrationes antiquiſſimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri ſuperponi concipere animo oporteat: quod ipſe à Geometriæ dignitate putat eſſe alienum, hac ſolum inductus ratione, quod ſuperpoſitionem illã mechanicũ quid eſſe arbitretur, & quod omnes fere propoſitiones hoc modo, vt ait, poſſint demonſtrari, etiã problemata, in quibus aliquid proponitur conſtruendum: atq; in huius rei exemplum adducit propoſ. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata ſunt. Hic certe Peletarium iure carpere potuiſſem, ſi id mihi fuiſſet propoſitum, vt falſo criminatur; maxime in eo, quod eadem ratione vſui fore exiſtimauit ſuperpoſitionem in demonſtrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non ſatis intellexiſſe videtur, quo pacto Geometræ ſuperpoſitione illã vſurpent. Neq; n. volunt, re ipſa faciedã eſſe ſuperpoſitionẽ, (hoc n. mechanicũ quid eſſet) ſed cogitatione tantũ, ac mẽte, quod opus eſt rationis atq; intellectus. Itaq; in theorematib. quidẽ locũ habebit genus hoc argumẽtandi, in problematib[illegible] vero non. Namq; in theorematib. propter magnitudinũ æqualitatẽ, inæqualitatẽue, quæ, vt nota ponitur, facile intellectus cuiuſuis ſine vlla hæſitatione cõprehẽdit, vnã vel non excedere alterã, vel excedere, ſi animo concipiatur vna alteri eſſe ſuperpoſita, quãuis re ipſa non fiat illa ſuperpoſitio, vt in propoſ. 4. lib. 1. factũ eſt: At in problematib. in quib. magnitudinẽ quis alteri æqualẽ conſtruere iubetur, licet mente cogitet magnitudinẽ propoſitã transferri in aliũ locũ, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipſa translatio nulla facta ſit: Vt mirum ſit, Peletarium ſibi perſuadere potuiſſe, propoſ. 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per ſuperpoſitionẽ, ſiue trãslationẽ linearum, figurarumue poſſe demonſtrari, ſi hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certe hac in re non ſolum Euclidem in crimen vocat Peletarius, verum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonſtrando, & ſubtilior fuit nemo, eiuſq; commentatorem grauiſſimum, eumq; doctiſſimũ Eutocium Aſcalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immo vero & omnes Geometras redarguat neceſſe eſt, qui non raro hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quò tandem egregius hic noſter Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, ſit deuolutus. Viderat Peletarius, (neq; enim rem adeo manifeſtam videre non poterat) ſi hunc modum argumentandi è medio tollat; vniuerſam ſe Geometriam funditus euertere, cum plurima, eaq; præcipua propoſitiones in Geometria demonſtrentur ex propoſitione 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonſtrari nequeunt, quam per illam figurarũ ſuperpoſitionem, non quidem re ipſa exiſtentem, ſed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehenſam. Quo igitur ſe verteret? quid ageret? Excogitauit ſane rem magis à Geometria alienam, quam eſt ſuperpoſitio illa figurarũ. Coactus enim eſt aſſerere, propoſitionem 4. lib. 1. eſſe definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atq; adeo concedendam eam eſſe ſine demonſtratione: propoſitionem vero 8. eiuſdem lib. principium eſſe per ſe quoq; notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita ſcribit in propoſitionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori ſpecie æqualitas figurarum dignoſcitur, quam ex laterum æqualitate.) Idemq; quaſi confirmat, & repetit in propoſitionem 8. eiuſdem lib. dum ita loquitur. (Quis enim negauerit, duas ſuperficies eſſe æquales, quarum latera & quantitate, & numero ſunt æqualia?) Hac Peletarius, vt dictæ propoſitiones Euclidis ſine demonſtratione admittantur, commentus eſt, ſed quæ omnino falſa ſunt: vt magnopere mirandum ſit, potuiſſe eum propoſitiones à Geometria prorſus alienas tam inconſiderate proferre. Scilicet verum eſt, quod philoſophi aſſerunt; Dato vno abſurdo, cætera conſequuntur. Aſſumpſerat enim Peletarius propoſ. 4. & 8. lib. 1. pro principijs: quod quidem falſum eſt, atq; abſurdum. Vnde ad eas abſurditates neceſſario deuenit, quas etiam illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facile vitare potuiſſent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamſi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, poſſe tamen inter ſe valde eſſe inæqualia? Id quod in Pentagonis quoq; æquilateris, & in alijs figuris plurium laterum æqualium cerni poteſt: quod non eſt huius loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonſtrandum fuit neceſſario Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in alijs figuris ea non colligitur. Quare neq; propoſitio 4. Definitio, neq; propoſitio 8. principium erit; ac proinde omnes propoſitiones, quæ illis nituntur, quæ innumerabiles propemodum ſunt, corruant neceſſe eſt, niſi demonſtrationes Euclidis recipiantur in illis propoſitionibus, cum alio modo demonſtrari non poſſint. Demonſtratio enim noua propoſ. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud eſt, quam (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perſpicuum erit cuilibet, qui eam diligentius conſiderare voluerit. Nam in ea ſolum conſtruitur vnum triangulum poſteriori ex duobus datis æquale, immo idem, atque hoc ipſum quidẽ ineptiſſime, cum ad id præſtandum circulos deſcribat Peletarius, quibus tamen in demonſtratione non vtitur, quod vitioſum omnino eſt in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc conſtructum, quod à poſteriori ex duobus propoſitis non differt, priori eſſe æquale, ſine vlla demonſtratione; certum autem eſt, hoc ab initio propoſitum fuiſſe, vt demonſtraretur. Quocirca manifeſte principium petit, cum eadem facilitate ſtatim in principio concludere potuiſſet, etiamſi nullam adhibuiſſet conſtructionem, triangula propoſita eſſe æqualia; quippe cum conſtructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonſtratione propoſ. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Prætereo alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propoſitionibus Euclidis in demonſtrando, vt quod plerunq;

runq; ſecundam propoſ.lib.1.inſcite pro tertia aſſumat, &c. Neq; n.mihi in animo nunc eſt, eius commentarios examinare, ſed ſolū calumnias, quas frequentes in ſua Apologia adhibuit, à me depellere. Quæ cum ita ſint, quod ille falsò de me, vere ego de illo dicere poſſem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretem contigiſſe, qui non iam Theonem, aut Campanum emendet, ſed ipſum Euclidem ſine cauſa reprehendat; quippe cum ego Euclidem (vti par eſt) à calumnijs ipſius defendam, omneſq; inſidias, ac fallacias, quas contra eum inſtruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuiſſe, vt Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores diſsimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protuliſſem, niſi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius à me, de quo tam acerbe queritur, tum beneficiū acceperit, & ex breui hac diſputatione fructus aliquid, vtilitatiſq; percipere. Nunc vt, quam diſpari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atq; ita refellā ac diluam, vt omnes oculis videant, eas eſſe calumnias: In quo tamen eiuſmodi à me moderatio adhibebitur, vt modeſtiæ, quæ hominem religioſum decet, minime obliuiſcar. Neq; enim illi, vti prouocauit, reſpondebo.

Primum itaq; mihi obijcit Peletarius, quod in eius demōſtrationib. citandis ita me geſſerim, vt ſi quo modo nomen ipſius ſupprimere potuiſſem, id me oſtendam libenter fuiſſe facturū. Quod quam ſit falſum, facile iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cū vbiq; eū honorifice appellē, eiq; plurimas demonſtrationes aſcribā, tanquā proprias, quas tamen aliter, quā ipſe, & multo breuius demonſtro, & interdum etiā (quod maius eſt) vniuerſalius, vt liquido conſtat ex ijs, quæ tū ad prop. 38. tū ad propoſ. 45. lib. 1. ex Peletario demonſtraui, vt alia interim taceā: quæ non iniuria mihi vendicare potuiſſem: vt mirer, quid illi in mentē venerit, id à me parū ſyncere, atq; adeo inuidioſe factū exiſtimare, quod ego verebar, ne nimis ambitioſe factū quiſpiā iudicaret. Quod vero propoſ. 16. lib. 3. & in priorib. duabus definitionib. lib. 5. vt ipſe obijcit, animoſe, vt ego fateor, libere, quid de eius demonſtrationib. ſentirē, expoſui, id feci, vt iā ante dixi, non cuiuſquam lædendi cauſa, ſed quærendæ veritatis. Ea n. eſt natura, & conditio eorū, qui liberalib. artibus dant operā, vt etiamſi alter alterius interdū ſententiā impugnet, non tamen idcirco odijs potius, quam ingenijs inter ſe certare videantur. Qui ſit aliorum ſenſus ignoro, equidē, vt ſupra dixi, ita ſum animo, vt ſi quis me alicuius erroris in demonſtrando commiſsi admoneret, ei quā maximas gratias haberē: atq; vt liberius id facerēt, enixe rogaui non paucos, & nunc iterū eoſdem, atq; etiā alios amice oratos volo. Scio n. quā facile poſsit in ſuis quiſq; inuentis hallucinari; video (quod ipſe quoq; Peletarius in Apologia ſapienter aſſeruit) omnib. hominibus cōmune eſſe, vt peccent. Deinde ꝙ in additionib. ad propoſ. 47. lib. 1. eius mentionē non fecerim, non eſt, quod ægre ferat, cum illæ propoſitiones non ſint ab ipſo inuentæ. Quadā n. multo tēpore ante ipſum demonſtratæ ſunt vel à Campano, vel à Proclo, aut Theone, quaſdā vero demōſtraui egomet, antequā ipſius demonſtrationes vidiſſem; quod adeo manifeſtæ ſint, & faciles, vt nulla probatione egeant, ſed ſint inſtar corollariorū propoſ. 47. Vt nulla prorſus laus, aut gloria illi acceſſura videretur, ſi maxime eas ab ipſo inuentas eſſe (ꝙ tamen verū non eſt) prædicaſſem; cū eas quilibet, modo primorib. labris ſtudia Mathematica deguſtarit, nullo negotio ex illa propoſ. 47. colligere poſsit: Vt non videā, cur tandē eas propoſitiones tanti ponderis eſſe dicat, cum ſint omniū iudicio leuiſsimæ; adeo vt in pleriſq; earū nec ipſe Peletarius demonſtrationē vllā, propter earū euidentiā, adducat, ſed eas nulla probatione egere fateatur. Deniq; non eſt, quod tantopere mihi ſuccenſeat idcirco, quod conſtructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli ſupra datā rectā lineam finitā ei non tribuerim: quoniā in ea conſtructione nihil prorſus ab eo ſum mutuatus: quod ijs dijudicandū relinquo, qui meā cum illius conſtructione contulerint. Nam & mea omnino diuerſa eſt, & ille in ſua mirifice (vt alia peccata taceā) abutitur proportione 9. lib. 3. cū ex ea probet, punctum quoddā eſſe centrū circuli, qui nondum eſt deſcriptus. Geometra ſane dixiſſet, punctū illud eſſe eiuſmodi, vt circulus ex eo deſcriptus ad interuallū cuiuslibet lineæ rectæ ex illis trib. quæ ibi oſtenſæ ſunt æquales, tranſeat per extremitates reliquarū duarū linearū æqualiū. Nā propoſitio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rē facit, cū propoſitū ex ipſa conſtructione poſsit concludi, & ex demonſtratis, vt proxime dixi, etiamſi propoſitio illa vera non eſſet, aut nuſquā demōſtrata. Idē peccatū cōmittit Peletarius in omnib. propoſitionib. lib. 4. in quib. vel intra figurā rectilineā, vel circa eandē circulus deſcribendus eſt. Quod ſi ideo ſum reprehendendus, quod propoſitionē vnā, multo aliter à me, & breuius demonſtratā, ei non aſcripſerim, non video, quo pacto in idē ipſe vitiū non incurrat, cū problema hoc (propoſitis duab. lineis inæqualib. potentiā maioris ſupra minorē cognoſcere.) multis ſeculis ante ipſum à Theone demonſtratū ſibi arroget; hac ſolū de cauſa, vt arbitror, quod illud alia ratione, longiore tamen, demonſtrauit. Mitto hoc aliud problema, (Dato angulo rectilineo æqualē angulū curuilineū conſtituere.) quod in Apologia ſuū propriū appellat, idemq; hactenus deſideratū eſſe gloriatur; cū tamen illud ipſum ego ex Proclo, qui multis ante eū ſeculis floruit, in defin. 5. lib. 5. multo breuius, & clarius demonſtrauerim. Nam, vt eo in loco oſtendi, ſi rectæ lineæ datū angulū rectilineū continentes ponantur æquales, & circa ipſas duo ſemicirculi (qui æquales erunt) verſus eaſdē partes deſcribantur, illico conſtitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neq; opus eſt tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eā rē demōſtrandam adhibet; quamuis robur demonſtrationis ipſius idē ſit, quod meæ. Et quod magis mirandū eſt, fatetur Peletarius, ſe meā demonſtrationē vidiſſe, & eā nihilominus ſibi audet, tanquā propriā, arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonſtrationes parū honeſte, vt mihi vendicē, ſibi ſubducere conatū. Quis autē non videt, id eum in altero vituperare, quod ipſe ſibi glorioſum putat? Itaq; multo verius, ac iuſtius eodem illum crimine ego, quàm ille me, condemnare poſſum; cum nunquam propoſitionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipſe, ſed ſolum eius nomen, ob rationes à me expoſitas, reticuerim.

Deinde angulū cōtactus, & acutū rectilineū eiuſdē generis eſſe, cōtra me plurib. verbis conatur oſtēdere. Sed neſcio quo modo aberrat, ꝙ dicitur, à ſcopo. Solū n. probat, vtrūq; angulū eodē genere quantitatis cōtineri, h. e. vtrūq; angulū planū eſſe: ꝙ acutus angulus rectilineus, vel etiā rectus conſtare poſsit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: ꝙ neq; ego, neq; vllus vnquā Geometra negauit. Ego angulos illos eiuſdē eſſe generis negaui hac ſolū de cauſa; quod angulus contactus quantūuis multiplicatus angulū acutū rectilineū ſuperare nequeat, vt in ſcholio huius propo. 16. euidenter oſtendi. Hinc n. fit, vt alter ad alterū proportionē non habeat, atq; adeo quodāmodo diuerſi generis ſint: quemadmodū eadē de cauſa linea recta finita, & infinita nō cenſentur eſſe eiuſdē generis, cū altera ad alterā proportionē non habeat; quāuis ſub eodē genere magnitudinis; nimirū ſub linea recta, cōprehēdantur. Hoc itaq; feriat, vt collimaſſe videatur: quamq̃ vt omnia faciat, collimabit nunquā; ita longe abeſt, ꝙ eſt ꝓpoſitū. Magnitudines aūt, quarū altera multiplicata alterā ſuperare nequit, non cenſeri eiuſdē generis, (ꝙ ad ꝓportionē attinet) licet ſub eodē genere quantitatis, h. e. ſub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocētur, liquido conſtat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides ſatis perſpicue explicat, cuiuſmodi debeant eſſe magnitudines eiuſdē generis, inter quas proportio reperit. Quare viderint alij, Peletarius homo conſideratus q̃ cogitate me incogitantem hominē appellarit; quaſi non recte intellexerim, quæ magnitudines ſint eiuſdē generis, quæ non ſint. Nūquā n. dixi (id ꝙ mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinū, quæ ſub diuerſis quantitatis generib. collocātur, quales ſunt linea, ſuperficies, corpus, ac numerus, alterutrā ita poſſe multiplicari, vt alterā ſuperet: In quo, nemine reluctante, fruſtra ſeſe fatigat, vt doceat, id fieri non poſſe, ſed de illis duntaxat magnitudinib. ſum locutus, quæ cū in eodē genere quantitatis verſentur, diuerſi tamen generis cenſeri poſſunt: quales ſunt ſuperficies rectilinea, & curuilinea, ſiue mixta: Itemq; linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter ſe videntur,

vt Ariſtoteles liquido aſſirmarit, vnam alteri æqualem eſſe non poſſe: quod tamen (pace Ariſtotelis dictum ſit) verum vſquequaq; non eſt; cum Archimedes in lib. de lineis ſpiralibus demonſtrauerit, quænam linea recta æqualis poſſit eſſe circumferentiæ cuiuſuis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli oſtenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuerſiq; propterea eſſe quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodem magnitudinis genere ponantur: quales ſunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita. Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas pleriq; excludebant; cuiuſmodi ſunt curuilinea, ſuperficies, & rectilinea; nec non linea circularis, & recta, vt paulo ante diximus, latiuſq; in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verum Peletarius, ne opinionem illam ſuam, quam de angulo contactus ſemel imbiberat, deſerere cogeretur, noluit hanc expoſitionem 5. defin. lib. 5. recipere; immo eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia intendiſſe neruos, oblitus ſui, qui fere eodem modo illam defin. in 5. lib. olim expoſuerat; niſi quod non recte inde colligit, angulum contactus non eſſe quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, poſſit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falſum eſt. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non poſſit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. ſolum recte colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportinem vllam; ad angulum vero alium contactus quemcunq; proportionem habere. Sed ſiue ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib 5. colligi poteſt, ſiue ſecus, vt in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certe ita illam eſſe intelligendam, vt expoſui, nemo qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim vero, ſi mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certe, (niſi arrogans haberi volet) aut Proclo grauiſſimo ſcriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Euclidis ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Luſitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac noſtra ætate in Mathematicis inferior) vt eum vnum pro multis millibus teſtem citet, & ſuarum demonſtrationum approbatorem, qui diſertiſſimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra ſua, illam definitionem explicat, vt à me eſt expoſita: quinetiam ibidem aſſerit ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quem teſtem produxerat pro ſe Peletarius, iam pro me teſtimonium dicat. Atq; ex hiſce duobus locis Petri Nonij facile quiuis intelliget, quam ſine ratione, & quanto contradicendi ſtudio mihi inſultet Peletarius, cum ſemel atq; iterum odioſe percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitam deportare? In idem enim (ſi crimen eſt, lineam infinitam exempli cauſa nominare) vocat etiam Petrum Nonium teſtem ſuum, atq; adeo omnes philoſophos, quorum eſt illa vox nemini inaudita, præterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam eſſe proportionem. Deſinat igitur à me ſciſcitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim reſpondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde philoſophi omnes deportarunt. Quid? nonne ſophiſma illud Peletarij, ſemper in hoc erro, demonſtratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur oſtendere, propoſitionem 1. libr. 10. cum propoſ. 16. libr. 3. ſtare non poſſe, ſi angulus contactus concedatur eſſe quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorſus ratione, qua à me ipſo, confutatur? Quæ ſi germana demonſtratio eſt, miror quid ſit, cur eam Nonius Geometriæ ſcientiſſimus, idemq; Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonſtrationes eiuſdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non eſſe, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (niſi fallor) illa Nonij verba (Si quis ſententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) declarant. Nam ſi demonſtrationes exiſtimaſſet, profecto Peletarij doctrinam in eo retinendam eſſe dixiſſet, Geometricæ enim demonſtrationes eiuſmodi ſunt, vt aſſenſum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloq; modo quempiam ſinant ancipiti opinione diſtrahi ſic, vt tum aſſentiatur, ſi velit, tum, ſi nolit, diſſentiat. En cur Peletarius Nonij teſtimonio aliorum iudicia contemnat, en præclarum teſtimonium, quod Petrus Nonius eius demonſtrationibus dedit: quo æquiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quam ab illo ſuo approbatore, demonſtrationes putari.

TERTIO, quod exiſtimare dixi Peletarium, angulum contingentiæ nihil eſſe, falſum eſſe, clamat: Nuſquam enim dixiſſe ſe, nihil eſſe, ſed quantitatem non eſſe. Ita ne vero? at in prædicamento Quantitatis, quod neq; eſt punctum, (quis enim inclinationem illam punctum eſſe dixerit?) neq; quantitas, quo alio nomine vocetur, quam Nihil? Sed vt vt dixit, profecto non modo mirabile eſt, ſed monſtri in Geometria ſimile, putare angulum contactus non eſſe quantitatem, qui poſtea additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non eſt, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Præterea, quod figura trilatera curuilinea intra tres circulos ſe mutuo tangentes concluſa nullum haberet angulum ex Peletarij ſententia; quia tres illi contactus, anguli non ſunt: cum tamen tribus diuerſis lineis contineatur; quod omnino nouum eſt, & inauditum apud Geometras. Itemq;, ſi quatuor, aut plures circuli ſe mutuo tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atq; etiam, ſi duæ lineæ rectæ angulum continentes, vnum eundemq; circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantū haberet angulum. Quæ omnia ſi ſunt abſurda, conſentanea non eſt opinio Peletarij. Sed nimis fortaſſe multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam vero, ne pro Nihilo ſuo nihil agere videatur, quando res non poteſt, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille neſcio quibus præſtigijs ita deprauat, vt dicere videar, Nihil eſſe minus quocunq; angulo: atq; (vt ſimplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus ſermonis ſit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiuſmodi ſermonem agnoſco, qui, Nihil eſſe minus quocunq; angulo, nuſquam dixerim, niſi ex ſententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt ſuum illud Nihil vlciſceretur, aliud mihi Nihil affinxit, quo cum impune pugnaret: At quam palæſtricè pugnat? quam ſibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipſum mira venuſtate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulus contactus nihil eſt: Angulus contactus angulo contactus maior eſt. Angulus igitur maior nihilo eſt: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo. Eſt igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor) Mox quaſi Nihil illud ab ſe effictum iugulaſſet, exclamat. (En Clauii argumenta, quæ vtrum tandem Peletarij ſophiſmata ſunt, an Clauij potius figmenta, cum ipſe ſuum angulum contactus nihil eſſe dicat, non ego?) Verum vt hominem fæneum, atq; adumbratum ne quicquam petere deſinat, virum oſtendam, qui cum, ſi velit, certare cum laude poſſit. Ego, vt oſtenderem, angulum contactus, ex Euclidis ſententia, vere eſſe angulum, & angulum ſemicirculi angulo recto rectilineo minorem; ita ſum argumentatus. Si Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, (hoc eſt, vt Peletarius intelligit, non eſſe angulum, vel non eſſe quantitatem) & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo; quid, obſecro, tantopere deſudaſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, hoc eſt,

quàm id, quod quantitas non eſt, minus eſſe quocunq; angulo? Quid rurſus magis perſpicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Agnoſcat itaq; Peletarius, Nihil illud ſuum male à nobis acceptum, idq; ita vlciſcatur, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego ſi angulum contactus dixi eſſe nihil, & non potius eum nihil eſſe aſſerui ex ſententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexiſſe meum argumentum, aut intelligere noluiſſe: niſi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluiſſe cauillari; quod & plerisq; alijs in locis facere videtur. Numquam enim dixi, angulum contactus minorem eſſe, aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulum contactus quemcunq; minorem eſſe, aut maiorem aliquo alio angulo contactus; quem non ego dixi nihil eſſe, ſed Peletarius, eundemq; Euclides minorem quolibet acuto rectilineo recte demonſtrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipſe negat, didiciſſe Dialecticam, illum ipſum tam lepidum, atq; acutum ſyllogiſmum, quo Nihil illud ab ſe confictum mira venuſtate confixit, pauliſper conſiderabimus; vt quàm ſuo iure Dialecticæ ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem male tornatus ille ipſe ſyllogiſmus videtur, incudiq; reddendus. Etenim cum verſetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (vt Dialectici loquuntur) quæ eſt, Nihil, de minori extremitate, quæ eſt angulo contactus maior, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil eſt: Angulus contactus angulo contactus maior eſt. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius eſt, nihil eſt. Quæ quidem concluſio recte ſequitur ex præmiſsis, quarum prior Peletarij eſt, non mea, poſterior autem mea, & Procli, immo & Euclidis. Conluſio autem illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo eſt, nulla ratione ex præmiſsis inferri poteſt. Nam ſi, angulum cum dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, aſſumitur medius terminus, qui in vtraq; præmiſſa ſubijcitur: quod nefas eſſe Ariſtoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, aſſumitur in concluſione terminus, cuius nulla facta eſt mentio in præmiſsis: quod nihilo magis licere, nemo eſt tam plumbeus in Dialecticis, qui neſciat: Neq; contendat Peletarius, mentionem factam eſſe anguli in minore extremitate, vbi dictum eſt, angulum contactus angulo contactus maiorem eſſe. Nam angulus in minore extremitate poſitus eſt in obliquo, qui in concluſione ſubijcitur in recto: quod, vt auctore Ariſtotele docent omnes Logici, ſine peccato fieri non poteſt. Quod, vt planum fiat, vtemur ea palæſtra, quam ab illo didicimus. Si quiſpiam ita argumentetur; Angulus in ſemicirculo rectus eſt: Angulus in ſemicirculo angulo acuto maior eſt. Angulus igitur acutus maior recto eſt; quis, modo ſit imbutus Dialecticis, eiuſmodi argumentationem probet, cum præmiſſæ veræ ſint, cónclusio autem falſa? Talis ille ſyllogiſmus eſt Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chryſippus videri voluit. Concluſio, quæ recte ex præmiſsis inferretur, hæc eſſet. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior eſt, rectus eſt. Sed tamen ei veniam dandam puto, quod ſe Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialecticæ, ſi ab Ariſtotelica abhorret, plane fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, ſe non intelligere, quo pacto dicere poſsim, angulum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum contactus eſſe omni acuto rectilineo minorem, (ipſe, vt aliquid addat de ſuo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cum tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitq; ſcire, quid aliud ſit, angulum contactus minorem eſſe omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus eſſe acutorum rectilineorum minimum. Qua in re morem geram homini non grauate, etſi è ſcholio huius propoſ. 16. potuit id, quod cupit, cognoſcere. Nempe ea ratione me illud potuiſſe dicere, qua dicimus: angulum obtuſum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum rectilineum acutum eſſe omni obtuſo rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud eſt, angulum rectilineum acutum minorem eſſe omni rectilineo obtuſo, quàm angulum rectilineum acutum eſſe obtuſorum rectilineorum minimum: propterea quod angulus acutus non eſt obtuſus, ſicut nec angulus contactus rectilineus eſt, aut acutus. Id quod etiam clariſsime docet Proclus libr. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtuſi, & acuti. Sed hæc puerilia ſunt, & quæ magis ad Grammaticos ſpectant, quam ad Geometras. Quod etiam, ne librum meum parum ſpiſſum viderer feciſſe, ſuas demonſtrationes ad verbum me recitaſſe queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipſo deſidero. Id enim eo à me conſilio factum eſt, vt omnes plane viderent, ſyncere me, ac fideliter eius opinionem retuliſſe, nullumq; omnino verbum immutaſſe. Quod vtinam in meis verbis recitandis ipſe facere in animum induxiſſet, Multo enim minus ſpiſſam Apologiam ſuam facere potuiſſet. Nam ego, quid erat, cur laborarẽ meum librum Peletarij verbis magis ſpiſſum efficere? Qui enim parum ſpiſſum iudicarem librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cum Peletarius ſuum librum, qui ſex priorum duntaxat librorum demonſtrationes complectitur, ſatis ſpiſſum ſit arbitratus? Sed eo ſum æquior Peletario, quod ex ſe alios iudicat. Nam in Apologia ſua, ne inanis rerum videretur, tres demonſtrationes nihil penitus ad eam pertinentes inferſit: quarum priorem immerito ſuam propriam facit, vt ſupra dixi: poſteriorem vero, quam mirum in modum gloriatur ſe clariorem feciſſe, ego & longe breuius, & dilucidius (niſi meorum me amor fallat) iam pridem demonſtraui, vt mox, Deo adiuuante, ex Geometria mea Practica clariſsime apparebit. Sed licuerit Peletario ſuæ Apologiæ, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pediſſequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus ſemper licuit, aliorum ſententias totas meis ſcriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atq; in primis Petrum Nonium laudatorem ſuum, qui idem fecit in refellendis paralogiſmis Orontij, aut ſine cauſa id ſe mihi vitio dediſſe fateatur. Quòd ſi, poſtquam tam fideliter eius verba propoſui, Peletarius criminatur, me eius ſententiam perperam eſſe interpretatum, quid facturus fuiſſet, ſi alienis verbis eius opinionem in mediũ adduxiſſem? Equidẽ facile ſibi perſuadebit quis, nullũ eum verbum relicturum fuiſſe, quod non reprehendiſſet.

QVARTO vt leuiora hæc omittat, illud putat palmare, quod me laborare oſtendit, vt probem, angulos contactus alios alijs eſſe inæquales: propterea quòd ſcripſi æqualitatem angulorum eiuſdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi alter alteri ſuperponatur, iuxta octauũ pronunciatum. Qua in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiuſdem generis requiri eandem linearũ inclinationẽ; cũ tamen angulus rectilineus oſtenſus ſit à me æqualis curuilineo, atq; adeo eiuſdẽ generis cum illo, licet non ſit in vtroq; eadẽ linearũ inclinatio. Deinde, quod putem angulos contactus ideo inter ſe inæquales eſſe, quod ſibi mutuo non congruant. Equidem ſi quid in eo à me peccatũ eſſe intelligerem, & peccatũ (quod eſt ingenuo, & liberaliter educato homine dignũ) agnoſcerẽ, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunq; id animo fecerit) gratias agerẽ. Nunc vero, cum, tota re etiã atq; etiã conſiderata, nihil omnino vitij ineſſe videam, ita, quæ obijciuntur, diluã, vt tamen gratiã habeã Peletario, qui occaſionem dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiuſdem generis illos, qui vnã lineã habẽt rectam, & alteram circularem, quales ſunt anguli contactus, & ſemicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cum linea recta vnius cõgruat lineæ rectæ alterius, circularis vero circulari non itẽ, niſi circuli ponãtur æquales, efficitur, angulos illos eſſe inæquales inter ſe, quippe cũ alter alterũ excedat. Eadẽ ratione, ſi dentur duo anguli curuilinei æqualiũ circulorũ æquales, neceſſe eſt, lineas vnius lineis alterius congruere, ſi alter alteri ſuperponatur. Quòd ſi Peletarius hanc doctrinã oppugnat, ſciat, ſe iã bellum mouere non mihi, ſed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propoſ. 4. idem prorſus docet, quod ego. Ait enim (Angulorum

autem

autem æqualitatem ſumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis : in cæteriſque omnibus, qui eiuſdem ſunt ſpeciei, vt in Lunaribus, in Syſtroidibus, atque in vtrinque conuexis,&c.) *Et infra.* (Quæ æqualia data ſunt,ſibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum eſt,ſed in ijs,quæ ſpecie ſimilia ſunt. Specie autem ſimilia hæc dico,vt recta linea rectæ lineæ,& circumferentia circumferentiæ circuli eiuſdem , & anguli,qui à ſimilibus ſimiliter iacentibus lineis comprehenſi ſunt. Horum autem dico , quòd quæ æqualia data fuerint, ſibi inuicem cungruunt.) *Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos ſolum angulos contactus concedere æquales,quorum rectæ lineæ,& curuæ ſibi mutuò congruunt? Temere igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum,& curuilineum,triangulum & quadratum, atq; alia huiuſmodi,de quibus eo loco ſermo non erat ; quippe quæ non ſint eiuſdem ſpeciei,atq; adeo æqualitatem tueantur,etiamſi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam,ne Peletarius noſter contentionis ſit cupidior,quàm veritatis.*

POSTREMO, *vt nihil intactum relinquat, me non modo Geometriæ ignarum vocat, ſed etiam Logices : propterea quòd lib. 5. dixi , non recte à quibuſdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis , atq; inæqualitatis; quod multæ proportiones inæqualitatis ſint etiam irrationales. Ego vero (etſi non is ſum,qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hiſce ſtudijs,in quibus mediocriter verſatus ſum, plane rudem non eſſe,præ me ſemper tuli. Quantulum autem ſit id, quod in vtroq; poßim, cæteri melius, qui vacant amore,& odio,iudicabunt ; Peletario quidem ipſi ita me adhuc reſpondiſſe arbitror, vt iam minus fortaſſe ignarus Geometriæ,ac Dialecticæ videar,quàm putarat. Nunc, vt perſpiciat , neq; me pertinacem eſſe,neq; illa,quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere,libenter ei concedo,diuiſionem illam, quam à me reprehenſam criminatur,probam eſſe,ita tamen ſi in quolibet diuiſionis membro Diuiſum intelligatur : neq; vero hoc vnquã negaui,cũ alibi ſimiles diuiſiones vſurpẽ.Solũ id eo loci contendi,rectius meo iudicio, diuidi Proportionẽ in vniuerſum duplici diuiſione,priori quidẽ in proportionẽ rationalẽ, & irrationalẽ; poſteriori vero in proportionẽ æqualitatis, atq; inæqualitatis,(quod veriſsimũ eſſe , neminẽ negaturũ cenſeo,qui rẽ diligentius expenderit) cũ tã priora duo membra diuidentia , quã poſteriora totũ Diuiſum,(vt Logici loquũtur) exhauriant: q̃ ſi prius membrũ prioris diuiſionis,hoc eſt, proportio rationalis,ſecetur in proportionẽ æqualitatis, & inæqualitatis,cũ hæc mẽbra diuidentia latius pateant ,quã Diuiſum,niſi in illis Diuiſum intelligatur. Atq; eo magis duplex illa diuiſio mihi probatur,quod non deſint,qui primum partiantur Proportionem in proportionem æqualitatis,& inæqualitatis; poſteriorem deinde hanc in proportionem rationalem & irrationalem : contrario ſcilicet modo,quàm priores. Vt igitur hanc controuerſiam dirimerem,ac dubitationem,vtri rectius faciant,priores ne,an poſteriores,tollerem , ſtatui duabus diuiſionibus ſecandam eſſe Proportionem , quarum vtraq; abſolutiſsima eſt , ac perfectiſsima. Non aliter arbitror,omnes magis eſſe probaturos,ſi corpus duplici diuiſione ſecetur,primum quidem in viuens, & non viuens; deinde vero in album,nigrum,ac mixto colore affectum : quam ſi corpus viuens diuidatur in album, nigrum , ac mixto colore affectum ; ob cauſam iam dictam : licet hæc ſubdiuiſio bona ſit , ſi Diuiſum ſemper intelligatur. Huiuſmodi diuiſiones ſexcentas adducere poſſem : ſed ſatis eſt, me prudenti lectori inſtitutum meum in diuiſione Proportionis expoſuiſſe, & cur duplicem illam diuiſionem ſubdiuiſioni aliorum prætulerim. Quod ſi tam acres, & ſeueri iudices ſingulorum verborum aut improprietatum , quæ per incogitantiam interdum excidunt, eſſe velimus , næ ſcriptorum nullus aliquo vitio carebit, neq; ipſe quidem Peletarius, vt partim ex ijs , quæ dicta ſunt , conſtat , partim etiam ex alijs eius demonſtrationibus apparere poteſt : quas ſi liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profecto reprehendendi materia non deeſſet. Verum non eſt hoc noſtri conſilij,refellendi ſtudio vitia aliena ſcrutari,ſed vbi ſeſe occaſio obtulerit,meam (qualiſcumq; eſt) de aliorum ſententijs ſententiam exponere : Solum ab eo peto, (quoniam ſe tam acutum Dialecticum iactat,vt alios contemnere videatur; quanquam ex ſuperiore ſyllogiſmo , quem in me conuertit,liquido conſtat , quam ſit Dialecticæ peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauſerit ; Omnes anguli contactus ſunt minores quolibet angulo acuto rectilineo : ergo omnes inter ſe ſunt æquales. Itemq; hanc ; Anguli ſemicirculorum, quo à maioribus circulis fiunt, eo ſunt maiores : igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior ſit; in qua quidem ad Cardanum ſcribit,nullum eſſe paralogiſmum. Ego ſane vehementer miror,qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometra omnino indignas,incidere potuerit. Sed argumentationes eiuſmodi ſatis ſuperq; in ſcholio huius propoſ. 16. à me ſunt confutatæ , adductis contra ipſas euidentiſsimis inſtantijs. Deinde quod me perſtringit,quaſi parum intellexerim,quæ ſit proportio rationalis,& quæ irrationalis , non multum laboro. Conſtat enim,eum ſtudio mihi detrahendi id dixiſſe , cum has proportiones vbiq; ex ſententia grauiſsimorum ſcriptorum definierim, neq; vero ipſe vllum peccatum à me ea in re eſſe commiſſum , poterit oſtendere. Certe commentarius meus in lib. 10. Euclidis abunde declarat , num illas intellexerim , nec ne. Deniq; quod criminatur , me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum eſt. Perſpicuis enim verbis docui in defin. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum , habitudinem autem proportionum , Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem , hanc vero, Proportionem. Neque enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis poteſt eſſe ambiguitas.*

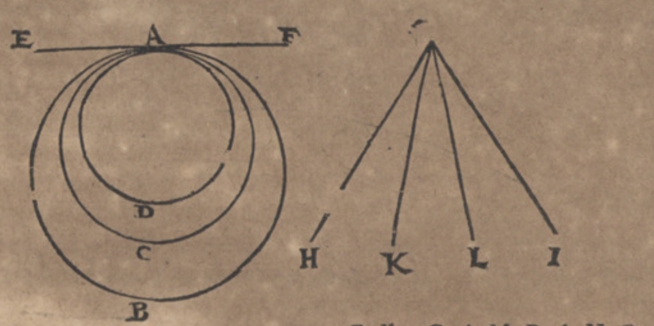
Ex his, quæ diximus, ſatis (vt opinor) apparet, doctiſsimos illos viros , de quibus initio memini, non ſine cauſa Apologiam Peletarij inanem, ac reſponſionis indignam iudicaſſe. Ego tamen,ne contemnere hominem viderer, quem ſemper laudandum eſſe duxi, occaſione inuitatus reſpondendum amice putaui. Exiſtimet ille , angulum contactus quantitatem non eſſe, atq; adeo angulum ſemicirculi recto rectilineo eſſe æqualem, ego certe contrariam ſententiam tuebor , donec aliud mihi demonſtratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces ſunt, nihilq; continent in ſe probabilitatis, vt in ſcholio huius propoſ. 16. oſtendi, vbi omnes diſſolui, neq; meis ipſe ſolutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, quæ ſupra ex lib. 10. adduxi) reſpondit ; quod tamen maxime ad Apologiam pertinebat : Vt non ſine cauſa permulti exiſtimauerint,eum non veritatis ſtudio eam Apologiam ſcripſiſſe, ſed ne veritati ceßiſſe videretur. Nec vero quiſquam putet , me vnum exiſtimare , angulum contactus vere eſſe angulum,& angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eoſq; grauiſsimos laudare poſſum, Theonẽ, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem,atq; Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipſum, eiuſq; commentatorem celeberrimum Proclum ; vt taceam ex Gallis præſtantiſsimos, atq; eruditiſsimos viros non paucos,è quorum numero in primis eſt Franciſcus Candalla ex illuſtriſsima Fluſſatum familia oriundus,qui inſigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propoſ. hanc 16. apertiſsime docet, angulos contingentiæ vere eſſe angulos,ex definitione anguli plani, alioſq; alijs eſſe maiores, æquales, ac minores : Eos autem, qui aliter ſentiunt, (Peletarium proculdubio intelligit. Præter eum enim ad hunc diem nemo hac de re ſcripſit) abſurde multa ex fal-

ſis ſuppoſitis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium profeſſor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conſcriptam vidiſſet, opuſculum eruditum aduerſus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem ſtudioſus lector videat, quid in hoc negotio ſentiat Proclus, afferam in medium pauca quædam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquido conſtabit, eius ſententiam eſſe Peletarij commento prorſus contrariam. Primum itaq; ita ſcribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circumferentiæ ſe inuicem ſecando, vel ſeſe contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) *Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem eſſe omni rectilineo minorem: quod ſolius anguli contactus proprium eſt. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtuſi, & acuti ita habet.* (Cornicularis namque angulus omni recto eſt minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus eſt: Semicircularis itidem quocunque recto eſt minor, acutus tamen non eſt.) *Quid clarius, quam Proclum hic aſſerere, angulum ſemicirculi minorem eſſe recto? Rurſus lib. 3. ad propoſ. 4. lib. 1. Euclidis ita ſcribit.* (Addiſcemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto ſemper inæqualis eſt, & nunquam æqualis; Et ſemicircularis ſimiliter, tranſitusque à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam aperte docet, angulum ſemicirculi æqualem eſſe non poſſe angulo rectilineo, tranſitumq; propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumq; Peletarius negat, audetq; poſterius appellare paralogiſmum. Deniq; eodem lib. 3. ad propoſ. 23. hæc verba habentur.* Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis eſſe poſſit, &c.) *Et Peletarius tamẽ non dubitat angulũ ſemicirculi, qui mixtus eſt, angulo recto rectilineo facere æqualẽ, contra Procli ſententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem ſentire Proclum de angulo contactus, & ſemicirculi, quod ego contra Peletarium ſcripſi, quis autem neget, maiorem eſſe auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?*

OBITER *quoq; hoc loco monendum lectorem cenſeo, id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex ſententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam eſſe de angulo contactus, qui in conicis ſectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipſi. Vt enim Apollonius Pergæus demonſtrat lib. 1. propoſ. 32. in locum, qui inter coni ſectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit, atq; adeo angulus ille contactus minor eſt omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (ſi nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non eſt, (eadẽ enim hic eſt ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter ſe æquales, hoc eſt, vt ipſe vult, non inæquales, & reliquorum angulorum ſinguli recto rectilineo æquales. Vbi ſane maior abſurditas apparet, quo ad ſenſum, in ea Ellipſi, quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta eſſe videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipſis, & Hyperbolæ conſtituti; vt incredibile omnino ſit, niſi firma ratione demonſtretur, angulos illos contactus ad vertices ſectionum conſtitutos inter ſe, & reliquos ex rectis inter ſe quoq; eſſe æquales; propterea quod in ea Ellipſi linea tangens magis recedere perſpiciatur à circumferentia Ellipſis, quam in circulo; in illa vero Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expoſitionem Euclidis reuertamur.*

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas poteſt continue, & infinite augeri, altera verò infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremento huius.

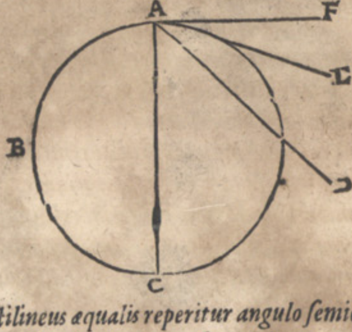


Proponantur enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur deſcribantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum eſt. Si rurſus inter rectas GH, GI, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamẽ ſemper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor eſt angulo acuto, quantũuis diminuatur.

EX CAMPANO.

Cæterum ex hac propoſ. 16. perſpicuum eſt, vitioſam eſſe argumentationem hanc, qua vſus eſt Briſon in quadrando circulo, vt auctor eſt Ariſtoteles. Videlicet.

TRANSITVR à minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.



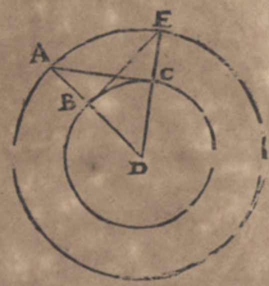
Deſcribatur enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremũ punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc conceſſo, manifeſtum eſt, quãdiu recta AC, ſecat circulum, fieri angulum acutũ minorem angulo ſemicirculi; quam primum vero ſecare ceſſat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo ſemicirculi. Cum igitur factus ſit tranſitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo ſemicirculi; (Rectus enim, vel obtuſus, maior eſt; & acutus, minor,) conſtat quoq; vitioſam eſſe poſteriorem conſequentiam.

PRO-

xvj.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

ADATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda ſit linea, quæ tangat circulum BC, cuius centrum D. Ducatur recta AD, ſecans circulum BC, in B. Deinde centro D, interuallo autem DA, deſcribatur circulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, ſecans circulum AE, in E. Ducta deniq; recta ED, ſecante circulum BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia ſint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumque vtrique, vt conſtat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus ſit communis: Erunt *a* & baſes BE, CA, & anguli DBE, DCA, ſuper ipſas, æquales. Eſt autem DBE, rectus ex conſtructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemidiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedentis propoſitionis. A dato ergo puncto A, ducta eſt AC, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat.

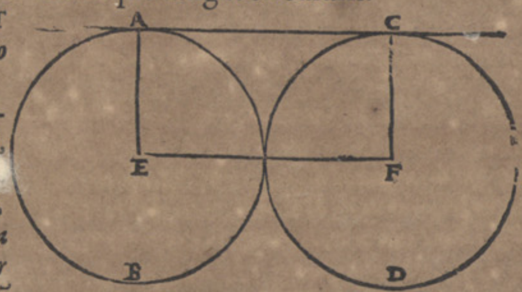
a 4. *prim.*

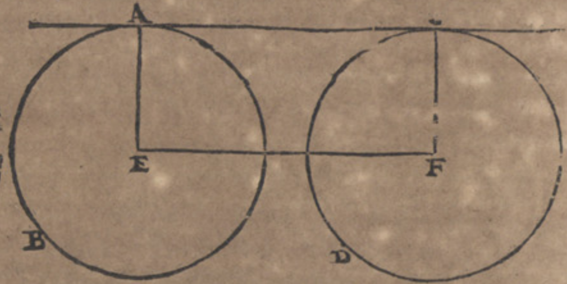
S C H O L I V M.

PRAXIS huius problematis ex ipſa demonſtratione facile elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propoſ. 31. huius lib. inuenies.

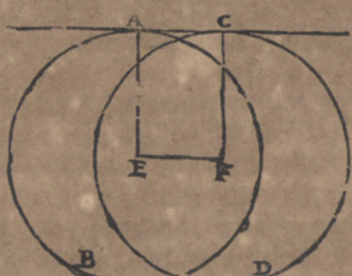
SED & ſequens problema cum Cardano abſoluemus.

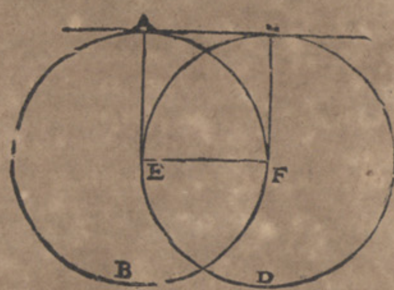
PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.



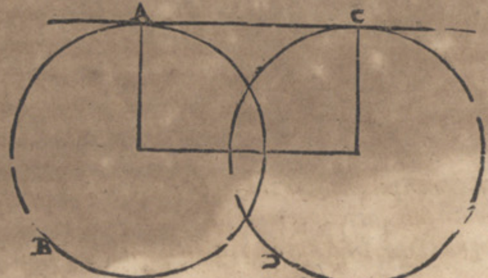


SINT primũ duo propoſiti circuli æquales AB, CD, quo centra E, & F, recta iungantur EF, ad quã ducantur perpendiculares EA, FC ſecantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrumq; circulum tangere. Cum enim EA, FC, ſemidiametri circulorum æqualium ſint æquales, [b] *& parallelæ, quod anguli E, & F, recti ſint;* [c] *Erunt quoq; EF, AC, æquales & parallelæ; Ideoq;* [d] *& anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propoſ. 16. huius lib. recta AC, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos conſtituat in extremitatibus ſemidiametrorum.*

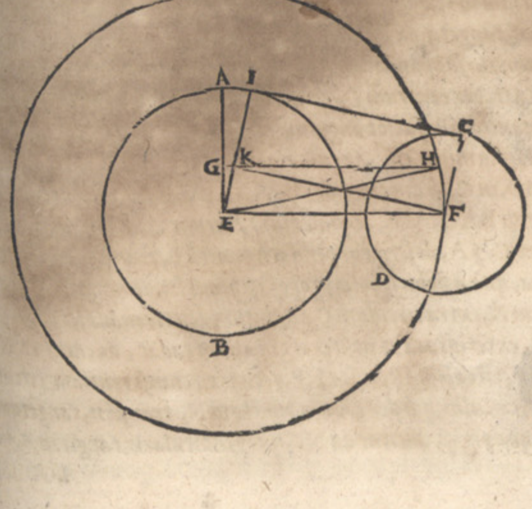


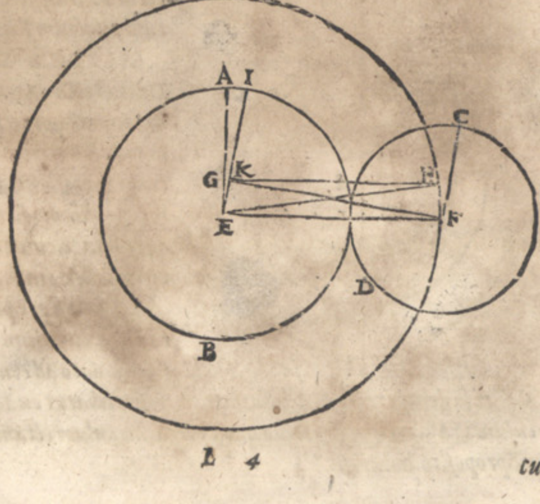


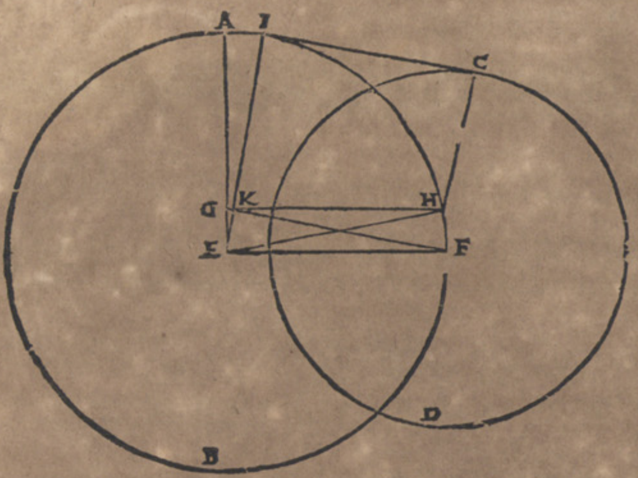
b 28. *primi.*
c 33. *prim.*
d 20. *prim.*



SINT deinde duo circuli propoſiti inæquales AB, CD, quorum rurſusrurſus centra E, & F, iũgantur recta EF, ad cuius interuallum ex E, centro maioris circuli circulus deſcribatur FH, ſi maior non tranſeat per centrum minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abſcindatur ex ea portio AG, ſemidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipſi EA, perpendicularis ducatur GH, vſque ad circumferentiam circuli FH, proxime deſcripti. Ducta autem recta HE, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atque per F, agatur ipſi EI, parallela recta FC. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum AB, CD, contingere. Abſcindatur enim ex IE, recta IK, ipſi AG, vel ſemidiametro FC, minoris cir-

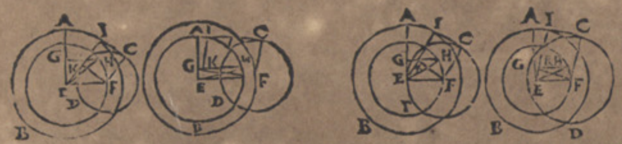






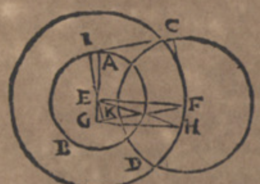
culi, æqualis, vt ſint reliquæ EG, EK, æquales quoque, ducaturq; recta KF. Quoniam igitur latera HE, EG, trianguli HEG, æqualia ſunt lateribus FE, EK, trianguli FEK, & anguli ipſis contẽti æquales, ex conſtructione: [e] Erunt anguli HGE, FKE, æquales: Ac proinde, cum HGE, rectus ſit, ex conſtructione, erit & FKE, rectus. Rurſus quia CF, IK, æquales ſunt, & parallelæ, ex conſtructione, [f] erunt quoque IC, KF, æquales & parallelæ; Atq; propterea angulus EIC, [g] cum æqualis ſit externo FKE, rectus erit; [h] Ideoq; & ICF, rectus exiſtet. Quocirca per coroll. propoſ. 16. huius lib. recta IC, vtrumq; circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus ſemidiametrorum. Quod erat propoſitum.

e 4. primi.
f 33. prim.
g 29. prim.
h 29. prim.



SATIS autem conſtat, ſi circuli propoſiti æquales fuerint, id quinq; modis poſſe fieri. Aut n. alius extra aliũ cadit, aut ſe mutuo contingunt; aut ſe inuicem per centra ſecant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel centra cõſiſtant in cõmuni eorũ ſegmento, vel certe extra illud.

ITEM ſi circuli propoſiti fuerint inæquales, id contingere poſſe ſeptem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipſum tangit, aut ipſum ſecat, ita vt vel centrum eius ſit in circumferentia maioris, vel intra ipſum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris tranſeat, vel centrum minoris ſit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circumferentia minoris per maioris centrum incedat, vel deniq; ita intra, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.



QVONIAM vero circulis inæqualibus exiſtentibus, initium conſtructionis ſumpſimus ſemper à maiori, ſi quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem conſtructione, demonſtrationeq; niſi quod rectæ AE, IE, protrahendæ ſunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales ſint ſemidiametro FC, maioris circuli; Addito inſuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco æquales eſſe, quod HEA, FEI, reliqui duorum rectorum, æquales ſint ex conſtructione. Denique angulum EIC, eſſe rectum, ex 29. propoſ. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus ſit oſtenſus.

QVIA vero & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctũ extra circulũ exiſtens lineam rectã, quæ circulum tangat, ex iis, quæ demonſtrata ſunt, ducere poſſumus; per punctum quidem in circuli circumferentia poſitum, ex coroll. propoſ. 16. per punctum vero extra circulum ex hac propoſ. 17. Item oſtenſum eſt hoc ſcholio, rectam duci poſſe, quæ duos circulos tangat, dummodo alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonſtrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, ſiue interius, ſiue exterius, deſcribendus ſit: Item qua ratione deſcribendus ſit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non ſit totus intra alium.

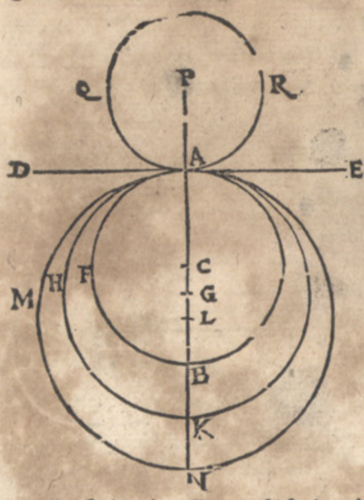


SIT ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod deſcribendus ſit circulus circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, ſumatur in ea quoduis punctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus deſcribatur AE, qui circulum AB, in A, tanget; Et ſi quidẽ punctũ D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus AE, totus extra circulũ AB; intra vero, ſi punctũ D, in ſemidiametro AC, extiterit, vt ſcholio prop. 13. huius lib. demonſtrauimus.

DEINDE extra eundem circulum AB, datum ſit punctum G, per quod deſcribendus ſit circulus circulum AB, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta GCA, eaque ſecta bifariam in D, deſcribatur ex D, per A, circulus AE, qui per datum punctum G, tranſibit, tangetq; circulum AB, in A, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.

ALITER. Sit datum rurſus punctum E, extra circulum AB. Ducta recta EA, vtcunq; ex puncto dato E, quæ circulum ſecet, & non per centrum tranſeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC; eritque angulus EAC, acutus, cum pars ſit anguli ſemicirculi, qui recto minor eſt. Angulo ergo EAC, in E, æqualis conſtituatur AED: coibitque recta ED, cum AC, in D, ob duos

i 6. primi. angulos DAE, DEA, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli DAE, DEA, æquales ſunt, [i] erunt & latera DA, DE, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, deſcriptus per datum punctum E, tranſibit, tangetque circulũ AB, in A, ex iis, quæ in ſupradicto ſcholio prop. 13. huius lib. demonſtrauimus.



TERTIO datum ſit punctum F, intra circulum AE. Ducta ex F, per centrum D, recta FA; eaq; ſecta bifariam in C, deſcribatur ex C, per A, circulus AB, qui per datum punctum F, tranſibit, tangetq; ex dicto ſcholio circulum AE, in A.

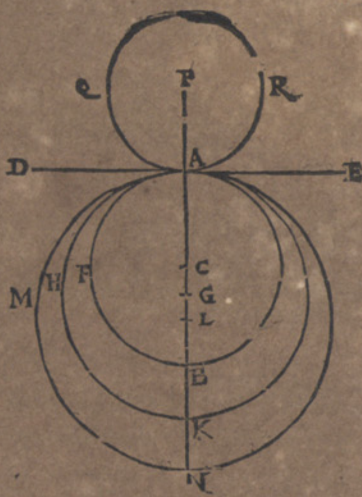
ALITER. Sit datum rurſus punctum B, intra circulum AE, cuius centrum D. Ducta recta quacunque AD, per centrum D, & non per datum punctum B, tranſeunte, quæ cum recta coniuncta AB, faciet angulum acutum BAD, vtpote minorem angulo ſemicirculi, qui recto minor eſt. Angulo ergo BAD, in B, æqualis fiat ABC: coibitq; recta BC, cum AD, in C, ob duos angulos BAC, ABC, duobus rectis mino-

k 6. primi. res. Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales ſunt, [k] erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo ex C, p A, deſcriptus per datũ punctũ B, tranſibit, tangetq; circulũ AE, in A, per ea, quæ à nobis ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrata ſunt.

QVOD ſi per punctum N, extra circulum QAR, datum deſcribendus ſit circulus tangens circulum QAR, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli QAR, recta NP, ſecans circumferentiam circuli in A. Diuiſa deinde recta NA, bifariam in L, deſcribatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, tranſibit, tangetque circulum QAR, in A, propterea quod vterq; circulus rectam DE, quæ per A, ducitur ad NP, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propoſ. 16. huius lib.

EODEM

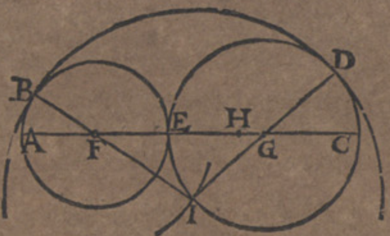
EODEM modo, ſi in circumferentia circuli QAR, datum ſit punctum A, deſcribemus circulum, qui circulum QAR, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta PAC, per datum punctum A, ſi ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus deſcribatur, nimirũ AMN, ex cẽtro L, tanget hic circulũ QAR, vt dictũ eſt in A.

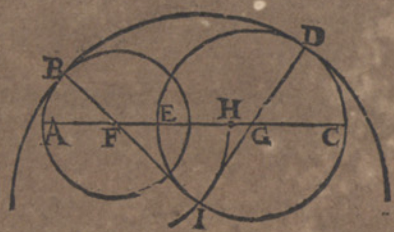


EX his liquet, per idem punctum datum plures poſſe circulos deſcribi alium datum circulum tangentes, (ſi nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis EA, BA, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, tranſeuntes, ſed circulos ſecantes; ac tandem in recta AG, eiuſdem figuræ, vel in PAC, poſterioris figuræ, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuerſa aſſumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna ſola linea ad eaſdem partes duci poſſit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens, quorum vnus non ſit totus intra alium, deſcribendus ſit, hac ratione cũ Ioan. Bapt. Benedicto demonſtrabimus.

SINT primum duo circuli ſe mutuo tangentes, aut ſecantes inæquales, AB, minor, & CDE, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur FG, occurrens circumferentiis in A, C, quæ, ſi circuli ſe tangant in E,[l] per contactum E, tranſibit. Abſciſſa recta EH, ex ſemidiametro maioris circuli, quæ ſemidiametro minoris ſit æqualis, deſcribatur ex F, centro minoris ad interuallum rectæ HC, quæ maior eſt, quam ſemidiameter minoris arcus ſecans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur IF, IG, occurrentes circumferentiis in B, D. Et quia CH, ipſi IF, & HE, ipſi FB, æqualis eſt, per conſtructionem erunt totæ CE, IB, æquales. Cum ergo & diameter ID, diametro CE, æqualis ſit, erit quoque IB, ipſi ID, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, deſcriptus tranſibit per D. Cum ergo idem, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. extra vtrumq; circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod eſt propoſitum.

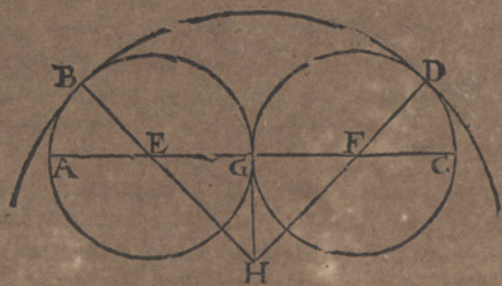
l 12. tertij.

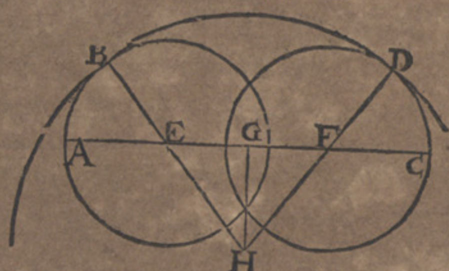




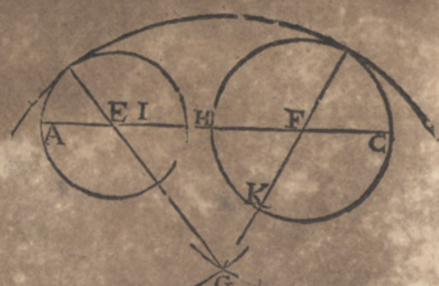
SINT deinde duo circuli ſe mutuo tangentes, vel ſecantes æquales, AB, CD, per quorum centra E, F, recta educatur AC. Diuiſa deinde recta EF, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli ſe mutuo tangunt, diuiditur recta EF, bifariam in puncto contactus propter ſemidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad EF, perpendicularis GH: in qua ſumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circumferentiis in B, D. Quoniam igitur duo latera GE, GH, duobus lateribus GF, GH, æqualia ſunt, anguloſque comprehendunt æquales, nimirum rectos,[m] erunt & baſes HE, HF, æquales: Et additis ſemidiametris æqualibus EB, FD, totæ lineæ HB, HD, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, deſcriptus tranſibit per D, cadetque extra vtrumque circulum, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.

m 4. primi.





TERTIO ſint duo circuli ſiue æquales, ſiue inæquales, AB, CD, quorum alter extra alterum ſit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta AC. Et ſi circuli ſunt inæquales, deſcribatur ex E, cẽtro minoris ad interuallũ diametri maioris CH, arcus, quẽ in G, ſecet alter arcus ex F, centro maioris deſcriptus ad interuallum rectæ FI, compoſitæ ex ſemidiametro maioris FH, & HI, ſemidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus ſe interſecare; quando autem ſe non ſecant, dicemus mox, quid agendum ſit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur ſecantes circumferentias in B, D. Et quia FG, ipſi FI, æqualis eſt: ablatis æqualibus FK, FH; reliquæ æquales erunt KG, HI. Eſt autem HI, ſumpta æqualis ſemidiametro minoris EB. Igitur & KG, ipſi EB, æqualis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris KD, ſit æqualis; erunt totæ rectæ GB, GD, æquales. Quare circulus ex G, per B, deſcriptus, tranſibit per D, cadetque extra vtrumque circulum ex ſcholio prop. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.



VERVM quia non ſemper duo illi arcus ex E, & F, deſcripti ſe interſecãt, quod accidit propter nimiam circulorum diſtantiam vnius ab altero, abſoluemus problema hoc alio modo, qui generalis eſt, ſiue circuli ſe tangant, ſiue non, etiamſi non ſe ſecent, & ſiue æquales ſint, ſiue inæquales. Ducta recta AC, per circulorum centra, ſumantur rectæ æquales AG, CH, ita vt quælibet ſemiſſem ipſius AC, ſuperet: & ex centro E, per G, arcus GI, deſcribatur, quem ſecet in I, alius arcus HI, ex centro F, per H, deſcriptus: ac deniq; ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circumferentiis occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, æquales ſunt; ſi addantur æquales AE, BE, fient totæ AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cum ergo AG, CH, poſitæ ſint æquales, erunt quoque BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, deſcriptus, tranſibit per D, totuſque extra vtrumque circulum cadet, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. ac propterea vtrumq; tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.

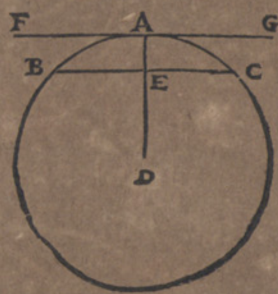


IAM vero eadem arte deſcribemus circulum datæ magnitudinis, qui duos circulos propoſitos tangat, dummodo ſemidiameter circuli deſcribendi maior ſit ſemiſſe rectæ AC, per centra circulorum vſque ad circumferentias ductæ. Nam ſi ſemidiametri dati circuli rectas æquales abſcindamus AG, CH, reliqua perficiemus, vt proxime dictum eſt.

PORRO manifeſtum etiam eſt, ſi ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum vſque ad circumferentias ductæ, deſcribatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib.

EX PELETARIO.

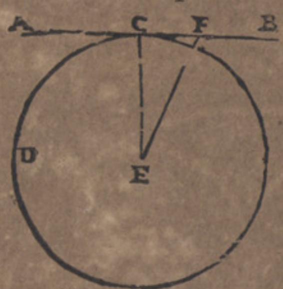
LINEÆ rectæ, quæ circulum ſecet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



CIRCVLVM enim ABC, cuius centrum D, ſecet recta BC, cui ducenda eſt, parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad BC, extendaturque ad punctum A, in circumferentiam; & ex n 28. prim. *A, ducatur FG, perpendicularis ad AD. [n] Erit igitur FG, parallela ipſi BC, tangetque circulum in A, per corollarium propoſ. 16. huius lib. quod erat faciendum.*

xvij. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.



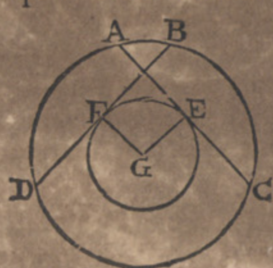
RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem eſſe ad AB. Si enim non eſt, ducatur EF, perpendicularis ad AB, ſecans circumferentiam in D. Quoniam a 17. primi. igitur in triangulo CEF, *a* duo anguli ECF, EFC, minores ſunt duobus rectis; b 19. prim. Et eſt EFC, rectus, ex conſtructione: erit ECF, minor. Quare *b* maior erit recta EC, hoc eſt, ED, quam EF, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Eſt igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare ſi circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonſtrandum erat.

ALITER. Si EC, non eſt perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtuſus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior ſit angulo ſemicirculi ECD, erit angulus ſemicirculi minor angulo aliquo acuto: quod eſt abſurdum. Omnis ſiquidem an- c 16. tertij. gulus ſemicirculi *c* maior eſt omni acuto.

SCHOLIVM.

HINC licebit demonſtrare ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vſque ad circumferentiam exterioris circuli extenſæ, inter ſe æquales, bifariamque in punctis contactuum ſecabuntur.



SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, deſcripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, eſſe æquales, bifariamque ſecari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ d 18. tertij. *GE, GF, [d] quæ ad AC, BD, perpẽdiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. rectæ AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, diſtabunt, cum perpendiculares GE, GF, æ-* e 14. tertij. f 3. tertij. *quales ſint. Igitur [e] rectæ AC, BD, æquales ſunt. Diuiduntur [f] autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Conſtat ergo id, quod propoſitum eſt.*

xviij. THEOR. 17 PROPOS. 19.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.



TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, eſſe centrum circuli. Si enim eſt extra CE, ſit F, centrum; à quo ad C, ducatur recta FC, quæ a 18. tertij. *a* perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod eſt abſurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli exiſtet. Itaque ſi circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonſtrandum.

xix. THEOR. 18. PROPOS. 20.

IN circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

IN

IN circulo ABC, cuius centrum D, ſuper baſin BC, conſtituatur angulus BDC, ad centrum; & ſuper eanden baſin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum eſſe anguli BAC Includant enim primũ duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales ſunt, *a* erunt anguli DAB, DBA, æquales: Eſt autem externus angulus BDE, *b* æqualis duobus angulis internis DAB, DBA: Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus oſtendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum ſunt duplæ, ſingulæ ſingularum, eſt quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Conſtat ergo propoſitum.

a 5. primi.
b 32. prim.



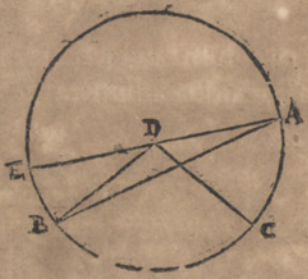
DEINDE non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, ſed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC. *c* æqualis eſt duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo *d* inter ſe ſunt æquales, quod latera DA, DC, ſint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod eſt propoſitum.

c 32. prim.
d 5. primi.



TERTIO recta AB, ſecet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem baſin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt oſtenſum eſt in ſecunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB: habent enim hi anguli eandem baſin EB. Reliquus igitur angulus [illegible]C, duplus erit reliqui anguli BAC. *e* Quando enim totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; eſt & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 20. pron.



SCHOLIVM.

AD primam t[illegible]m huius propoſ. demonſtrandam aſſumptum eſt hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint duplæ, ſingulæ ſingularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertia vero partis demonſtratione hoc aliud principium adhibitum eſt.* (Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) *Quorum vtrumque ab Euclide vniuerſaliter demonſtratur in omni genere multipliciũ, & de quotcunq; magnitudinibus, libro 5. prop. 1. & 5. Non tamen propterea demonſtratio huius propoſ. cenſenda eſt vitioſa, quaſi aſſumat ea, quæ nondum ſunt demonſtrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita ſunt in duplis magnitudinibus, vt facile à quouis ſine vlla demonſtratione concedantur. & vtraque illa propoſitio lib. 5. demonſtrari poteſt ante tertium hunc librum, cum ex eo non pendeant: adeo vt duo illa principia iure optimo adhiberi poßint hoc loco, tanquam demonſtrata. Neq; vero hac in re circulus ab Euclide committitur, cum duo illa principia, per quæ propoſ. 20. huius lib. demonſtratur, hac eadem propoſitione non nitantur, aut aliis propoſitionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM, ſi placet, demonſtrabimus primam partem huius propoſ. ſine priore illo principio, & tertiam ſine poſteriore, (ſecunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam [f] *tam anguli DAB, DBA, inter ſe æquales ſunt, quam anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis B, C, ſimul ſumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C, ſimul ſumptis dupli erunt anguli BAC. Quia vero angulus BDC, æqualis eſt iiſdem tribus angulis BAC, B, & C; (Nam* [g] *cum BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus internis C, & DAC, æqualis ſit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc eſt, tribus BAC, B, & C, æqualis) erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC, quod eſt propoſitum.*

f 5. primi.
g 32. prim.

ALITER. Quoniam [h] *ſex anguli triangulorum ABD, ACD, ſunt æquales quatuor rectis, ſunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. erunt hi tres illis ſex æquales: ablatiſq; communibus ADB, ADC,* [i] *reliquus BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare vt prius, erit BDC, ipſius BAC, duplus.*

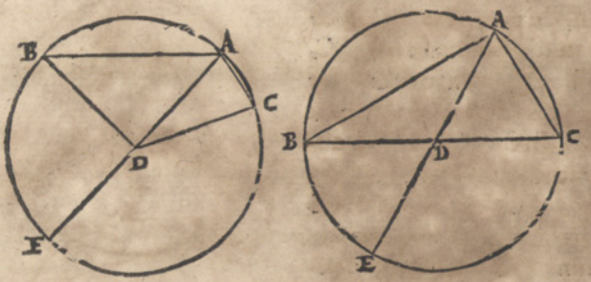
h 32. prim.
i 3. pron.

REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC, rectam AB, ſecat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta AD, [k] *duo anguli DAC, DCA, æquales ſunt, eſtque angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC, æqualis, ſecabit CF, rectam AE, vt in puncto F,* [l] *angulusque EFC, æqualis erit internis angulis FAC, FCA, ac proinde anguli BAC, duplus. Quia vero* [m] *anguli DAC, DCA, æquales ſunt, & ablati quoque FAC, FCA; erunt & reliqui DAB, ECF, æquales. Cum* [n] *ergo DAB, ipſi DBA, æqualis ſit; erit quoque ECF, eidem DBE, æqualis: Sunt autem* [o] *& anguli DEB, FEC, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli BDE, EFC, æquales erunt, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. Cum ergo angulus EFC, oſtenſus ſit anguli BAC, duplus; erit quoque angulus BDC, anguli BAC, duplus, quod eſt propoſitum.*

k 5. pron.
l 32. primi.
m 5. primi.
n 5. primi.
o 15. prim.



QVOD



QVOD ſi rectæ BD, CD, in centro angulum non conſtituant ad partes baſis BC; quod tum demum fit, quando ſegmentum BAC, eſt vel ſemicirculus, vel ſegmentum minus; nihilominus ſpatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat baſin, quam ſpatium illud. Ducta enim recta AE, per centrum, erit tam angulus BDE, ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quam angulus CDE, ad centrum, anguli CAE, ad circumferentiam, vt oſtenſum eſt. Spatium igitur ad centrum D, baſin habens BEC, conſtansq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplum eſt totius anguli BAC. Quod eſt propoſitum.

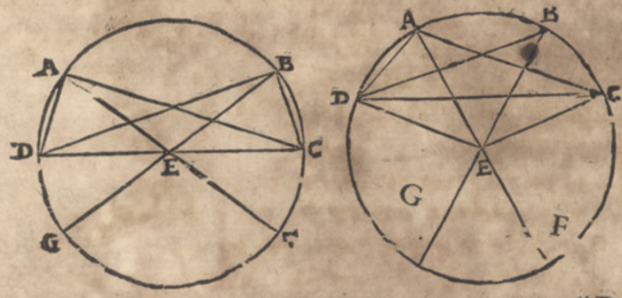
THEOR. 19 PROPOS. 21.

xx. IN circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli, ſunt inter ſe æquales.



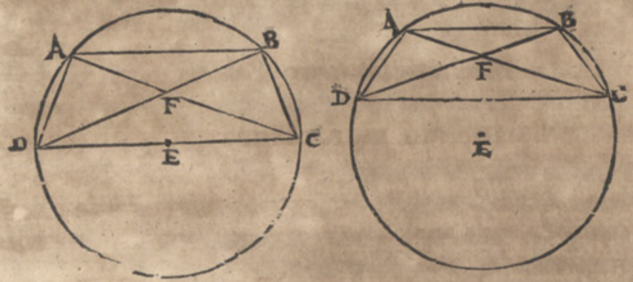
IN circulo ABCD, cuius centrum E, exiſtant anguli A, & B, in ſegmento DABC. Dico eos eſſe æquales. Sit enim ſegmentum DABC, primum ſemicirculo maius; & ducantur rectę DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum,
a 20. tertij. *a* duplus eſt tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem baſin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. *b* Quare inter ſe æquales erunt. Eademque
b 7. pron. ratione omnes alij anguli exiſtentes in ſegmento DABC, oſtendentur eſſe æquales.

SIT deinde ſegmentum DA, BC, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in ſegmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, *c* duplus eſt anguli DAF, ad
c 20. tertij. peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli ſimul DEF, CEF, duorum angulorum ſimul DAF, CAF, dupli erunt, hoc eſt, totius anguli DAC: Sunt autẽ anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt quoq; tres anguli DEG, GEF, FEC, ſimul dupli anguli DAC Eadem ratione erũt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. *d* Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

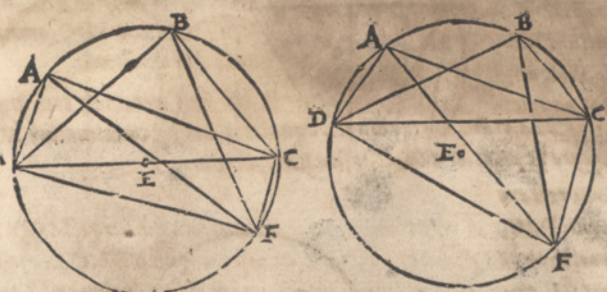


d 7. pron. ALITER. Quoniam, vt in ſcholio propoſ. præcedentis demonſtrauimus, ſpatium ad centrum E, cuius
e 7. pron. baſis DGFC, duplum eſt vtriuſque anguli DAC, DBC, ad circumferentiam: *e* Erunt ipſi anguli DAC, DBC, inter ſe æquales.

ALITER. Secent ſeſe rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales ſunt tribus angulis
f 32. prim. trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi *f* æquales ſunt duobus rectis: Si auferantur anguli
g 15. prim. AFD, BFC, *g* qui æquales ſunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales ſunt oſtenſi in ſegmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales ſunt.



ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam DABCF, quam FDABC, ſit ſegmentum maius; iungantur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem ſegmento maiori DABCF, æquales ſunt; nec non & anguli FAC, FBC, in ſegmento etiam maiori FDABC, exiſtentes: ſi hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.



S C H O L I V M.

FACILE quoque theorema iſtud conuertemus hoc modo.

Si à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ ad eaſdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoque angulum tranſibit.



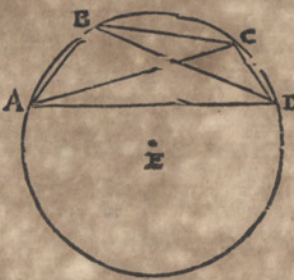
EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex ſingulis, conſtituentes ad eaſdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, deſcriptum, tranſire quoq; per angulum A. Si enim non tranſit, tranſibit vel vltra A, vel citra, ſecans rectam
h 21. tertij. *AB, in E. Ducta ergo recta CE,* [h] *erunt anguli, E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æ-*
i 16. primi. *qualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod eſt abſurdum.* [i] *Externus enim interno maior eſt. Tranſit ergo circulus per A, quod eſt propoſitum.*

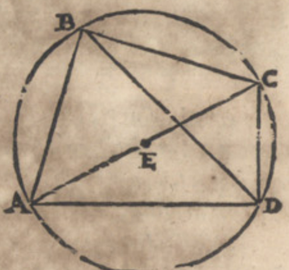
THEOR. 20. PROPOS. 22. xxij.

QVADRILATERORVM in circulis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inſcriptum ſit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppoſitos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales eſſe duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, *a* erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem ſegmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem ſegmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc eſt, totus angulus ABC, æqualis eſt duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. *b* Sed hi tres æquales ſunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo oſtēdemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis æquales. Nam rurſus duo anguli ABD, ACD, ſunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur cōmuni angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. *c* Sed hi tres ſunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis deſcriptorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 21. tertij.
b 32. prim.
c 32. prim.





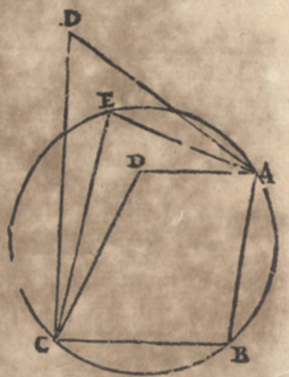
SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonſtrari poteſt, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſint æquales; circulus, qui per tres quoſcunque eius angulos deſcribitur, tranſibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeo circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur; (Quo modo autem hoc fieri poßit, ad 25. propoſ. huius lib. & ad 5. quarti lib. oſtendetur) quem dico tranſire etiam per D. Si enim non, tranſibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumferentiam, ita vt non ſecent rectas CD, AD. Quo facto,[d] erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales ſunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod eſt abſurdum. Ducta enim recta AC,[e] erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus per punctum D. Quod eſt propoſitum.

d 32. prim.
e 21 primi.



SATIS autem eſt, ſumere duos tantum angulos oppoſitos æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum ſit: quia ſi duo oppoſiti ſunt æquales duobus rectis, erunt neceſſario & reliqui duo oppoſiti duobus rectis æquales; cum omnes quatuor ſint quatuor rectis æquales, vt ad propoſ. 32. lib. 1. demonſtrauimus.

EX hac etiam propoſ. facile demonſtrabimus theorema hoc inſequens, quod frequenter vſurpari ſolet, tanquam principium, à Mathematicis, ſcilicet.

SI ex ſemicirculis, aut circulis ſegmenta ſimilia detrahantur; reliqua quoque ſegmenta ſimilia erunt.

SINT primum in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus ſimiles CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, ſimiles eſſe. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcumq; D, B, K, H, iungantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, ſimiles ſunt, erunt, ex definitione ſegmentorum ſimilium, anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duob. angulis IKL, IHL, ſint æquales;[f] quod tam illi, quam hi ſint æquales duobus rectis:[g] erunt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib arcus EBC, LHI, ſimiles erunt.

f 22. tertij.
g 3. pron.



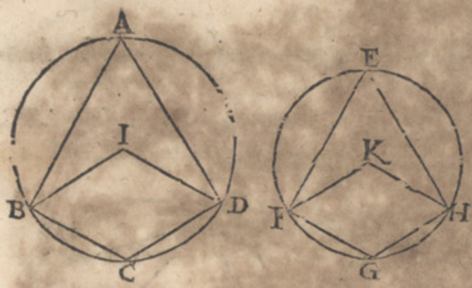


DEINDE in ſemicirculis AEC, GLI, ſimiles ſint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, eſſe ſimiles. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunque in iis arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, ſimiles ſunt, erunt, ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales ſint;[h] quod tam illi, quam hi ſint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in ſemicirculis, hoc eſt, in ſegmentis ſimilib. AEC, GLI, æquales, ex definitione ſegmentorū ſimilium. Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus angulis GIL, LMG, æquales ſint;[i] quod tam illi, quā hi duobus ſint rectis æquales; eruntquoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde, ex defin. ſimilium ſegmentorum, arcus AE, GL, reliqui in ſemicirculis, ſimiles erunt. Quod erat oſtendendum.

h 22. tertij.
i 22. tertij.

QVANDO autem de ſegmetis ſimilibus ſermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præſertim Aſtronomicis perneceſſaria, quorum primum ſit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonſtrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI inſiſtentes arcubus circulorum ſimilibus ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias, ſunt inter ſe æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles ſunt.



SINT in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum arcus ſimiles BCD, FGH, quibus ad centra inſiſtant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter ſe æquales eſſe. Conſtituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. ſegmentorum ſimilium, æquales erunt. [k] Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum [l] cum dupli ſunt anguli I, K, [m] erunt hi quoq; æquales. Quod eſt propoſitum.

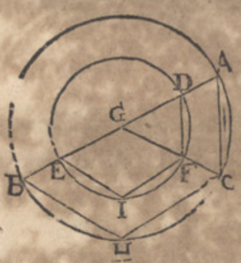
k 22. tertij.
l 20. tertij.
m 6. pron.

DEINDE ſint tam anguli I, K, quam A, E, inſiſtentes arcubus BCD, FGH, inter ſe æquales. Dico arcus BCD, FGH, eſſe ſimiles. Nam ſi A, & E, ſint æquales: ſint [n] autem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. ſimilium ſegmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles. Si vero anguli I, K, ad centra ſint æquales, [o] erunt quoq; eorum dimidia æqualia, hoc eſt, anguli AE. Quare vt prius, arcus BCD, FGH, ſimiles ſunt. Quod erat oſtendendum.

n 22. tertij.
o 7. pron.

SECVNDVM autem, quod nos etiam in ſphæra ad finem primi cap. demonſtrauimus huiuſmodi ſit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quaſcunque, duas lineas intercepti, ſimiles.



DVO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, deſcripti ſint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, eſſe ſimiles. Producta enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; Item ſumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, inſiſtens [p] duplus eſt tam anguli EDF, quam anguli BAC; [q] erunt anguli EDF, EIF, duobus angulis BAC, BHC, æquales; quod [r] tam illi, quam hi duobus rectis ſint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis EDF, BAC, [s] reliqui EIF, BHC, æquales erunt: ac proinde ſegmenta EF, BC, in quibus ſunt, ſimilia erunt, ex defin. ſimilium ſegmentorum. Quod erat oſtendendum.

p 20 tertij.
q 7. pron.
r 22. tertij.
s 3. pron.

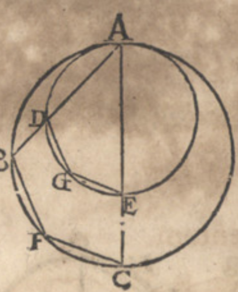
BREVIVS ſic. [t] Quoniam anguli A, D, æquales ſunt, quod vtriuſque [u] duplus ſit angulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema arcus BC, EF, quibus ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles. Quod eſt propoſitum.

t 7. pron.
u 20. tertij.

VEL adhuc breuius. Quoniam arcubus EF, BC, æquales anguli in centro inſiſtunt, immo vnus & idem angulus BGC; erunt per antecedens theorema arcus EF, BC, ſimiles. Atque in hac demonſtratione non eſt opus vlla conſtructione, vt manifeſtum eſt.

TERTIVM denique, quod aliter quoq; in noſtro Aſtrolabio oſtendimus, hoc ſit.

SI duo, aut plures circuli ſe mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quaſcunq; duas lineas intercepti, & arcus inter quamcumque lineam, & punctum contactus intercepti, ſimiles.



TANGANT ſe mutuo interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tam arcus DE, BC, quam AD, AB, & AED, ACB, ſimiles eſſe. Sumptis enim duobus punctis vtcunq; F, G, iungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniam igitur duo anguli DAE, DGE, duobus angulis BAC, BFC, æquales ſunt, quod [x] tam illi, quam hi ſint duobus rectis æquales: ablato communi angulo BAC, [y] erunt reliqui anguli DGE, BFC, æquales; ac proinde arcus DE, BC ſimiles erunt ex defin. ſegmentorum ſimilium.

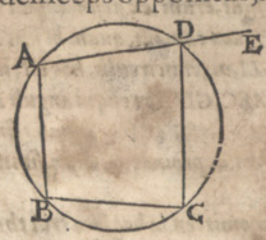
x 22. tertij.
y 3. pron.

BREVIVS ſic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui DE, BC, ad circumferentias inſiſtit, erunt, ex demonſtratis ante proxime antecedens theorema, arcus DB, BC, quibus inſiſtit, ſimiles. Quod eſt propoſitum.

z 11. tertij.
QVIA vero, ſi per circulorum centra ducta cogitetur recta AC [z] hæc in contactum A, cadit, ſuntq; eodem pacto arcus DE, BC, ſimiles ſit, vt hiſce ſimilibus ablatis ex ſemicirculis ſimilibus, reliqui arcus AD, AB, ſimiles quoq; ſint: atque his ablatis ex totis circumferentiis ſimilibus, ſimiles quoque ſint reliqui arcus AED, ACB, vt paulo ante demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

HVC etiam referri poteſt hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo deſcripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

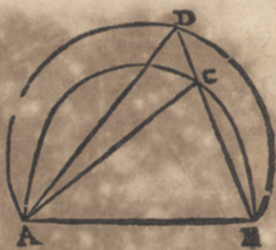


IN circulo ABCD, deſcriptum ſit quadrilaterum quodcunque ABCD, cuius latus AD, producatur ad E. Dico angulum EDC, angulo B, æqualem eſſe. Cum enim duo anguli ad D, [a] æquales ſint duobus rectis: Item [b] duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC, reliquus EDC, externus reliquo B, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

a 13. prim.
b 22. tertij.

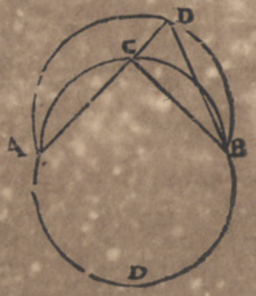
THEOR. 21. PROPOS. 23.

xxij.
SVPER eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, non conſtituentur ad eaſdem partes.



SI enim fieri poteſt, ſuper recta AB, conſtituantur ad eaſdem partes duo ſegmenta ſimilia, & inæqualia ACB, ADB. Perſpicuum eſt autem, quod ſe ſolũ interſecent in punctis A, & B; *a* Circulus enim circulum non ſecat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius ſegmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, ſecans circumferentias in C, & D, & cõnectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur ſegmenta ponuntur ſimilia, erit per 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: *b* quod eſt abſurdum. Non igitur ſegmenta ſunt ſimilia: Quare ſuper eadem recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum. a 10. tertij. b 16. primi.

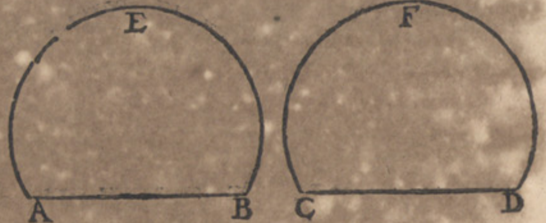
S C H O L I V M.



EADEM ratione, neque ad diuerſas partes ſuper eadem recta linea duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia conſtituentur. Nam ſi alterum eorum intelligatur moueri circa lineam AB, vt iam ambo ſint ad eaſdem partes, in idem abſurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxiv.

SVPER æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, conſtituta ſint ſegmenta ſimilia AEB, CFD. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum ſint æquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmentum AEB, ſegmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod ſi extra cadat, aut intra, conſtituentur ſuper eadem recta CD, duo ſegmenta AEB, AFB, ſimilia, & inæqualia, quorum vnũ totum extra aliud cadit, quod eſt abſurdum. *a* Demõſtratum enim eſt contrariũ. Quod ſi partim extra cadat, partim intra, ſecabunt ſeſe in pluribus punctis, quam duob. nimirũ in A, B, G. Quod eſt abſurdum. *b* Circuli enim non ſe ſecant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur ſegmentum AEB, ſegmento CFD, atque adeo ipſa inter ſe æqualia erunt. Quocirca ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum. a 23. tertij. b 10. tertij.



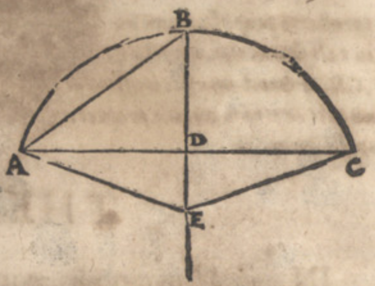
S C H O L I V M.

Non ſolum in hac propoſitione oſtenditur, ſegmenta ſimilia AEB, CFD, eſſe æqualia, ſuper æquales baſes AB, CD; verum etiam ipſas peripherias, eo quod, vt demonſtratum eſt, ſibi mutuo congruant.

Conuerſum quoque huius propoſ. & præcedentis, facile demonſtrabitur. Nimirum, ſegmenta circulorum æqualia ſuper æquales lineas, vel ſuper eandem conſtituta, eſſe ſimilia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare ſimilia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipſis conſtituti æquales ſint. Quod ſi quis dicat, non ſibi mutuo congruere ſegmenta, ſecabit neceſſario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent ſegmenta, quod eſt contra hypotheſin. Sint ergo ſegmenta AFB, AGB, æqualia ſuper eandem rectam AB, ſecentque ſe mutuo in G. Igitur circuli AFB, AGB, ſecant ſeſe in punctis A, G, B, pluribus quam duobus, quod eſt abſurdum.[c] *Circuli enim non ſe interſecant in pluribus punctis quam duobus. Eodem modo res demonſtrabitur, ſi æqualia ſegmenta ſuper æquales rectas ſint conſtituta: ſi nimirum altera alteri ſuperponatur, &c.* c 10. tertij.

PROBL. 3. PROPOS. 25. xxv.

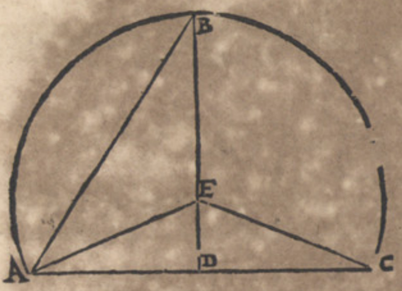
CIRCVLI ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.



SIT ſegmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariã ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior eſt angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior, (quod quidem continget, quando ſegmentum ABC, minus fuerit ſemicirculo: Tunc enim, quia BD, tranſit per centrũ, ex corollario propoſ. 1. huius lib. quod eſt extra ſegmentum, cum ponatur eſſe minus; erit DA, maior, quam DB, cum DB, perficiens diametrum *a* ſit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, *b* maior erit angulo DAB) fiatq; angulus BAE, æqualis angulo DBA, & ſecet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cuius ſegmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli cõtenti, recti. *c* Quare baſes EA, EC, æquales erunt; *d* Eſt autem & EA, æqualis ipſi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales ſint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, *e* ac propterea E, centrũ erit circuli ABC, quãdoquidẽ ex E, plures quã duæ rectæ æquales cadũt in circumferentiã. a 7. tertij. b 18. prim. c 4. prim. d 6. primi. e 9. tertij.



SIT deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando ſegmentum ABC, ſemicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare *f* & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) *g* Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipſi DA, quod recta AC, ſecta ſit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiã, *h* erit D, centrum. f 5. primi. g 6. primi. h 9. tertij.



SIT tertio angulus DBA angulo DAB, minor, (quod quidem e-
ueniet, ſi ſegmentum ABC, ſemicirculo maius extiterit. Tunc enim,
quoniam BD, tranſit per centrum, ex corollario propoſ. 1. huius lib.
i 7. tertij. quod quidem intra ſegmentum, cum maius eſſe ponatur, exiſtit; *i* erit
k 18. prim. DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; ma-
ior igitur erit quam DA, *k* ideoque angulus DAB, maior angulo
DBA) fiatq; angulus BAE, æqualis angulo DBA, & ſecet recta AE,
rectam BD, in E, puncto, quod oſtendetur eſſe centrum eodem mo-
do, quo id ipſum oſtendimus, quando angulus DBA, maior erat an-
gulo DAB, vt conſtat, ſi recta ducatur EC. Circuli igitur ſegmento
dato, deſcripſimus circulum, cuius eſt ſegmentum. Quod facere oportebat.

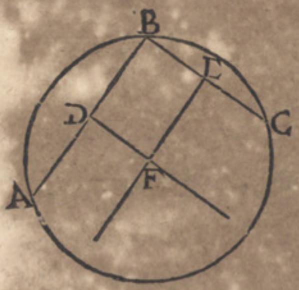
S C H O L I V M.

SED fortaſsis hæc demonſtratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli ſegmenta progreditur, ita facilius inſtituetur. Diuiſa recta AC, biſariam in D, rectaque perpendiculari DB, & ducta AB; aut DB, minor eſt, quam DA, aut æqualis, aut maior.
l 18. prim. *Si minor [l] erit angulus DBA, maior angulo BAD. Conſtituto igitur angulo BAE, æquali ipſi ABD; oſtendemus, vt prius, E, centrum eſſe. Atque hoc euenit, quando ſegmentum eſt ſemicirculo minus.*

m 9. tertij. *SI vero DB, æqualis eſt ipſi DA; erunt omnes tres DA, DB, DC, æquales; [m] ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in ſemicirculo.*

n 18. primi. *SI denique DB, maior eſt, quàm DA; [n] erit angulus DBA, minor angulo DAB. Conſtituto ergo angulo BAE, æquali ipſi ABE; oſtendetur E, eſſe centrum, vti prius. Hoc autem maiori ſegmento accidit.*

ALITER idem problema hoc modo abſoluetur. Poſitis iiſdem, quæ prius fiat angulo DBA, æqualis angulus EAB. Et ſi quidem recta AE, cadit infra AC, erit ſegmentum ſemicirculo minus, vt in prima figura. Si vero AE, cadit ſupra AC, erit ſegmentum ſemicirculo maius, vt in tertia figura: ſemper autem E, centrum erit vt demonſtratum eſt. Si denique recta efficiens cum AB, in A, angulum æqualem angulo ABD, coincidit cum AC, erit ſegmentum ſemicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in ſecunda figura.



BREVIVS tamen inuenietur centrum ſegmenti propoſiti cuiuslibet, ſiue illud ſemicirculo minus ſit, ſiue æquale, ſiue maius, hac ratione. Aſſumantur in peripheria ſegmenti tria puncta vtcunque A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur AB, BC, quæ biſariam ſecentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad AB, BC, perpendiculares DF, EF. Quoniam igitur per corollarium propoſ. 1. huius lib. tam DF, quam EF, incedit per centrum circuli, cuius ABC, eſt ſegmentum, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum eſt inuentum. Quod eſt propoſitum.

ALITER, vt Mechanici ſolent. Accipiantur in circumferentia duo puncta vtcunque A, & B, è quibus deſcribantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui ſe interſecent in E, & F. Poſtea ex aliis duobus punctis C, & D, alij duo arcus ſe ſecantes in G, & H, deſcribantur ad quoduis interuallum, ſiue idem quod prius, ſiue diuerſum. Si igitur agantur rectæ EF, GH, tranſibunt ambæ per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autem lineæ EF, GH, per centrum tranſeant, ita demonſtrabitur. Ducantur rectæ AE, AF, BE, BF, quæ inter ſe æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF, æqualia



o 8. prim. *ſunt lateribus BE, EF, trianguli BEF; & baſes quoque AF, BF, æquales. [o] Erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rurſus ducta recta AB, quæ ſecet EF, in K: quoniam latera AE, EK, trianguli AEK, æqualia ſunt lateribus BE, EK, tri-*
p 4. prim. *anguli BEK, & anguli AEK, BEK, oſtenſi quoque æquales; [p] erunt & baſes AK, BK, & anguli AKE, BKE æquales, ideoque recti. Quare cum EF, diuidat rectam AB, in circulo biſariam, & ad angulos rectos, tranſibit per centrum, ex corollario propoſ. 1. huius lib. Eadem ratione oſtendetur GH, tranſire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali ſitu accipi, vt rectæ EF, GH, non in directum ſibi occurrant, ſed vt ſe mutuo ſecent. Quod ſi quando contingat, rectas EF, GH, in directum eſſe conſtitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehenſa, biſariam. Punctum enim diuiſionis erit centrum circuli: propterea quod tunc recta illa eſt diameter circuli, quandoquidem per centrum tranſit, ex coroll. propoſ. 1. huius lib.*

xxv. THEOR. 23. PROPOS. 26.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.



IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, conſtituti ſint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus inſiſtunt, ſiue ſuper quas aſcenderũt,
a 20. tertij. eſſe æquales. Sumantur enim in peripheriis ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quoniam igitur *a* anguli B, & E, dimidii ſunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipſi æquales inter ſe. Quare ex definitione ſegmenta ABC, DEF, ſimilia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia ſunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos con-
b 4. prim. tinent, G, H, æquales, ex hypotheſi; *b* erunt baſes AC, DF, æquales. Cum igitur ſegmenta ſimilia ABC, DEF,
c 24. tertij. ſint ſuper lineas æquales AC, DF, *c* erunt ipſa inter ſe æqualia. Quare ſi à circulis æqualibus demantur, remanebunt & ſegmenta AC, DF, inter ſe æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF. Quod eſt propoſitum.

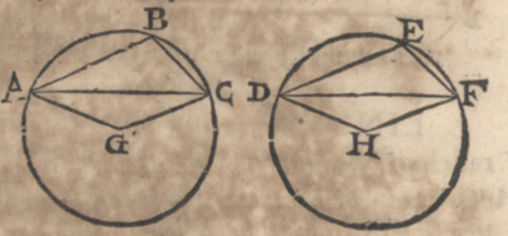
SINT

SINT deinde ad peripherias conſtituti duo anguli æquales B,& E; Dico rurſus, peripherias AC, DF, ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Erunt enim, vt prius, ſegmenta ABC, DEF, ſimilia. Cum igitur ſint ſuper æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales ſint, *d* quod ſint dupli angulorum æqualium B, & E; d 20. tertij.
erunt, vt prius rectæ AC, DF, æquales) *e* erunt ipſa inter ſe æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, e 24. tertij.
remanebunt & ſegmenta AC, DF, æqualia. In æqualibns itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

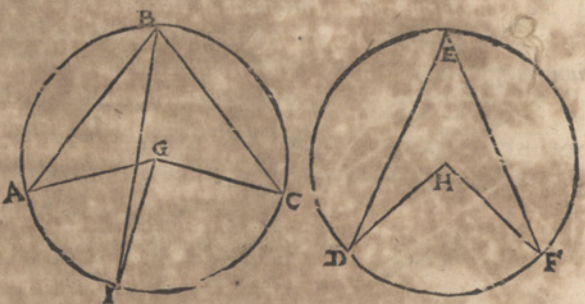
HÆC ſecunda pars breuius ita demonſtrabitur. Quoniam anguli G, H, dupli ſunt angulorum æqualium B, E, erunt ipſi inter ſe æquales. Quare vt oſtenſum eſt prius, peripheriæ AC, DF, ſuper quas aſcenderunt, æquales erunt.

Iam vero, ſi quando contingat, rectas AG, CG; DH, FH, non conſtituere angulos in centris ſupra baſes AC, DF, ſed ſupra baſes ABC, DEF, vt ſubiectæ hæ figuræ monſtrant, ita ſecunda pars huius propoſ. demonſtranda eſt. Quoniam ſpatia ad centra GH, inſiſtentia arcubus AC, DF, æqualia inter ſe ſunt, cum ex ſcholio propoſ. 20. huius lib. dupla ſint angulorũ B, E, ad circumferentias; erunt etiam anguli AGC, DHF, reliqui quatuor rectorum, quibus tam ſpatium circa G, quam ſpatium circa H, æquale eſt, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. inter ſe æquales. Quare, vt prius oſtendemus, baſes AC, DF, triangulorum AGC, DHF, æquales eſſe, ideoque ſegmenta ſimilia ABC, DEF, ob æqualitatem angulorum B, E, ſuper æquales baſes AC, DF, eſſe æqualia, &c.



HINC etiam fit, ſpatia æqualia in centris, inſiſtere arcubus æqualibus. Nam ſi ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus maioribus AC, DF, æqualia ſunt; erunt quoque, vt oſtendimus, anguli AGC, DHF, æquales. Igitur, vt in prima parte propoſitionis demonſtratum eſt, erunt & arcus AC, DF, maiores, & minores ABC, DEF, inter ſe æquales.

QVOD ſi dicti anguli fuerint inæquales, maior inſiſtet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, ſit angulus AGC, ad centrũ maior angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circumferentiam, maior angulo DEF, ad circumferentiam. Dico peripheriam AC, maiorem eſſe peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt vt oſtenſum eſt, peripheriæ CI, DF, æquales. Ac propterea AC, maior, quam DF.

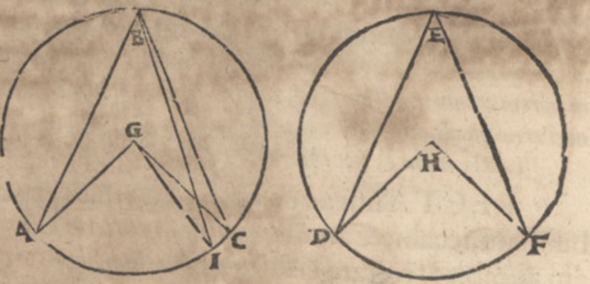


PORRO propoſitio hæc, & tres proxime ſequentes intelligendæ etiam ſunt in eodem circulo. Hoc eſt. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. vt ex demonſtratione huius propoſ. & ſequentium trium liquido conſtat. Eadem enim ſemper demonſtratio, quæ duobus, pluribuſue circulis accommodatur, locum habet in vno eodemque circulo.

THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvj.

IN ęqualibus circulis, anguli, qui ęqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe ęquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, inſiſtant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripheriis AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit angulus G, maior, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. *a* Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter ſe æquales, pars, & totum; quod eſt abſurdum, Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales. a 26. ter.



INSISTANT deinde eiſdem peripheriis æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rurſus dico æquales eſſe. Nam ſi alter, vt ABC, maior eſt; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, *b* eruntque peripheriæ b 26. ter.
AI, DF, æquales. Quare, vt prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. Quod demonſtrandum erat,

SCHOLIVM.

HÆC ſecunda pars ita quoque demonſtrabitur, quando rectæ AG, CG; DH, FH, in centris angulos conſtituunt ſupra baſes AC, DF. Quoniam [c] *anguli ABC, & E, dimidij ſunt angulorum AGC, & H, quos iam oſtendimus eſſe æquales; erunt & ipſi inter ſe æquales.* c 20. primi.

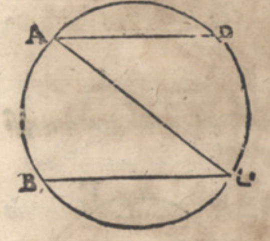
EODEM modo ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus ABC, DEF, æqualibus æqualia erunt. Nam ablatis æqualibus ABC, DEF, ex circulis æqualibus, reliqui fient æquales arcus AIC, DF; ideoq́, vt oſtendimus, anguli AGC, DHF, æquales erunt quibus ablatis ex ſpatiis circa centra GH, quæ æqualia ſunt, cum quodlibet ſit quatuor rectis æquale, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. reliqua erunt & ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus ABC, DEF, æqualia.

SI vero peripheriæ fuerint inæquales, inſiſtet maiori maior angulus, ſiue ad centrum, ſiue ad circumferentiam, quam minori. In figura enim ſcholij præcedentis ſit peripheria AC, maior, quam peripheria DF. Dico angulum AGC, maiorem eſſe angulo DHF, & angulum ABC, maiorem angulo DEF, Si enim fiat peripheria CI, æqualis peripheriæ DF, ducanturque rectæ IG, IB, erunt vt oſtenſum eſt, tam anguli ad centrum CGI, DHF, quam anguli ad circumferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit maior.

QVOD etiam de ſpatijs ad centra G, H, inſiſtentibus arcubus ABC, DEF, intelligendum eſt. Nam eodem modo demon-

 ſtrabi-

ſtrabimus ſpatium ad H, arcui DEF, inſiſtens, maius eſſe ſpatio ad G, quod arcui ABC, inſiſtit, ſi arcus DEF, maior ponatur arcu ABC.



d 27. tertij.
e 27. prim.
f 29. prim.
g 26. tertij.

EX hac porro propoſitione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, ſe mutuo non ſecantes, eſſe parallelas. Et ſi ſint parallelæ, ab ipſis arcus æquales intercipi. In circulo enim ABCD, rectæ AD, BC, intercipiant arcus æquales AB, DC. Dico AD, BC, eſſe parallelas. Ducta namque recta AC, cum arcus AB, DC, ponantur æquales, [d] erunt anguli ACB, CAD, ipſis inſiſtentes, æquales; qui cum ſint alterni, [e] erunt AD, BC, parallelæ.

SINT iam AD, BC, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, eſſe æquales. Cum enim ſint parallelæ AD, BC, ducta recta AC; erunt [f] anguli alterni ACB, CAD, æquales; [g] Ac proinde arcus AB, DC, quibus inſiſtunt, æquales erunt.

VISVM eſt quoque hoc loco apponere ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela eſt rectæ lineæ, quæ peripheriam illam ſubtendit.



h 27. tertij.
i 4. primi.
k 18. primi.
l 28. prim.

IN circulo ABC, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF, tangens circulum. Dico EF, parallelam eſſe rectæ BC, arcum BAC, ſubtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta DA, ſecante rectam BC, in G, connexiſque rectis DB, DC, [h] erunt anguli ADB, ADC, circumferentiis æqualibus AB, AC, inſiſtentes, æquales: Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG, trianguli CDG, æqualia, vtrumq; vtrique. [i] Igitur & anguli ad G, æquales ſunt ſuper baſes GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illis deinceps recti ſunt: Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti, [k] quod DA, perpendicularis ſit ad EF. [l] Ergo EF, BC, parallelæ ſunt. Quod eſt propoſitum.

EX demonſtratis in hac propoſ. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonſtrauimus.

ANGVLVS rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtuſus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti inſiſtens, rectus eſt; inſiſtens vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtuſus.



m 15. prim.
n 26. tertij.

RECTVS angulus ABC, inſiſtat arcui AC, in centro B, circuli ACDE. Dico arcum AC, quadrantem eſſe, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoque anguli ABE, CBD, recto ABC, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. necnon & angulus DBE: rectus [m] cum æqualis ſit recto angulo ABC, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales ſunt, vtpote recti: ac propterea [n] arcus AC, CD, DE, EA, quibus inſiſtunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans eſt. Et quoniam recta cum AB, in B, conſtituens angulum acutum, cadit in arcum AC: recta vero cum eadem AB, in B, continens angulum obtuſum, cadit in arcum CD; liquido conſtat, angulum acutum inſiſtere arcui quadrante minori, obtuſum vero maiori.

o 27. ter.

Sed inſiſtat iam quadranti AC, angulus ABC, in centro B. Dico angulum ABC, eſſe rectum, &c. Productis enim rurſum rectis AB, CB, ad D, E; quoniam tam CAE, quam ACD, & AED, ſemicirculus eſt, eſtque AC, quadrans; erit tam AE, quam CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in ſemicirculo AED, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, æquales, [o] ac proinde anguli ad centrum B, illis inſiſtentes, æquales erũt. Quare cum omnes quatuor ſint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta vero cum eadem AB, auferens maiorem arcum quadrante AC, conſtituit in centro B, angulum recto angulo ABC, maiorem; perſpicuum eſt, angulum minori arcui quadrante inſiſtentem, eſſe acutum; maiori vero, obtuſum. Quod eſt propoſitum.

PARI ratione & hoc theorema ex demonſtratis elicitur, quod in ſinubus etiam demonſtrauimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, ſecansque aliam rectam non per centrum ductam bifariam, ſecabit & arcum, cui hæc recta ſubtenditur, bifariam. Et contra, ſi ſecet arcum bifariam, ſecabit & rectam ei ſubtenſam bifariam.



p 8. prim.
q 26. tertij.
r 27. ter.
s 4. prim.

EX centro A, circuli BCDE, recta egrediens AE, ſecet rectam BD, bifariam in F. Dico & arcum BED, in E, ſectum eſſe bifariam, &c. Ductis enim rectis AB, AD; quoniam duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, baſiſque BF, baſi DF, æqualis ponitur; [p] erit angulus BAF, angulo DAF, æqualis. Igitur [q] arcus BE, arcui DE æqualis erit. Sectus ergo eſt arcus BD, in E, bifariam.

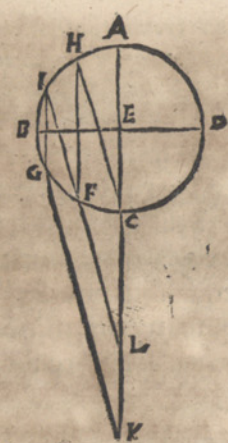
SECET iam recta AE, arcum BD, in E, bifariam. Dico rectam quoque BD, in F, bifariam eſſe ſectam. Ductis n. rurſum rectis, AB, AD: quoniam arcus BE, DE, ponuntur æquales; [r] erunt & anguli BAE, DAE, in centro æquales. Itaque quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, anguloſq; continent æquales, vt oſtendimus; [s] erunt quoque baſes BF, DF, æquales: ac proinde recta BD, in F, ſecta eſt bifariam. Quod erat oſtendendum.

NEQVE vero omittenda hoc loco videtur eximia quædam proprietas circuli, quam Ioannes Baptiſta Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de ſubtilitate deſumptam demonſtrat: Videlicet.

SI in circulo, ductis duabus diametris ſe ſe ad angulos rectos ſecantibus, altera earum producatur, eique ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concurſus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vna cum diametro, quæ producta eſt, ſimul ſumptis, æqualis.

IN

In circulo ABCD, ſecent ſe ad rectos angulos diametri AC, BD, & AC, producatur verſus C, quantum libet. Diuiſo autem Quadrante BC, in quotuis partes æquales CF, FG, GB; & Quadrante BA, in totidem, iungantur rectæ FH, GI, quæ ex ſcholio huius propoſ. 27. ipſi AC, parallelæ erunt, cum arcus æquales intercipiant. Ex B, per G, deniq; extendatur recta BG, occurrens AC, productæ in K. Dico rectam AK, æqualem eſſe omnibus parallelis AC, HF, IG, ſimul ſumptis. Ductis enim rectis HC, IF, & productis, donec cum AK, conueniant; [t] quoniam anguli CHF, HFI, arcubus æqualibus CF, HI, inſiſtentes, ſunt æquales; [u] erunt rectæ HC, IL, parallelæ: Eſt autem & FH, ipſi CL, parallela. Parallelogrammum ergo eſt CHFL; [x] ac proinde recta CL, rectæ FH, æqualis. Eadem ratione erit KL, ipſi GI, æqualis: & ſic deinceps, ſi ſint plures. Addita ergo communi AC, fiet tota AK, omnibus AC, HF, IG, ſimul ſumptis æqualis. Quod eſt propoſitum.



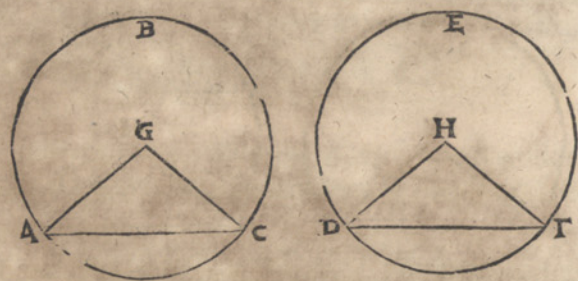
t 27. tertij.
u 27. prim.
x 34. pri.

THEOR. 25. PROPOS. 28.

xxvij.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

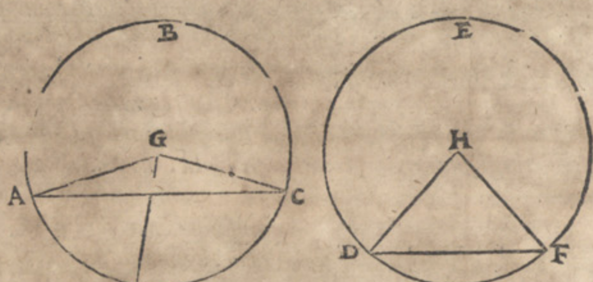
IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, ſint rectæ æquales AC, DF. Dico maiorem peripheriam ABC, æqualem eſſe maiori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem & baſes AC, DF, æquales. Igitur [a] anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ AC, DF, quibus inſiſtunt, [b] æquales erunt; quæ ablatę ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 8. *primi.*
b 26. *tertij.*

SCHOLIVM.

Quod ſi fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, ſi loquamur de ſegmentis circuli minoribus ſemicirculo. Nam ſi de ſegmẽtis circuli maiorib. ſermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, ſit recta AC, maior, quam DF. Dico peripheriam AC, ſemicirculo minorem, maiorem eſſe peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponitur autem baſis AC, maior baſe DF. Igitur [c] angulus AGC, maior erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo DHF, æqualis; eritq; propterea [d] peripheria CI, peripheriæ DF, æqualis; Ac proinde peripheria AIC, maior, quam peripheria DF: Ideoq; reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.



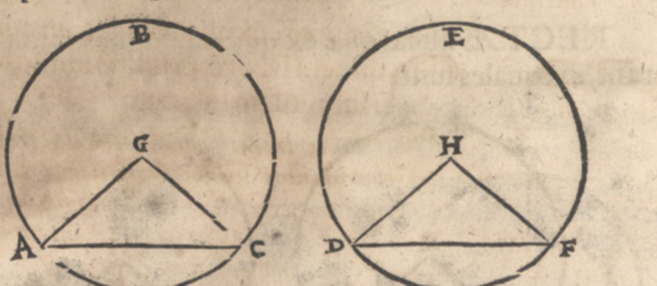
c 25. *prim.*
d 26. *tertij.*

THEOR. 26. PROPOS. 29.

xxviij.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

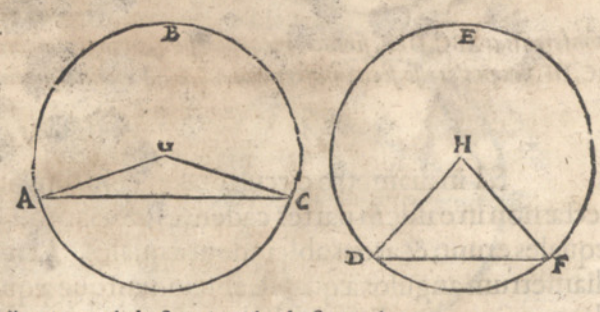
IN circulis eiſdem æqualibus ponantur æquales peripherię ABC, DEF; Itẽ AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas ſubtendunt, eſſe æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, [a] æquales, quod æqualib. peripheriis AC, DF, inſiſtũt. Igitur [b] baſes AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat oſtendendum.



a 27. *ter.*
b 4. *primi.*

SCHOLIVM.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, ſubtendet maiorem maior linea, quam minorem, ſi de ſegmẽtis ſemicirculo minoribus fiat ſermo. Nam ſi de ſegmentis maioribus ſemicirculo loquamur, ſubtendet maiorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum cẽtra G, & H, ſint peripheriæ ſemicirculo minores AC, DF; ſitq; AC, maior, quam DF; Ac proinde ABC, minor, quam DEF. Dico lineam AC, maiorem eſſe, quã DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, maior angulo DHF, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia ſint lateribus DH, HF, trianguli DHF, [c] erit baſis AC, maior baſe DF, &c.



c 4. *prim.*

Sunt autem proxime antecedentes quatuor propoſitiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, vt in ſcholio propoſ. 26. monuimus, quemadmodum conſtat ex demonſtrationibus adductis. Eædem enim locum habent in vno eodemq́ circulo.

ITAQVE eædem quatuor propoſitiones magis vniuerſales fient, ſi ita proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

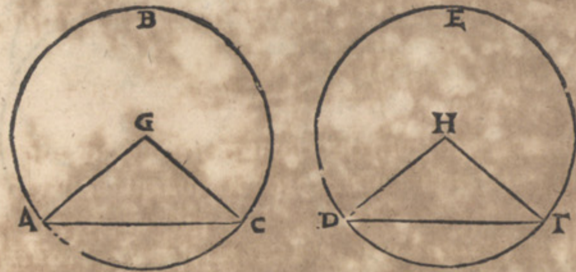
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

SED & ſequentes propoſitiones demonſtrare, non fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt ſimiles circumferentias, æquales ſunt.



d 24. tertij.

Ex circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abſcindant ſimiles circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipſos æquales eſſe. Nam ſi ſegmenta ABC, DEF, ſimilia ſunt, erunt & reliqua ſegmenta AC, DF, ſimilia, vt ad propoſ. 22. demonſtrauimus. Rurſus quia ſuper rectas æquales AC, DF, conſtituta ſunt ſimilia ſegmenta ABC, DEF,[d] ipſa inter ſe æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erũt ſegmẽta AC, DF, quæ ſimilia ſunt demonſtrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, ſi rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre ſimiles circumferentias AC, DF, erunt ex ijs, quæ ad propoſ. 22. demonſtrauimus, & ſegmenta ABC, DEF, ſimilia.[e] Tam ergo illa, quam hæc inter ſe æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter ſe. Quod eſt propoſitum.

e 24. tertij.

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias diſſimiles auferunt.

In eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circumferentias ABC, DEF, diſſimiles eſſe. Si enim ſimiles eſſent circuli ipſi, vt proxime demonſtrauimus, eſſent æquales. Quod pugnat cum hypotheſi. Diſſimiles ergo ſunt circumferentiæ ABC, DEF. Eadem ratione circumferentiæ AC, DF, erunt diſſimiles. Quod erat oſtendendum.

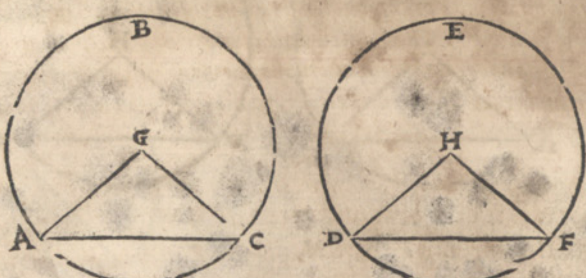
III.

EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias ſimiles auferunt, inæquales ſunt.

In eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentiæ ABC, DEF, ſimiles. Dico rectas AC, DF, inæquales eſſe. Si enim dicantur eſſe æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod eſt abſurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, ſi ſimiles dicantur circumferentiæ AC, DF, demonſtrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales eſſe.

IV.

RECTÆ lineæ, quæ ex quibuſcunque circulis circumferentias ſimiles inæquales auferunt, inæquales ſunt.



f 28. tertij.

In eadem figura ponantur circumferentiæ ABC, DEF, ſimiles & inæquales. Dico rectas AC, DF, inæquales eſſe. Aut enim circuli æquales ſunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ AC, DE, dicantur æquales,[f] erunt circumferentiæ ABC, DEF, ablatæ æquales, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo æquales ſunt rectæ AC, DF. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ AC, DF, auferentes circumferentias ABC, DEF, ſimiles, inæquales ſunt, vt in tertio theoremate demonſtratum eſt. Non aliter oſtendemus, rectas AC, DF, inæquales eſſe, ſi circumferentiæ AC, DF, ponantur ſimiles, & inæquales.

V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum ſumatur, ab eoq; in peripheriam duæ rectæ non in eaſdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abſcindent æquales. Et ſi lineæ ſint æquales, conſtituent rectæ illæ ad diametrum angulos æquales, abſcindentque æquales arcus. Si denique arcus æquales abſcindant, erunt rectæ illæ æquales, conſtituentque ad diametrum angulos æquales.

In cir-

In circulo ABCDE, cuius centrum F, ſumatur in diametro AD, punctum G, præter centrum, conſtituanturq́ primum duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quam arcus CD, ED, æquales eſſe. Quoniam enim [g] *tam duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duobus rectis æquales ſunt, ſi demantur æquales CGD, EGD, erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad centrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, anguliq́ FGC, FGE, æqualibus lateribus oppoſiti æquales. Cum ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterq́ ſit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Iſoſcele FCD, acutus; ex 3. coroll. propoſ. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemq́ modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonſtrauimus, baſis GC, baſi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG;* [h] *ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Conſtat ergo propoſitum.* g 13. primi. h 26. ter.



Deinde ſint lineæ GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales eſſe; & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, ſunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia duobus lateribus GE, GF: Eſt autem & baſis FC, baſi FE, æqualis. [i] *Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rurſus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia ſunt, baſesq́ æquales ponuntur GC, CE,* [k] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales,* [l] *atq́ idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.* i 8. primi. k 8. primi. l 26. ter.

Tertio ſint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, eſſe æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales ſunt, [m] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, ſint æqualia, angulosq́ æquales contineant;* [n] *erunt & baſes GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonſtranda erant.* m 27. ter. n 4. prim.

HOC tamen theoremate multo vniuerſalius eſt Lemma 21. lib. 1. noſtri Aſtrolabij.

V.

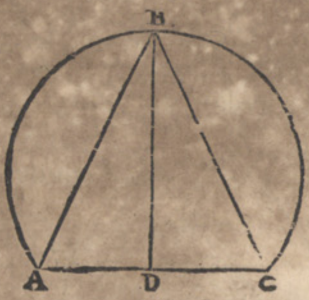
SI in diametro circuli præter centrum ſumatur punctum quodpiam, in quo ad eaſdem partes duo anguli æquales conſtituantur, inſiſtent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior eſt.

In eadem figura proxima ſint duo anguli æquales CGD, CGB. Dico arcum BC, arcu CD, maiorem eſſe. Ductis enim rectis BC, CD, [o] *quoniam recta GB, maior eſt, quam recta GD, abſcindatur GH, ipſi GD, æqualis, iungaturq́ recta CH. Quia igitur duo latera GH, GC, duobus lateribus GD, GC, æqualia ſunt, angulosq́ continent æquales;* [p] *erunt & baſes CH, CD, æquales, & angulus GHC, angulo GDC, æqualis. Eſt autem GDC, in Iſoſcele FCD, acutus, ex 3. coroll. propoſ. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus CHB, obtuſus erit. Cum ergo;* [q] *duo anguli CHB, CBH, ſint duobus rectis minores, erit CBH, acutus. Quare* [r] *latus BC, latere CH, maius erit. Eſt autem CH, recta oſtenſa ipſi CD, æqualis. Igitur recta BC, maior quoq́ erit quam CD; ac propterea ex ſcholio propoſ. 28. huius lib. arcus BC, arcu CD, maior erit. Quod erat oſtendendum.* o 7. ter. p 4. prim. q 17. prim. r 19. prim.

PROBL. 4. PROPOS. 30. xxix.

DATAM peripheriam bifariam ſecare.

SIT peripheria ABC, ſecanda bifariam. Ducatur recta ſubtendens AC, qua diuiſa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam ſecabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, DB, triãguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur [a] & baſes AB, CB, æquales erunt; Ac propterea [b] peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam ſecuimus. Quod erat faciendum. a 4. prim. b 28. tertij.



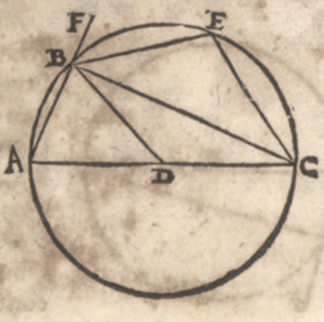
PRAXIS.

Non differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propoſ. 10. lib. 1. tradidimus. Si namq́ quicunq́ arcus proponatur, vt ABC, intelligenda ſemper eſt recta linea eum ſubtendens AC, etiamſi ducta non ſit; atq́ ex punctis A, & C, deſcribendi arcus eodem interuallo ſe mutuo interſecantes ſupra & infra puncta A, & C, &c. non ſecus, ac ſi dicta recta AC, ſecanda eſſet bifariam. Recta enim diuidens rectam AC, bifariam, ſecabit quoq́ arcum datum bifariam.

THEOR. 27. PROPOS. 31. xxx.

IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui vero in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus minor eſt recto.

CIRCVLI enim ABC, cuius centrum D, diameter ſit AC, conſtituaturque in ſemicirculo angulus ABC, exiſtetque angulus BAC, in maiori ſegmento CAB. Conſtituatur quoque in CEB, minori ſegmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum vero BAC, in maiore ſegmento, minorem recto & angulum BEC, in minori ſegmento, maiorem recto. Item angulum maioris ſegmenti comprehenſum recta BC, & peripheria BAC, eſſe recto maiorem. At angulum minoris ſegmenti cõprehenſum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur n. recta BD, ad centrũ, & extendatur AB, in F. Quoniã igitur rectæ DA,



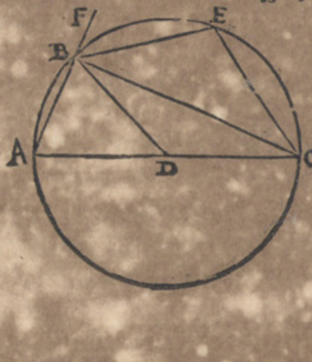
DB,

a 5. primi. DB, æquales ſunt,[a] erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB,
b 32. prim. æqualis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA: æqualis erit. [b] Eſt autem & angulus FBC, externus eiſdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur eſt angulus ABC; quod eſt primum.

c 17. prim. QVONIAM vero in triangulo ABC, [c] duo anguli ABC, & BAC, ſunt duobus rectis minores; Et eſt angulus ABC, oſtenſus rectus: Erit angulus BAC, in ſegmento maiori, recto minor; quod eſt ſecundum.

d 22. tertij. RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulum deſcripto, [d] duo anguli oppoſiti BAC, & BEC, ſunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, oſtenſus eſt recto minor: Erit BEC, angulus in ſegmento minore, recto maior; quod eſt tertium.

Satis autem eſt, demonſtraſſe, vnum angulum in ſemicirculo, nimirum ABC, rectum eſſe: & in maiori ſegmento, qualis eſt BAC, recto minorem: ac deniq; in ſegmento minori, cuiuſmodi eſt BEC, maiorem recto. Cum enim omnes anguli in eodem ſegmento ſint inter ſe æquales, perſpicuum eſt, ſi vnus angulus in ſemicirculo rectus ſit, omnes in eodem ſemicirculo eſſe rectos: Et ſi in maiore ſegmento vnus ſit recto minor, omnes in eodem ſegmento eſſe recto minores: Et ſi deniq; in minore ſegmento vnus ſit maior recto, omnes in eodem ſegmento maiores eſſe recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat abſolute, quemcunq; angulum in ſegmento maiore, BAC, eſſe recto minorem, vt conſtat, ſi alius angulus in eo ſegmento conſtitueretur;
e 21. tertij. *cum is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus BAC. Quare quicunq; alius oſtendetur eſſe etiam recto minor, quia [e] æqualis eſt angulo BAC, in eodem ſegmento maiore, qui recto minor eſt oſtenſus ab Euclide.*



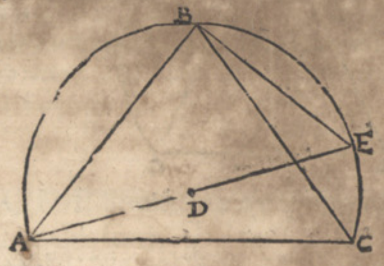
AMPLIVS cum angulus rectus ABC, pars ſit anguli ſegmenti maioris BAC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC; erit angulus ſegmenti maioris, recto maior, quod eſt quartum.

POSTREMO, cum angulus ſegmenti minoris, comprehenſus recta BC, & peripheria BEC, pars ſit quoque anguli recti FBC; Erit angulus ſegmenti minoris, recto minor; quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.



Alia demonſtratio huius propoſitionis. In ſemicirculo, cuius diameter AC, & centrum D, ſit angulus ABC, quem dico eſſe rectum. Ducta enim recta BD,
f 5. primi. [f] erunt anguli DBA, DAB, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales ſint.
g 32. prim. Cum igitur angulus BDC, externus [g] æqualis ſit duobus angulis internis DBA, DAB, in triangulo ABD; Erit angulus BDC, duplus anguli DBA. Eodem modo erit angulus ADB, duplus anguli DBC, atq; adeo duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli ABC. Cum
h 13. primi. igitur [h] anguli ad D, ſint duobus rectis æquales; erit angulus ABC, eorum dimidium, rectus: quod eſt primum.

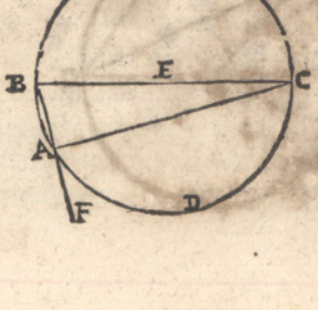
i 5. primi. VEL ſic. Quoniam [i] angulus DAB, angulo DBA, & angulus DCB, angulo DBC, æqualis eſt; erunt duo anguli A, C, angulo ABC, æquales in triangulo ABC: ac proinde angulus ABC, dimidium erit trium an-
k 32. prim. gulorum A, C, & ABC, eiuſdem trianguli. Quocirca [k] cum tres anguli in triangulo ABC, ſint æquales duobus rectis; erit ABC, dimidium duorum rectorum, atque idcirco rectus.



SIT rurſus in ſegmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico eſſe recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in ſemicirculo rectus, vt demonſtratum eſt. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod eſt ſecundum: Atque hæc demonſtratio in omnem angulum in minori ſegmento quadrat: quod de ſuperiori demonſtratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.



SIT iterum in ſegmento minori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico eſſe recto maiorem. Ducta enim diametro AE, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in ſemicirculo rectus, vt demonſtratum eſt; qui cum ſit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod eſt tertium.



IAM vero proponatur ſegmentum maius ABC, & ſegmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulum CAB, ſegmenti maioris, qui videlicet conſtituitur à recta CA, & peripheria ABC, eſſe recto maiorem; At angulum CAD, ſegmenti minoris, qui fit à recta eadem CA, & peripheria ADC, recto minorem. Ducta enim diametro CB, & recta BAF, cadet eius ſegmentum
l 2. ter. BA, duo puncta B, A, coniungens, [l] intra circulum, reliqua vero pars AF, extra circulum; eritque angulus BAC, in ſemicirculo rectus, atque adeo ei deinceps FAC, rectus quoque. Cum igitur angulus rectilineus rectus BAC, ſit pars anguli CAB, ſegmenti maioris, qui nimirum ſub recta CA, & peripheria ABC, continetur; & angulus CAD, ſegmenti minoris, contentus videlicet ſub recta

CA, &

CA, & peripheria ADC, pars quoque anguli recti FAC; conſtat vtrumque.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis exiſtit, rectus eſt: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eiſdem ſit æqualis. Quod quidem conſtat ex priore demonſtratione. Vel eo quod dimidium ſit trium angulorum trianguli, qui duobus rectis æquiualent. Quod ex poſteriore demonſtratione manifeſtum eſt.

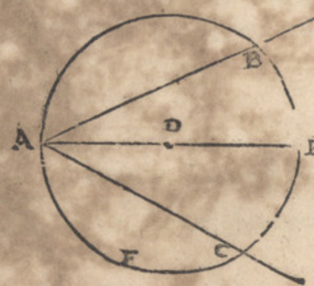
EX CAMPANO.

Ex hac propoſitione perſpicuum quoque eſt, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propoſ. 16. huius lib. quarum vna eſt.

TRANSITVR à maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA vero eſt eiuſmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.



In circulo enim ABC, cuius centrum D, & diameter AE, ducatur recta AB. [m] *Erit angulus ABE, ſegmenti maioris, recto maior. Quare ſi AB, moueatur verſus AE, circa A, punctum fixum, faciet ſemper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum AE, peruenerit,* [n] *vbi faciet angulum ſemicirculi, recto minorem. Quod ſi vlterius moueatur ad AC,* [o] *faciet à fortiori angulum ACF, ſegmenti minoris, recto minorem. Tranſitur ergo ab angulo ſegmenti maioris, qui recto maior eſt, ad angulum ſemicirculi, vel etiam ſegmenti minoris, quorum vterq; recto minor eſt, non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat tranſitus, perſpicuum eſt, vitioſas eſſe prædictas conſequentias.*

m 31. ter.
n 16 tertij.
o 31. tertij.

SCHOLIVM.

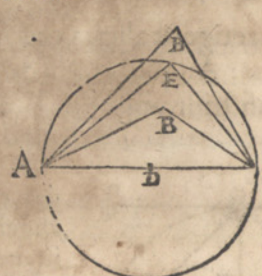
MANIFESTVM quoq; eſt conuerſum huius theorematis: hoc eſt.

SEGMENTVM circuli, in quo angulus conſtitutus eſt rectus, eſt ſemicirculus: in quo vero angulus eſt acutus, eſt ſegmentum maius: & in quo angulus eſt obtuſus, eſt ſegmentum minus. Et ſegmentum cuius angulus recto eſt maior, eſt ſemicirculo maius; cuius vero angulus eſt recto minor, eſt vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus.

Nam angulo exiſtente recto, ſi ſegmentum non ſit ſemicirculus, erit vel maius, & ſic angulus erit acutus; vel minus, & ſic angulus in eo obtuſus erit: quorum vtrumq; pugnat cum hypotheſi. Rurſus angulo exiſtente acuto, ſi ſegmentum non ſit ſemicirculo maius, erit vel ſemicirculus, & ſic angulus in eo erit rectus; vel minus, & ſic angulus in eo erit obtuſus: quorum vtrumq; cum hypotheſi etiam pugnat. Deniq; angulo exiſtente obtuſo, ſi ſegmentum non ſit minus ſemicirculo, erit vel ſemicirculus, atq; ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atq; ita angulus in eo acutus erit: quod ſimiliter hypotheſi contrarium eſt. Præterea, quando ſegmenti angulus eſt recto maior, ſi ſegmentum non ſit maius ſemicirculo, erit vel ſemicirculus vel ſemicirculo minus, & ſic eius angulus recto erit minor, quod non ponitur. At quando angulus ſegmenti eſt recto minor, ſi ſegmentum non ſit ſemicirculus, aut ſemicirculo minus, erit maius, atq; ita eius Angulus recto quoq; maior erit. Quod hypotheſi aduerſatur.

QVIN & hoc theorema verum eſt; ſcilicet.

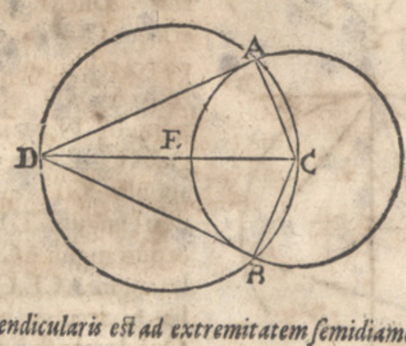
SI angulo recto linea recta ſubtenſa, hoc eſt, ſi in triangulo rectangulo latus recto angulo oppoſitum, bifariam ſecetur, & ex puncto diuiſionis circa illam rectã, vel latus, circulus deſcribatur; tranſibit neceſſario circulus ille per angulum rectum.



Angulo enim recto ABC, ſubtenſa recta AC, vel in triangulo rectangulo ABC, latus AC, recto angulo B, oppoſitum, bifariam ſecetur in D, puncto, ex quo ad interuallum DA, vel DC, circulus deſcribatur AEC, quem dico tranſire per B. Si enim tranſeat citra B, vel vltra; ductis rectis AE, CE, ita vt rectas AB, AC, non ſecent, ſed vel intra eas cadant, vel extra; erit [p] *angulus AEC, rectus quoq;. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod eſt abſurdum: cum angulus E. ſit neceſſario,* [q] *vel maior, vel minor angulo B. Tranſit igitur circulus per punctum B: quod eſt propoſitum.*

p 31. tertij.
q 21. prim.

Ex ijs, quæ in priore parte huius propoſ. demonſtrata ſunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramq; partem rectæ ex eodem puncto per centrum circuli ductæ, quæ circulum tangant. Id quod ad propoſ. 17. huius lib. polliciti ſumus.



Sit enim circulus AB, cuius centrum C, & punctum D, extra ipſum. Ducta recta DC, ex dato puncto ad centrum, eaq; diuiſa bifariam in E, deſcribatur ex E, ad interuallum EC, vel ED, circulus ACBD, ſecans datum circulum in punctis A, B, iungãturq; rectæ DA, DB. Dico vtramq; circulum tangere in A, & B. Ductis enim rectis AC, BC, [r] *erit vterq; angulus A, & B, in ſemicirculo rectus. Quare per coroll. propoſ. 16. huius lib. recta DA circulum AB, tanget in A, & recta DB, eundem tanget in B, quandoquidem tam illa perpendicularis eſt ad extremitatem ſemidiametri AC, quàm hæc ad extremitatem ſemidiametri CB.*

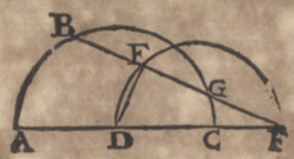
r 31. tertij.

SED

SED & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonſtrabimus hoc loco.

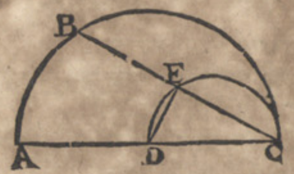
SI per centrum circuli alius circulus deſcribatur, & per vtriuſque circuli centrum recta eiiciatur, à puncto vero, vbi hæc recta à poſteriori circulo ſecatur; ducatur recta vtcunque: ſecabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia poſterioris bifariam.

Sit circulus ABC, per cuius centrum D, deſcribatur alius circulus DEF, & per horum circulorum centra ducatur recta AF; ac deniq; ex puncto F, vbi circulus DEF, rectam AF, interſecat, ducatur recta FB, ſecans circumferentias in B, E, G. Dico BE, GE eſſe æquales. Ducta enim recta DE, [r] *erit angulus DEF, in ſemicirculo DEF, rectus. Igitur* [s] *recta DE, rectam BG, ſecat bifariam.*



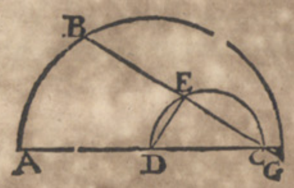
r 31. ter.
s 3. tertij.

Quod ſi poſterior circulus tranſeat per punctum C, vt in ſecunda figura; erit [t] *rurſum angulus, DEC, in ſemicirculo DEC, rectus; ac* [u] *propterea BC, in E, ſecabitur bifariam.*



t 31. tertij.
u 3. tertij.

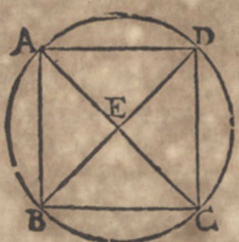
Si deniq; poſterior circulus totus ſit intra priorem, vt in tertia figura; erit iterum [x] *angulus DEF, in ſemicirculo DEF, rectus. Quare* [y] *recta DE, rectam BG, bifariam ſecabit. Quod erat oſtendendum.*



x 31. tertij.
y 3. tertij.

Facile etiam aliud hoc theorema demonſtrabitur.

QVADRILATERVM in circulo deſcriptum, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum, hoc eſt, vel quadratum, vel altera parte longius.



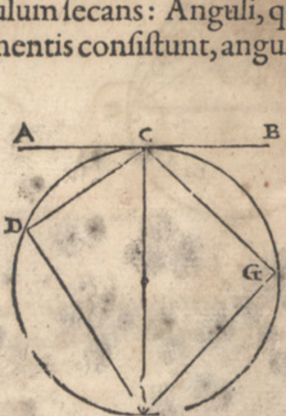
z 33. pri.
a 28. tertij.
b 31. tertij.

In circulo ABCD, deſcriptum ſit quadrilaterum ABCD, cuius duo oppoſita latera AD, BC, parallela ſint, & æqualia. Dico ipſum eſſe parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim rectæ AD, BC, parallelæ ſint, & æquales, [z] *erunt quoque AB, DC, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo eſt ABCD. Quia vero* [a] *& arcus AD, arcui BC, ob rectas æquales AD, BC, & arcus AB, arcui DC, ob æquales rectas AB, DC, æqualis eſt; erit totus arcus BAD, toti arcui BCD, & totus arcus ADC, toti arcui ABC, æqualis; ac proinde, ductis rectis BD, AC, ſemicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare* [b] *anguli quadrilateri recti erunt. Quod eſt propoſitum.*

xxxj.

THEOR. 28. PROPOSITIO 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt iis, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.



a 18. tertij.
b 31. tertij.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, diuidens circulum in duo ſegmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem eſſe angulo CGE in alterno ſegmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque ſegmento. Tranſeat enim primum, vt in priore figura, recta CE per centrum. [a] Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, rectus: [b] Sunt autem & anguli CGE, CDE, in ſemicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis eſt.



c 18. tertij.
d 31. ter.
e 21. tertij.
f 22. tertij.
g 13. prim.

NON tranſeat iam CE, recta per centrum, vt in figura poſteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: [c] eritque CF, perpendicularis ad AB, [d] & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE reliquo CFE, æqualis: [e] Eſt autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum vterque ſit in ſegmento CGE. Quare angulus ACE angulo CGE, æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero CDEG duo [f] anguli CDE, CGE, duobus ſunt rectis æquales: [g] Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autẽ, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

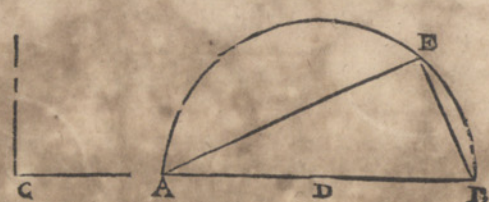
SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum ſecantis fecerit cum ipſa angulos æquales iis, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

In eadem figura priore tranſeat primum recta CE, per centrum, ſecans circulum CDE, & ducatur recta AB, per C,
faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam [h] angulus CGE, rectus eſt, erit & an- h 31. tertij.
gulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propoſ. 16. huius lib. AB, circulum tanget. Iam vero CE, non tranſeat per
centrum, conſtruaturq; figura poſterior, vt ſupra. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE, in alterno
ſegmento maiore, [i] & hic eſt æqualis angulo CFE, erit & angulus ACE, æqualis angulo CFE. Addito ergo communi angulo i 21. tertij.
ECF, erit angulus ACF, æqualis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æquales ſunt vni recto; quod [k] angulus k 31. tertij.
CEF, rectus ſit in ſemicirculo, & tres anguli in triangulo CEF, [l] æquales ſunt duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quo- l 32. prim.
que erit; ideoq; per coroll. propoſ. 16. huius lib. AB, circulum tanget.

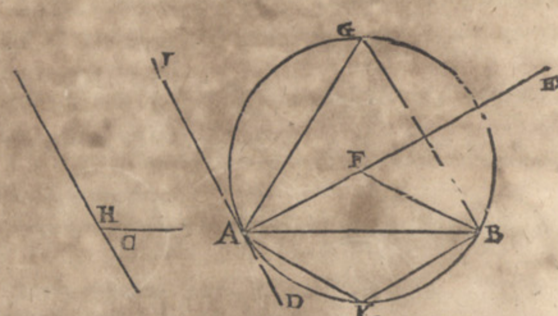
Eodem modo, ſi angulus BCE, æqualis fuerit angulo CDE, in alterno ſegmento minori, oſtendetur recta AB, tangere
circulum. Cum enim [m] anguli BCE, ACE, duobus ſint rectis æquales: [n] Item duo anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; m 13. prim.
ſi demantur æquales BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonſtratum iam eſt, recta AB, cir- n 22. tertij.
culum tanget.

PROBL. 5. PROPOSITIO 33. xxxij.

SVPER data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.



RECTA data ſit AB, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur ſuper AB, ſegmentum deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis angulo recto dato C. Diuiſa AB, bifariam in D, deſcribatur centro D, interuallo autem DA, vel DB, ſemicirculus AEB; factumque erit,
quod proponitur. Nam [a] angulus AEB, in a 31. tertij.
deſcripto ſemicirculo rectus eſt, ideoque æqualis angulo C, recto.

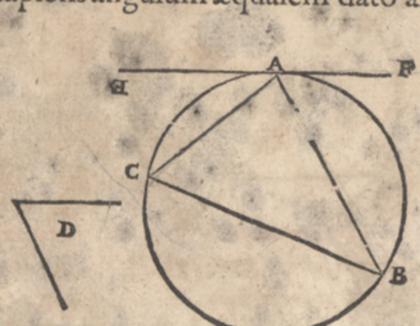


SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpẽdicularis AE, quæ cadet ſupra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, ſecetq; BF, rectam AE, in F. [b] Erunt igitur rectæ FA, FB, æ-
quales. Quare ſi centro F, & interuallo FA, circulus de- b 6. primi.
ſcribatur AGB, tranſibit is per B. Dico igitur angulum in ſegmento AGB, quod deſcriptum eſt ſuper AB, eſſe æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto ſegmẽto AGB. Quia igitur AE, per centrum F, tranſit, & ei
perpendicularis eſt DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propoſ. 16. huius lib. Quapropter [c] angulus c 32. tertij.
DAB, hoc eſt, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in ſegmento alterno AGB.

SIT tertio angulus datus H, obtuſus. Fiat rurſus angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ ſupra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, deſcriptumq; erit ſuper AB, ſegmẽtum AKB,
in quo angulus K, æqualis eſt angulo dato obtuſo H. Nam angulus IAB, hoc eſt, angulus datus H, [d] æqualis eſt
angulo K, in alterno ſegmento AKB. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat. d 32. tertij.

PROBL. 6. PROPOS. 34. xxxiij.

A DATO circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.



DATVS circulus ſit ABC, à quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtens æqualis ſit da-
to angulo D. [a] Ducatur recta EF, tangens circulum in a 17. tertij.
A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in ſegmento ablato ACB, æ-
qualem eſſe dato angulo D. Eſt enim [b] angulus FAB, b 32. tertij.
æqualis angulo C, in alterno ſegmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus ſit æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum ACB, &c. Quod erat faciendũ.

THEOR. 29. PROPOS. 35. xxxiv.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.



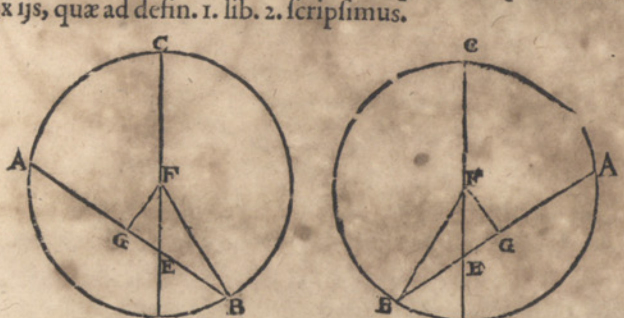
IN circulo ACBD, ſecent ſe mutuo rectę AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis AE, EB, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis CE, ED. Aut enim vtraque linea tranſit per centrum, aut vna tantum, aut neutra. Tranſeat primum vtraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor ſegmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub duobus vnius lineæ æquale eſſe ei, quod ſub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. ſcripſimus.

a 3. tertij. *b 5. ſec.* *c 47. primi.*



TRANSEAT deinde CD, ſola per centrum F, diuidatque primum rectam AB, bifariam,[a] ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniam igitur CD, diuiſa eſt per æqualia in F, & per inæqualia in E, [b] erit rectangulũ ſub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoq; quadrato rectæ FB, cũ rectæ FD, FB, ſint æquales: Eſt autẽ quadratũ rectę FB,[c] æquale quadratis rectarũ FE, EB. Igitur rectangulũ ſub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ EF, æquale quoq; erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato cõmuni quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum ſub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc eſt, rectangulo ſub AE, EB, cum AE, EB, rectæ ſint æquales: ac proinde rectangulum ſub eis comprehenſum, ſit quadratum, ex ijs, quæ ad defin. 1. lib. 2. ſcripſimus.

d 3. tertij. *e 5. ſec.* *f 47. primi.*



DIVIDAT iam CD, tranſiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariã in G, ducanturq; rectæ FG, FB, [d] eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam vero rectãgulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ FE, [e] æquale eſt quadrato rectæ FD, hoc eſt, quadrato rectæ FB: Eſt autem quadratum rectæ FE, [f] æquale quadratis rectarum FG, GE, & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB: erit quoque rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam
g 5. ſec. rectangulum ſub AE, EB, vna cũ quadrato rectæ GE,[g] æquale eſt eidem quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB, ſecta eſt bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale eſt rectangulo ſub AE, EB, vna cum quadrato eiuſdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulũ ſub CE, ED, æquale rectangulo ſub AE, EB. Quod eſt propoſitum.

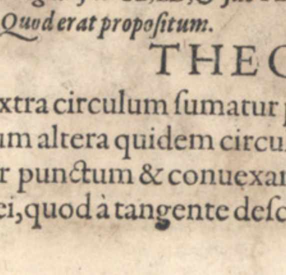


TERTIO neutra per centrum tranſeat, ſiue vna illarum bifariam diuidatur, ſiue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum ſectionis E, recta GH. Quoniam itaque oſtenſum eſt, rectangulum ſub AE, EB, æquale eſſe rectangulo ſub GE, EH, ſiue AB, diuidatur bifariam, ſiue non: Item rectangulum ſub CE, ED, æquale eſſe quoque eidem rectangulo ſub GE, EH, ſiue CD, ſecta ſit bifariam, ſiue non; Erit rectangulũ ſub AE, EB, æquale rectangulo ſub CE, ED. quod eſt propoſitũ. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema iſtud hoc modo.

SI duæ rectæ ita ſe ſecent, vt rectangulum ſub vnius ſegmentis comprehenſum, æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo; deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc eſt, circulus per quælibet tria puncta earum extrema deſcriptus, per quartum quoque punctum tranſibit.



h 35. tertij.

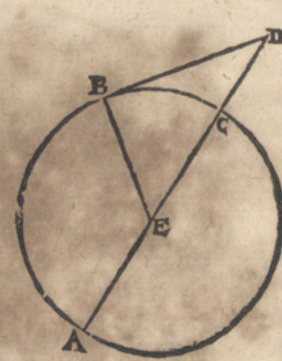
Secent ſe mutuo rectæ AB, CD, in E, ſitq; rectangulum ſub AE, EB, æquale rectangulo ſub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc eſt, per ea circulum poſſe deſcribi: adeo vt circulus per tria puncta A, D, B, deſcriptus, tranſeat neceſſario per punctum etiam C. Deſcribatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, oſtendemus ad 5. propoſ. lib. 4.) qui ſi non tranſeat per C, tranſibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum ſub FE, ED,[h] æquale eſt rectangulo ſub AE, EB, & rectangulum ſub CE, ED, ponitur quoq; æquale eidem rectangulo ſub AE, EB; Erunt rectangula ſub CE, ED, & ſub FE, ED, æqualia, pars & totum; quod eſt abſurdum. Tranſibit igitur circulus per punctum C. Quod erat propoſitum.

xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 36.

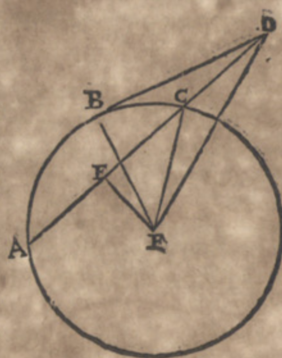
SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

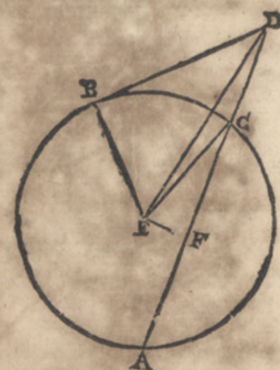
EXTRA circulum ABC, punctum ſumatur D, à quo linea ducatur D A, ſecans circulum in C, [a] & linea D B, circulum tangens in B. Dico rectangulum ſub DA, DC, æquale eſſe quadrato rectæ D B. Tranſeat enim primum recta D A, per centrum E, & iungatur recta EB, [b] quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuiſa eſt per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum CD, [c] erit rectangulũ ſub DA, DC, vna cũ quadrato rectæ EC, hoc eſt, cũ quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ D E: Eſt autẽ quadratũ rectæ D E, [d] æquale quadratis rectarum EB, BD. Quare rectangulum ſub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarũ DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectę BE, remanebit rectãgulũ ſub DA, DC, quadrato rectę DB, æquale. Quod eſt ꝓpoſitũ.



a 17. tertij.
b 18. tertij.
c 6. ſec.
d 47. prim.

NON tranſeat iam DA, ſecans per centrum E. Diuiſa ergo AC, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F; [e] eritque EB, ad BD, perpendicularis; [f] & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuiſa eſt per æqualia in F, & ei addita recta C D, [g] erit rectangulum ſub DA, D C, vna cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum ſub DA, DC, vna cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum D F, F E: Eſt autem quadratis rectarum C F, F E, [h] æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB; Et [i] quadratis rectarum D F, F E, æquale eſt quadratum rectæ DE. Quare rectangulum ſub DA, DC, vna cũ quadrato rectæ E B, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ D E, [k] æquale ſit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectãgulum ſub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectę BE, remanebit rectangulum ſub D A, D C, quadrato rectæ DB, æquale: quod eſt propoſitum. Si igitur extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

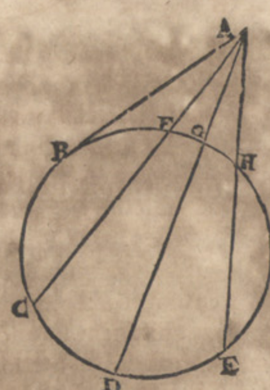




e 18. tertij.
f 3. tertij.
g 6. ſec.
h 47. prim.
i 47. primi.
k 47. prim.

COROLLARIVM I.

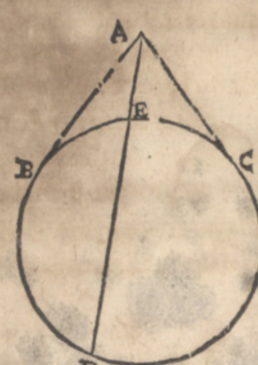
HINC manifeſtum eſt, ſi à puncto quouis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ circulum ſecantes ducantur, rectãgula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus inter ſe eſſe æqualia. Vt ſi ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, ſecantes circulum in F, G, H, erunt rectangula ſub AC, AF; Item ſub AD, AG; & ſub AE, AH, æqualia inter ſe. Nam ducta AB, tangente circulum, [l] erunt quadrato rectæ AB, æqualia ſingula illa rectangula; quare & inter ſe omnia æqualia erunt.



l 36. tertij.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quę circulum tangant, inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulũ: quas dico eſſe æquales inter ſe. Ducta enim recta A D, quæ circulum ſecet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quam quadratum rectæ AC, [m] æquale rectangulo ſub AD, AE. Quare quadrata rectarum A B, A C, inter ſe æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.

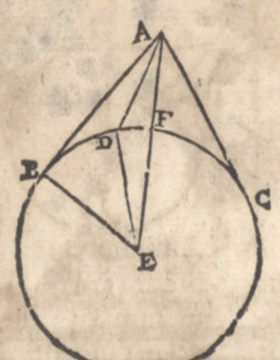


m 36. tertij.

COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoque eſt, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſe duas lineas, quę circulum tangãt. Si enim præter duas AB, AC. duci poſſit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, [n] erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod eſt abſurdum. Nã ſi ducatur recta AE, [o] erit angulus ADE, maior angulo ABE.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tangat; erunt duæ tangentes AB, AD, æquales, vt oſtenſum eſt; quod eſt abſurdum. Ducta namq; recta AE, ad centrum E, quæ circulum ſecet in F, [p] erit AD, cum ſit propinquior minimæ A F, minor, quam AB, quæ à minima AF, remotior eſt. Vel ſic. Si AB, AD, ſunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipſis AD, DE, æquales, quod eſt abſurdum. [q] Sunt enim maiores AB, BE. Solũ igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod eſt propoſitum.



n 18. tertij.
o 21. prim.
p 8. tertij.
q 21. primi

COROLLARIVM IV.

ILLVD denique conſtat etiam, ſi duæ rectę æquales ex puncto quopiam in conuexam periphéri[am] incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt ſi duæ rectæ AB, AC, in antecedente figura ſint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, (ſemper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci poſſunt, vt conſtat ex ſcholio propoſ.31.huius lib.) eruntque ex 2.coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, ipſi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod eſt abſurdum. [r] Duæ enim tantum duci poſſunt.

r 18. tertij.

ALITER. Ponantur in figura ſequentis propoſ. duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & baſis DE, communis. [s] Igitur anguli B, F, æquales erunt: [t] Sed B, rectus eſt. Igitur & F, rectus erit, atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propoſ.16. huius lib.

s 8. prim.
t 18. tertij.

SCHOLIVM.

Facillimo negotio propoſitionem hanc per antecedentem propoſitionem demonſtrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum BCD, ducatur tangens AB, & ſecans AE, quæ primum per centrum F, tranſeat, ſecetq; circumferentiam in D. Dico rectangulum ſub AE, AD, æquale eſſe quadrato ex AB.



Deſcripto namq; ex F, per A, circulo AKL, producantur AE, AB, vſq; ad H, I, & per D, ad AH, perpendicularis KL, quæ eundem circulum BCD, tanget in D, ex coroll. propoſ.16. huius lib. Eruntq; ex demonſtratis in ſcholio propoſ.3. huius lib. AD, HE, æquales, ac proinde, addita communi DE, & AE, HD, æquales erunt. Item ex ſcholio propoſ.18. huius lib. AI, KL, æquales erunt, ſecabunturq; in B, D, biſariam: ac propterea rectangula ſub AB, BI, & ſub KD, DL, æqualia inter ſe erunt, atq; adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI, KD, DL. Itaq; quoniam rectangulum ſub HD, DA, hoc eſt, ſub AE, (quæ ipſi HD, oſtenſa eſt æqualis) AD, [u] æquale eſt rectangulo ſub KD, DL, hoc eſt, rectangulo ſub AB, BI, ſiue quadrato ex AB, conſtat propoſitum.

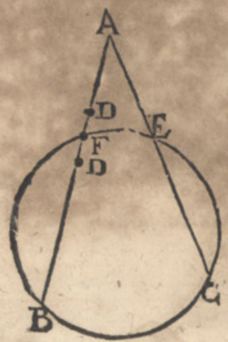
u 35. tertij.

Sed iam ſecans linea AN, non tranſeat per centrum F, ſecetq; circumferentiam in C. Dico rurſum, rectangulum ſub AN, AC, quadrato ex AB, æquale eſſe. Deſcripto enim rurſus ex F, per A, circulo AKL, producantur AN, AB, vſq; ad G, I, & per C, ducatur OM, circulum BCD, tangens. Eruntq; ex ſcholio propoſ.3. huius lib. AC, GN, [æqu]ales, ac proinde, addita communi CN, & AN, GC, æquales erunt. Item ex ſcholio propoſ.18. huius lib. AI, OM, æquales erunt, ſecabunturq; in B, C, biſariam: ac propterea rectangula ſub AB, BI, & ſub OC, CM, æqualia inter ſe erunt, atq; adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI, OC, CM. Itaq; quoniam rectangulum ſub GC, CA, hoc eſt, ſub AN, (quæ ipſi GC, oſtenſa eſt æqualis) AC, [x] æquale eſt rectangulo ſub OC, CM, hoc eſt, rectangulo ſub AB, BI, ſiue quadrato ex AB, conſtat rurſus id, quod proponebatur.

x 35. ter.

Primum etiam corollarium huius propoſ. hoc modo ferme conuertemus.

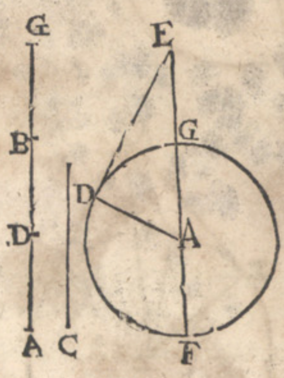
SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita ſecentur in binas partes, vt rectangula ſub totis, & ſegmentis prope punctum comprehenſa ſint æqualia: deſcribi poterit per extrema puncta aliorum ſegmentorum circulus, hoc eſt, circulus per tria puncta extrema aliorum ſegmentorum deſcriptus, per quartum etiam punctum extremum tranſibit.



Ex puncto enim A, egrediantur duæ rectæ AB, AC, quæ ita ſecentur in punctis D, E, vt rectangula ſub AB, AD, & ſub AC, AE, ſint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere, hoc eſt, per ea poſſe deſcribi circulum: adeo vt circulus per tria puncta B, C, E, deſcriptus, tranſeat neceſſario per reliquum etiam punctum D. Deſcribatur enim per tria puncta B, C, E, (vt ad propoſ. 5. lib. 4. docebimus) circulus BCE, qui ſi dicatur non tranſire per quartum punctum D, tranſibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum ſub AB, AF, æquale eſt, ex coroll. 1. huius propoſ. rectangulo comprehenſo ſub AC, AE, & rectangulum ſub AB, AD, eidem rectangulo ſub AC, AE, ponitur æquale: erunt rectangula ſub AB, AF, & ſub AB, AD, inter ſe æqualia, pars & totum: quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonſtrandum.

Licebit quoq; ex demonſtratis hac propoſ. colligere huiuſmodi problema.

DATIS duabus rectis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulũ ſub tota compoſita, & adiuncta cõprehenſum, quadrato alterius ſit æquale.



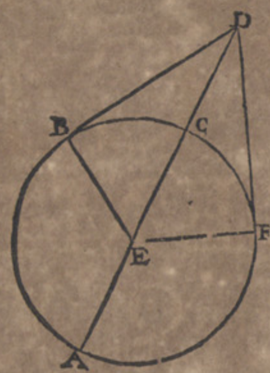
Sint datæ duæ rectæ AB, & C, ſitq; ipſi AB, minori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita, & adiuncta, æquale ſit quadrato rectæ C, maioris. Diuiſa recta AB, biſariam in D, deſcribatur ex quouis centro A, ad interuallũ AD, dimidiata, circulus DFG, & ad AD, in D, excitetur perpendicularis DE, ipſi C, æqualis, ac deniq; ex E, per A, centrum recta extendatur EF, ſecans circumferentiam in G. Dico ſi rectæ AB, adijciatur BG, ipſi EG, æqualis, rectangulum ſub tota AG, & GB, æquale eſſe quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum ſub FE, EG, [y] æquale eſt quadrato rectæ ED; (quod ED, circulum tangat in D, ex coroll. propoſ.16. huius lib.) Eſt autem rectangulũ ſub FE, EG, æquale rectangulo ſub AG, GB, (quod rectæ FE, EG, rectis AG, GB, æquales ſunt. Sumpta enim eſt GB, ipſi EG, æqualis, & AB, ipſi FG, æqualis poſita eſt,) & quadratum ex ED, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum ED, & C, ex conſtructione,) æquale. Igitur & rectangulum ſub AG, GB, quadrato ex C, æquale erit. Quod eſt propoſitum.

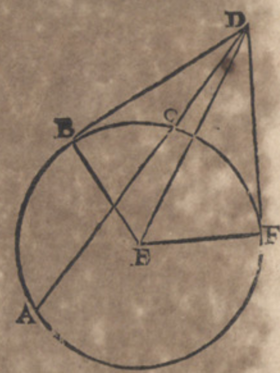
y 36. tertij.

Non ſecus propoſitum demonſtrabitur, ſi rectæ C, maiori adiungenda ſit recta, ita vt rectangulum ſub tota compoſita, & adiuncta comprehenſum quadrato rectæ AB, minoris æquale ſit.

THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvj.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.





EXTRA circulum ABC, cuius centrum E, punctum ſumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum ſecans in C, & recta DB, incidẽs in circulũ punctũ B; ſitq; rectangulum ſub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. [a] Ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod ſi DA, ſecans non taanſeat per centrum E, iungatur quoque recta DE. Quoniam igitur rectangulo ſub DA, DC, [b] æquale eſt quadratum rectæ tangentis DF: Et eidem rectangulo ſub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter ſe æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter ſe erunt. Itaq; quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia ſunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & baſis DE, communis, [c] erunt anguli DFE, DBE, æquales. [d] Atqui angulus DFE, rectus eſt, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propoſ. 16. huius lib. DB, circulum tanget; quod eſt propoſitum. Si ergo extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 17. ter.
b 36. tertij.
c 8. prim.
d 18. tertij

SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuerſum præcedentis theorematis, vt perſpicuum eſt.

PLACET hoc loco ſequens etiam theorema demonſtrare.

SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vſq; ad conuexã peripheriã inter ſe æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli eiecta angulum ab eis comprehenſum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehenſum diuidens bifariam, per centrum circuli tranſibit.

In priori figura huius propoſ. duæ rectæ DB, DF, circulum ABCF, tangant in B, F, punctis, quæ ex 2. coroll. præcedentis propoſ. æquales erunt: Vel ducantur quæcunq; duæ æquales DB, DF. Et per centrum E, ducatur recta linea DEA. Dico angulum BDF, ſectum eſſe bifariam à recta DA. Cum enim iunctis rectis EB, EF, duo latera BD, DE, duobus lateribus FD, DE, æqualia ſint, baſiſq; EB, baſi EF, æqualis; [c] erunt duo anguli ad D, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum. c 8. prim.

Diuidat iam recta DA, angulum BDF, bifariam. Dico rectam DA, per centrum tranſire. Si enim in DA, non eſt centrum, ſit extra ipſam centrum E, iungaturq; recta ED, vt in poſteriori figura huius propoſ. Ergo, vt demonſtratum eſt, recta ED, angulum BDF, bifariam diuidet; ac propterea anguli BDA, BDE, cum ſint dimidiatæ partes anguli BDF, æquales inter ſe erunt, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta DA, per centrum. Quod demonſtrandum erat.

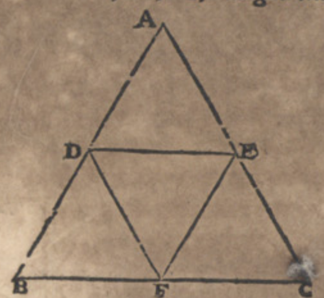
EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

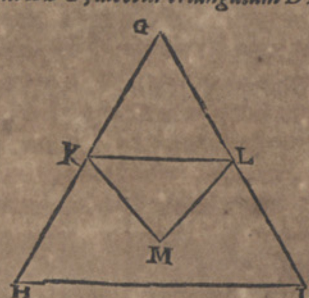
DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

AGENS Euclides quarto hoc libro de varijs inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus: Item de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eaſdem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens à rectilineis figuris: Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera AB, AC, BC, trianguli externi ABC; dicetur triangulum DEF, in triangulo ABC, eſſe inſcriptum. At quoniam angulus M, trianguli KLM, non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inſcribi in triangulo GHI, quamuis totũ illud ſit intra hoc, duoq; anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.





II.

SIMILITER & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ circumſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E contrario dicetur triangulum ABC, deſcribi circa triangulum DEF; quoniam ſingula latera illius ſingulos huius angulos tangunt; At triangulum GHI, non dicetur deſcriptum eſſe circa triangulum KLM, propterea quòd latus illius HI, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum eſt de inſcriptionibus, ac circumſcriptionibus aliarum figurarũ rectilinearum.

Cæterum proprie figuræ rectilineæ dicuntur in figuris rectilineis deſcribi, & circa eaſdem deſcribi, quando inſcripta, & circumſcripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, cum & quadratum intra triangulum deſcribi poßit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

III.



FIGVRA rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

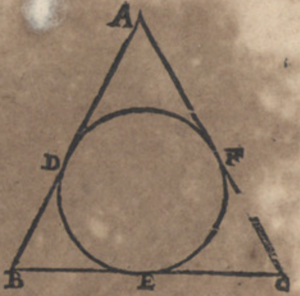
VT ſi tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulum in circulo eſſe inſcriptum. Quod ſi vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum eſſe inſcriptum in circulo.

IV.

FIGVRA vero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula latera eius, quæ circumſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

At vero,

AT vero ſi latera trianguli ABC, ſingula tangant peripheriam circuli DEF; dice- tur triangulum circa circulum eſſe deſcriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit eius figuræ, cui inſcribitur.

VI.

CIRCVLVS autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit eius figuræ, quam circum ſcribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF, in figura definitionis 4. inſcriptus eſſe in triangulo ABC: At vero circulus ABC, in figura definitionis 3. deſcriptus eſſe circa triangulum ABC. Idem iudicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inſcribi, vel circa eundem deſcribi; Aut in quibus circulus dicitur inſcribi, vel circa quas deſcribi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, ſeu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

VT recta linea AB, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, exiſtunt, coaptata, ſeu accommodata in dicto circulo eſſe dicetur: Non autem recta E, vel CD; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

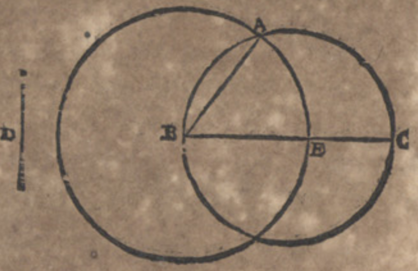


PROBL. I. PROPOS. I.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior.

I N circulo ABC, coaptanda ſit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non ſit diametro circuli dati. Cum enim diameter *a* ſit omnium rectarum in circulo maxima, ſi data recta diametro maior foret, non poſſet in circulo a[illegible]ri illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque ſi data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro, *b* abſcindatur BE, æqualis ipſi D, & centro B, interuallo autem BE, circulus deſcribatur EA, ſecans circulum ABC, in A, ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. *c* Eſt enim BA, æqualis ipſi BE, & D, æqualis eidem BE, per conſtructionem. Quare AB, & D, inter ſe æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

a 15. tertij. *b 3. primi.* *c 15. defin. primi.*

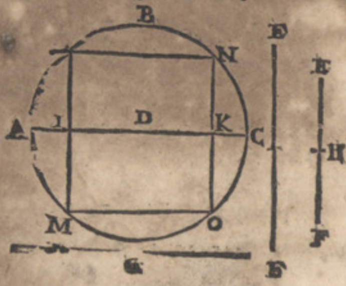


EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo ABC, cuius centrum D, accommodanda ſit recta æqualis rectæ EF, quæ diametro maior non ſit, & alteri rectæ G, parallela.[d] *Ducatur per centrum D, diameter AC, rectæ G, parallela. Quod ſi recta EF, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si vero EF, diametro minor fuerit, ſecta ea bifariam in H, abſcindatur DI, ipſi HE, & D, K, ipſi HF, æqualis, vt tota IK, toti EF, ſit æqualis.*[e] *Et per I, K, ad angulos rectos ipſi AC, ducantur LM, NO; iungaturque LN. Dico LN, accommodatam eſſe æqualem ipſi EF, & ipſi G, parallelam. Cum enim LM, NO, æqualiter à centro diſtent,*[f] *ipſæ æquales inter ſe erunt:*[g] *quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos ſecentur à recta AC, per centrum D, tranſeunte; erunt & earum ſemiſſes LI, NK, æquales.*[h] *Quia vero LI, NK, parallelæ etiam ſunt;*[i] *erunt quoque LN, IK, æquales, & parallelæ. Quare cum IK, æqualis ſit ipſi EF, & parallela ipſi G. Erit etiam LN, æqualis ipſi EF,*[k] *& ipſi G, parallela. Eadem ratione, ſi recta ducatur MO, erit ea æqualis ipſi EF, & parallela ipſi G. Quod eſt propoſitum.*

d *31. primi.* e *11. prim.* f *14. tertij.* g *3. tertij.* h *28. prim.* i *33. prim.* k *30. prim.*

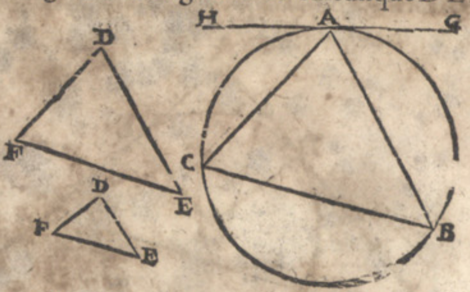


ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

SIT in circulo ABC, dato deſcribendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC, angulo E, atq; extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiã vſq; in puncta B, & C, coniungaturq; recta BC. Nõ cadet autẽ recta AC, in rectã AB, vel inter rectas AB, AG: ꝑpterea ꝙ anguli GAB, HAC, h. e. anguli F, E, *a* minores ſunt duobus rectis. *b* Eſſent autẽ duob. rectis æquales, ſi AC, in AB, caderet; vel maiores duob. rectis, ſi inter AB, AG, caderet. Dico triangulũ ABC, circulo dato inſcriptum, eſſe æquiangulum dato triangulo DEF. Eſt enim angulus C, *c* æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis eſt angulus F, ex conſtructione. Quare anguli C, & F, inter ſe quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, *d* æqualis eſt angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis eſt, per conſtructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter ſe æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales ſint duobus angulis E, & F, trianguli DEF, *e* erunt quoq; reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum eſt ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum deſcripſimus, &c. Quod faciendum erat.

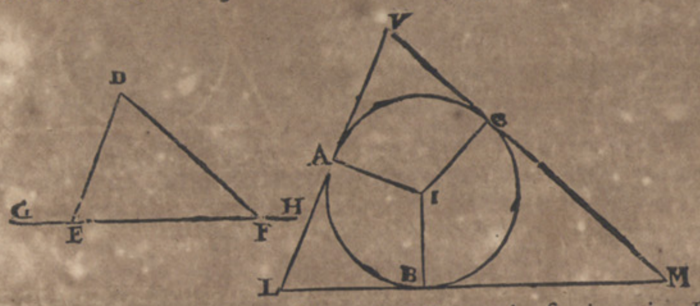


a *17. primi.* b *13. prim.* c *32. tertij.* d *32. tertij.* e *32. primi.*

PROBL. 3. PROPOS. 3.

iij. CIRCA datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum ABC, deſcribendum ſit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF. Pro-
ducto latere EF, vtrinque ad G, & H, ſumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque AI, & fiat angulus
AIB, æqualis angulo DEG, & angulus
BIC, angulo DFH. Deinde ex A,B,C,e-
ducantur ad AI, BI, CI, perpendiculares
KL, LM, MK, quæ circulum tangent in
punctis A,B,C,per coroll. propoſ. 16.lib.
3.coibuntque in punctis K,L,M. Si enim
duceretur recta AC, fierent duo anguli
KAC, KCA, duobus rectis minores, ac
proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam re-
cta hæc ducta AC, caderet ſupra rectas

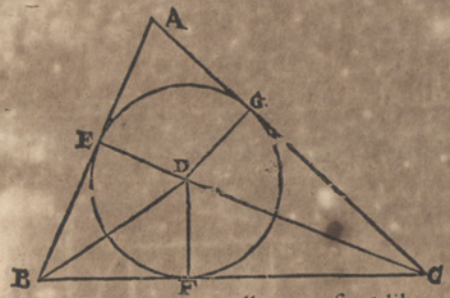


AI, CI quod hæ angulum conſtituant in I. Cum enim ſpatium circa I, æquale ſit quatuor rectis ex coroll. 2. pro-
poſ.15.lib.1.hoc eſt, quatuor angulis ad E, & F, ſintque duo anguli AIB, CIB, duobus angulis DEG, DFH, æ-
a 17. primi. quales; erit reliquum ſpatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed *a* hi minores ſunt duobus
rectis. Igitur & ſpatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC. Alias ſpatium illud eſſet
vel æquale duobus rectis, ſi nimirum AI, CI, vnam rectam lineam conſtituerent; vel maius duobus rectis, ſi re-
cta AI, producta, caderet ſupra IC. Cadit igitur neceſſario AI, producta infra CI, atque idcirco angulus fiet
AIC, ad partes K, & ducta recta AC, faciet cum AK, CK, duos angulos minores duobus rectis, ideoque rectæ
AK, CK, coibunt in K. Non ſecus oſtendemus, AL, BL, coire in L, & CM, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC,
facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Deſcriptum eſt igitur circa circulum triangu-
lum KLM, quod dico eſſe æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL.
æquales ſunt quatuor rectis, vt ad 32. propoſ. lib. 1 oſtenſum fuit, & anguli IAL, IBL, ſunt duo recti, erunt reli-
b 13. prim. qui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur *b* & anguli DEG, DEF, ſint duobus rectis æquales, ſi aufe-
rantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione oſtendemus angulum M,
c 32. prim. æqualem eſſe angulo DFE. *c* Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangu-
lum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

iv. IN dato triangulo circulum inſcribere.

SIT deſcribendus circulus in dato triangulo ABC. Diuiſis
duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra
triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendi-
culares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB,
trianguli DBE, æquales ſunt duobus angulis, DBF, DFB, triãguli
a 26. primi. DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; *a* erunt quoque la-
tera DE, DF, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera
DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE,
DF, DG, ſint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, deſcri-
ptus tranſibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trian-



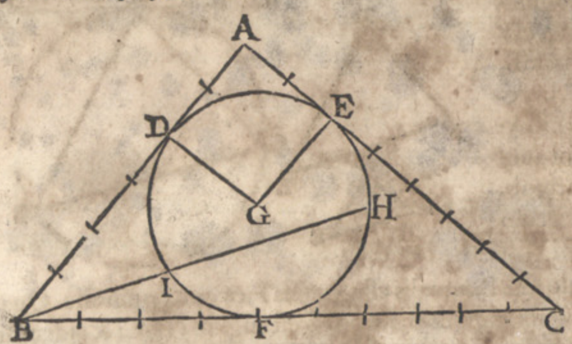
guli in E, F, G, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia ſint ad ſemidiametros DE, DF, DG. In
dato ergo triangulo circulum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

S C H O L I V M.

b 20. prim. *VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonſtrauit;[b] in omni triangulo duo latera quomodolibet aſſumpta reliquo eſſe ma-
iora; non abs re fuerit demonſtrare hoc loco, cum Io. Baptiſta Benedicto, quanto maiora ſint, hoc propoſito theoremate.*

IN omni triangulo, ſi circulus inſcribatur, duo quælibet latera ſuperant reliquum recta
linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ab angulo illis lateri-
bus comprehenſo in cauam peripheriam ducta, & ſub eius ſegmento exteriore. Quod ſi angu-
lus comprehenſus ſit rectus, ſuperabunt illa duo latera latus recto angulo oppoſitum diametro
circuli triangulo inſcripti.

c 4. quarti. *SIT triangulum ABC,[c] cui circulus inſcribatur DEF, tangens latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo
B, ſiue rectus is ſit, ſiue obtuſus, ſiue acutus, ducatur recta BH, ſecans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, ſuperare latus AC,
recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli ſub
BH, BI, comprehenſi. Quoniam enim per coroll. 2. propoſ. 36.
lib. 3. recta CF, rectæ CE, & recta AD, rectæ AE, æqualis eſt;
erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, æquales. Latera igitur
BA, BC, latus AC, ſuperant ſegmentis BD, BF: quæ cum ex
eodem coroll. ſint æqualia; ſuperabunt eadem latera BA,
BC, latus AC, recta, quæ dupla eſt ſegmenti BD. Sed quadra-
tum rectæ, quæ dupla eſt ſegmenti BD, quadruplum eſt qua-
drati rectæ BD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Et[d] quadratum
d 36. tertij. rectæ BD, æquale eſt rectangulo ſub BH, BI. Igitur latera
BA, BC, ſuperant latus AC, recta, cuius quadratum quadru-
plum eſt rectanguli ſub BH, BI. Quod eſt propoſitum.*

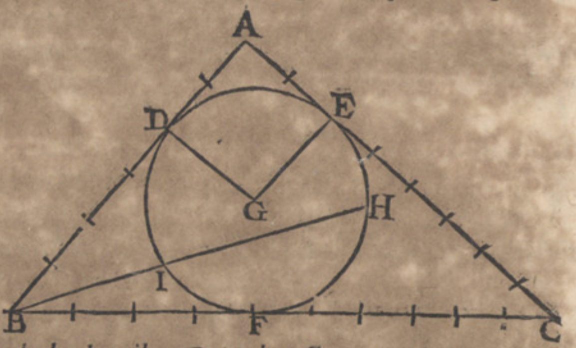


*QVOD ſi angulus A, rectus ſit, dico non ſolum duo latera AB, AC, ſuperare latus BC, recta, cuius quadratum quadru-
plum*

plum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius ſegmento exteriore, vt oſtenſum eſt: verum etiam exceſſum illum eſſe diametro circuli DEF, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis GD, GE;[e] erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus,[f] erunt tam rectæ AE, DG, quam AD, EG, parallelæ inter ſe: atque idcirco AG, parallelogrammum erit.[g] Quare tam recta AD, ſemidiametro EG, quam recta AE, ſemidiametro DG, æqualis erit: hoc eſt, duæ rectæ AD, AE, ſimul toti diametro circuli erunt æquales. Superant autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis AD, AE, vt oſtenſum eſt. Nam EC, ipſi FC, & DB, ipſi FB, æqualis eſt, ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. Igitur eadem latera AB, AC, ſuperant latus BC, diametro circuli inſcripti. Quod eſt propoſitum. ITAQVE quæuis duo latera ſuperant reliquum duabus rectis circulum triangulo inſcriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehenſum, & circulum interijciuntur. Oſtenſum enim eſt, latera AB, AC, ſuperare latus BC, rectis tangentibus AD, AE, &c.

e 18. tertij.
f 28. primi.
g 34. prim.

IAM vero his ita demonſtratis, ſi tria latera trianguli cognita ſint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inſcribendus latera tangere debet. Quia enim latera verbi gratia, AB, AC, ſuperare debent latus BC, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales ſunt: ſi dematur latus BC, notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur duæ tangentes AD, AE, notæ. Semiſsis ergo huius exceſſus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde ſegmentum EC, dabit ſegmentum CF, vſque ad punctum tertium F: Vel reliquum ſegmentum DB, dabit ſegmentum BF, ad idem punctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt hæ in G, centro circuli inſcribendi. Exempli gratia. Sit latus AB, 6. latus AC, 8:

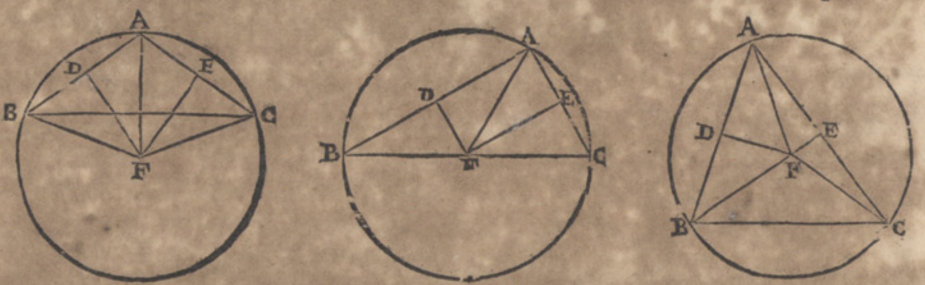


& latus BC, 10. palmorum. Dempto latere BC, 10. palmorum ex duobus lateribus AB, AC, hoc eſt, ex 14. palmis relinquuntur 4. palmi. Tam ergo AD, quã AE, duos palmos continebit. Segmentũ ergo D, B, continebit 4. palmos, totidemq; ſegmentũ BF, habebit. Segmentũ autẽ EC, ac proinde & CF, erit 6. palmorũ. Sic etiã dẽpto latere AB, 6. palmorũ, ex lateribus AC, BC, id eſt, ex 18. palmis, reliqui fiunt 12. palmi. Vtrumq; ergo ſegmentũ CE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumq; AE, AD. 2. palmorũ & vtrumq; BD, BF, 4. palmorũ. Poſtremo dempto latere AC, 8. palmorum ex lateribus AB, CB, hoc eſt, ex palmis 16. remanent 8. palm[illegible]trumq; ergo ſegmentum BD, BF, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos: & vtrumq; AD, AE, 2. palmos.

PROBL. 5. PROPOS. 13. v.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.

SIT circulus deſcribendus circa datum triangulum ABC. Diuidantur duo latera AC, AB, (quæ in triangulo rectãgulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtuſum angulũ, quãuis hoc non ſit omnino neceſſariũ, ſed duo quæuis latera bifariam poſſint ſecari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam ſi ducta eſſet recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia ſunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti;*a* erunt baſes FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad interuallum FA, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



a 4. primi.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtũ eſt, ſi centrũ intra triangulũ cadat,*b* omnes angulos eſſe acutos, quoniã omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi vero ſit in latere BC,*c* angulũ BAC, ei lateri oppoſitum, eſſe rectum q̃ ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulũ,*d* angulũ oppoſitũ BAC, obtuſum eſſe, cũ ſit in minori ſegmento circuli.

b 31. tertij.
c 31. tert.
d 31. tertij.

CONTRA vero perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus rectus: ſi vero extra, eſſet idem angulus obtuſus. Item ſi in rectãgulo centrum caderet intra, eſſent omnes anguli acuti, ſi vero extra, eſſet angulus oppoſitus obtuſus. Denique ſi in triangulo obtuſangulo caderet in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus, rectus, ſi vero intra, omnes anguli eſſent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypotheſi.

SCHOLIVM.

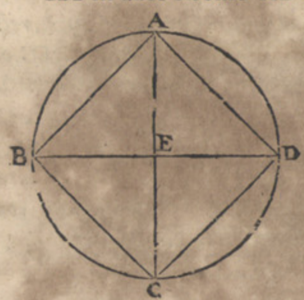
COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte deſcribendus ſit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea exiſtentia tranſeat. Nam ſi data puncta tribus rectis iungãtur, vt conſtituatur triangulũ, facile circa ipſum circulus deſcribetur, vt hac propo. traditum eſt. Quod tamen facilius efficietur, praxi illa quã tradidimus prop. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C. Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus deſcribantur ſe interſecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur DH. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, ſi placet, priori illo, alij duo arcus delineẽtur ſecantes ſeſe in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur FH, ſecans rectam DH, in H. Dico H, eſſe centrũ circuli trãſeuntis per data puncta A, B, & C. Nam ſi ducerentur rectæ AB, AC, BC, diuiderentur latera AB, AC, trianguli ABC, biſariã à rectis DH, FH, ceu demonſtratũ eſt in praxi illa propoſitionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides oſtendit, H, erit centrum circuli circa triangulum ABC, deſcripti. Quod eſt propoſitum.



PROBL. 6. PROPOS. 6. vj.

IN dato circulo quadratum deſcribere.

SIT in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, ſecantes ſe ſe ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, eſſe quadratum inſcriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia ſunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia ſint ex centro; & anguli contenti ſunt recti; *a* erunt baſes AB, BC,



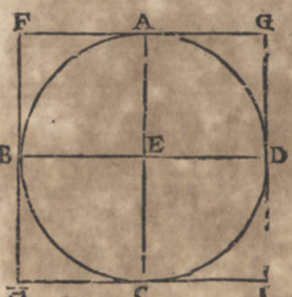
a 4. prim. æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter ſe ſunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales ſunt,
b 26. ter. nimirum recti; *b* erunt quatuor arcus, quibus inſiſtunt, æquales: *c* ac proinde &
c 29. tertij. rectæ quatuor ſubtẽſæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD,
d 31. tertij inter ſe æqualia ſunt. Sunt autem *d* & anguli recti, cum omnes in ſemicirculis exiſtant. Quare quadratum erit ABCD, proptereaque in dato circulo quadratum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

vij.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

CIRCA datum circulum quadratum deſcribere.

SIT circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, deſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, ſecantes ſe in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpẽdiculares FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quod enim coeat AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus



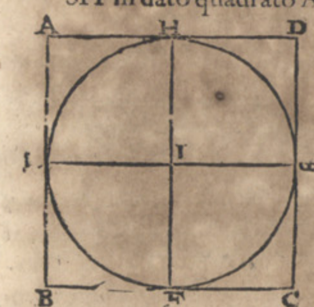
a 28. prim. rectis minores; atque ita de reliquis Dico FHIG, eſſe quadratum circa circulum
b 28. prim. datum deſcriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, ſint recti, *a* erunt FH, AC, parallelæ; ſimiliterque erunt GI, AC, parallelæ. *b* Quare & FH, GI, parallelæ erunt.
c 38. prim. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum eſt ACHF, *c* erunt latera oppoſita AC, FH, æqualia, & anguli oppoſiti ACH, AFH, æquales: Sed ACH eſt rectus. Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione oſtendemus angulos H, I, G, rectos eſſe: & latera HI, IG, GF, æqualia eſſe diametris BD, AC. Quare cum diametri ſint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propoſ. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

viij.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

In dato quadrato circulum deſcribere.

SIT in dato quadrato ABCD, inſcribendus circulus. Diuiſis lateribus bifariam in E, F, C, H, ducantur



a 33. prim. rectæ EG, FH, ſecantes ſe in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales ſunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales & parallelæ. *a* Quare & AB, parallela eſt, & æqualis ipſi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipſi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter ſe æquales, cum ſint ſemiſſes ęqualium AD, AB, &c. Quare & rectę IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus deſcriptus ex I, ad interuallum IE, tranſibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propoſ. 16. lib. 3.
b 29. prim. *b* quod anguli ad E, F, G, H, ſint recti, deſcriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat.

ix.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

CIRCA datum quadratum circulum deſcribere.

SIT deſcribendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri



a 5. primi. AC, BD, ſecantes ſe in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia
b 32. prim. ſunt *a* erunt anguli ABD, ADB, æquales: Eſt autem angulus BAD, rectus. *b* Quare ABD, ADB, ſemirecti erunt. Similiter oſtendemus, reliquos omnes an-
c 6. primi. gulos ad A, B, C. D, eſſe ſemirectos, & idcirco inter ſe æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, ſint æquales; *c* erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB. EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, deſcriptus, interuallo EA, tranſibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

S C H O L I V M.



QVOD ſi circa datum circulum deſcribatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inſcribatur, erit quadratum circumſcriptum quadrati inſcripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumſcripti æquale eſt diametro circuli, vt ex 7. propoſ. huius lib. conſtat, hoc eſt, diametro quadrati inſcripti: quadratum vero diametri duplum eſt quadrati, cuius eſt diameter, vt ad 47. propoſ. lib. 1. oſtendimus; Conſtat propoſitum.

PROB.

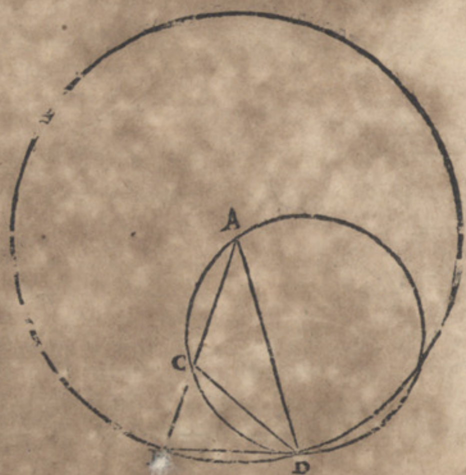
x.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulum conſtituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea AB, quæ *a* diuidatur in C, ita vt rectangulum ſub AB, BC, æquale ſit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus deſcribatur, in quo *b* accommodetur recta BD, æqualis ipſi AC, iungaturque recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales ſunt, erit triangulum ABD, Iſoſceles. Dico vtrumque angulorum ABD, ADB, duplum eſſe reliqui anguli A. Ducta enim recta CD, *c* deſcribatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum ſub AB, BC, æquale eſt quadrato rectæ BD, & recta AB, ſecat circulum DCA, *d* tanget recta BD, eundem circulum DCA, in D. Quare angulus BDC, *e* æqualis eſt angulo A, in alterno ſegmento CAD. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eiſdem *f* æqualis eſt etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc eſt, angulo ABD, *g* cum ABD, ADB, æquales ſint; ac propterea *h* rectæ CD, BD, æquales erunt: Eſt autẽ BD, æqualis poſita rectæ AC. Igitur & CD, ipſi CA, æqualis erit; *i* ac propterea anguli CAD, CDA, æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis oſtenſus eſt duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus ABD, duplus erit eiuſdem anguli A. Iſoſceles ergo triangulum conſtituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.

a 11. ſecũdi.
b 1. quarti.
c 5. quarti.
d 37. tertij.
e 32. tertij.
f 32. primi.
g 5. primi.
h 6. primi.
i 5. primi.



COROLLARIVM.

QVONIAM vero tres anguli trianguli ABD, *k* æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, quinque quintis duorum rectorum; perſpicuum eſt, angulum A, eſſe quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, eſſe duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes; quandoquidem omnes tres *l* æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, decem quintis vnius recti.

k 32. primi.
l 32. primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad inſtar theorematis, hoc modo.

SI recta linea ſecetur, vt propoſ. 11. lib. 2. traditum eſt; Iſoſceles triangulum, cuius baſis maiori ſegmento æqualis eſt, vtrumuis vero laterum æqualium ipſi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad baſim, duplum reliqui.

NON eſt autem, quod ſe excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam BD, ita applicari circulo DCA, vt eum nullo modo ſecet. Nam propterea quod quadratum rectæ BD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, oſtenſum eſt vltima propoſ. 3. lib. rectam BD, perpendicularem eſſe ad ſemidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione ſecabit.

QVA arte autem conſtrui debeat triangulum Iſoſceles, cuius vteruis angulorum ad baſim, ad reliquum habeat quamcunq; proportionem datam, non ſolum duplam, vt hic ab Euclide factum eſt, trademus cum Pappo ad finem lib. 6. Quæ res hactenus deſiderata eſt.

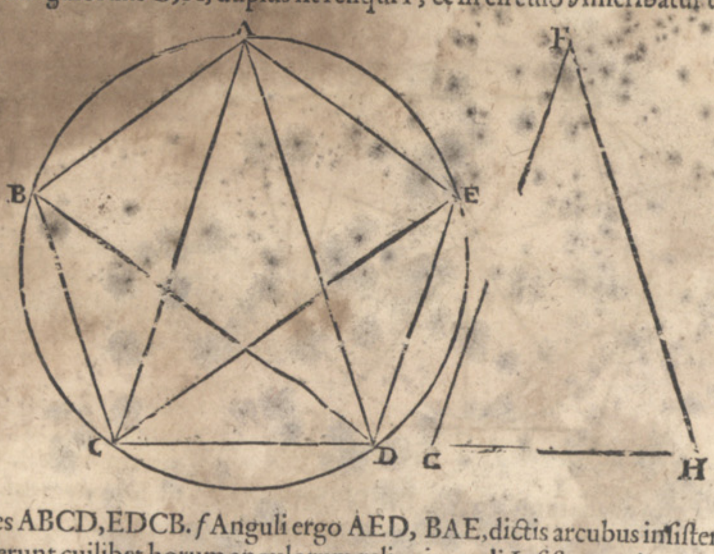
xj.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Conſtruatur triangulum Iſoſceles, FGH, ita vt vterque angulorum G, H, duplus ſit reliqui F, & in circulo *b* inſcribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & vterque angulorũ ACD, ADC, *c* bifariam diuidatur rectis CE, DB, atq; rectæ iungantur AB, BC, CD, EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus ſit anguli CAD, & diuiſus bifariam; erunt quinq; anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. *d* Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, ſuper quos aſcẽderunt, atq; idcirco *e* & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. æquilaterum eſt igitur pentagonum ABCDE. Rurſus quia arcus AB, ED, æquales ſunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. *f* Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus inſiſtentes, æquales erunt. Eodem modo ęquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim ęqualibus arcubus, quorum ſinguli ex ternis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum eſt ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum eſſe ſit oſtenſum, inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod faciendum erat.

a 10. quart.
b 2. quarti.
c 9. primi.
d 26. tertij.
e 29. tertij.
f 27. tertij.

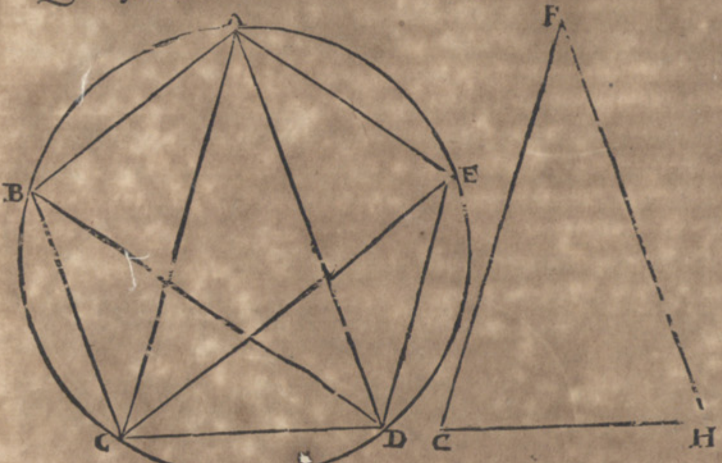


COROLLARIVM.

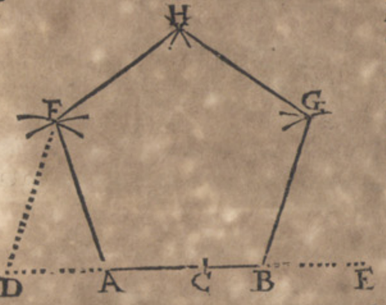
SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum
g 27.tertij. rectorum; vel ſex quintas vnius recti. g Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales ſint, vtpote qui æ-
qualibus arcubus BC, CD, DE, inſiſtant, ſit autem CAD, per coroll. præcedentis propoſ. quinta pars, duorum
rectorum, vel duæ quintæ vnius recti: erit totus BAE, tres quintæ duorũ rectorum: vel ſex quintæ vnius recti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi detur recta linea terminata CD, ſuper ea conſtituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulũ, hoc mo-
do.[h] *Fiat triangulum Iſoſceles FGH, habens*
h 10. quar. *vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui*
anguli F. Deinde conſtituãtur anguli ACD,
ADC, æquales angulis G, H, coeantque rectæ
i 32. primi. *CA, DA, in A,*[i] *quæ efficient angulum CAD,*
æqualem angulo F; ac propterea trianguli
ACD, vterque angulorum ACD, ADC, du-
plus erit reliqui anguli CAD. Iam vero cir-
k 5. quarti. *ca triangulum ACD, circulus*[k] *deſcribatur*
ABCDE; In quo cum ſit inſcriptum trian-
gulum ACD, ſi anguli ACD, ADC, bifariam
ſecentur, inſcribetur, vt prius, pentagonum
æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus
eſt recta CD. Quod eſt propoſitum.



FACILIVS idem efficiemus hac ratione.
Secta recta propoſita AB, ſupra quam pen-
tagonum æquilaterum, & æquiangulum conſtituendum eſt, in C, vt propoſ. 11. lib. 2. traditum eſt, producatur ad vtramque
partem, ſintque AD, BE, maiori ſegmento AC, æquales. Interuallo deinde datæ re-
ctæ AB, ex A, D, duo arcus deſcribantur ſecantes ſeſe in F. Item ex B, E, eodem in-
teruallo alij duo ſe interſecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo
ſe diuidentes in H, coniunganturque rectæ AF, FH, HG, GB. Dico pentagonum
ABGHF, ſuper datam rectam AB, deſcriptum, eſſe æquilaterum, atq; æquiangu-
lum. Quod enim ſit æquilaterum, conſtat ex conſtructione, cum omnes lineæ
ipſi AB, ſumptæ ſint æquales, hoc eſt, omnes arcus deſcripti ſint ad interuallum
AB. Quod autem ſit & æquiangulum, ita oſtendetur. Ducta recta DF, erit ADF,
Iſoſceles, quale ab Euclide propoſ. 10. conſtructum eſt, vt ex ſcholio eiuſdem propoſ.
manifeſtum eſt, propterea quod baſis AD, æqualis eſt maiori ſegmento AC, lineæ

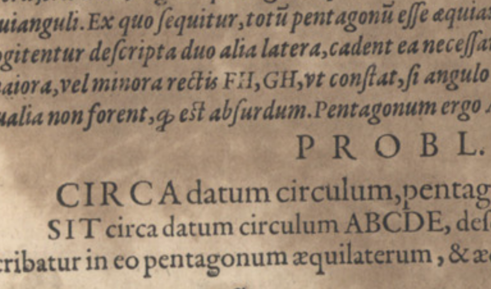


AB, vtrumuis vero laterum æqualium ipſi AB, æquale. Quare ex coroll. eiuſdem propoſ. 10. angulus DAF, continebit duas quin-
tas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum BAF, reliquas tres quintas duorum rectorum
continebit. Cũ ergo ex coroll. huius propoſ. angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli complectatur tres quintas duorũ re-
ctorũ; erit BAF, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eademq; ratione erit ABG, angulus pentagoni æquilateri, & æ-
quianguli. Ex quo ſequitur, totũ pentagonũ eſſe æquiangulũ. Si n. compleatur, aut concipiatur eſſe completũ, h. e. ſuper F, G,
l 21. primi. *cogitentur deſcripta duo alia latera, cadent ea neceſſario in punctũ H. Alioquin, ſi ſupra H, aut infra cõuenirent,*[l] *eſſent ea vel*
maiora, vel minora rectis FH, GH, vt conſtat, ſi angulo H, ſubtenderetur baſis FG: atque idcirco aliis lateribus FA, AB, BG, æ-
qualia non forent, quod eſt abſurdum. Pentagonum ergo ABGHF, & æquilaterum, & æquiangulum eſt. Quod erat oſtendendum.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

xij. CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

SIT circa datum circulum ABCDE, deſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* In-
a 11. quarti ſcribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB,
FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK,
KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE,
GEA, duobus ſint rectis minores, partes nimirum angulo-
b 13. prou. rum rectorum FAG, FEG; *b* coibunt rectæ AG, EG, ad par-
tes G, & ſic de aliis. Et quia ipſæ tangunt circulum, per coroll.
propoſ. 16. lib. 3. erit deſcriptum pentagonum GHIKL, circa
circulum; quod dico eſſe æquilaterum atque æquiangulum.
Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL, erunt quadrato rectæ
c 47. prim. FH, *c* æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quam recta-
rum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia e-
runt quadratis rectarum FB, BH. Demptis igitur quadratis
æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadra-
ta rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æ-
quales erunt. Quod etiam conſtat ex coroll. 2. propoſ. 36. lib.
3. cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tan-
gentes in A, & B. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli



AFH, æqualia ſunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Eſt autem & baſis AH, baſi BH, æqualis, vt oſtenſum eſt;
d 8. prim. *d* erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur *e* & anguli AHF, BHF. Duplus igitur eſt angulus AFB, anguli BFH,
e 4. prim. & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo oſtendemus, angulum BFC, duplum eſſe anguli BFI, & angulum
f 27. ter. BIC, anguli BIF. Cum igitur *f* anguli AFB, BFC, ſint æquales, quod inſiſtant circumferentiis AB, BC, *g* quæ æ-
g 28. tertij quales ſunt, cum à rectis æqualibus ſubtendantur AB, BC; erunt & dimidii eorum BFH, BFI, æquales. Quocir-
ca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales ſint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus il-
lis ad-

ſis adiacens commune BF, h erunt & latera BH,BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla eſt ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione oſtendemus GH, rectam duplam eſſe rectę HA. Sunt autem oſtenſæ ęquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonſtrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales eſſe cuilibet rectarum HI, HG. Æquilaterum ergo eſt pentagonum GHIKL. Rurſus quoniam oſtenſum eſt, angulos BHF, BIF, æquales eſſe, ac ſemiſſes angulorum BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Æquiangulum igitur eſt pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum ſit oſtenſum, deſcriptum erit circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

h 26. prim.

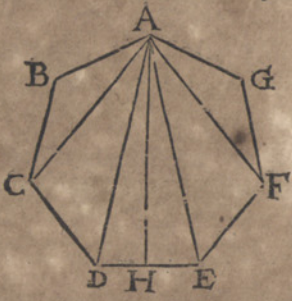
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonſtratione; ſi in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares conſtituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumſcriptam. Eadem enim ſemper ratione demonſtrabitur, illas perpendiculares concurrere, anguloſq; conficere æquales, ſi nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum eſt: quæ quidẽ ipſos angulos bifariam ſecabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum eſt, &c.

HVC referendum eſt theorema ſequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas ſpectans, quod perutile erit ad inuenienda centra circulorum circa ipſas figuras, ſiue intra ipſas deſcribendorum, vt ex ſequentibus patebit.

IN figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam; Et contra, recta linea diuidens angulum bifariam, ſecat quoque latus oppoſitum bifariam: Si vero numerus angulorum eſt par, recta linea ex quouis angulo ad oppoſitum angulum ducta ſecat vtrumq; angulum bifariam: Et contra, recta linea ſecans quemuis angulum bifariam cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.

SIT primum figura æquilatera, æquiangulaque imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demiſſa recta AH, ſecet latus oppoſitum DE, bifariam. Dico angulum quoque BAG, ſectum eſſe bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, æqualia ſunt anguloſque continent æquales, ex hypotheſi; i erunt & baſes AC, AF, æquales, & tam anguli BAC, GAF, quam BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponantur æquales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rurſus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia ſunt, continentque angulos æquales, vt oſtenſum eſt; k erunt & baſes AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quã CDA, FEA. Atq; ita procedendum erit, donec ad latus oppoſitum peruentum ſit. Vbi quia rurſus toti anguli CDE, FED, æquales ſunt; erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia ſint, anguloſque æquales contineant, l erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cum quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, ſint æquales, ſinguli ſingulis; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis; ac proinde angulus BAG, ſectus erit bifariam. Quod eſt propoſitum.



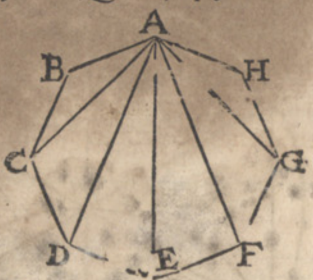
i 4. prim.

k 4. prim.

l 4. primi.

SED iam recta AH, ſecet angulum BAG, bifariam. Dico eam ſecare quoque latus oppoſitum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non ſecari bifariam, ſi ex A, ducatur alia recta ſecans DE, bifariam, ſecabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam oſtendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, ſecabunt bifariam, quod eſt abſurdum, cum vna medietas maior eſſet quam altera. Recta ergo AH, ſecans angulum BAG, bifariam, ſecat quoque latus DE, bifariam. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppoſitum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, ſecare tam angulum BAH, quam DEF, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis, demonſtrabimus, vt in antecedente figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, eſſe æquales, ſingulos ſingulis; ideoq; totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem eſſe, necnon & angulum DEA, FEA, eſſe æqualem. Vterq; igitur angulus BAH, DEF, ſecatur bifariam. Quod eſt propoſitum.

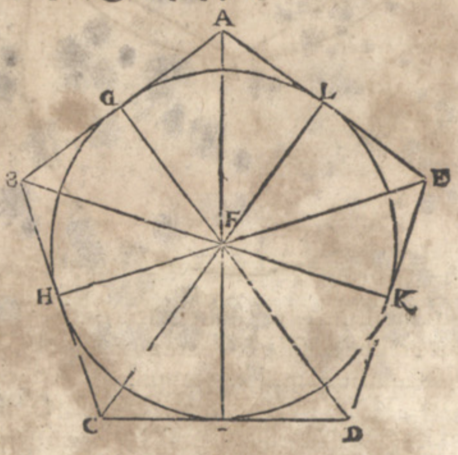


SED iam recta EA, ſecet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppoſitum E, eumque diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, ſi ex A, ad E, ducatur alia recta, ſecabit ea angulum BAH, bifariam, vt iam oſtendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam ſecabunt, quod eſt abſurdum. Recta ergo AE, ſecans angulum BAH, bifariam, cadit in E, ſecatq; propterea, vt demonſtratum eſt proxime, angulum DEF, bifariam quoque. Quod eſt propoſitum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

xiij.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.



SIT inſcribendus circulus in dato pentagono ABCDE. a Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cũ n. ex ſcholio præcedentis prop. rectæ AF, BF, ſecent oppoſita latera CD, DE, bifariam, neceſſe eſt, duas rectas AF, BF, ſe mutuo intra pentagonũ ſecare, priuſquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia ſunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autẽ ex conſtructione, & anguli ipſis contenti æquales ABF, CBF; b erunt baſes AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponãtur æquales, & BAF, dimidiũ ſit anguli BAE,

a 9. primi.

b 4. prim.

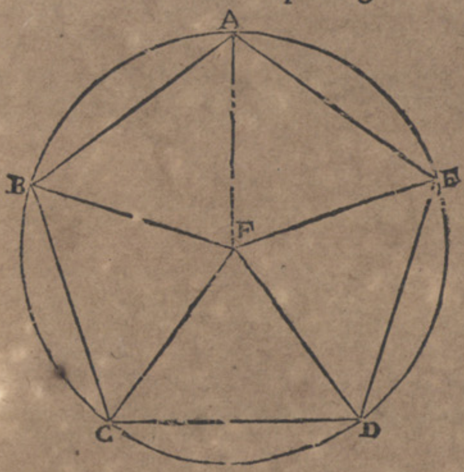
per conſtructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuiſus eſt ergo angulus BCD, bifariam. Simili modo oſtendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuiſos eſſe bifariam. Ducantur iam ex F, ad ſingula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales ſunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL; eſtque latus AF, ſubtenſum vni æqualium angulorum
c 26. prim. commune *c* erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque oſtendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet iſtarum Circulus igitur deſcriptus ex centro F, & interuallo FG, tranſibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniã vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cum ſemidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pẽtagono inſcriptus. Quod faciendũ erat.

S C H O L I V M.

EADEM prorſus arte in quacunq; figura æquilatera, & æquiangula circulum deſcribemus. Semper enim oſtendemus, diuiſis duobus angulis proximis bifariam, ſi ex puncto concurſus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter ſe eſſe æquales: ac proinde punctum illud concurſus centrum eſſe circuli inſcribendi. Concurrent autem neceſſario intra figurã duæ illæ rectæ, quæ angulos duos proximos ſecant bifariam: propterea quod in figura imparium laterum diuidunt latera oppoſita bifariam; in figura vero parium laterum, angulos oppoſitos bifariam, vt in ſcholio antecedentis propoſ. oſtenſum eſt.

xiiij. THEOR. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.



SIT circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum, circulus deſcribendus. Diuiſis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propoſ. demonſtratum eſt; & coniunctis rectis FC, FD, FE, oſtendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA. ſectos eſſe bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter ſe æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniã igitur in triangulo AFB,
a 6. primi. duo anguli æquales ſunt FAB, FBA; *a* erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademq; ratione erũt reliquæ FC, FD, FE, cui[illegible]et iſtarum æquales. Quare circulus deſcriptus ex centro F, interuallo autem FA, tranſibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

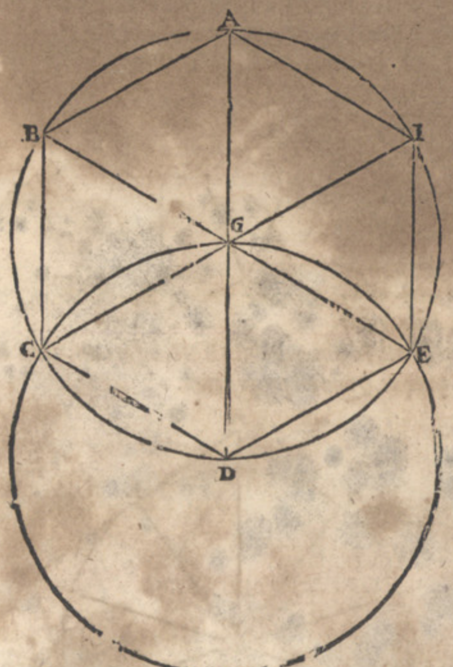
S C H O L I V M.

EODEM prorſus artificio circa quamlibet figuram æquila[illegible]em, & æquiangulam circulum deſcribemus: Semper enim oſtendemus, diuiſis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concurſus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter ſe eſſe æquales: ac propterea punctum illud concurſus centrum eſſe circuli circumſcribendi.

xv. PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

SIT in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inſcribendum hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum. Ducta diametro AD, deſcribatur circulus ex centro D, interuallo vero DG, qui ſecet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico eſſe & æquilaterum & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis ſit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli: erũt & rectæ GC, DC, æquales inter ſe: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare *a* tres anguli



a 5. primi. b 32. prim. CGD, GDC, DCG, æquales inter ſe erunt: qui cum *b* æquales ſint duob. rectis, erit quilibet illorũ, nẽpe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodẽ modo erit angulus DGE, tertia pars duo-
c 13. prim. rũ rectorum: Sunt autẽ tres anguli CGD, DGE, EGF, *c* æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoq; pars erit duorũ rectorũ. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, in-
d 15. primi. ter ſe æquales; quibus cũ etiam *d* æquales ſint ad verticem anguli
e 26. tertij. FGA, AGB, BGC; erũt ſex anguli ad centrũ G, æquales. *e* Quare
f 29. tertij. circumferẽtiæ, quib inſiſtunt, *f* ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum eſt hexagonum ABCDEF. Rurſus quia circumferentia BC, æqualis eſt circumferentiæ AF; ſi addatur cõmunis CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipſis inſiſtẽtes
g 27. tertij. BAF, ABC, *g* ęquales erunt. Similiterq; oſtendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales eſſe cuilibet iſtorũ, quia nimirũ quilibet inſiſtit arcui cõpoſito ex quatuor arcubus ęqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inſcripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus inſiſtere. Quare æquiangulum quoque eſt hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

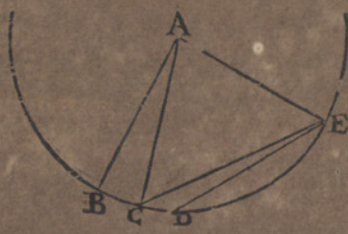
C O R O L L A R I V M.

HINC manifeſtum eſt, Hexagoni latus ęquale eſſe ſemidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale eſt ſemidiametro DG, ex definitione circuli.

SCHO-

SCHOLIVM.

CÆTERVM per ea, quæ dicta ſunt de pentagono propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus, & denique circa idem hexagonum deſcribemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumſcribatur, inſcribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propoſ. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum deſcribendus ſit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariam. Reliqua deinde perficienda, vt propoſ. 12. 13. 14. traditur.



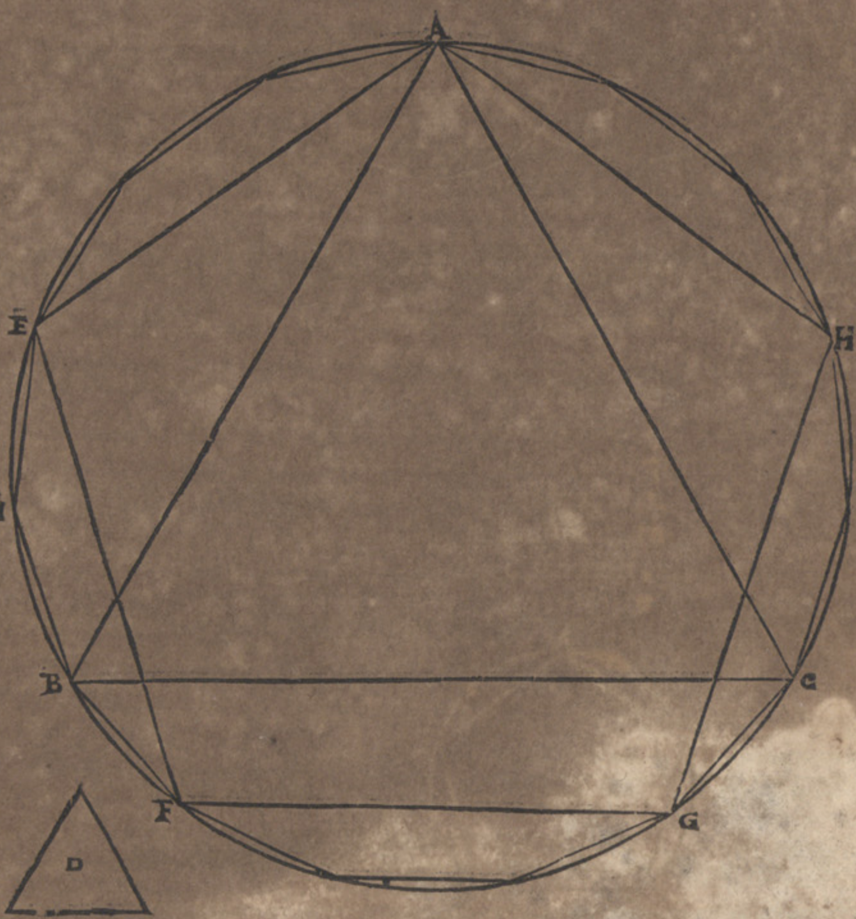
PORRO ex his quoque facile demonſtrabimus, dari poſſe triangulum Iſoſceles oxygonium, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius ſit; ſiue in quo vtrumuis laterum æqualium tertio minus ſit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli BCDE, in quo ſexta pars ſit DE, & quarta BE. [h] *Erit ergo ſubtẽſa DE, ſemidiametro æqualis. Et ſi ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE; erit hæc maior quam DE, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. hoc eſt, maior, quam ſemidiameter. Quare iunctis duabus ſemidiametris AC, AE, erit triangulum ACE. Iſoſceles, cuius tertium latus CE, vtrouis æqualium AC, AE, maius eſt. Dico idem eſſe oxygonium. Quoniam enim* [i] *anguli ACE, AEC, æquales ſunt,* [k] *& ſimul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta item recta AB, erit angulus BAE, quadranti BE, in centro inſiſtens rectus, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. ac proinde CAE, acutus erit. Oxygonium ergo eſt Iſoſceles triangulum ACE, habens tertium latus CE, vtrolibet æqualium maius: Quod eſt propoſitum.*

h 15. quar.
i 5. primi.
k 17. primi.

PROBL. 16. PROPOS. 16. xvj.

In dato circulo, quinti decagonum & æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

SIT in dato circulo ABC, inſcribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Conſtituto triangulo æquilatero D, quod ex corol. propoſ. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum; *a* inſcribatur ei æquiangulum triangulum ABC. in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ, ex coroll. propoſ. 6. li. 1. *b* eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt circumferẽtia tota ABC, talium quinq; erit arcus AB, qui tertia pars eſt totius circumferẽtiæ. *c* Inſcribatur rurſus in dato circulo pẽtagonum æquilaterũ, & æquiangulum AEFGH, applicãs vnum angulorum ad punctũ A, *d* eruntq; quinque arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales.



a 2. quarti.
b 26. vel 28. tertii.
c 11. quart.
d 28. tert.

Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars exiſtens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinque, & arcus AE, tres; continebit reliquus arcus EB, duas. Diuiſo ergo arcu EB, bifariam in I, erit arcus BI, pars decimaquinta totius *e* circumferentiæ. Quare ducta recta BI, ſubtendet decimamquintam partem totius circumferentiæ; cui ſi aliæ quatuordecim, *f* æquales in circulo accommodentur, inſcriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterũ, quod *g* & æquiangulum eſt, cum eius anguli ſubtendant arcus æquales, compoſitos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perſpicuum eſt, In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

e 30. tertij.
f 1. quarti.
g 27. tertij.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta ſunt de pentagono ſupra, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus; & tandem circa datum quintidecagonum deſcribemus circulum.

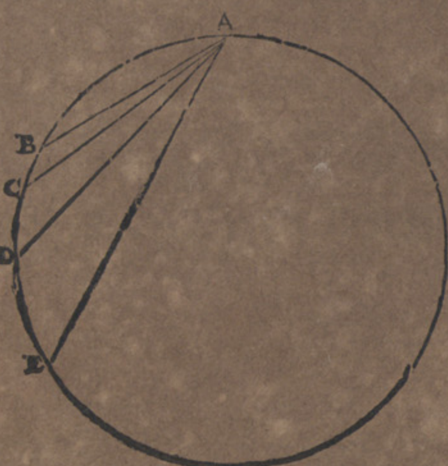
SCHOLIVM.

EX huius problematis ſtructura, atque demonſtratione colligi poteſt methodus, atque ars quædam, qua infinitæ propemodum figuræ in dato circulo inſcribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quod ea ſit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quod ea ſit latus pentagoni; ſi multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duob. lateribus

 in circu-

in circulo deſcriptis, inſcribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq; æqualium, hac ratione. Denominator lateris AB, l oc eſt, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id eſt, à 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoq; ɩ iuiſo arcu BE, biſariam in I, erit ſubtenſa recta BI, latus figuræ 15. laterum, angulorumque æqualium, vt demonſtratum fuit. Hac fere arte vſus eſt Euclides in deſcribendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiuſmodi Theo-rema.

SI in circulo ab eodem puncto inſcribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inſcribenda tot latera, anguloſque æquales, quot vnitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.



INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio ſemper facto à puncto A. plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni vero AC, & quadrati AD, trianguli denique æquilateri AE. Quoniam igitur denominator lateris AB, nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter ea latera incluſus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumq; æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium partium æqualium 30. eſt tota circumferentia, talium 5. eſt arcus AB, ſexta pars circumferentiæ; & talium 6. eſt arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.

PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumq; æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. ſuperat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

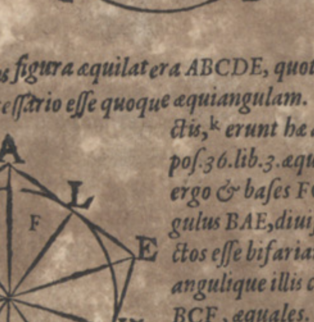
ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

ARCVS vero CD, complectetur vnum latus figuræ 20 laterum.

ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS deniq; DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterum, angulorumq; æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inueſtiga untur fere infinitarum figurarum latera.

NON eſt autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inſcriptam, eſſe quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumſcriptam neceſſario æquiangulam quoque eſſe, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo anguli proximi æquales ſunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo poſito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (ſi enim ſecundum occuparet, eſſet primo proximus, quod eſt contra hypotheſin) ſextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati ſunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumſcriptam, neceſſario eſſe quoque æquiangulam: inter quos eſt Campanus Euclidis non obſcuri nominis interpres.



SIT enim figura æquilatera quotcunque angulorum ABCDE, circulo inſcripta. Dico eam neceſſario eſſe quoq; æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD, ſint æqualia,[h] *erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac propterea & totus arcus ABC, toti arcui BCD, æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca*[i] *anguli ABC, BCD, illis inſiſtentes æquales erunt: Eodemque modo omnes anguli oſtendentur eſſe æquales, quotquot illi ſint; ac propterea figura ABCDE, æquiangula eſt, ſiue angulorum numerus ſit par, ſiue impar. Quod oſtendendum erat.*

h 28. tertij.

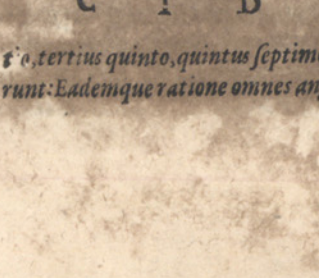
i 27. tertij.

SIT rurſus figura æquilatera ABCDE, quotlibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumſcripta. Dico eam neceſſario eſſe quoque æquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis,[k] *erunt hæ ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL, ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. æquales ſunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, æqualia. Cum ergo & baſes FG, FL, ex centro ſint æquales;*[l] *erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus BAE, diuiſus erit bifariam. Non aliter oſtendemus reliquos omnes angulos figuræ ſectos eſſe bifariam. Rurſus quia duo latera AB, BF, duobus lateribus CB, BF, æqualia ſunt, angulique illis contenti, oſtenſi æquales;*[m] *erunt quoque baſes AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum ergo hi anguli ſint ſemiſſes angulorum BAE, BCD, vt oſtenſum eſt, erunt toti anguli BAE, BCD, quoque æquales. Eadem ratione erit recta CF, rectæ EF, & angulus BCD, angulo DEA, æqualis: Atque ita deinceps, ſi figura plures habeat angulos, erit ſemper tertius quiſq; angulus ei, à quo tertius eſt, vno relicto in medio, æqualis: hoc eſt, primus (conſtitui autem poteſt primus quicunque angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus ſeptimo, ſeptimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus poſiti, æquales inter ſe erunt: Eademque ratione omnes anguli parium locorum, vt ſecundus, quartus, ſextus, octauus, decimus, &c. æquales inter ſe erunt;*

k 18. tertij.

l 8. primi.

m 4. primi.



ſe erunt; cum quartus ſit à ſecundo tertius, & ſextus à quarto tertium quoq; locum occupet, &c. Itaque quoniam figura propoſita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis oſtẽſus eſt omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus eſt. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione ſecundo angulo æqualis, qui tertius eſt ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus aliis à ſecundo tertium locum occupantibus, vt quarto, ſexto, octauo, decimo, &c. vſque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ propoſitæ inter ſe æquales erunt. Quod erat oſtendendum.

HÆC demonſtratio in figuris æquilateris circulo circumſcriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim ſolum concludetur, primum angulum æqualem eſſe tertio, quinto, ſeptimo, nono, & aliis loca imparia occupantibus; nunquam autem probabitur, primum vltimo eſſe æqualem, eo quod vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono ſextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam ſolum ex eadem demonſtratione colligetur, angulum ſecundum æqualem eſſe quarto, ſexto, octauo, decimo, & aliis loca paria occupantibus; nunquam autem oſtendetur, ſecundum angulum eſſe primo æqualem, propterea quod primus locum imparem occupat. Itaque ſoli anguli imparium locorum inter ſe, & ſoli quoque anguli locorum parium inter ſe ſemper conuincentur æquales.

QVOD ſi duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus ſit, fuerint inter ſe æquales, tum demum per ſuperiorem demonſtrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam ſi primus angulus æqualis ſit ſecundo, (quando enim duo anguli proximi ſunt æquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterum ſecundum,) cum oſtenſum ſit, primum eſſe æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupantibus, ſecundum vero omnibus parium locorum; erunt omnes inter ſe æquales. Si autem primus angulus æqualis ſit alicui locum parem occupanti (quando enim duo anguli non proximi ſunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari exiſtat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel ſextum, vel octauum, &c. prout ab illo diſtiterit, non autem ſecundum, quia ſecundus primo proximus eſt) cum primus oſtenſus ſit æqualis omnibus aliis locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum, atque adeo & ſecundo angulo; erit quoque primus ſecundo æqualis: hoc eſt, duo proximi inter ſe æquales erunt. Quamobrem, vt proxime demonſtrauimus, omnes anguli inter ſe erunt æquales.

VERVM ſi dicat forſan aliquis, quanquam ex ea demonſtratione colligi nequeat, omnem figuram æquilateram, cuius angulorum numerus ſit par, circulo circumſcriptam, eſſe quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium: ac proinde eam poſſe eſſe æquiangulam, non quidem propter illam demonſtrationem, ſed propter quampiam aliam; adeo vt nulla dari poßit figura æquilatera circulo circumſcripta, quin ſimul ſit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis aliis aſſeruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, reſpondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumſcriptas circulo, non eſſe æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, deſcriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in ſex partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur. quemadmodum propoſ. 15. in deſcriptione hexagoni traditum eſt. Deinde arcus OP, ſecetur inæqualiter in H, ſitq; maius ſegmentum OH, & minus PH. Arcui quoq; OH, æquales ſumantur OI, QK, QL, SM, SN, ita vt ſex arcus æquales ad vtraſque partes trium ſemidiametrorum non proximarum, ſed inter binas ſingulis relictis in medio, ſumantur. Eruntq; ad vtraſque partes ſemidiametrouũ relictarũ ſex reliqui arcus PH, PK, RL, RM, TN, TI, æquales. Ductis item ex centro A, ad pũcta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad HA, perpendicularis BC, ſecans ſemidiametros AO, AP, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Coibunt autem neceſſario rectæ HB, AB, propterea quod duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores ſunt. Eſt enim BHA, rectus, & BAH, inſiſtens arcui OH, qui minor eſt quadrante, minor recto, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta BI. Et quia duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, æqualia ſunt,[n] anguloſque continent æquales æqualibus arcubus OH, OI, inſiſtentes;[o] erunt quoque baſes BH, BI, & anguli H, I, æquales. Cum ergo BHA, rectus ſit ex conſtructione, erit & BIA, rectus: ac propterea recta BI, circulum tanget in I, conuenietque cum ſemidiametro AT, producta in G, ob angulos AIG, GAI, duobus rectis minores: Eſt namque AIG, oſtenſus rectus, at GAI, recto minor eſt, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. ob arcum TI, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli GAI, duobus angulis H, A, trianguli CAH, æquales ſunt; (Nam I, H, recti ſunt,[p] & GAI, CAH, æquales ſunt inſiſtentes æqualibus arcubus TI, PH) lateraque AI, AH, quibus adiacent, æqualia;[q] erunt quoque latera GI, GA, lateribus HC, CA, æqualia. Cum ergo & BI, ipſi BH, oſtenſa ſit æqualis; erit tota BG, toti BC, æqualis. Eadem ratione, ducta recta GN, tanget circulum in N, coibitq; cum ſemidiametro AF, producta in F, eritque ipſi GB, æqualis. Itẽ iuncta recta FM, circulum tanget in M, & cum ſemidiametro AR, producta conueniet in E, ipſiq; FG, æqualis erit. Similiter ducta recta EL, tanget circulum in L, & ſemidiametro AQ, protractæ occurret in D, ipſique EF, fiet æqualis. Denique iuncta recta DK, eundem circulum tanget in K, & cum ſemidiametro AP, producta concurret in C, fietque ipſi DE, æqualis. Quod autem DK, in eodem puncto C, occurrat ſemidiametro AP, in quo recta BH, eidem occurrit, manifeſtum eſt. Si enim in alio puncto eam ſecaret, cum ducta recta CK, circulum tangeret in K, vt demonſtratum eſt, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atque adeo inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non poſſe,[r] Euclides demonſtrauit. Eſt ergo hexagonum BCDEFG, circulo circumſcriptum, æquilaterum. At idem eſſe non æquiangulum, ita demonſtrabimus. Quoniam figura BCDEFG, æquilatera eſt, erunt quidem per ea, quæ paulo ante monſtrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter ſe, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter ſe æquales; omneſque ſecti erunt bifariam à ſemidiametris: At quia tres anguli trianguli ABH,[s] tribus angulis trianguli ACH, æquales ſunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales: Eſt autem BAH, maior quam CAH, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. quod & arcus OH, maior ſit arcu PH. Igitur reliquus ABH, reliquo ACH, minor erit; qui cum ſemiſſes ſint totorum angulorum B, C, vt oſtenſum eſt; erit totus quoq; CBG, toto BCD, minor. Eodemq; modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores oſtendentur. Non eſt ergo hexagonum BCDEFG, æquiangulum. Quod erat oſtendendum.



[n] 27. tertij.
[o] 4. prim.
[p] 27. tertij.
[q] 26. prim.
[r] 16. tertij.
[s] 32. prim.

EADEM omnino conſtructio, & demonſtratio fieri poteſt in octogono, decagono, & aliis figuris parium laterum, ſi circulus quatuor diametris ſecetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

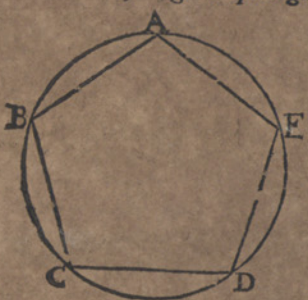
QVOD ſi figura æquilatera quotcunque angulorum circulo circumſcribatur per doctrinam prop. 12. deſcripta nimirum prius ſimili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figuræ inſcriptæ angulis, &c. vt factum eſt in pentagono propoſ. 12. tum neceſſario figura illa erit ſimul æquiangula, vt ex demonſtratione eiuſdem propoſition. liquido conſtat.

OBSERVATIONE quoque dignum eſt, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumſcriptam, eſſe etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inſcriptam neceſſario æquilateram quoque eſſe, niſi quando numerus laterum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo latera proxima æqualia ſunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum poſito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (ſi enim ſecundum occuparet, eſſet primo proximum, quod eſt contra hypotheſin) ſextum, octauum, decimum, &c. Qua in re facile etiam quis hallucinari poſſit.



t 18. tertij.
u 8. primi.
x 26. prim.

SIT enim figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumſcripta. Dico eam eſſe quoq; neceſſario æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis FG, FH, FI, FK, FL, [t] *quæ ad latera figuræ ſunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tangentes AG, AL, ex 2. coroll. propoſ. 36. lib. 3. æquales ſunt, erunt duo latera AG, AF, trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, æqualia: Sunt autem & baſes FG, FL, ex centro æquales.* [u] *igitur anguli quoque ad A, illis lateribus comprehēſi æquales ſunt, ideoq; angulus BAE, ſectus eſt bifariam. Non aliter oſtendemus, reliquos angulos figuræ bifariam ſectos eſſe ac proinde cum toti anguli ponantur æquales, & eorum ſemiſſes æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, æquales erunt: Eſt autem latus FG, vni æqualium angulorum oppoſitum, cōmune.* [x] *Igitur latera quoq; AG, BG, æqualia erunt; atq; ideo latus AB, ſectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera ſecta eſſe bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidiæ æquales ſunt, erunt quoque totæ lineæ AB, AE, æquales. Eademque ratione AB, BC, & BC, CD, & CD, DE, & DE, EA, æquales erunt. Quam ob rem figura ABCDE, æquilatera eſt, ſiue numerus laterum ſit par, ſiue impar. Quod erat demonſtrandum.*

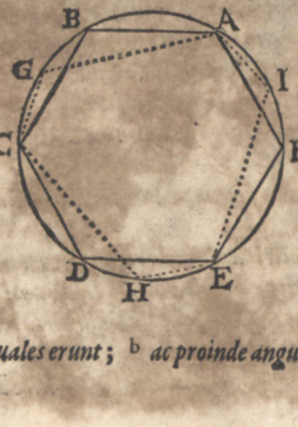


y 26. tertij.
z 29. tertij.

SIT rurſus figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum numero imparium circulo inſcripta. Dico eam neceſſario eſſe quoq; æquilateram. Quoniam enim anguli BAE, ABC, ponuntur æquales; [y] *erunt arcus BCE, ADC, quibus inſiſtunt, æquales: quibus demptis ex communi circulo, æquales quoque erunt reliqui arcus BAE, ABC. Dempto ergo communi arcu AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, æquales. Eadem ratione arcus BG, arcui DE, æqualis erit; ac proinde latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, æquale erit: atque ita deinceps, ſi figura plura habeat latera, erit ſemper tertium quodq; latus ei, à quo tertium eſt, vno relicto in medio, æquale: hoc eſt, primum (conſtitui autem quoduis latus poteſt primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum ſeptimo, ſeptimum nono, &c. atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus poſita, æqualia inter ſe erunt: Eademque ratione omnia latera parium locorum, vt ſecundum, quartum, ſextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter ſe erunt, cum quartum ſit a ſecundo tertium, & ſextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam propoſita figura numerum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum eſt. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit ſecundo, quod ab vltimo tertium eſt, primo in medio relicto; & omnibus aliis à ſecundo tertium locum occupantibus, vt quarto, ſexto, octauo, &c. vſque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propoſitæ inter ſe æqualia erunt, quod oſtendendum erat.*

HÆC etiam demonſtratio in figuras æquiangulas parium laterum circulo inſcriptas non quadrat. Ex ea enim ſolum concludetur, primum latus eſſe æquale tertio, quinto, ſeptimo, & aliis loca imparia occupantibus; nunquam autem per eam demonſtrabitur, primum vltimo eſſe æquale, propterea quod vltimum occupat locum parem, vt in quadriangulo quartum, in hexagono ſextum, &c. Pari ratione eadem demonſtratio conuincet tantum, latus ſecundum æquale eſſe quarto, ſexto, octauo, & aliis loca paria poſſidentibus, at per eam nunquam colligetur, ſecundum latus eſſe æquale primo, eo quod primum in loco impari locetur. Itaq; ſola latera impariũ locorũ inter ſe, & ſola latera in paribus locis poſita inter ſe conuincẽtur eſſe æqualia.

QVOD ſi duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum vero in loco pari poſitum ſit, fuerint inter ſe æqualia, tum demum ſuperior demonſtratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam ſi primum latus ſecundo ſit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia ſunt, dici poterit vnum primum, & alterum ſecundum) cum demonſtratum ſit, primum æquale eſſe quoque omnibus lateribus locorum imparium, ſecundum vero omnibus parium locorum; perſpicuum eſt, omnia inter ſe eſſe æqualia. Si autem primum latus æquale ſit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima ſunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel ſextum, &c. prout ab illo diſtiterit, non autem ſecundum quia ſecundum primo, proximum eſt) cum primum oſtenſum ſit æquale omnibus aliis poſitis in locis imparibus, alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & ſecundo lateri; erit quoque primum ſecundo æquale: ac proinde duo proxima inter ſe æqualia erunt. Vt ergo proxime demonſtratum eſt, omnia latera erunt inter ſe æqualia.



a 21. tertij.
b 27. tertij.

SI quis autem dubitet, dari poſſe figuram æquiangulam parium laterum circulo inſcriptam, quæ non ſit æquilatera, (quanquam enim ſuperior demonſtratio non probet omnia latera eſſe æqualia, ſi omnes anguli æquales ſint: contrarium tamen ex ea inferre non licet) demonſtrabimus id Geometrice hac ratione. Primum quidem conſtat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula eſt, quippe cum omnes eius anguli ſint recti, ſed non æquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo poſſe inſcribi? Deinde vero ſit hexagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDEF, in circulo deſcriptum; ſumaturque in arcu BC, quoduis punctum G, & arcui BG, in tertio arcu ab eo arcus æqualis DH; Item in quinto ab eo arcus æqualis FI, iunganturque rectæ AG, GC, CH, HE, EI, IA. Dico hexagonum AGCHEI, æquiangulum eſſe, at non æquilaterum. Quod enim ſit æquiangulum, ſic oſtendemus. Anguli B, G, [a] *æquales ſunt in eodem ſegmento ABC. Eadem ratione æquales ſunt anguli D, H, & F, I. Præterea quia arcus BG, DH, æquales ſunt, per conſtructionem; addito communi GD, erunt toti arcus BCD, GCH, æquales. Igitur reliqui ex circulo arcus BFD, GFH, æquales erunt;* [b] *ac proinde anguli BCD, GCH, illis inſiſtentes æquales quoque erunt. Non aliter oſtendemus & angulos*

DEF

DEF, HEI & FAB, IAG, æquales inter ſe eſſe. Ergo ſex anguli hexagoni AGCHEI, ſex angulis hexagoni ABCDEF, æquales ſunt, ſinguli ſingulis: ideoq; cum hoc ponatur æquiangulum, erit quoq; illud æquiangulum. Quod autem non ſit æquilaterum, ita pr[illegible]bimus. Latus AG, latere AB, maius eſt, & latus GC, latere BC, minus, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera CH, EI, lateribus CD, EF, maiora ſunt, & latera HE, IA, lateribus DE, FA, minora. Cum ergo latera AB, BC, CD, DE, EF, FA, æqualia ponantur, erunt AG, GC, CH, HE, EI, IA, inæqualia: quanquam AG, CH, EI, inter ſe, & GC, HE, IA, inter ſe, relicto ſemper vno in medio, æqualia ſint, vt ſupra oſtendimus.

Idem prorſus eodem modo demonſtrabitur fieri poſſe in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, ſi in circulo inſcribantur prius octogonum, decagonum, & aliæ figuræ æquilateræ, atq; æquiangulæ.

Quod ſi figura inſcribatur circulo per doctrinam propoſ. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & æquiangula, & æquilatera, vt ex earum propoſitionum demonſtrationibus perſpicuum eſt.

Porro qualemcunq; figuram æquilateram & æquiangulam in circulo monuerimus inſcribere, talem etiam ſciemus deſcribere circa circulum, & in ea circulum quoquo inſcribere, & circa eandem deſcribere circulum, ſi artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propoſ. 12. 13. & 14.

Rurſus inſcripta figura quacunq; æquilatera & æquiangula in circulo, inſcribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuiſis etenim arcubus, quos latera ſubtēdunt, biſariam, & ſubtenſis rectis lineis, conſtat propoſitum. Vt per triangulum æquilaterum inſcriptum inſcribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoq; ex quadrato in circulo deſcripto, inſcribetur octogonum, atq; adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

Cæterum omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inſcribi poſſunt beneficio Iſoſcelium triangulorum, vt recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

Imparium enim laterum figuræ inſcribentur beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt beneficio Iſoſcelis, cuius vterq; angulorum ad baſin æqualis eſt ei, qui ad verticem, deſcripti in circulo inſcribetur prima figura imparium laterum, hoc eſt, triangulum æquilaterum. Nam Iſoſceles huiuſmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod ſi in circulo inſcribatur Iſoſceles, cuius vterq; angulorum ad baſin duplus ſit eius, qui ad verticem; inſcribetur ſecunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, ſi duo anguli æquales ſecentur biſariam, veluti propoſ. 11. fuit oſtenſum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inſcribetur in circulo, per triangulum Iſoſceles habens vtrumq; angulorum ad baſin triplum eius, qui ad verticem, ſi duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoq; figura quarta imparium laterum, quale eſt Hennagonum, in circulo inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterq; angulorum ad baſin quadruplus eſt eius, qui ad verticem, ſi vterq; diſtribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

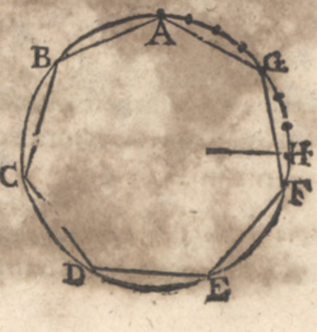
Diviſio autem hæc angulorum ad baſin in partes æquales perfacilis eſt. Nam ſi angulo ad verticem conſtituantur ad baſin tot anguli æquales ordine, quot vnitates ſunt in numero proportionis multiplicis, quam vterq; angulorum æqualium habet ad reliquum, diuiſus erit angulus in partes æquales. Verum deſcripto huiuſmodi triangulo Iſoſcele in circulo, deſcribetur figura in circulo ſine diuiſione angulorum ad baſin, ſi baſi accommodentur rectæ æquales in circulo, Baſis enim ſemper eſt vnum figuræ latus, vt in Pentagono patuit.

Parium vero laterum figuræ in circulo inſcribentur, beneficio Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſeſquilateri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt quadratum conſtituens primam figuram parium laterum, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterq; angulorum ad baſin ſeſquialter eſt anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem, inſiſtit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad baſin ſimul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet ſemel eum contineat, & dimidiatam inſuper eius partem; ſubtendent ipſi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc eſt, ſecunda figura laterum partium, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterq; angulorum ad baſin duplus ſeſquialter eſt eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem inſiſtit ſextæ parti circumferentiæ, cum reliqui anguli ſimul compoſiti contineant ipſum quinquies; propterea quod quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius inſuper partem. Ita quoq; Octogonum, id eſt, tertia figura laterum parium, inſcribetur beneficio Iſoſcelis habentis vtrumq; angulorum ad baſin triplum ſeſquilaterum anguli ad verticem.

Si igitur inuenta fuerit ars, qua Iſoſcelia triangula conſtruantur habentia angulos ad baſin multiplices eorum, qui ad verticem ſunt angulorum, quemadmodum Euclides Iſoſceles fabricauit habens vtrumq; angulorum ad baſin duplum anguli ad verticem, facile in circulo deſcribentur figuræ omnes laterum imparium. Et ſi arcus earum diuidantur biſariam, inſcribentur quoq; omnes figuræ parium laterum, poſt quadratum, atq; adeo circumferentia cuiuſlibet circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuidetur. Quæ res ſummam Aſtronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim recte ſibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipſe ait, deſiderato de abſoluta figurarum rectilinearum omnium deſcriptione intra circulum, &c. cum eius demonſtrationes falſæ ſint, ac ſophiſticæ, vt Geometrice oſtenſum eſt à Petro Nonio Luſitano in libello de erratis Orontij.

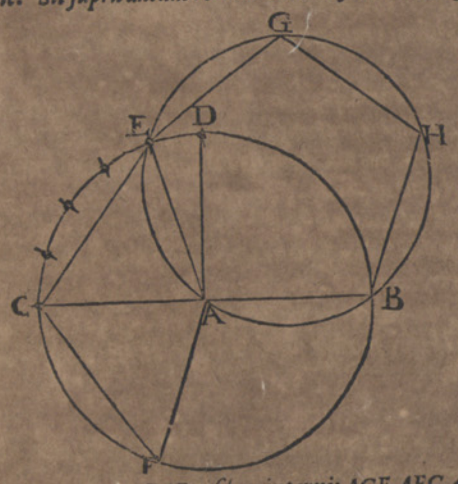
Nos tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè deſcribemus, qua non ſolum triangula Iſoſcelia, quorum anguli ad baſin ad reliquum habeant datam proportionem, conſtruantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangulæ in circulo deſcribantur: verum etiam arcus quiuis circuli diſtribuatur in quotcunq; partes æquales, ſiue is quadrans ſit, ſiue non. Quin etiam eiuſdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet ſine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt ibidem dicemus. Quæ res ad hunc vſq; idem animos Mathematicorum tenuit ſuſpenſos.

Sed doceamus, ſi placet, qua etiam via figura quæuis æquilatera, & æquiangula circulo inſcribatur ſine triangulis Iſoſcelib. quorū anguli ad baſin ad reliquū habeant proportionem datā. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inſcribendū heptagonum æquilaterū, & æquiangulum. Secetur eius quadrans AH, in ſeptem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, anguloſue figura inſcribenda continet. Secabis aūt quadrātē AH, in propoſitas partes æquales vel ex ijs, quæ ad finē lib. 6. nos demōſtraturos diximus, vel beneficio circini, dilatādo eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorū diſtātiā partiri quadrātē in partes optatas. Facilius n. quadrās in quotuis æquales diuidetur partes, q̄ tota circūferētia, quòd ſæpius attētādo, & quaſi repetēdo opus, clariꝰ appareat in parua magnitudine, q̄ in magna, quātū



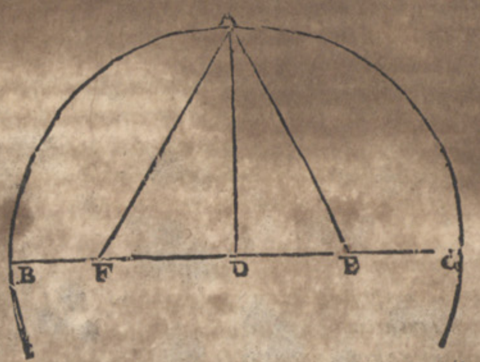
detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini acceptæ, ſi ea partem deſideratam non offerat. Secto quadrante in ſeptem
partes æquales, vel in plures, ſi figura plurium laterum deſideretur, erit recta linea A G, quæ quatuor eiuſmodi partes ſubten-
dit, latus figuræ inſcribendæ. Quoniam enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans
diuiſus eſt, continebitur aggregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferentia, quoties vna pars in quadrante: quia
qualibet pars cum alijs tribus, quarum ſingulæ in ſingulis alijs tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatu-
or partibus. Quod etiam ita perſpicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æque multiplicia,
vt ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propoſ. cum ex antecedentibus nullo modo
pendeat.) ita ſe habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum vnius partis, hoc eſt, arcus AG, ad quadruplum quadrantis,
id eſt, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis eſt vna illarum, in quas quadrans diuiſus eſt, talis erit arcus
AG, totius circumferentiæ. Atq; ita ſi quadrans diuiſus ſit in 7. partes, continebuntur eiuſmodi partes 28. in tota circumfe-
rentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$ hoc eſt, $\frac{1}{7}$ totius circumferentiæ. Ita quoq; ſi quadrans ſectus ſit in 11. partes, continebuntur
eiuſmodi partes 44. in tota circumferentia: atq; adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$ hoc eſt, $\frac{1}{11}$ totius circumferentiæ: & ſic de cæteris. Itaq;
ſi arcui AG, quatuor partium abſcindantur arcus continuè æquales, eiſdemq; arcubus rectæ ſubtendantur, inſcripta erit cir-
culo figura propoſita, vt ex demonſtratis liquet.

Iam vero ſi ſupra datam rectam lineam quæuis figura æquilatera, & æquiangula deſcribenda ſit, efficiemus id hac rati-
one. Sit ſupra datam rectam AB, conſtituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta B A, ad C, vt A C,



ipſi AB, æqualis ſit, deſcribatur ex A, per C, arcus circuli; ductaq; A D,
perpendiculari ad AC, vt quadrans ſit CD, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. diui-
datur quadrans CD, in quinq; partes æquales, in tot videlicet, quot late-
rum figura conſtruenda ſit; quarum 4. ſint CE, iungaturq; recta A E, quæ
ipſi AB, æqualis erit. Dico angulum BAE, æqualem eſſe angulo pentagoni æ-
quilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu CF, æquali arcui CE, iungan-
tur rectæ CE, CF. Et quoniam CE, recta ſubtendens 4. partes quadran-
tis, latus eſt pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proxime demonſtra-
uimus, in circulo ECF, deſcribendi, erit CF, alterum latus; ac proinde duo
latera EC, F C, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æqui-
anguli ECF. Quoniam vero, ducta recta AF, duo latera E C, CA, duo-
bus lateribus F C, C A, æqualia ſunt, & baſes item æqua-
les AE, AF; [c] *erunt anguli ECA, FCA, æquales. Cum ergo,* [d] *& anguli*
c 8. prim *ACE, AEC, ſint æquales; erit & ACF, ipſi AEC, æqualis: additoq; communi*
d 5. primi. *ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, æqualis erit. Eſt au-*
e 32. primi. *tem* [e] *externus BAE, eiſdem internis ACE, AEC, æqualis. Igitur & ECF, BAE, inter ſe æquales erunt. Cum ergo E C F, ſit*
angulus pentagoni, erit quoq; BAE, pentagoni angulus. Quocirca ſi circa tria puncta B, A, E, circulus deſcribatur, & rectis
f 1. quarti. *AB, AE,* [f] *rectæ æquales in eo accommodentur B H, H G, GE, deſcriptum erit pentagonum æquilaterum & æquiangulum de-*
ſcriptum in circulo AEHGE, ac proinde ſupra datam rectam A B. Quod faciendum erat. Non eſt autem dubitandum, quin
rectis AB, AE, æquales rectæ poſſint in circulo accommodari, quæ totam circumferentiam abſoluant. Nam angulus pentagoni
BAE, inſiſtit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, ſingula autem latera A B, AE, ſingulas quintas partes ſubtendunt,
ac proinde ſingulæ B H, H G, G E, ſingulas quoq; quintas partes ſubtendent, cum ipſis A B, AE, ſumptæ ſint æquales, propter-
eaq; totum arcum BGE, continentem tres quintas partes abſoluent. Eadem ratio eſt de alijs figuris æquilateris, & æqui-
angulis.

Si forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui ſupra datam rectam lineam deſi-
deramus conſtituere ſimilem, ſiue ea in circulo aliquo deſcripta ſit, ſiue non: ſatis erit vni eius angulo æqualem angulum con-
ſtituere BAE, in extremo datæ lineæ AB. Si namq; poſita recta AE, æquali ipſi AB, per tria puncta B, A, E, circulus deſcribatur,
perficiemus figuram propoſitam, vt ante diximus.

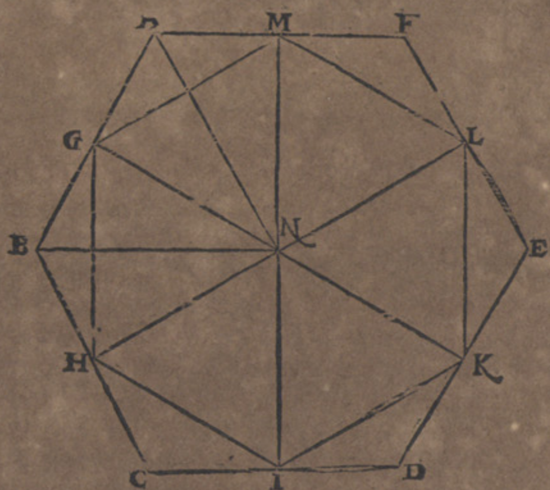


Quoniam vero longa eſt, atq; difficilis ea in-
ſcriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in cir-
culo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto li-
bro annectere praxin quandam, qua vna eademq; o-
pera Ptolomæus lib. 1. magnæ conſtructionis, in circu-
lo dato inſcribit Pentagonum, & Decagonum æqui-
laterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus
ABC, cuius centrum D; Ducta autem diametro BC,
erigatur DA, perpendicularis ad B C. Deinde diuiſa
ſemidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA,
cui æqualis abſcindatur E F. Itaq; ſi ducatur recta
AF, erit AF, latus Pentagoni, & DF, latus Decagoni
in dato circulo inſcribendi, vt ipſe demonſtrat. Cæ-
terum cum demonſtratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco ſcribenda, ſed in proprium locum, vtpote
in librum 13. differenda.

NON *erit etiam præter inſtitutum noſtrum, aut ab hoc libro alienum, ſi ſequens adhuc theorema adiungamus, vi-*
delicet.

SI bifariæ ſectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur line-
is, inſcripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem
centrum habens.

CENTRVM *figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inſcribitur, aut cir-*
cumſcribitur: vt idem ſit centrum circuli, & figuræ.



Sit igitur figura æquilatera, & æquiangula ABCDEF, *cuius latera biſariam ſecentur in* G, H, I, K, L, M, *iunctis rectis* GH, HI, IK, KL, LM, MG. *Dico figuram* GHIKLM, *inſcriptam figuræ* ABCDEF, *æquilateram eſſe quoq;, atq; æquiangulam, idemq; centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum ſubdant angulos æquales cõprehenſos æqualibus rectis, vtpote dimidijs laterum æqualium,*[g] *æqualia ſunt. Quoniam vero tam tres anguli* AMG, GML, LMF, *quam tres* FLM, MLK, KLE,[h] *duobus ſunt rectis æquales: Sunt autem* AMG, LMF, FLM, KLE,[i] *inter ſe æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, ſubtendanturq; à baſibus æqualibus; Erunt reliqui anguli* GML, MLK, *æquales. Eodemq; argumento concludemus, reliquos angulos & hiſce, & inter ſe æquales eſſe. Æquiangula igitur quoq; eſt figura* GHIKLM.

g 4. prim.
h 13. primi.
i 8. primi.

Quod autem idem habeat centrum, ita oſtendetur. Ex centro N, *figuræ* ABCDEF, *ad omnes angulos figuræ inſcriptæ ducantur rectæ* NG, NH, *&c. iunganturq; rectæ* NA, NB. *Quoniam igitur* AG, GN, *latera trianguli* AGN, *æqualia ſunt lateribus* BG, GN, *trianguli* BGN; *ſuntq; baſes* AN, BN, *cum ſint ſemidiametri circuli circa figuram deſcripti, æquales:*[k] *Æquales erunt anguli* AGN, BGN, *ideoq; recti. Quare* NG, *perpendicularis eſt ad latus* AB. *Eodemq; modo reliquæ* NH, NI, *&c. perpendiculares erunt ad latera* BC, CD, *&c. Quæ cum ex defin. 4. lib. 3. oſtendant diſtantias rectarum* AB, BC, *&c. æqualium à centro* N,[l] *æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex* N, *interuallo* NG, *deſcriptus, per reliquos angulos* H, I, K, L, M, *incedet; Ac propterea* N, *centrum erit figuræ* GHIKLM, *hoc eſt, circuli circa eam figuram deſcripti. Quod eſt propoſitum.*

k 8. primi.
l 14. tertij.

Neq; vero & hoc omittendum eſt, inter omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, ſolum triangulum, quadratum, & hexagonum replere locum, hoc eſt, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano poſſe inter ſe aptari, vt inter eorum angulos nihil ſit vacui, ſed planam ſuperficiem conſtituant. Nam ſex anguli in triangulo æquilatero, & quatuor in quadrato, & tres in hexagono æquilatero, & æquiangulo, æquales ſunt quatuor rectis, quantum nimirum eſt ſpatium circa punctum quodlibet in plano, vt ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli æquilateri continet $\frac{2}{3}$ *vnius recti, quòd omnes tres contineant* $\frac{6}{3}$. *vnius recti, hoc eſt, duos rectos, continebunt ſex eiuſmodi anguli* $\frac{12}{3}$. *vnius recti, id eſt, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato ſunt quatuor recti. Deniq; quia vnus angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet* $\frac{4}{3}$. *vnius recti, quod omnes ſex contineant* $\frac{24}{3}$. *vnius recti, hoc eſt, 8. rectos, continebunt tres eiuſmodi anguli* $\frac{12}{3}$. *vnius recti, id eſt, 4. rectos. Quod in alijs figuris planis æquilateris, & æquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero, & æquiangulo æquales ſunt* $\frac{18}{5}$. *vnius recti, hoc eſt, angulis rectis* $3\frac{3}{5}$. *duntaxat, at quatuor æquales ſunt* $\frac{24}{5}$. *vnius recti, id eſt, angulis rectis* $4\frac{4}{5}$. *propterea quod omnes quinq; æquiualent 6. rectis, hoc eſt, conſtituunt* $\frac{30}{5}$. *vnius recti, atq; idcirco vnus continet* $\frac{6}{5}$. *vnius recti, &c. Tria igitur pentagona locum replere non poſſunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores ſint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quòd quatuor in plano optatorum quatuor anguli maiores ſint quatuor rectis, cum æquales ſint quatuor angulis rectis, & inſuper quatuor quintis vnius recti, vt dictum eſt. Pari ratione neq; ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri, & æquianguli æquales ſunt* $\frac{30}{7}$. *vnius recti, hoc eſt, angulis rectis* $4\frac{2}{7}$. *Quoniam enim omnes ſeptem anguli 10. rectis ſunt æquales, hoc eſt, complectuntur* $\frac{70}{7}$. *vnius recti; fit, vt vnus contineat* $\frac{10}{7}$. *vnius recti, hoc eſt, vnum rectum, & præterea* $\frac{3}{7}$. *vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, &* $\frac{2}{7}$. *vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere poſſunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori neq; quatuor heptagona locum replebunt: neq; tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor; neq; tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atq; æquiangulæ plurimum laterum, quàm octo, quippe cum ſemper tres anguli ſimul ſumpti ſint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores ſunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos oſtendimus quatuor rectis eſſe maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum quadratum & hexagonum æquilaterum atq; æquiangulum, ſuis angulis locum replere poſſunt, vt diximus.*

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLI-

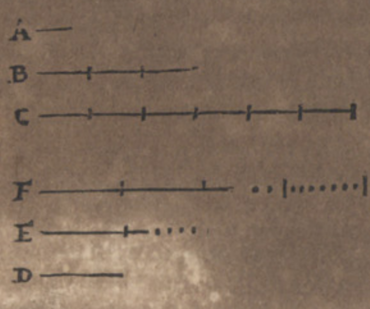
EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.

I.

PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor minoris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua abſolute conſiderata; Nunc vero duobus ſequentibus de eadem diſputat non abſolute, ſed prout vna ad aliam refertur, hoc eſt, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non deſcendendo ad vllam quantitatis ſpeciem, vt ad lineam, ſuperficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro oſtendit in ſpecie, quamnam proportionem habeant inter ſe lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ Vt igitur inſtitutum ſuum ſeruet, definit prius vocabula, quæ ad demonſtrationes proportionum adhibentur.



ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter ſumpta, metitur magnitudinem B, ſexies autem ſumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, ſed ſumpta bis, excedit magnitudinem E, & ſumpta ter, deficit à magnitudine F, ſumpta autem quater, eandem ſuperat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

Duplex autem eſt pars apud Mathematicos: Quædam metitur ſuum totum, ita vt aliquoties repetita totum ſuum conſtituat; qualis eſt numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur ſuum totum, ſed aliquoties ſumpta ipſum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiuſmodi pars eſt numerus 4. collocatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici ſolet aliquota, poſterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc ſolum metitur ſuum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri ſuum totum) tum etiam, quia vt ex lib. 7. conſtabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, ſed partes. Nam numerus 4. non eſt pars huius numeri 6. ſed duæ partes tertiæ, quales ſunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonſtrationibus huius quinti libri pars ſumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum ſane eſt, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos eſt etiam Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonſtrationibus etiam ipſi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem eſt maior minoris, cum minor metitur maiorem.

Vt in ſuperiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex eſt magnitudinis A, quoniam hæc vtramq; illam metitur. At vero neq; magnitudo E, neq; magnitudo F, multiplex eſt dicenda magnitudinis D, propterea quod hæc neutram illarum metitur. Itaq; pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas menſurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior vero menſurata à minori, dicatur minoris multiplex.

Satis

Satis autem perſpicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam eſſe eam, quæ perfectè metitur ſuum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, eſſet iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipſius 6. quod eſt abſurdum.

Cæterum quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æque metiuntur, hoc eſt, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquè multiplices. Quod idem dices, ſi plures minores æque metiantur plures maiores.

III.

RATIO eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam ſecũdum quantitatem, habitudo.

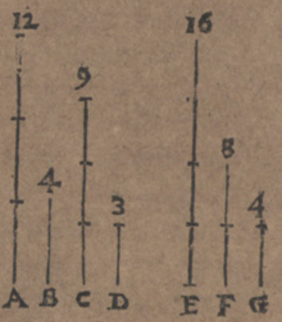
Quando duæ quantitates eiuſdem generis, vt duo numeri, duæ lineæ, duæ ſuperficies, duo ſolida, &c. inter ſe comparantur ſecundum quantitatem, hoc eſt, ſecundum quod vna maior eſt, quam altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiuſmodi comparatio, ſeu habitudo mutua, Ratio ſeu (vt alijs placet) Proportio. Itaq; ſi comparetur linea aliqua cum ſuperficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quod neq; linea, & ſuperficies; neq; numerus, & linea ſint eiuſdem generis quantitatis. Similiter ſi conferatur linea aliqua cum alia linea ſecundum qualitatem, hoc eſt, ſecundum quod vna eſt alba, & altera nigra; aut quod vna eſt calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ ſint eiſdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non ſit ſecundum quantitatem.

Quamquam autem in ſolis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam ſapiunt quantitatis, cuiuſmodi ſunt tempora, ſoni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoq; dicuntur habere, ſi eorum habitudo conſideretur ſecundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore eſſe maius, vel minus, vel duo tempora eſſe æqualia, &c. appellabitur eiuſmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc conſiderantur, veluti quantitates quædam.

Cæterum in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, conſequens proportionis dici ſolet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis conſequens. Quod ſi è contrario conſideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, conſequens vero linea 6. palmorum, & ſic in cæteris.

IV.

PROPORTIO vero eſt rationum ſimilitudo.



Quod hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, pleriſq; autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter ſe, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter ſe, proportionalitas ſolet nuncupari. Vt ſi proportio quantitatis A, ad quantitatem B, ſimilis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatẽ D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, ſi ſimilis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc ſimilitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, ſeu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) à ſcriptoribus, præſertim Boëtio; & Iordano, deſcribuntur; inter quas primũ ſemper locũ obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica atq; Muſica, ſeu Harmonica, de quib. paulo poſt dicemus. Verũ Euclides de ſola Geometrica agit hoc libro; quæ quidẽ duplex eſt, continua altera, in qua ſingulæ quantitates intermediæ bis ſumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, ſed quælibet quantitas intermedia ſit & antecedens, & conſequens; Antecedens quidem quantitatis ſubſequentis, conſequens vero quantitatis antecedentis. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio E, ad F, ea eſt F, ad G, vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero diſcreta, ſeu non continua, in qua ſingulæ quantitates intermediæ ſemel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas ſit & antecedens, & conſequens, ſed vel antecedens tantum, vel conſequens tantum. Vt ſi dicatur, quæ proportio A, ad B, ea eſt C, ad D, appellabitur proportionalitas hæc, diſcreta, ſiue non continua.

DE PROPORTIONIS DIVISIONIBVS.

OPERAE pretium eſſe arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnã ſint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam ſint præcipuæ proportionalitates, earumq; proprietates, vel ob hanc præcipue vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonſtrantur de proportionibus magnitudinum, rebus poſſint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philoſophis cum Ariſtotele de proportione motuum diſputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilib. proportionũ affectionibus percipi poſſit, inſtituemus paulo vberiorem tractationem in hac poſteriori editione, quam in priori: reijcientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici poſſent, in pleniorem noſtram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentiſſime perſequemur.

Proportio igitur ab Euclide definita diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis eſt ea, quæ in numeris poteſt exhiberi, qualis eſt proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hiſce numeris 20. & 10. oſtẽditur. Irrationalis vero proportio ea eſt, quæ in numeris exhiberi nequit, qualis eſt proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiuſdẽ quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non poteſt, vt in 10. lib. ab Euclide demonſtratur. Alij dicunt, proportionem rationalẽ eam eſſe, quã habent quæuis duæ quantitates commenſurabiles: Irrationalẽ vero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommenſurabiles. Dicũtur autem quantitates commenſurabiles,

ſurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam, ſeu quas eadem menſura communis metitur. Cuiuſmodi ſunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum eſt vtriuſq; pars aliquota, ſimiliter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; ita quoq; eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum menſurat. Non aliter omnes numeri, commenſurabiles dicentur, quia ſaltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommenſurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, ſeu quarum nullam menſuram communem cõtingit reperiri. Cuiuſmodi ſunt diameter, & latus eiuſdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatã, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri poteſt, vt demonſtratur ab Euclide, lib. 10. propoſ. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommenſurabiles oſtendũtur, præter illas duas. Itaq; in numeris inuenitur ſola proportio rationalis. At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi ſolet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Aequalitatis proportio, eſt inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum, & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum ſuperioribus duobus eam connexionem, vt omnis proportio æqualitatis ſit neceſſario rationalis, ſed non contra. Omnis item proportio irrationalis neceſſario ſit proportio inæqualitatis, ſed non contra. Ex quo manifeſtum eſt, minus recte à quibuſdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis ſit neceſſario æqualitatis, inæqualitatiſue, non tamen contra omnis proportio huiuſmodi eſt rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis ſint irrationales. Pari ratione perſpicuum eſt, quoſdam non ſatis recte diſtribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis ſit neceſſario rationalis, irrationaliſue, non tamen omnis huiuſmodi proportio è contrario eſt proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales ſint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuiſione ſecanda eſt proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem: Poſteriori vero in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, vt à nobis factum eſt. Ita enim membra diuidẽtia cum Diuiſo (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraq; diuiſione reciprocantur. Scio recte poſſe ſubdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quam proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; ſi in vtraq; diuiſione ſubintelligatur Diuiſum. Sed cur duplicem noſtram diuiſionem, qua proportio in tota ſua latitudine diuiditur, vtriq; harum ſubdiuiſionum prætulerim, ſupra expoſui in reſponſione ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius ſubdiuidi nequit, cum quæcunq; quantitates æquales ſiue magnæ, ſiue paruæ fuerint, eandem ſemper habeant proportionem æqualitatis) ſubdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis: Maioris inæqualitatis proportio eſt, quando maior quantitas cum minore confertur; qualis eſt proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis eſt, quando minor quantitas ad maiorẽ refertur, qualis eſt proportio 10. ad 20. Itẽ lineæ 6. pedũ ad lineã 8. pedũ, &c. Non eſt autẽ hæc diuiſio inanis, & ſuperuacanea, vt multi ſuſpicantur. Neq; n. eadẽ eſt proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. ſed multũ inter ſe differunt, cũ valde diuerſus ſit vſus vtriuſq;, vt perſpicuum eſt iis, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ ſunt verſati. Hæ igitur ſunt generales diuiſiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla ſecluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus ſolas proportiones rationales comprehendunt, ſubdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. eſt ſermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, diſtribuitur in quinq; genera, vt in proportionem multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientẽ, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera ſecatur, ſi modo ſingulis vocabulis præponatur præpoſitio (ſub) vt in proportionem ſubmultiplicem, ſubſuperparticularem, ſubſuperpartientem, ſubmultiplicem ſuperparticularem, & ſubmultiplicem ſuperpartientem. Horum autem quinq; generum priora tria ſunt ſimplicia, poſteriora vero duo ex illis tribus compoſita, vt manifeſtum eſt. Cur vero tantum ſint quinq; hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, poſt explicationem omnium harum quinq; proportionum oſtendemus.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

PROPORTIO Multiplex eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur, qualis eſt proportio

proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC *autem ſub ſe continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorẽ bis tantũ continet, dicitur proportio dupla: ſi ter, tripla: ſi decies, decupla, ſi centies, centupla, &c.*

EX *his facile omnes ſpecies proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemq; modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quintupla, qualis eſt 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorẽ continet quinquies. Itẽ proportio dupla lineæ 10. cubitorũ ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & ſic de reliquis.*

CÆTERVM *omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc eſt, omnesq; numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inueſtigatur: hoc eſt, numerus ille, & vnitas ſunt primi, ac minimi numeri, inter quos propoſita proportio multiplex reperitur. Atq; numerus ille idem, atq; vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hiſce terminis, inter quos prima proportio multiplex propoſita reperitur, ſi vterq; duplicetur, producentur duo numeri habentes ſecundam proportionem multiplicem propoſitam: ſi vterq; idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propoſitæ: ſi vterq; quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæſitæ. Atq; ita ſi ijdem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propoſitæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius ſpeciei obtinet, quem numerus, qui vtrumq; terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, ſi multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centeſimum locum inter omnes numeros propoſitam proportionem habentes.*

EXEMPLI *gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini ſi ducantur in 2. reperietur ſecunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si ijdem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ: Et ſic deinceps. Itaq; ſi decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. ſi vero milleſima reperienda ſit, multiplicandi erunt ijdem termini per 1000. &c.*

OMNES *item numeri cuiuſq; proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Conſtituantur duæ ſeries numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per ſeriem naturalem numerorum progrediatur; ſuperior autem ab eo numero, qui ſignificat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturq; per continuam additionem eiuſdem numeri, primum ad ſeipſum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam ſuperioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, ſecundus ad ſecundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices ſpeciei propoſitæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, ſeptuplis, & decuplis.*

Proportiones quintuplæ.

5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.	75.	80.	&c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	&c.

Proportiones ſeptuplæ.

7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	84.	91.	98.	105.	&c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	&c.

Proportiones decuplæ.

10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90	100.	110.	120.	130.	140.	&c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	&c.

DE PROPORTIONE.

PROPORTIO *ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper vnam eius partem aliquotam, ſcilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis eſt proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. ſemel, & inſuper vnitatem, quæ dimidiata pars eſt numeri 2. Ita quoq; linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet ſuperparticularem, quia prior linea continet poſteriorem ſemel, & inſuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars eſt lineæ 9. pedum, &c.*

HAEC *quoq; proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, eſt dimidiata pars minoris quantitatis, conſtituitur proportio ſeſquialtera; ſi eſt tertia pars, exurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi milleſima, ſeſquimilleſima, &c.*

VNDE *ex ipſomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuperparticularium. Erit enim proportio ſeſquioctaua, quando maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.*

Inuenientur omnes proportiones ſuperparticulares, ſiue omnes numeri, inter quos proportio ſuperparticularis quæcunq; reperitur, hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expreſſam denominat. Ad eum enim numerus proxime maior, qui videlicet eum vna ſola vnitate ſuperat, habebit primam proportionem ſuperparticularem propoſitam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini datæ proportionis dicuntur, ſi duplicentur, triplicentur, vel per quemcunq; alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum ſecundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat.

Verbi cauſa, Si quærantur omnes proportiones ſeſquiſeptimæ, quoniam hic exprimitur pars ſeptima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum ſuperans: atq; inter 8 & 7. prima proportio ſeſquiſeptima exiſtit. Qui duo termini ſi duplicentur, procreabuntur alij duo numeri 16. & 14. inter quos ſecunda proportio ſeſquiſeptima cernitur: ſi triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si deniq; centeſima proportio eadem quæratur, ducendi erunt termini inuenti 8 & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

Numeri quoq; omnes cuiuſq; proportionis ſuperparticularis comperientur, ſi conſtituantur duo ordines numerorum, quorum inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, ſuperior vero à numero proxime maiore: vterq; vero per continuam additionem numeri, à quo initium ſumit, primum ad ſe, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic poſuimus in proportionibus ſeſquialteris, ſeſquiſeptimis, & ſeſquidecimis.

Proportiones ſeſquialteræ.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. 42. 45. &c.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. &c.

Proportiones ſeſquiſeptimæ.

8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. 112. 120. &c.

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. 105. &c.

Proportiones ſeſquidecimæ.

11. 22. 33. 44. 55. 66. 77. 88. 99. 110. 121. 132. 143. 154. &c.

10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90 100. 110. 120. 130. 140. &c.

DE PROPORTIONE
Superpartiente.

PROPORTIO ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis eſt proportio 8. ad 5. Nam 8. continent ſemel 5. & inſuper tres vnitates, quarum quælibet eſt pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. ipſe autem ternarius ex illis compoſitus, non eſt pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere conſtituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aſpectu videntur eſſe ſuperpartientes, cum tamen ſint ſuperparticulares; cuiuſmodi proportio eſt inter 10. & 8. Quanquam enim 10 contineant ſemel 8. & duas inſuper vnitates, quarum quælibet eſt octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compoſitus, eſt quarta pars 8. non dicenda eſt ea proportio ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem ſuperpartientem, neceſſe eſt, vt maior quantitas minorem contineat ſemel, & plures eius partes aliquotas, quæ ſimul ſumptæ non conſtituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter ſe confundunt.

DIVIDITVR primum proportio ſuperpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem ſemel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non conſtituentes vnam conficitur, proportio ſuperbipartiens; ſi tres partes aliquotas, ſupertripartiens, ſi decem, ſuperdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio ſuperbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorē ſemel, & duas eius partes tertias, dicitur ſuperbipartiens tertias. Quod ſi duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur ſuperbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus ſuperbipartientibus. Pari ratione ſuperdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur ſuperdecupartiens vndecimas. Quod ſi decem illæ partes ſint decimætertiæ, vocabitur proportio ſuperdecupartiens decimastertias; & ſic de reliquis omnibus ſuperdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportiones ſuperpartientes vel inter ſe confundantur, vel cum proportionibus ſuperparticularibus, quod à pleriſq; factum eſſe deprehendimus, diligenter conſideranda ſunt ea, quæ ſequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuſcunq; proportionis ſuperpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monſtrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore ſuperſint; alter vero, quotæ partes eæ ſint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione ſupertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior ſignificat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere ſemel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturq; ſyllaba illa (tri) quando dicitur, ſupertripartiens; poſterior autem per vocem (octauas) expreſſus oſtendit, illas tres partes aliquotas eſſe partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione ſuperpartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facile ex ipſa proportionis prolatione cognoſcuntur, vt ex primo exemplo patet) eiuſmodi eſſe debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem eſt omnium numerorum pars aliquota: hoc eſt, vt ſint inter ſe primi. Numeros enim, qui præter vnitatem

nullam

nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter ſe, vt ex lib. 7. conſtabit. Tales ſunt duo illi numeri 3. & 8. in ſuperiori proportione ſupertripartiente octauas expreſſi. Nam ſola vnitas, vt conſtat, eſt vtriuſque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. ſupertripartientem octauas: qualis etiam eſt inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio poſterior inter 22. & 16. ſuperſextupartiens ſextasdecimas, quamuis maior minorem contineat ſemel, & inſuper ſex vnitates, quarum quælibet decimaſexta pars eſt minoris: Non, inquam, recte ſic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expreſſi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$ ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda eſt, ſupertripartiens octauas. Sic etiam non recte vocabitur proportio inter 9. & 6. ſupertripartiens ſextas, quoniam duo numeri in ea notati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem menſuram, videlicet 3. Nam ternarius ſemel ſumptus, ſeipſum, & bis repetitus, ſenarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$ reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit ſeſquialtera, cum maior quantitas contineat ſemel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non recte dicetur proportio inter 10. & 6. ſuperquadripartiens ſextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio ſuperbipartiens tertias, cum maior quantitas contineat minorem ſemel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones ſuperpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem ſuperbipartientem diuiſerimus paulo ante, in proportionem ſuperbipartientem tertias, quintas, ſeptimas, nonas, &c. prætereuntes ſuperbipartientem quartas, ſextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ poſteriores omiſſæ, ſint ſuperparticulares, propterea quod $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. conſtituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$. æquiualent $\frac{1}{5}$, confunderentur proportiones ſuperpartientes cum proportionibus ſuperparticularibus, ſi & ipſæ in numerum proportionum ſuperbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoſcendum ſit, an duo quilibet numeri propoſiti habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica docetur, demonſtrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

Inuentio omnium proportionum ſuperpartientium cuiuſque ſpeciei ſic ſe habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem ſpeciei propoſitæ ad numerum eaſdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent ſecundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt ſupra dictum eſt. VERBI gratia, ſi inquirendi ſint omnes numeri proportionis ſupertripartientis decimas, erunt primi huiuſmodi numeri, 13. & 10. quia maior ſuperat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione ſupertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum ſecundam proportionem conſtituunt, ſunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centeſima autem eiuſmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli ſint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti ſunt.

Eoſdem numeros omnium proportionum ſuperpartientium reperies, ſi ſtatuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore; ſuperior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum ſuperat: vterque deinde ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri ſui ordinis ad ſeipſum, & ad numeros conflatos, vt ſupra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum ſuperbipartientium quintas ſuperoctupartientium nonas, & ſuperſeptupartientium decimas.

Proportiones ſuperbipartientes quintas.
7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. &c.
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70 &c.
Proportiones ſuperoctupartientes nonas.
17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.
9. 18. 27. 36. 45. 54. 63. 72. 81. 90. 99. &c.
Proportiones ſuperſeptupartientes decimas.
17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.
10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100. 110. &c.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI SVPERPARTICVLARI.

PROPORTIO multiplex ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiuſmodi eſt proportio 9. ad 4. Continet enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla) & inſuper comprehendunt vnitatem, quæ eſt quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni ſuperparticulari, nimirum ſeſquiquartæ, eadem proportio propoſita ſimilis eſt.) vt recte proportio hæc compoſita dicatur ex multiplici, & ſuperparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam ſuperparticularem; triplam ſuperparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & inſuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVM QVOD QVE rurſus horum generum in infinita alia ſubdiuiditur, habita ratione proportionis ſuperparticularis. Nam proportio, verbi gratia, tripla ſuperparticularis continet ſub ſe triplam ſeſquialteram, (quando ſcilicet maior quantitas minorem ter continet, & prӕterea dimidiatam eius partem;) triplam ſeſquitertiam; triplam ſeſquiquartam, & ita infinitas alias.

Reperiemus verò omnes proportiones multiplices ſuperparticulares cuiuslibet ſpeciei, ſi aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotӕ, & proportionis multiplicis, quarum in propoſita proportione mentio fit. Nam ſi denominatorem partis aliquotӕ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoq; numero adijciamus vnitatem, habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotӕ primam proportionem ſpeciei propoſitӕ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum ſecundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quӕ in numero multiplicante continentur, vt in alijs dictum eſt. EXEMPLI gratia, ſi inueniendi ſint omnes numeri proportionis ſextuplӕ ſeſquinonӕ, ducemus 9. denominatorē partis nonӕ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoq; numero 54. addemus 1. Conflatus namq; numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonӕ expreſſӕ habet primam proportionem ſextuplam ſeſquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt ſecundi numeri in eadem proportione. Tripli vero 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centeſimam proportionem eandem.

Eaſdem proportiones multiplices ſuperparticulares inuenies, ſi conſtituas duas ſeries numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotӕ nominatӕ, ſuperior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotӕ eiuſdem in denominatorem proportionis multiplicis expreſſӕ: Vterq; vero ordo per continuam additionem primi numeri ſui ordinis ad ſeipſum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in ſuperioribus dictum eſt. Exempla hic vides proportionis duplӕ ſeſquialterӕ, triplӕ ſeſquiſeptimӕ, & decuplӕ ſeſquitertiӕ.

Proportiones duplӕ ſeſquialterӕ.

5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70 &c.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20 22. 24. 26. 28. &c.

Proportiones triplӕ ſeſquiſeptimӕ.

22. 44. 66. 88. 110. 132. 154. 176. 198. 220. 242. &c.

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. &c.

Proportiones decuplӕ ſeſquitertiӕ.

31. 62. 93. 124. 155. 186. 217. 248. 279. 310. 341. &c.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. &c.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI SVPERPARTIENTE.

PROPORTIO deniq; multiplex ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis eſt proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob cauſam dictam in proportione ſuperpartiente. Nam ſi partes illӕ aliquotӕ vnam efficerent, non eſſet proportio multiplex ſuperpartiens, ſed multiplex ſuperparticularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda eſt multiplex ſuperbipartiens ſextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas ſextas; quia duӕ ſextӕ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla ſeſquitertia.

Diſtribuitur autem hӕc proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam ſuperpartientem: triplam ſuperpartientem, &c.

Deinde quӕlibet harum, habita ratione numeri partium, ſub ſe continet genera infinita. Vt ſub tripla ſuperpartiente, continetur tripla ſuperbipartiens; tripla ſupertripartiens, &c.

Poſtremo quӕuis iſtarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in genera adhuc infinita ſecatur. Vt tripla ſupertripartiens diuiditur in triplam ſupertripartientem quartas; in triplam ſupertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile eſt cuiuis ex dictis depromere, &c.

Omnes proportiones multiplices ſuperpartientes poſtremӕ diuiſionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propoſitarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propoſitӕ, productoq; numero addatur numerus partium aliquotarum expreſſus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quӕ inueſtigantur. Atq; hi duo numeri, ſi duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunq; numerum multiplicentur, dabunt ſecundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI ſi quӕrantur omnes proportiones quadruplӕ ſuperoctupartientes vndecimas, ducemus 11. denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplӕ, numeroq; procreato 44. adijciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quӕſitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centeſimam proportionem inter omnes quadruplas ſuperoctupartientes vndecimas.

Quod ſi duo numerorum ordines conſtituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propoſitarum, & per continuam eiuſdem additionem primum ad ſe, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; ſuperior vero incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis datӕ, & ex numero partium expreſſo, ac per eiuſdem continuam additionem primum ad ſe, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoq; omnes numeros oblatӕ proportionis, vt in ſuperioribus quoq; diximus. Exempla hic vides in proportione dupla ſuperbipartiente tertias, dupla ſuperquintupartiente ſextas, & quintupla ſupertripartiente quintas.

Proportiones duplæ ſuperbipartientes tertias.

8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. &c.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. &c.

Proportiones duplæ ſuperquintupartientes ſextas.

17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.

6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54. 60. 66. &c.

Proportiones quintuplæ ſupertripartientes quintas.

28. 56. 84. 112. 140. 168. 196. 224. 252. 280. 308. &c.

5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. &c.

DE PROPORTIONIBVS RATIONALIBVS MINORIS INAEQVALITATIS.

OMNIA, quæ dicta hactenus ſunt de quinq; generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda ſunt quoq; de quinq; generibus correſpondentibus minoris inæqualitatis, præmiſſa tamen ſemper præpoſitione (ſub) vt dictum eſt. Nam ſi in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. eſt centupla, ita proportio 1. ad 100. eſt ſubcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. eſt tripla ſuperbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias; Atq; ita de cæteris.

Non videtur autem hoc loco prætermittenda inſignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. noſtræ Arithmeticæ conſtruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiuſmodi eſt. Conſtructa tabula Pythagorica, (Eſt autem conſtructio facillima, cum numeri in ſiniſtro latere conſtituant ſeriem numerorũ naturalem, in infinitumq; progredi poſſint; quælibet autem linea in tranſuerſum procreetur ex continua additione numeri in ſiniſtro latere, à quo incipit, ad ſeipſam, & ad numerum conflatum, & ſic in infinitum: ita vt hæ lineæ in tranſuerſum nil aliud ſint, quàm progreſſiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ ſint primi numeri earundem linearum) primum omnes numeri cuiuſuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in ſuprema linea acceptus ad vnitatem in ſiniſtro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem ſub eodem denominatore deſcendentes per lineam rectam ad numeros ſub vnitate in latere ſiniſtro poſitos, ſinguli ad ſingulos, habent ſecundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiuſdem ſpeciei, in infinitum. Vt prima proportio noncupla erit inter 9. ſupremæ lineæ ad 1. in ſiniſtro latere; ſecunda inter 18. ſub 9. ad 2. ſub 1. tertia inter 27. eiuſdem lineæ à 9. deſcendentis, & 3. in ſiniſtro latere, &c. atq; ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum eſt.

Deinde omnes numeri cuiuſuis proportionis ſuperparticularis ſic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere ſupremo acceptum habet proxime inſequens numerus primam proportionem datam: Et ſi per lineam rectam ab hiſce duobus numeris deſcendamus, reperiemus omnes alios numeros eiuſdem proportionis, vt de multiplicibus dictum eſt. Verbi gratia, prima proportio ſeſquioctaua erit 9. ad 8. aliæ vero ordine erunt inter numeros ſub illis poſitos, vt ſecunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

Tertio ſic reperies omnes proportiones ſuperpartientes cuiuslibet ſpeciei. Poſt denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in ſupremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem ſuperpartientem propoſitam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliæ ordine, reperientur inter numeros ſub illis duobus collocatos. Exempli cauſa, ſi quis omnes numeros proportionis ſuperoctupartientis vndecimas deſideret, ſumat in latere ſupremo denominatorem partiũ, id eſt, 11. poſt quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem ſuperoctupartientem vndecimas. Secundum habebit numerus 38. ad 22. tertiam 57. ad 33. & alias alij numeri ſub 19. & 11. per rectam lineam deſcripti.

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308

Quarto numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperparticularis inuenies hac ratione. In ſupremo latere

accipe

accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expreſſæ habeat proportionem multiplicem, cuius mentio ſit. Numerus enim proxime inſequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propoſitam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri ſub illis duobus poſiti. Vt autem ſcias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propoſitam. ſumendus eſt denominator partis in ſupremo latere, & in ſiniſtro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in ſiniſtro latere, & poſterior in ſupremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem deſideras. Exempli gratia. Inueniendi ſunt omnes numeri proportionis triplæ ſeſquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc eſt, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui eſt 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui eſt 5. quorum alteruter in ſupremo latere, & alter in ſiniſtro ſumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere ſupremo. Numerus enim 16. proxime inſequens ad denominatorem partis aliquotæ, id eſt, ad 5. habet primam proportionem triplam ſeſquiquintam. Alias proportiones eiuſdem ſpeciei reperies in numeris, qui ſub illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum eſt.

Quinto, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperpartientis hoc modo. In latere ſupremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propoſitam: qui quidem inuenietur quoq; in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde poſt acceptum numerum multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum ſit mentio. Vltimus namq; ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem ſuperpartientem. Alias proportiones eiuſdem ſpeciei reperies ſub illa prima, vt de alijs diximus. Vt ſi cupiat quis omnes proportiones quadruplas ſupertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium, qui eſt 5. Inueniet autem eum numerum eſſe 20. quippe in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui eſt 4. & denominatoris partium quintarum, qui eſt 5. deſcriptus ſit. Deinde poſt numerum hunc 20. inuentum numeret in ſupremo latere tres hos numeros 21.22.23. quod tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc eſt, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam ſupertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiuſdem ſpeciei continentur ſub duobus illis numeris, vt in alijs traditum eſt.

Inuentis hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, ſi minores cum maioribus conferantur, inuenti quoq; erunt omnes numeri eiuſdem proportionis minoris inæqualitatis.

Neq; vero ſilentio tranſiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ ſic ſe habet. Inuentis minimis, ſiue primis terminis, numeriſue cuiuslibet proportionis, ſi conſtituatur progreſſio, ſeu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor ſit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progredienſq; per ipſammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius progreſſionis tot numeri in ſerie naturali numerorum, quot vnitates ſunt in primo termino conſtitutæ tuæ proportionalitatis Arithmeticæ; Inter ſecundos vero, qui primorum dupli ſunt, tot, quot in ſecundo termino eiuſdem progreſſionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiuſdem progreſſionis continentur: atq; ita deinceps. Exempli gratia, ſi proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri ſunt 2. & 1. conſtituetur progreſſio incipiens ab 0. (quod differentia inter 2. & 1. ſit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progredienſq; per continuam additionem vnitatis, nimirum differentiæ inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Poſtea ad numerum confectum 2. &c. hoc ſcilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaq; inter primos numeros duplæ proportionis, hoc eſt, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus: Inter ſecundos, qui ſunt 4. & 2. cadet vnus medius, nimirum 3. Inter tertios 6.3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8.4. tres medij exiſtunt 7.6.5. & ſic deinceps. Id quod in hac formula apparet, vbi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, vt primam, ſecundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum ſeriei naturalis inter eos cadentium reſpondent numeris ſuperioris proportionalitatis Arithmeticæ.

2	1									
4	3	2								
6	5	4	3							
8	7	6	5	4						
10	9	8	7	6	5					
12	11	10	9	8	7	6				
14	13	12	11	10	9	8	7			
16	15	14	13	12	11	10	9	8		
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

QVOD ſi ſuperiori proportionalitati Arithmeticæ ſuperponas ſeriem naturalem numerorum, quæ ab 1. incipiat, ita vt ſinguli eius termini ſingulis terminis conſtitutæ tuæ Arithmeticæ proportionalitatis reſpondeant, dicto citius cognoſcemus quotnam numeri cadant medij inter quoſuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri n. ſeriei huius naturalis indicabunt,

quem

quem locum duo numeri duplæ proportionis obtinent, reſpondentes vero numeri in proportionalitate Arithmetica conſtituta multitudinem numerorum inter illos cadentium ſignificabunt. Exemplum hic vides.

Ordo proportion. duplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multitudo mediorum numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque ſi ſcire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis duplæ, cape in ſerie naturali numerum 12. cui ſupponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & ſic de cæteris.

PROPONATVR *deinde proportio decupla, cuius termini minimi ſunt 10. & 1. Differentia eorum eſt 9. numerus vna vnitate minor, 8. Progreſsio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturq; per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & ſic deinceps; vt hic videre licet, vbi ſupraſcripſimus etiam ſeri[e]m numerorum naturalem, cuius idem vſus hic eſt, qui ſupra fuit in proportione dupla.*

Ordo propor. decuplarum	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17 inter ſecundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij, & ſic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2.

RVRSVS *detur proportio quæcunq; ſuperparticularis: Et quoniam duo minimi numeri differunt ſola vnitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inſeruient hic eædem progreſsiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus ſit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perſpicuum eſt in proportione ſeſquioctaua.*

Ordo propor. ſeſquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

| 9 | 8 |

| 18 | 17 | 16 |

| 27 | 26 | 25 | 24 |

| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 |

| 45 | 44 | 43 | 42 | 41 | 40 |

| 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 |

| 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 |

OFFERATVR *quoq; proportio ſuperquadrupartiens ſeptimas, cuius minimi termini ſunt 11. & 7. Differentia eorum eſt 4. Progreſsio ergo Arithmetica incipiet à 3. progredieturq; per 4. vt hic patet, vna cum ſerie naturali.*

Ordo propor. ſuperquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

Igitur inter primos numeros proportionis ſuperquadrupartientis ſeptimas comprehenduntur 3. numeri medij. Et 7. inter ſecundos: Et 23. inter ſextos, atque ita de cæteris, vt hic vides.

11. 10. 9. 8. 7.

22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14.

33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21.

44. 43. 42. 41. 40. 39. 38. 37. 36 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28.

ITEM *data ſit proportio dupla ſeſquiſexta, cuius numeri minimi ſunt 13. & 6. Differentia eorum eſt 7. Incipiet ergo progreſsio à 9. habebitque differentiam 7. inter eius numeros, vt hic cernitur, vna cum ſerie naturali numerorum.*

Ordo propor. dup. ſeſquiſex.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

Inter primos ergo numeros proportionis duplæ ſeſquiſextæ cadent 6. medij numeri, inter ſecundos, 13. & inter octauos, 55. &c. veluti hic cernitur.

13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18.

POSTREMO *propoſitum ſit idem experiri in proportione dupla ſuperbipartiente tertias, cuius minimi termini ſunt 8. & 3. Et quia eorum differentia eſt 5. ſumet progreſsio Arithmetica initium à 4. habebuntque eius numeri differentiam 5. veluti hic manifeſtum eſt, vna cum numerorum naturali ſerie.*

Ordo propor. duplarum ſuperbip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ ſuperbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter ſecundos, 9. & inter ſeptimos, 34. &c. vt hic perſpicuum eſt.

8. 7. 6. 5. 4. 3.
16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.
24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9.
32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

MANIFESTVM autem eſt, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque eſſe de minoris inæqualitatis proportionibus, cum ijdem numeri inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM ex iis, quæ de quinque ſpeciebus proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis diximus, perſpicue colligitur, non poſſe plura eſſe genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinquæ iam expoſita. Cum enim, vt Euclides demonſtrat propoſ. 5. lib. 10. commenſurabiles quantitates quæcunquæ, inter quas, vt diximus, eſt proportio rationalis, inter ſe proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, vt omnis proportio rationalis quarumcunque quantitatum continuarum aſſignari, ſeu exhiberi poſſit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; qua ratione conſtituitur proportio multiplex: Aut ſemel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & ſic habetur proportio ſuperparticularis: Aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnam; & exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque vero alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas à maiore contineri poteſt. Eadem ratione conſtat, totidem eſſe genera proportionis minoris inæqualitatis. Recte ergo proportionem rationalem tum maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ expoſuimus, partiti ſumus.

DE PROPORTIONVM RATIONALIVM DENOMINATORIBVS.

QVONIAM vero non exiguus eſt vſus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus expoſuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibusnam numeris ſingulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuſlibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit diſtincte, & aperte habitudinem vnius quantitatis ad alteram: Vt denominator proportionis octuplæ eſt 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ continere minorem octies. Similiter denominator proportionis ſeſquiquintæ eſt $1\frac{1}{5}$ *quoniam iſte numerus ſignificat, maiorē quantitatem proportionis, ſeſquiquintæ, continere minorem ſemel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum eſt, vt arbitror, quod Euclides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiuſuis proportionis, quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, oſtendit, quanta ſit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propoſitis exemplis conſtat.*

EX ijs autem, quæ diximus, facile colligi poteſt denominator cuiuſque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quæcunque ea ſit, eſt numerus integer tot continens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator eſt 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. Millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium multiplicibus correſpondentium, ſunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus reſpondent, denominatæ. Vt denominator proportionis ſubduplæ, eſt $\frac{1}{2}$. *ſubquintuplæ,* $\frac{1}{5}$ *ſubnoncuplæ,* $\frac{1}{9}$. *ſubcentuplæ,* $\frac{1}{100}$. *ſubmillecuplæ,* $\frac{1}{1000}$. *Eodem modo, denominatores aliarum proportionum ſubmultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuſcunque proportionis ſubmultiplicis eſt numerus fractus, cuius numerator perpetuo eſt vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correſpondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neque vero vlla difficultas eſt in cuiusq; proportionis multiplicis vel ſubmultiplicis denominatore reperiendo, ſi ea, quæ dicta ſunt, rectæ intelligantur: quippe cum ipſa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifeſtum eſt.*

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis ſuperparticularis eſt vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis ſeſquialteræ denominator eſt $1\frac{1}{2}$. *ſeſquioctauæ,* $1\frac{1}{8}$. *ſeſquimilleſimæ,* $1\frac{1}{1000}$. *&c. Neque difficile erit denominatorem cuiuſque proportionis ſuperparticularis inuenire; cum ipſa proportionis prolatio denominatorem exprimat per ſuam partem aliquotam vt ex datis exemplis perſpicuum eſt. Denominatores autem proportionum ſubſuperparticularium correſpondentium, ſunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores ſunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis ſubſeſquialteræ, eſt* $\frac{2}{3}$. *ſubſeſquioctauæ,* $\frac{8}{9}$. *ſubſeſquimilleſimæ,* $\frac{1000}{1001}$. *&c. Inuenietur autem denominator cuiuſlibet proportionis ſubſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ in proportione expreſſæ,*

& pro

& pro eiuſdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator proportionis ſubſeſquidecimæ eſt $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator ſit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiuſdem fractionis numeratorem ſuperet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiuſuis proportionis ſubſuperparticularis hoc modo. Denominatorem correſpondentis proportionis ſuperparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator ſuperabit hic ſemper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator eſt partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam ſi huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator: & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propoſitæ proportionis ſubſuperparticularis. Vt ſi offeratur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam denominator proportionis ſeſquiſeptimæ, quæ illi reſpondet, eſt $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hãc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior eſt, quam denominator partis aliquotæ. Quare ſi eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis ſeſquiſeptimæ eſſe $\frac{7}{8}$. Facilius deniq; cuiuſuis proportionis ſubſuperparticularis denominator fortaſſis reperietur, ſi inueniantur primi numeri habentes proportionem ſuperparticularem reſpondentem, vt ſupra docuimus. Nam fractio, cuius numerator ſit eorum numerorum minor, denominator vero, maior, erit denominator propoſitæ proportionis. Vt ſi proponatur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam primi, ſiue minimi numeri habẽtes proportionem ſeſquiſeptimam ſunt 8. & 7. ſi ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis ſeſquiſeptimæ propoſitæ, vt prius.

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis ſuperpartientis eſt vnitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus vnam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis ſuperpartientis ſeptimas, eſt $1\frac{3}{7}$, ſupertripartientis vigeſimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neq; vlla difficultas eſt in huiuſmodi denominatoribus inueniendis: propterea quod prolatio ipſa proportionis denominatorẽ proprium exhibet, vt ex ſuperioribus exemplis liquido conſtat. Denominatores autem proportionum ſubſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores ſunt, quam earundẽ fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem ſuperat. Vt denominator proportionis ſubſupertripartientis ſeptimas, eſt $\frac{7}{10}$. ſubſupertripartientis vigeſimas: $\frac{20}{23}$. &c. Inuenietur autem denominator cuiuſlibet proportionis ſubſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui ſi addatur numerus earũdem partium, habebitur eiuſdem fractionis denominator proportionis ſubſuperquadripartiẽtis vndecimas, eſt $\frac{11}{15}$. cum huius fractionis numerator ſit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus eſt numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiuſdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis ſubſupertripartientis quintas eſt hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator eſt numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiuſdem fractionis conflatus eſt ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum ſubſuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiuſq; ſuperpartientis correſpondentis ad vnam fractionẽ, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidẽ numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expreſſas denominat, ſuperabit hic ſemper tot vnitatibus, quot ſunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuerſi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propoſitæ proportionis ſubſuperpartientis. Vt denominator proportionis ſubſuperdecupartientis decimastertias eſt $\frac{13}{23}$. quia denominator proportionis ſuperdecupartientis decimastertias eſt $1\frac{10}{13}$. qui ad hanc fractionem $\frac{23}{13}$. reuocatur, cuius numeri inuerſi efficiunt hanc fractionem $\frac{13}{23}$. Deniq; facilius cuiuſuis proportionis ſubſuperpartientis denominator inuenietur fortaſſis, ſi reperiantur primi, vel minimi numeri habentes proportionem ſuperpartientem correſpondentem, vt ſupra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator ſit eorum numerorum minor, denominator autem, maior, denominator erit propoſitæ proportionis ſubſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubſuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem ſuperquadrupartientem nonas ſunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis ſubſuperquadrupartientis nonas: & ſic de cæteris.*

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis eſt numerus integer multiplicem proportionem expreſſam denominans, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ eſt $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ ſeſquinonæ, $5\frac{1}{9}$. &c. Vt nullus omnino labor ſit, exhibere denominatorem cuiuſlibet proportionis multiplicis ſuperparticularis; quippe cum ipſa prolatio proportionis diſtincte exprimat & denominatorẽ multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla propoſita declarant. Denominatores autẽ proportionũ ſub multipliciũ ſuperparticulariũ, ſunt fractiones, quarũ numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expreſſas. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, eſt $\frac{7}{22}$. ſubquintuplæ ſeſquinonæ, $\frac{9}{46}$. &c. Inuenietur autẽ denominator cuiuſlibet proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, qui ſi multiplicetur per denominatorẽ proportionis multiplicis, addaturq; vnitas numero producto, habebitur denominator eiuſdẽ fractionis. Vt denominator ꝓportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ, eſt $\frac{6}{25}$. cũ*

huius

huius fractionis numerator 6. denominet partes ſextas, iſque ductus ſit in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiuſdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium inuenientur, ſi denominator cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis reſpondentis reuocetur ad vnam fractionē, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id eſt, numeratorem eiuſdem fractionis addendo. Nam ſi huius fractionis termini commutent ordinem inter ſe, fiet denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi detur proportio ſubquadrupla ſeſquiſexta: quoniam denominator correſpondentis proportionis quadruplæ ſeſquiſextæ eſt $4\frac{1}{6}$. ducemus 4. id eſt, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc eſt in denominatorem fractionis adhærentis, numeroque producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiuſdem fractionis, vt totum denominatorem $4\frac{1}{6}$ reuocemus ad hanc fractionem $\frac{25}{6}$. Cuius termini ſi inter ſe ordinem permutent, fiet hæc fractio $\frac{6}{25}$. pro denominatore proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortaſſe denominatorem cuiuſque proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis inuenies, ſi duos primos, minimoſue numeros proportionis multiplicis ſuperparticularis correſpondentis reperias, vt ſupra traditum eſt. Nam fractio, cuius numerator ſit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi offeratur proportio ſubtripla ſeſquiſeptima: quoniam primi, ſiue minimi numeri proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ ſunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hæc $\frac{7}{22}$. pro denominatore proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, atq; ita de cæteris.

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperpartientis, eſt numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expreſſam, cum illis partibus aliquotis, non conſtituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ ſuperquincupartientis octauas, eſt $3\frac{5}{8}$. quadruplæ ſuperbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus ſuperpartientibus, quod aperte, & diſtincte in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis ea contentæ, quam partes aliquotæ, vt perſpicue in exemplis prolatis apparet. Denominatores vero proportionum ſubmultiplicium ſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expreſſæ ſunt. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſuperquincupartientis octauas, eſt $\frac{8}{29}$. ſubquadruplæ ſuperbipartientis quintas, $\frac{5}{22}$. &c. Inuenietur autem denominator cuiuſlibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, quem ſi multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroq; producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiuſdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis ſubduplæ ſuperoctupartientis decimastertias, eſt $\frac{13}{34}$. quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertiasdecimas: qui ſi ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, productoq; numero 26. adÿciatur numerus 8. octo partium, conficietur eiuſdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoq; cuiuſlibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis ſic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis ſuperpartientis, quæ propoſitæ reſpondet, ad vnā fractionē, vt in Arithmetica præcepimus, nimirū multipilcando denominatorē multiplicis proportionis per denominatorē fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorē eiuſdem fractionis Nā huius fractionis termini, ſi inter ſe permutent ordinē, dabunt fractionē, quæ denominator erit proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas, reducemus denominatorem correſpondentis proportionis quintuplæ ſupertripartientis decimas, hoc eſt. $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10. productoq; numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. ſupponendus eſt. Nam ſi hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis ſubquintuplæ ſupertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$. &c. Sed forſitan facilius denominatorem cuiuſuis proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis obtinebis, ſi primos, ſiue minimos numeros proportionis multiplicis ſuperpartientis reſpondentis reperias, ex eiſq; fractionem conſtituas, ſumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propoſitæ. Vt ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla ſupertripartiente decimas ſunt 53. & 10. conſtituetur ex eis denominator proportionis propoſitæ hæc fractio $\frac{10}{53}$. & ſic de cæteris.

DENOMINATOR deniq; proportionis æqualitatis perpetuo eſt vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione eſſe æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere ſemel, & nihil præterea, quod quidem vnitas ſignificat.

EX his, quæ de proportionum denominatoribus diximus, perſpicuum eſſe puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re, & nomine ipſas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inæqualitatis re tantum, non autem & verbo, ſiue nomine, denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquido conſtat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ ſuperquadrupartientis nonas, qui eſt $3\frac{4}{9}$. hoc eſt, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum diſtincte, aperteq; nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & inſuper quatuor eius partes nonas. At vero denominator correſpondentis proportionis ſubtriplæ ſuperquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{31}$. id eſt, nouem trigeſimaprimæ partes, re quidem ipſa proportionem ſubtriplam ſuperquadrupartientem nonas denominat, cum vere ſignificet, minorem quantitatē in ea eſſe maioris

nouem

nouem partes trigeſimas primas, quod omnino neceſſarium eſt, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem ſubtriplam ſuper quadrupartientem nonas: Verbo autem, ſiue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{31}$ hoc eſt: nouem partes trigeſimæprimæ cum nomine proportionis ſubtriplæ ſuperquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, ſed penitus ab eo diſcrepare.

QVARE ſi denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expreſſus ſit, nimirum per fractionem, vt dictum eſt; vt ſcias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod ſcies, ſi partiaris denominatorem fractionis per numeratorem. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominator fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronunciabis, præpoſita tantum ſyllaba, ſub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Vt ſi detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio ſuboctupla. Quando enim numerator fractionis eſt vnitas, proportio dati denominatoris erit ſubmultiplex ab eiuſdem fractionis denominatore denominata. Quod ſi datus denominator ſit $\frac{20}{327}$. Diuiſo denominatore 327. per numeratorem, fit Quotiens $16\frac{7}{20}$. Denominator igitur fractionis $\frac{20}{327}$. ad numeratorem habet proportionem ſedecuplam ſuperſeptupartientem vigeſimas: ac proinde proportio, cuius denominator eſt $\frac{20}{327}$. dicenda eſt ſubſedecupla ſuperſeptupartiens vigeſimas, & ſic de cæteris.

QVIA vero non ſemper commode omnes proportiones propriis nominibus appellari poſſunt, (quis enim proportionem, v.g. 37. ad 1. commode dixerit triginta ſeptuplam, vel trigecuplam ſeptuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commode proportionem 48. ad 29. dixerit ſupernouemdecupartientem vigeſimas nonas? &c.) ſolent Geometræ plerumq; in ſuis ſcriptis exprimere proportionem quamcumq; per primos, ſiue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplã. Et viciſſim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quam ſubtredecuplam. Ita quoq; proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ alias diceretur ſupertripartiens decimas. Proportionem vero 40. ad 52. appellant eam, quæ eſt 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur ſubſupertripartiens decimas, & ſic de aliis.

QVANQVAM autem proportio qualibet exprimi poſſit per minimos eius numeros, vt diximus: pernecеſſaria tamen eſt cognitio denominatoris eiuſdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoſcamus. Nam etiamſi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat eſſe eam, quæ eſt numeri 17. ad 4. non intelligam tamen plane, quænam ſit illa proportio, niſi eius denominatorem cognouero, qui eſt $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifeſte declarat, maiorẽ numerum continere minorem quater, & inſuper quartam eius partem. Atq; hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quod ſi quando minimi numeri alicuius proportionis ſint ita magni, vt denominator ex illis non facile poſſit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox ſubiungam, & ex quo denominator proportionis inter quoſuis duos numeros, ſiue minimi ij ſint, ſiue non, notus efficitur.

QVOD ſi proportionem quamcunq; per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multo commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator eſt 5. Item proportionem 48. ad 38. eam cuius denominator eſt $1\frac{5}{19}$. quæ dicenda eſſet ſuperquintupartiens decimasnonas, ſic etiam proportio 20. ad 100. dici poteſt ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator eſt $\frac{19}{24}$. atque ita de reliquis; quoniam videlicet denominator clariſſime demonſtrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum eſt.

DENOMINATOR porro proportionis inter duos quoſuis numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per conſequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, ſi qua adſit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti propoſita proportione 39 ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius eſſe 13. Quotientem videlicet numerum diuiſionis 39. per 3. vel 390. per 30. Quod ſi viciſſim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuiſionis fractio hæc $\frac{3}{39}$. vel $\frac{30}{390}$. Nam quando minor numerus per maiorem diuiditur Quotiens ſemper eſt fractio, cuius numerator eſt minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmetica explicauimus. Et quia vtraque fractio, ſi eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hanc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. eſſe $\frac{1}{13}$. Rurſus data proportione 52. ad 40. ex diuiſione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{12}{40}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit $1\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator ſiue Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc eſt, in minimis numeris $\frac{10}{13}$. Præterea proportio 100. ad 20. denominatorẽ habebit 5. Diuiſis enim 100. per 20. Quotiens eſt 5. Proportionis vero 20 ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quod diuiſis 20. per 100. Quotiens eſt $\frac{20}{100}$. id eſt, in minimis numeris $\frac{1}{5}$. Deinde denominator proportionis 48. ad 10. erit $4\frac{4}{5}$. quod diuiſis 48. per 10. Quotiens ſit $4\frac{8}{10}$. hoc eſt in numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{10}{48}$. id eſt, in minimis numeris $\frac{5}{24}$. Et quia denominator fractionis, $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam ſuperquadrupartientem quintas (quod diuiſis 24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$. appellabitur proportio 10. ad 48. ſubquadruplaſuperquadrupartiens quintas. Vt enim rite efferatur proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius eſt proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt ſupra diximus.

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum eſt, eoque reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum eſt, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. eſt $2\frac{9}{10}$. ſi reducatur ad hanc vnam fractionem, $\frac{29}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoque numero 20. eiuſdem fractionis numeratorem 9. addendo) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. eſt $\frac{8}{11}$. erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824 ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. eſt 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7. & 1. Viciſſim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator eſt $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Itaque propoſitis duobus numeris quibuscunque, ſi quærantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum eſt, iſque ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæſiti. Vt ſi quærantur minimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diuiſo antecedente per conſequentem terminum, fit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. eſſe 40. & 9. Eademque ratio eſt de cæteris.

IAM vero ſi propoſitis duabus proportionibus, cognoſcere velis, vtra earum maior ſit, vel minor, dices eam maiorem eſſe, cuius denominator maior eſt, minorem vero eam, cuius denominator eſt minor. Quod ſi denominatores ſint æquales, proportiones quoque æquales eſſe pronunciabis. Vt ſi proponantur duæ hæ proportiones, ſuperoctupartiens decimasquintas, & ſuperdecupartiens decimas ſeptimas, quarum denominatores ſunt $1\frac{8}{15}$ & $1\frac{10}{17}$. dices priorem poſteriore eſſe minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor eſt denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua vero arte cognoſcas, vtra duarum fractionum maior ſit, vel minor, an vero æquales ſint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, ſi offerantur duæ proportiones, quarum denominatores ſint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{100}{101}$. dicemus priorem eſſe maiorẽ. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor ſit fractione $\frac{100}{101}$. numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior eſt. Sic ſi dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac eſſe maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$, maior eſt huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoſcemus facile, vtra earum ſit maior, etiamſi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum conſequentem poſterioris, & termino antecedente poſterioris in conſequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior eſt: Et ſi duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter ſe æquales erunt. Vt ſi proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem eſſe, quia illius antecedens 17. in huius conſequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in conſequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rurſus ſi dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in poſterioris conſequentem 72 quàm ex antecedente poſterioris 108. in conſequentẽ prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipſæ æquales inter ſe erunt. Ratio huiuſce operationis eſt: quia hac ratione propoſitis quatuor numeris, multiplicantur inter ſe tam extremi duo, quam duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur ſi procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonſtratur lib. 7. propoſ. 19. Hinc fit, ſi primus in quartum producat maiorem numerum, quam ſecundus in tertium, maiorem eſſe primum, quam vt eandem habere poſſit proportionem ad ſecundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor eſſe deberet, vt eundem numerum poſſet producere ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, ſiue ij primi ſint, ſiue non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum aſſumptum, vel diuidemus, per propoſitæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad aſſumptum, qui multiplicatus eſt, vel aſſumptus, qui diuiſus eſt, ad Quotientem habebit proportionem propoſitam. Verbi gratia, ſi ſint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuiſus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Ita quoque ſi inueniendi ſint duo numeri in proportione dupla ſeſquitertia, cuius denominator eſt $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{8}$. Item ſi numerum 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$. habebit diuiſus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam ſeſquitertiam. Sed vt fractiones vitentur, ſi quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarum in proportione ſit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis ſit mentio, aſſumi poteſt quilibet numerus. Vt ſi deſiderentur duo numeri proportionis triplæ ſuperbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis eſt 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$. fit numerus 145, qui ad aſſumptum numerum 45. proportionem habet datam. Sic etiam ſi cupiat quis proportionem ſubquadruplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{4}$. ſumendus erit numerus à 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$ producet 3. numerum integrum, qui ad aſſumptum 12. habet proportionem ſubquadruplam. Si vero per diuiſionem agendum ſit, & fractiones vitandæ, ſumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In aliis autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numeruſque ſumendus à numeratore numeratus. Vt ſi quæratur proportio quintupla, ſumendus erit, verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuiſus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem deſideretur proportio, cuius denaminator ſit $4\frac{3}{7}$ reuocato eo ad fractionem $\frac{31}{7}$. ſumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiſo per $\frac{31}{7}$ fit Quotiens 14. ad quem acceptus numerus 62. habet proportionem à $4\frac{3}{7}$. denominatam, nimirum quadruplam ſupertripartientem ſeptimas. Cæterum ſi duo numeri proponantur, cupiatque quis alios duos in eadem proportione reperire ſatis erit, ſi vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propoſiti duo numeri. Item ſi propoſito quouis numero, inueniendus ſit alius, qui ad eum proportionem habeat datam, vel ad quem is datam habeat proportionem, aſſequeris primum, ſi propoſitum numerum per denominatorem proportionis multiplices:: at ſecundum obtinebis, ſi eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quod ſi proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quiſpiam numerus; ſi quidem inueniendus ſit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad ſecundum: ſi quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus eſt, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certe, ſiue denominator cognitus ſit, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per ſecundum datum, hoc eſt, per conſequentem terminum datæ proportionis, productuſque numerus per primum, ſiue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt ſi dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator eſt $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. produceturque quartus numerus quæſitus, 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per ſecundum 7. & productum numerũ 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si vero inueniendus ſit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri, ſi quidem denominator notus eſt, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel ſiue notus ſit denominator, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per ſecundum, id eſt, per conſequentem terminum, diuidendus. Vt datis eiſdem duobus numeris 47. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gigneturque quæſitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumque productum 80. partire per ſecundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVIA vero diximus, eam proportionem eſſe maiorem; cuius denominator maior eſt, fit, vt in proportionibus multiplicib. detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. non autem maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores

portionum multiplicium eſt minimus, maximus autem dari nõ poteſt, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones ſuperparticulares reperiri maximam, nimirum ſeſquialteram, denominata à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum proportionum ſuperparticularium maximus eſt, minimus autem dari non poteſt, cum denominatores fractionũ progredi poſſint in infinitum. Conſtat autem ex iis, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionẽ, cuius denominator maior eſt, minorẽ eſſe, ſi idem ſit numerator; fractionẽ autẽ, cuius denominator minor eſt, ſi idẽ ſit numerator, maiorem eſſe. Cum ergo denominator 2. ſit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales ſunt fractiones denominatorum proportionum ſuperparticularium) maxima. Colligitur deniq; in aliis proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam poſſe dari, neque maximam. Quod intelligendum eſt de vltimis ſpeciebus. Nam ſi de vltimis ſpeciebus non ſit ſermo, erit ſuperbipartiens inter ſuperpartientes, minima; ſuperpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem ſuperparticulares, maxima, erit multiplex ſeſquialtera; minima vero, dupla ſuperparticularis. Inter multiplices deniq; ſuperpartientes maxima erit multiplex ſuperpartiens tertias; minima vero, dupla ſuperbipartiens. E contrario in proportionibus ſubmultiplicibus datur maxima, nimirum ſubdupla, non autem minima: In ſubſuperparticularibus autem reperitur minima, vt ſubſeſquialtera, non autem maxima: In aliis deniq; proportionibus minoris inæqualitatis neq; maxima, neq; minima dari poteſt. Quæ omnia perſpicua erunt, ſi denominatores proportionum inter ſe conferantur.

COLLIGITVR etiam, hanc eſſe connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt quælibet proportio maioris inæqualitatis maior ſit proportione æqualitatis, quælibet vero proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quod quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quantumuis minimus, maior eſt vnitate, qua denominator eſt proportionis æqualitatis, cum ille minor eſſe nequeat, quam vnitas cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis ſemper minor eſt, quam vnitas, cum ſit fractio, cuius numerator à denominatore ſuperatur vt ex iis, quæ ſupra diximus, patet. Itaq; proportio æqualitatis media eſt inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduerſione dignum eſt, Proportionem maioris inæqualitatis decreſcendo appropinquare ſemper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario vero proportionem minoris inæqualitatis creſcendo ſemper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamen eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici propoſita datur minor, ac minor, vſque ad duplam, quæ omnium multiplicium eſt minima. Deinde hac datur minor, nimirum ſuperparticularis, vel ſuperpartiens quæcunque, in qua cum minima non poſſit dari, omniſq; proportio eiuſmodi maior ſit proportione æqualitatis, liquido conſtat, proportionem maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non poſſe peruenire, etiamſi in infinitum decreſcendo ad ipſam accedat. Rurſus cum omnis proportio minoris inæqualitatis minor ſit proportione æqualitatis, non poſſit autem in ea reperiri maxima, manifeſtum quoque eſt, proportionem minoris inæqualitatis attingere non poſſe proportionem æqualitatis, licet in infinitum creſcendo ad eam accedat. Sed vt vtrumq; exemplo etiam diſcatur, ſciendum eſt, ſi inter duos numeros quoſuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior ſcilicet vno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorem diuiſam eſſe in duas minores, quarum vna eſt maioris numeri ad medium interpoſitum, altera vero numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem diuiſam eſſe in duas maiores, quarum vna eſt minoris numeri ad medium interpoſitum, altera vero medij ad maiorem. Vt ſi inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. quæ dupla eſt, diuiſa erit in ſeſquialteram 6. ad 4. & ſeſquitertiam 4. ad 3. quarum vtraque minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contra vero, proportio 3. ad 6. quæ ſubdupla eſt, diuiſa erit in ſubſeſquitertiam 3. ad 4. & ſubſeſquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior eſt proportione ſubdupla 3. ad 6. Idem fit, ſi inter eoſdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. ſeſquiquinta, quam proportio ſuperbipartiens tertias 5. ad 3. minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contra vero tam proportio ſuperbipartiens tertias 3. ad 5 quam ſubſeſquiquinta 5. ad 6. maior eſt proport[illegible] ſubdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari poſſunt. Verum vtrumq; demonſtrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor eſt maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datum, maiorem proportionem, quam idem maior ad medium, & quam medius ad minorem. At vero minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quam idem minor ad medium, & quam medius ad maiorem, vt manifeſtum eſt vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicauimus, vel ex propoſ. 8. huius lib. 5. vbi demonſtrat Euclides, propoſitis duabus quantitatibus inæqualibus maioris ad tertiam aliquam eſſe maiorem proportionem, quam minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad maiorem habere minorem proportionem, quam ad maiorem. Ex quo ſequitur id, quod diximus: nimirum poſitis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem eſſe proportionem eiuſdem numeri 6. ad minorem 3. quam ad medium 4. maiorem: Item maiorem eſſe proportionem maioris numeri 6. ad 3. quam minoris 4. ad eundem 3. Contra vero, maiorem eſſe proportionem eiuſdem numeri 3. ad minorem 4. quam ad maiorem 6. Item maiorem eſſe proportionem maioris numeri 4. ad 6. quam minoris 3. ad eundem 6. Eademq; in cæteris ratio eſt. His poſitis, erit proportio dupla 4. ad 2. diuiſa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem eſt, quæ 4. ad 3. diuiſa hic, 8. 7. 6. quam proportio 6. ad 4. quæ eadem eſt, quæ 3. ad 2. hic 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem eſt, quæ 8. ad 7. diuiſa hic, 16. 15. 14. & proportio 14. ad 12. quæ eadem eſt, quæ 7. ad 6. hic 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. quæ eadem eſt, quæ 6. ad 5. hic, 17. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem eſt, quæ 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atq; ita fieri poteſt in infinitum. E contrario vero proportio ſubſeſquialtera 4. ad 6. diuiſa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem eſt, quæ 4. ad 5. diuiſa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12. quæ eadem eſt, quæ 5. ad 6. hic 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem eſt, quæ 8. ad 9: diuiſa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem eſt, quæ 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. quæ eadem eſt, quæ 10. ad 11. hic. 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem eſt, quæ 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atq; huius incrementi nunquam erit finis. Idemq; experiri licebit in quibuſuis aliis proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuiſa hic eſt, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio ſubſuperſeptupartiens vndecimas 11. ad 18. diuiſa hic, 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: ſed præcipuæ proportionalitates, quas autores nominati Medietates vocant, ſunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Muſica, ſiue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas, ſiue Medietas, eſt, quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet ſuum antecedentem ternario ſuperat, dicuntur conſtituere proportionalitatem Arithmeticam. Eſt autem duplex, continua, & diſcreta. Continua eſt, quando in progreſſione numerorum nulla ſit interruptio, ſed quilibet cum proxime antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Diſcreta autem eſt, quando in numerorum progreſſione interruptio fit, ita vt bini tantum inter ſe conferantur, non autem quilibet cum proxime præcedente, vt in his numeris contingit, 4.7.8.11.30.33. Nam eadem differentia eſt inter binos 4. 7. & 8.11. & 30. 33. non autem inter 4.7.&7.8.&c.

GEOMETRICA proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim proprie proportionalitas dicitur, ſiue Analogia: aliæ vero improprie, cum non ſit eadem ſemper inter earũ terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos, interijciuntur. Vt hi numeri, 2.6.18.54. quoniam quilibet ad ſuum antecedentem eandem habet proportionem triplam, conſtituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoq; eſt, continua, & diſcreta. vt in 4. defi. huius lib. explicauimus. Continua cernitur in datis numeris, diſcreta autem in hiſce ſex, 2.3.12.18.20.30. Nam bini tantum 2.3. & 12.18. & 20.30. eandem habent proportionem ſeſquialteram; non autem quilibet ad proxime præcedentem

MVSICA ſiue Harmonica proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem ſit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos ſit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3. 4. 6. quoniam eadem eſt proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentiæ inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id eſt, ad 1. (cum vtrobiq; proportio ſit dupla.) conſtituunt proportionalitatem, ſiue Medietatem Muſicam, ſiue Harmonicam: Ipſi vero neq; eandem habent differentiam, neq; eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri 42. 12. 7. Harmonicam proportionalitatem conſtituunt, quia eadem proportio eſt maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc eſt, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobiq; proportio ſit ſextupla. Dicitur autem huiuſmodi proportionalitas Muſica, ſiue Harmonica, quia plerumq; eius numeri habent proportiones eas, in quibus conſonantiæ Muſicæ conſiſtunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. eſt proportio ſeſquialtera, conſtituens conſonantiam, quæ diapente dicitur, ſiue Quinta. item inter 4. & 3. eſt proportio ſeſquitertia, conſtituens conſonantiam, quam Diateſſaron, ſiue Quartam vocant. Deniq; inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quæ Diapaſon conſonantiam, ſiue octauam conſtituit. Atq; eodem modo in pleriſq; aliis idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT TRIVM PROPORTIONALITATVM, ſiue, Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN *tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor eſt proportio maximi ad medium, quam medij ad minimum. Vt hic patet. 2.4.6. Nam proportio 6. ad 4. eſt ſeſquialtera; & 4. ad 2. dupla.*

AT *in tribus numeris proportionalitatis Muſicæ, maior eſt proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic vides. 3.4.6. Proportio enim 6. ad 4. eſt ſeſquialtera; & 4. ad 3. ſeſquitertia.*

IN *tribus deniq; numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem eſt proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione conſtat, apparetq; in hiſce tribus numeris 3.6.12. Tam enim 12. ad 6. quam 6. ad 3. duplam habent proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atq; Harmonicam, cum in Arithmetica inter maiores numeros minor ſit proportio, quam inter minores; Contra vero in Harmonica inter maiores numeros maior, quam inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum eſt.*

II.

ARITHMETICA *proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones vero eorundem inæquales.*

GEOMETRICA *è contrario differentias terminorum habet in æquales, proportiones vero eorundem æquales.*

HARMONICA *denique neque differentias, neque proportiones terminorum æquales habet: Patet hoc ex ſuperioribus exemplis.*

III.

IN *tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem ſui parte, vel partibus minorem ſuperat, & à maiori ſuperatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. ſuperat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$. ipſius medij 7. Item medius idem 7. ſuperatur à maiore 11. quatuor quoq; vnitatibus, quæ conſtituunt eiuſdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. ſuperat minorem 15. quinq; vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipſius medij 20. Item medius idem 20. ſuperatur à maiore 25. quinq; vnitatibus, quæ conſtituunt $\frac{1}{4}$. eiuſdem medij 20.*

AT *in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem ſui parte, vel partibus minorem ſuperat, qua parte, vel partibus maioris à maiore ſuperatur. Vt hic 4. 6. 9. medius 6. ſuperat minorem 4. binario, qui eſt $\frac{1}{3}$. medij ſuperaturq; à maiore 9. ternario, qui quoq; eſt $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic 9. 15. 25. vbi eſt continua proportio ſuperbipartiens tertias, medius 15. ſuperat minorem 9. ſex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipſius medij 15. Et idem medius 15. ſuperatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoq; $\frac{2}{5}$. ipſius maioris 25.*

IN tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem ſuperat, qua parte, vel partibus maioris à maiore ſuperatur. Vt hic, 3. 4. 6. medius 4. ſuperat minorem 3. vnitate, quæ eſt $\frac{1}{3}$. eiuſdem minoris, ſuperaturq; à maiore 6. binario, qui quoque eſt $\frac{1}{3}$. eiuſdem maioris. Rurſus in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. medius 12. ſuperat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ ſunt $\frac{5}{7}$. ipſius minoris 7. Et idem medius 12. ſuperatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quæ ſunt $\frac{30}{42}$. hoc eſt, in minimis numeris $\frac{5}{7}$. quoq; ipſius maioris 42.

IIII.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, ſumma extremorum dupla eſt medij. Vt hic, 3. 7. 11. ſumma extremorum 14. dupla eſt medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quam Harmonicæ, ſumma extremorum ſuperat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum ſuperat. Vt hic, 4. 6. 9. & 3. 4. 6. tam ſumma 13. extremorum 4. 9. ſuperat duplum medij 6. hoc eſt, 12. vnitate; qua differentia maiorum, nimirum 3. ſuperat 2. differentiam minorum, quam ſumma 9. extremorum 3. 6. duplum medij 4. id eſt, 8. ſuperat vnitate, qua differentiam maiorum, nimirum, 2. ſuperat differentiam minorum, quæ eſt 1. Sic etiam hic, 9. 15. 25. vbi eſt continua proportio ſuperbipartiens tertias, ſumma 34. extremorum 9. 25. ſuperat duplum medij 15. hoc eſt, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differentiam minorum, 6. ſuperat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. ſumma 49. extremorum duplum medij 12. id eſt, 24. ſuperat numero 25. quo differentia maiorum 30. ſuperat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter ſe multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij ſuperatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic, 3. 7. 11. numerus 33. factus ex 3. in 11. ſuperatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis eſt, vt hic, 4. 6. 9. Extremi inter ſe multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter ſe genitus ſuperat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic, 42. 12. 7. numerus 294. factus ex 42. in 7. ſuperat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe in Arithmetica minus producatur ex primo in tertiam, quam ex medio in ſe, in Harmonica vero plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, ſumma extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium ſuperat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3. 7. 11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus ſuperat numerum. 66. qui duplus eſt producti 33. ex primo in tertium, num. 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc eſt, in 8.

IN tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis ſumma extremorum in medium multiplicata gignit numerum qui duplum producti ex primo in tertium ſuperat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic 4. 6. 9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id eſt, 72. ſuperat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex ſumma extremorum in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic, 3. 4. 6. Ex ſumma extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continue proportionalibus datis, ſi ſecundus eſt inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eoſdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et ſi ſecundus medius eſt in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6. 9. 8. 12. quoniam ita eſt 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et ſunt 6. 9. 12. proportionales Arithmetice, cum eundem habeant exceſſum 3. vides 6. 8. 12. Harmonice proportionales eſſe, cum eadem ſit proportio 12. ad 6. quæ differentiæ maiorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6. 8. 9. 12. quia ita eſt 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et ſunt 6. 8. 12. proportionales Harmonice, vt diximus, vides 6. 9. 12. Arithmetice eſſe proportionales, cum eundem exceſſum 3. habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum ſit inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometrice non continue proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius eſt Arithmetice inter extremos 4. 12. & ſecundus 6. inter eoſdem extremos 4. 12. medius eſt Harmonice; vides ita eſſe 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continue proportionalibus ſiue Arithmetice, ſiue Geometrice, ſiue Harmonice, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica quando tres primi ſunt Harmonice proportionales, item tres primum inſequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui ſequuntur; nec non primis tribus relictis, ſubſequentes tres, & ſic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate conſtituti numeri, qui in locis tam imparibus, quam paribus, atq; etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo æqualis multitudo numerorum inter quoſuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijciantur: cuiuſmodi ſunt primus, tertius, quintus, ſeptimus, &c. Item ſecundus, quartus, ſextus, &c. Præterea primus, quartus, ſeptimus, &c. Inſuper primus, quintus, nonus, &c. atq; ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ ſequuntur, perſpicuum eſt.

PROPORTIONALITATES ARITHMETICÆ.

3.	7.	11	15.	19.	23.	27.	31.	35.	39.	43.	47.	51.	55.	59.
3.		11.		19,		27.		35.		43.		51.		59.
	7.		15.		23.		31.		39.		47.		55.	
3.			15.			27.			39.			51.		
	7.			19.			31.			43.			55.	
3.				19.				35.				51.		

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960	
5		20		80		320		1280		5120		20480		
	10		40		160		640		2560		10240		40960	
5			40			320			2560			20480		
	10			80			640			5120			40960	
5	10			80				1280				20480		

Proportionalitates Harmonicæ.

252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520
252		315		420		630		1260	
	280		360		504		840		2520
252			360			630			2520
	280			420			840		
252				420				1260	

IX.

QVOTQVOT numeris proportionalibus datis ſiue in Arithmetica proportionalitate, ſiue Geometrica, aut Harmonica. ſi ſinguli per aliquem numerum eundem multiplicentur, aut diuidantur, habebunt quoq; producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides ſingulos multiplicatos per 4. Item diuiſos per 4.

Arithmetica proportional.			*Geometrica proportional.*			*Harmonica proportional.*		
20	28	36	20	40	80	60	84	140
Producti			*Producti*			*Producti*		
80	112	144	80	160	320	240	336	560
Quotientes			*Quotientes*			*Quotientes*		
5	7	9	5	10	20	15	21	35

CÆTERVM *in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem ſpecie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuiſi habent: At in Arithmetica non ſeruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differentia enim inter 20. & 28. eſt 8. at inter 80. & 112. eſt 32. Quotientum vero differentia ad differentiam numerorum diuiſorum habet proportionem ſubmultiplicem à diuiſore denominatam, præpoſita particula, ſub. Vt in dato exemplo ſubquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. eſt 8. at inter 5. & 7. eſt 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atq; inter Quotientes, numeroſq; diuiſos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplas eſſe differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. At vero differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. eſſe earundem differentiarum ſubquadruplas.*

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS *duobus numeris quibuſcunq;, ſi eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica vtroq; dato maiorem. Et ſi eandem differentiam huic tertio addas conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atq; ita deinceps reperies infinitos alios ſemper maiores, ſi differentiam vltimo inuento ſemper adijcias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia eſt 7. conſtituetur hæc proportionalitas Arithmetica, quæ extendi poteſt in infinitum.*

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quod ſi eandem differentiam à minori ſubtrahas, quando ſubtrahi poteſt, habebis rurſus tertium terminum in eadem proportionalitate: vtroq; minorem. Et ſi differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate. Atq; ita deinceps inuenies alios minores, ſi differentiam ab vltimo inuento ſemper demas, donec ſubtractio amplius fieri nequeat. Vt datis numeris 30. 34. quorum differentia eſt 4. conſtituetur hæc proportionalitas Arithmetica vſq; ad 2. quæ vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius ſubtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamſi differentia non aſſumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroque dato maior. A quo duplicato ſi proxime præcedentem ſubtrahas, habebis quartum; & ſic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. ſi à 15. duplicato, hoc eſt, à 30. ſubtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. ſi quoque demas 15. habebis quartum terminum 37. & ſic deinceps, vt hic apparet. 4.15.26.37.48.&c.

RVRSVS datis duobus numeris; ſi ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius numerus vtroque minor. Et ſi ex huius duplo proxime præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & ſic deinceps, donec amplius ſubtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. ſi ex 20. duplicato, id eſt, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. ſi quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. ſubtrahi non poteſt, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides. 27.20.13. 6.

II.

Quando terminorum numerus eſt impar, ſumma extremorum æqualis eſt ſummæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter diſtant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. ſemper eſt 32.

QVANDO autem numerus terminorum eſt par, ſumma extremorum æqualis ſemper eſt ſummæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. ſemper eſt 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar eſt habebit ſumma omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter diſtantem, hoc eſt, ad ſemiſſem ſummæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cum enim ſumma extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali interuallo diſtantium, dupla ſit termini medij, continebitur medius terminus, ſiue ſemiſſis ſummæ extremorum, in ſumma omnium terminorum toties, quot ſunt termini; ſemel quidem in ipſo medio termino, & bis in qualibet ſumma duorum à medio termino æqualiter diſtantium: ac proinde omnium terminorum ſumma ad ſemiſſem aggregati extremorum, hoc eſt, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator eſt numerus terminorum. Vt in hac ſerie nouem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc eſt, ſemiſſem ſummæ extremorum 6. & 30. toties, quot vnitates ſunt in 9. numero terminorum, id eſt, ſumma omnium terminorum ad 18. ſemiſſem ſummæ extremorum, ſiue ad medium terminum, proportionem habebit noncuplam. Eademq; in cæteris eſt ratio.

SVMMAM igitur omnium terminorum, proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar eſt, facile inueniemus, ſi ſemiſſem aggregati extremorum, (quod ſemper par eſt, quando terminorum numerus eſt impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac ſerie 11. terminorum.

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum eſt 134. Cuius ſemiſſis 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. ſummam omnium terminorum. Atq; hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus eſt par: ſed quando extremorum ſumma impar eſt (quando enim terminorum numerus eſt par, poteſt eſſe ſumma extremorum impar, non autem ſemper par) erit eius ſemiſſis numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus eſt par, habebit ſumma omnium terminorum ad ſummam extremorum vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, proportionem multiplicem à ſemiſſe numeri terminorum denominatam. Cum enim ſumma quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium æqualis ſit ſummæ extremorum, continebitur hæc ſumma extremorum toties in ſumma omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, ſemel nimirum in ſumma quorumlibet duorum ab extremis diſtantium æqualiter: atq; idcirco ſumma omnium terminorum ad ſummam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac ſerie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum ſummam extremorum 6. & 33. quæ eſt 39. continebit quinquies, hoc eſt ſumma omnium terminorum ad 38. ſummam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et ſic de aliis.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus par eſt, obtinebimus, ſi ſummam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit ſine fractione vnitatis, cum par ponatur) ducamus. Vt in hac ſerie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum eſt 57. quæ in 5. ſemiſſem numeri terminorum ducta efficit 285. ſummam omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus eſt impar; ſed ſemiſſis numeri terminorum ſemper erit integer cum $\frac{1}{2}$. cum numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur ſatis eſſe, vt ſumma inueniatur, ſi extremi termini, vna cum terminorum numero cogniti ſint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum, terminorum numero, atq; differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire poſſimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoſcamus, reperiemus alterum extremũ, hoc modo. Numerũ proxime minorem numero terminorũ in differentiã datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto

detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quæritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli cauſa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proxime minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoque 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifeſtum eſt, quorum differentia eſt 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si vero proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximo minor eſt, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perſpicuum eſt.

NECESSE autem eſt, ſi minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proxime minor eſt, in differentiam, maiorem eſſe maiore extremo cognito, vt ſubtractio fieri poſsit. Alioquin quæſtio erit inpoſsibilis: hoc eſt, fieri non poterit, vt datus numerus poſsit eſſe maius extremum in progreſsione vlla, cuius differentia, & numerus terminorum ita ſe habeant, vt proponitur. Vt ſi quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non poſſet inueniri minus extremum; propterea quod numerus 25. productus ex 5. qui proxime minor eſt terminorum numero, in differentiam 5. maior eſt dato maiore extremo 20. Quod ſi quando contingat; productum illum numerum maiori extremo eſſe æqualem, ita vt ſubtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæſtio poſsibilis, ſed minus extremum erit 0. Vt ſi in poſteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica.

0. 5. 10. 15. 20. 25.

IIII.

SI extremi termini noti ſint, vna cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proxime minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæſita. Vt ſi quis dicat, eſſe 10. terminos proportionalitatis cuiuſpiam Arithmeticæ, cuius numeri extremi ſint 7. & 52. Dempto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proxime minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progreſsioq; propoſita locum habeat in numeris integris, neceſſe eſt, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus poſsit numerari à numero, qui terminorum numero proxime minor eſt. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæſtio tamen erit poſsibilis. Vt ſi quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiſo per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc templo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi Vna cum differentia, noti ſint eliciemus numerum terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam ſi Quotienti adijciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæſitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiſo per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæſtio propoſita ſit poſsibilis, hoc eſt, vt vere in rerum natura exiſtat progreſsio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propoſitas, neceſſe eſt, maiore extremo ſubducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamſi addatur 1. Fieri enim non poteſt, vt detur progreſsio aliqua, cuius terminorum numerus non ſit integer.

VI.

SI duo extremi termini, vna cum omnium terminorum ſumma, noti ſint, explorabimus & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum ſummam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorũ numero, cum & duo extremi termini cogniti ſint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum eſt; ſi nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proxime minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si ſumma proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus ſummam 515. per 103. ſummam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, ſi dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proxime minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæſtio ſit poſsibilis, hoc eſt, vt re vera exiſtat aliqua progreſsio, in qua omnium terminorum ſumma, & duo extremi ita ſe habeant, vt proponitur, neceſſe eſſe, vt ſumma omnium terminorum data à ſumma extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, ſi Quotiens non ſit numerus integer: Vel certe, ſi ſumma omnium terminorum data à ſumma extremorum non numeretur, neceſſe eſſe, vt diuiſa ſumma omnium terminorum per extremorum ſummam, Quotiens ſit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere poſsit numerum terminorum integrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionẽ. Si vero extremorum proportio maior ſit quam dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quam tripla: Si deniq; minor ſit extremorum proportio quam dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quam tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. eſt dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. eſt dupla ſeſquialtera, nimirum maior quam dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla ſeſquitertia, minor videlicet, quam tripla. Hic deniq; 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionem habent ſupertripartientem quartas, quæ minor eſt quam dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam ſuperbipartientem tertias, hoc eſt, maiorem quam triplam.

VIII.

INTER quoſuis duos numeros conſtitues medium proportionalem Arithmetice, ſi eorum ſummæ accipias ſemiſſem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. ſumma eorum eſt 36. Huius ergo ſemiſſis 18. medio loco proportionalis eſt Arithmetice inter 6. & 30. vt hic manifeſtum eſt, 6.18.30. Itaq; ſi medius terminus conſtituendus ſit numerus integer, neceſſe eſt, vtrumq; numerorum datorum eſſe vel parem, vel imparem, vt videlicet ſumma extremorum ſemper ſit par, hoc eſt, vt poßit habere dimidium ſine fractione vnitatis. Nam quando ſumma extremorum impar eſt: quod accidit cum alter extremorum par eſt, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum ſemiſſe vnitatis. Vt datis numeris duobus 8.25. ſumma eorum eſt 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8.$16\frac{1}{2}$.25.

IX.

INTER quoſuis autem duos numeros conſtitues, quotquot quis iuſſerit, medios proportionales Arithmetice, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum de[illegible]e numerum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum conſtituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmeticæ, quam ſi minori numero propoſito adijcias, conflabis primum medium. Huic ſi eandem differentiam addas, conficies ſecundum, & ſic deinceps. Vel ſi eam differentiam à maiori numero propoſito ſubtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo ſi eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & ſic deinceps. Veluti ſi inter 6. & 114. conſtituendi ſint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proxime maior eſt numero mediorum conſtituendorum) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo ſe habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunq; tales duo numeri proponuntur, inter quos non poſſunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quod inuentus Quotiens pro differentia non ſemper numerus integer eſt; ſi fractiones vitare velis, neceſſe eſt, duos propoſitos numeros eſſe eiuſmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proxime maior eſt numero mediorum conſtituendorum, numeretur: quos ita facile reperies. Accipe pro minore extremo quemcunq; numerum, eumque adde cuicunq; alij numero, quem numerus proxime maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt ſi velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmetice, primus autem ſit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proxime maior eſt numero mediorum conſtituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficieſq; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum eſt, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD ſi quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus, & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, ſi numerum proxime maiorem numero mediorum conſtituendorum per datam differentiam multiplices, numeroq; producto minus extremum addas. Vt ſi quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum conſtituere 9. terminos medios, quorum differentia ſit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifeſtum eſt.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione conſtitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumq; datorum numerorum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum conſtituendorum: Quotientes ſub illis colloca, quemq; ſub ſuo, & ab eiſdem Quotientibus aſcende per continuam eorum additionem, addendo primo quemq; ad ſeipſum deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas inſtituas à Quotientibus incipientes, & per eoſdem progredientes, tot terminorum, (excluſis datis duobus numeris) quot medij termini deſiderantur. Poſtremo adde ſingulos terminos vnius ordinis ſingulis terminis aduerſis alterius ordinis, id eſt, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde ſub illo, proximo ſupra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. conſtituendi 4. medij termini Arithmetice proportionales. Vtroq; diuiſo per 5. hoc eſt, per numerum proxime maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Conſtitues ergo hos ordines 4. terminorum ſub 15. & 100. Arithmetice proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primum 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rurſus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. ſupremo primi ordinis, & infimo 20. ſecundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro ſecundo medio. Ex 6. & 60. fiunt 66. pro tertio medio. Deniq; ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaq; in primo ordine ſemper deſcendendum eſt à ſupremo ad infimum vſque, in ſecundo vero ab infimo ad ſupremum vſq; aſcendendum.

EST autem dignum conſideratione, differentiam Quotientum, qui ſunt minimi numeri duorum ordinum conſtitutorum, eſſe quoq; differentiam proportionalitatis conſtituendæ. Ita vides differentiam in propoſito exemplo eſſe 17. quæ differētia

etiam eſt inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, ſi minor à maiore ſubtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adijciatur, & huic compoſito numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, conſtituentur ijdem termini medij, etiamſi duo illi ordines non inſtituantur.

VIDES *ergo, vtrumque numerum propoſitum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate ſuperat, ſi fractiones euitandæ ſint: Vel certe inueniendos eſſe duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoq; vitantur, etiamſi eos numerus numero mediorum proxime maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, ſemper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. conſtituendæ ſunt 9. termini medij. Si igitur vterq; per 10. diuidatur, fiunt Quotientes* $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. *hoc eſt,* $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. *quorum differentia eſt 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperientur, ſi per quotientes* $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. *duo ordines inſtituantur aſcendentes, vt dictum eſt, per ipſorum Quotientum additionem continuam, &c.*

X.

NVMERVM *quemlibet propoſitum diſtribuemus in partes, quotquot quis iuſſerit, proportionalitatem Arithmeticam ſeruantes, hac ratione. Diuiſo dato numero per ſemiſſem numeri terminorum, ſecabimus Quotientem in duas partes inæquales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati ſunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurq; reliquum numerum per numerum proxime minorem numero terminorum. Ita namq; prodibit in Quotiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hac differentia addatur minori extremo aſſumpto, deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, conſtituetur numerus terminorum datus, quorum ſumma propoſito numero æqualis eſt: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmetice proportionalium ſectus erit. Exempli cauſa, ſi numerus 830. diſtribuendus ſit in 10. partes proportionales Arithmetice; partiemur eum per 5. ſemiſſem terminorum, Quotientemque 166. ſecabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis conſtituendæ. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerum proxime minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum eſt) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides.*

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

RVRSVS *ſi numerus 10. diuidendus ſit in 10. partes proportionales Arithmetice, diuidemus eum per 5. ſemiſſem terminorum. Quotientem vero 2. in duas partes inæquales ſecabimus* $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. *pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo* $\frac{1}{2}$. *ex maiore* $1\frac{1}{2}$. *partiemur reliquam 1. per 9. numerum proxime minorem numero partium conſtituendarum. Quotiens enim* $\frac{1}{9}$. *differentia erit continue addenda minori extremo* $\frac{1}{2}$. & *numero conflato, &c. Quæ additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum* $\frac{1}{2}$. & *differentiam* $\frac{1}{9}$. *ad eandem denominationem, vt ad* $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. *Sic ergo diuiſus erit numerus 10. in 10 partes Arithmetice proportionales, quarum prima eſt* $\frac{1}{2}$. *ſiue* $\frac{9}{18}$. *vltima vero* $1\frac{1}{2}$. *ſiue* $1\frac{9}{18}$. & *differentia* $\frac{2}{18}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{3}{18}$. $1\frac{5}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{9}{18}$.

CERTVM *autem eſt, hac ratione variis modis datum numerum diuidi poſſe in propoſitum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diuiſo dato numero per ſemiſſem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inæquales pro terminis extremis ſectus fuerit.*

IDEM *efficiemus hac ratione. Numero dato, ac ſi eſſet ſumma omnium terminorum conſtituendorum, diuiſo per numerum terminorum datum, dabit quotiens duplicatus ſummam extremorum: propterea quod huius extremorum ſummæ ſemiſſis, id eſt, Quotiens inuentus ductus in numerum terminorum, hoc eſt, in diuiſorem, producit ſummam omnium terminorum, nimirum datum numerum, vt in ſecunda regula dictum eſt. Quare ſi Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales ſecemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proxime minorem numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam ſi ad minus extremum factum adijciamus, & iterum ad conflatum numerum, & ſic deinceps, conſtituta erit proportionalitas Arithmetica, quæ imperatur. Veluti, ſi numerus 198. ſecandus proponatur in 9 partes Arithmetice proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. ſummam extremorum. Conſtituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. ſi detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proxime minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo ſtabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes ſummam 198.*

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

HIC *etiam manifeſtum eſt, variis modis datum numerum diſtribui poſſe in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem ſummam eſſe diximus extremorum, in alias atq; alias partes binas ſectus fuerit pro extremis duobus terminis.*

SED *fortaſſe facilius (quamquam operatio aliquanto longior ſit) idem hoc abſolues hac ratione, Cape tot numeros Arithmetice quomodocunque proportionales, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & ſingulos in datum numerum duc, procreatoſque numeros per ſummam omnium terminorum ſumptorum ex 2. regula inuentam, partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticę. Sume 10. numeros Arithmetice proportionales quoſcunque, 4.7.10.13.16.19.22.25.28.31. quorum ſumma eſt 175. Ductis autem ſingulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100.3675.5250.6825.8400.9975.11550.13125.14700.16275. quibus ſingulis diuiſis per ſummam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur hæ 10. partes, quas quæris.*

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM *obtinebis, ſi datum numerum per aſſumptorum numerorum ſummam partiaris, Quotientemque in ſingulos aſſu-*

aſſumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, ſi datus numerus 525. diuidatur per 175. ſummam aſſumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in ſingulos numeros aſſumptos, 4. 7. 10. &c. gignentur eædem partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

VT autem operatio fiat facilior, ac breuior, ſatis eſt, priores duos numeros proportionalitatis acceptæ multiplicare per datum numerum, productosq; numeros per ſummam omnium terminorum eiuſdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel ſatis eſt, dato numero per ſummam aſſumptorum numerorum diuiſo, Quotientem in duos priores aſſumptos numeros ducere. Ita enim reperientur primæ duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & ſic deinceps. Liquido autem hic quoq; conſtare puto, datum numerum variis modis diſtribui poſſe in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout ſcilicet alij atq; alij numeri eiuſdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint aſſumpti, vel quorum alia atq; alia ſit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim eaſdem proportiones inter ſe, quæ inter terminos proportionalitatis aſſumptos eodem ordine reperiuntur. Perpetuo autem ſinguli numeri acceptæ proportionalitatis ad ſingulas partes inuentas, primus ad primam, ſecundus ad ſecundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. eſſe proportionem ſupertripartientem quartas, qualis eſt inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorſus proportionem, nimirum ſubtriplam.

ITAQVE, ſi accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus ſit differentia omnium terminorum, habebunt primæ partes duplam quoq; proportionem, atq; ideo prima erit quoq; differentia, ex cuius additione aliæ partes coaceruentur. Vt ſi in ſuperiore exemplo accepiſſes hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6, 7. 8. 9. 10. quorum ſumma eſt 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum ſumma eſt 165. multiplicaſſeſq; primum quemq; in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per ſummam quamlibet propriam, vt priorem per 55. & poſteriorem per 165. diuiſiſſes, inueniſſes primam partem $9\frac{6}{11}$. quæ eadem eſſet differentia. Quare partes omnes 10. conſtituentes proportionalitatem Arithmeticam fuiſſent hæ.

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$. $66\frac{9}{11}$. $75\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibuſuis duobus numeris, ſi denominatorem proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore, hoc eſt, ſi diuiſo maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtroq; dato maiorem. Et ſi eundem denominatorem, ſiue Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atq; ita deinceps conſtitues infinitos alios ſemper maiores, ſi denominatorem, Quotientemue per vltimum inuentum ſemper multiplices. Vt datis duobus numeris 4 12. denominator proportionis 12. ad 4. eſt 3. quod diuiſis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & ſic in infinitum, conſtitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum poteſt extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

QVOD ſi minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id eſt, diuiſo minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem eſt, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroq; minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem & ſic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. eſt $\frac{1}{2}$. quod diuiſis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. Denominator autem proportionis 16. ad 8. eſt 2. quod diuiſis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuiſis 8. per 2. idemq; cum producto numero facias, conſtituetur hæc proportionalitas Geometrica, progrediens quoq; in infinitum verſus minores numeros, ſicut illa in infinitum verſus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$.

EXTENDETVR quoq; eadem proportionalitas in infinitum, etiamſi denominator proportionis ignotus ſit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in ſe, & productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroq; maior. Hunc ſi iterum in ſe ducas, productumq; per proxime præcedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum & ſic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in ſe, fit 36. quo diuiſo per 3. fit 12. tertius terminus. Rurſus ducto 12. in ſe, fit 144. quo diuiſo per 6. fit 24. quartus terminus, atq; ita in infinitum., vt hic vides 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, ſi minorem in ſe duxeris, productumq; per maiorem diuiſeris, dabit Quotiens tertium terminum vtroq; minorem. Quem ſi rurſus in ſe duxeris, productumq; per proxime præcedentem terminum diuiſeris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & ſic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in ſe, fit 36. quo diuiſo per 18. fit 2. tertius terminus. Rurſus ducto 2. in ſe fit 4. quo diuiſo per 6. fit $\frac{4}{6}$. ſiue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris pro quarto termino: atq; ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM vero ſi quamcunq; proportionem non multiplicem (in multiplici enim, ſi regulam præſcriptam ſequaris, nulla eſt difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continue proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot, inquam, cape terminos, quot in propoſita propor-

Proportionalitate non multiplici terminos deſideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo ſi multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atq; ita deinceps, conſtitues terminos optatos. Vbi hoc eſt mirabile, ſi termini imperati hac via reperiantur, non poſſe vltra terminos propoſitos proportionalitatem extendi ſine fractione. Verbi gratia, ſi inueniendi ſint 7. termini proportionis ſeſquialteræ: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, eſt 2. ſumendi ſunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet 1.2.4.8.16.32.64. Si ergo à 64. incipias, conſtitues 7. terminos proportionalitatis ſeſquialteræ, & non plures, hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facile hi termini, ſi ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad ſecundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoq; ſi deſiderentur 6. termini proportionis duplæ ſuperbipartientis quintas, accipiendi ſunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quintarum, qui eſt 5. videlicet. 1.5.25.125.625.3125. Nam ſi ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione dupla ſuperbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

QVI termini facile reperientur, ſi duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adijcias, & rurſus $\frac{2}{5}$. ſecundi iam facti ad eundem ſecundum duplicatum, &c. Atq; numeri hac via inuenti ſemper minimi ſunt in ſua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis ſint, ſit prorſus impoſſibile: niſi fractiones admittere velimus. Facilius iidem termini reperientur, ſi inuentis duobus minimis terminis in data proportione, per maiorem multiplicetur primus ex illa proportione multiplici inuentus, & productus per minorem diuidatur. Ita enim ſecundus terminus reperietur. Qui ſi rurſus ducatur in maiorem minimorum terminorum, & productus per minorem diuidatur, inuenietur tertius terminus; & ſic deinceps. Vt in poſteriori exemplo, minimi termini proportionis duplæ ſuperbipartientis quintas ſunt 5. & 12. Si igitur ſextum 3125. proportionis quintuplæ, qui debet eſſe primus ſex terminorum quæſitorum, ducatur in 12. & productus 37500. per 5. diuidatur, prodibit ſecundus terminus 7500. qui ſi rurſus in 12. ducatur, & productus 90000. per 5. diuidatur, producetur tertius terminus 18000. &c. In proportione porro multiplici quacunq; minimi termini quotcunq; perpetuo incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla ſunt hi, 1. 4. 16.

II.

Quando numerus terminorum continue proportionalium impar eſt, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter ſe, æqualis eſt numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium multiplicatione inter ſe creatur, & ei quoq; qui ex medio in ſe ipſum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis ſeſquialteræ.

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quam ex 24. in 54. & ex 36. in ſe, procreatur numerus 1296.

Quando autem proportionalium terminorum numerus eſt par, etiamſi non continue ſint, proportionales, dummodo bini continuam proportionem interrumpentes habeant vnam eandemq; inter ſe proportionem, hoc eſt, dummodo ſecundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon ſextus & ſeptimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) ſint quoque non continue proportionales, in diuerſa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad ſecundum, & tertius ad quartum, & quintus ad ſextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus eſt par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus ſemper æqualis eſt numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium inter ſe gignitur. Vt hic in 6. numeris duplæ proportionis continuæ.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem ſemper numerus 288.

Item in hac ſeſquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemq; proportionem. videlicet triplam, quæ à ſeſquitertia diuerſa eſt.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC *ſequitur, quando terminorum numerus impar eſt, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio diſtantium multiplicatione inter ſe procreatum, eſſe quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in ſeipſum producitur; numeruſque ipſum producens latus eius, ſiue radix appellatur.) cuius radix, ſiue latus eſt medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in ſeipſum; ac proinde medius eius radix quadrata eſt. Numerum vero ex tribus inter ſe multiplicatis productum, quorum duo ſunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, eſſe cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in ſeipſum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in ſe ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, ſiue radix cubica appellatur) cuius latus, ſiue radix eſt medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in ſe cubice ducto, hoc eſt, primum in ſe, deinde in productum ex alijs duobus inter ſe multiplicatis. In ſe enim facit productum ex aliis duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.*

SEQVITVR *quoque, quando ſunt 4. numeri ſiue continue, ſiue non continue proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri ſe mutuo multiplicare continue, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & ſic deinceps, donec omnes numeri*

ſint

ſint multiplicati) eſſe quadratum cuius latus, ſiue radix eſt numerus ex primo in quartum, vel ex ſecundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter ſe idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum ſi in productum ex ſecundo in tertium (qui producto ex primo in quartum æqualis eſt) multiplicetur. Quando autem ſunt 6. numeri ſiue continue, ſiue non continue proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes ſint quoq; non continue proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter ſe, cuius radix, latuſue eſt numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium productus: qui videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter ſe multiplicatis, in ſe cubice multiplicato: hoc eſt, ſemel in ſe, nimirum in productum ex duobus, qui ſunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus mediis: quippe cum tres hi numeri producti ſint inter ſe æquales.

III.

SI, propoſitis quotcunq; terminis continue proportionalibus, minus extremum à maiore ſubtrahatur, & reliquus numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propoſitorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus eſt) diuidatur, Quotiens denique maiori extremo adijciatur, conflabitur ſumma omnium terminorum. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiſo per 2. per numerum ſcilicet vna vnitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proxime antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui ſi addatur maius extremum 13122. fit ſumma omnium 19682. Item in hac ſeſquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiſo per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor eſt denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum ſumma 3367.

Itaq; vt vides, ad explorandam ſummam quotcunq; terminorum proportionalitatis Geometricæ ſatis eſt, ſi duo extremi cognoſcantur, vna cum proportionis denominatore. Quo vero artificio inueſtigandus ſit vltimus terminus cuiuſuis proportionalitatis Geometricæ quotcunq; terminorum, etiamſi medios numeros ignoremus, copioſe tradidimus in progreſsionibus in noſtra Arithmetica practica, vt ſuperuacaneum ſit, ea hoc loco repetere.

IV.

Propoſitis quotlibet numeris ſe mutuo æqualiter ſuperantibus, id eſt, Arithmetice proportionalibus; ſi totidem alij numeri ſumantur habentes eaſdem proportiones, quas illi eodem ordine ſumpti; ſuperabunt ſe quoq; poſteriores hi numeri æqualiter, hoc eſt, erunt Arithmetice proportionales, ſicut illi. Vt ſi ſex hi numeri, 4. 7. 10. 13. 16. 19. Arithmetice proportionales proponantur, ſumanturq; alij ſex cum iiſdem proportionibus, cuiuſmodi ſunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. comperies ipſos quoq; Arithmetice eſſe proportionales; quippe cum habeant differentiam 15. Sed caue putes, hanc proprietatem poſſe conuerti: Neque enim ſi dentur quotuis numeri Arithmetice proportionales, & totidem alij Arithmetice quoq; proportionales ſumantur, etiamſi vtrobiq; eadem ſit differentia, neceſſario hi illis proportionales erunt. Id quod perſpicuum eſt in hiſce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. habent proportionem duplam, at poſterioris duo primi 3. 5. ſuperbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in poſteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet ſeſquialteram proportionem, ſecundus autem 5. ad ſecundum 4. ſeſquiquartam, &c.

V.

Duobus quibuſuis numeris datis, ſi eorum alterutro in quotlibet partes diſtributo, ſingulæ partes in alterum ducantur, & ſinguli numeri producti per priorem numerum diuidantur, conſtituent omnes Quotientes ſimul ſumpti poſteriorem numerum, habebuntq; ordine eaſdem omnino proportiones inter ſe, quas partes prioris numeri inter ſe eodem ordine habent: at ſinguli Quotientes, ſiue partes poſterioris numeri ad ſingulas partes prioris, vt prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, &c. vnam eandemq; prorſus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 285. ſi prior ſecetur in partes, quæ ſimul additæ ipſum conficiant, 2. 5. 10. 40. & earum quælibet in poſteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus ſigillatim per numerum priorem 57. diuiſis, fiunt Quotientes, 10. 25. 50. 200. qui in vnam collecti ſummam conſtituunt poſteriorem numerum 285. habentq; eaſdem proportiones, quas habent partes 2. 5. 10. 40. nimirum duplam ſeſquialteram, duplam, & quadruplam: ſinguli vero ad ſingulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

Eaſdem partes numeri poſterioris obtinebis, ſi eum per priorem, qui in partes diſtributus eſt, partiaris, Quotientemque factum in ſingulas partes eiuſdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiſo numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2. 5. 10. 40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ, 10. 25. 50. 200. vt prius.

Hinc facile elicitur, quo pacto duo quilibet numeri ſecandi ſint in partes componentes ipſis numeris æquales, ita vt partes vnius ſint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriuſq; numeri inter ſe, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio diſtribuendi numerum propoſitum in quotuis partes Arithmetice propor-

proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præſcripſimus. Nam ſumptis totidem numeris Arithmetice proportionalibus, erit eorum ſumma, numerus in illos, tanquam in partes ipſum componentes, diuiſus. Quare ſi ſingulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per ſummam illam diuidantur; Vel ſi per aſſumptorum numerorum ſummam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in ſingulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propoſiti in eiſdem proportionibus. Quare Arithmetice quoq; proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifeſtum eſt.

VI.

QVOTLIBET numeris continue proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continue quoq; in eadem proportione proportionales. Vt in appoſito exemplo tam numeri, quam eorum differentiæ, habent continuam proportionem ſeſquialteram.

Differentiæ.	32	48	72	108	162	243	
	64	96	144	216	324	486	729

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod ſequitur, habent & numeri, & eorum differentiæ, duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum ſunt differentiæ. Id quod ſoli proportioni duplæ cuicunq; accidit: quia in ea quilibet numerus maior proxime præcedentem minorem ſuperat ipſomet numero proxime antecedente, cuius duplus eſt, hoc eſt, quem bis continet.

Differentiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896	
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunq; numeris continue proportionalibus, ſi eorum ſumma per eos ſigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continue proportionales. Et ſi Quotientum ſumma per ipſos Quotientes ſigillatim diuidatur, creabuntur ijdem prorſus Quotientes ordine conuerſo: atq; ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientum æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, vel deniq; ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio in ſe ipſum ducto. Quod ſane incredibile videri poßit. Exempli cauſa. Si dentur hi 4. numeri continue proportionales in proportione dupla 3. 6. 12. 24. ſi eorum ſumma 45. per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. conuerſo ordine in eadem proportione dupla continue proportionales. Et ſi per hoſce Quotientes diuidatur eorum ſumma $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerſo ijdem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipſa vero ſumma $28\frac{1}{8}$. æqualis eſt numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. ſi eorum ſummam partiemur per eos ſigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum ſumma $180\frac{61}{81}$. producitur vel ex 121. in $1\frac{40}{81}$. vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{13}{27}$. vel deniq; ex $13\frac{4}{9}$. in ſeipſum. Vbi duo conſideratione ſunt digna. Primum, quando terminorum numerus eſt impar, ſumam Quotientum eſſe numerum quadratum, cuius radix eſt medius terminus: quippe qui ex medio termino in ſeipſum ducto procreetur, vt dictum eſt. Deinde, eoſdem ſemper Quotientes gigni ex diuiſione ſummæ quotcunq; terminorum proportionis eiuſdem continuæ, quantumuis termini illi ſint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem ſemper ſit. Veluti, ſi ſint tres termini continue dupli, ſiue magni, ſiue parui, erunt perpetuo hi Quotientes, 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. Si ſint quatuor, hi Quotientes erunt, 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. In quinq; numeris continue triplis, erunt hi ſemper Quotientes, 121. $40\frac{1}{3}$ $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. Ac deniq; in quinq; numeris continuam proportionem ſeſquialteram habentibus reperientur hi Quotientes. $13\frac{3}{16}$. $8\frac{19}{24}$. $5\frac{31}{36}$. $3\frac{49}{54}$. $2\frac{49}{81}$.

EX hac proprietate inueniemus quotcunq; terminos in data proportione continue proportionales, quorũ ſumma æqualis ſit numero, qui fit ab extremis inter ſe multiplicatis, vel ex duobus mediis quibuslibet æqualiter diſtantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in ſeipſum ducto, ſi numerus terminorum fuerit impar. Nam ſi ſumantur tot termini in data proportione continue proportionales, quot inueniendi ſunt, ſiue magni, ſiue parui, eorumq; ſumma per eoſdem ſeorſum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui deſiderantur. Quod ſi ſumma debeat eſſe numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar ſit, & dato numero terminorum impari æqualis, &c. Quæ res miraculi inſtar quodammodo cenſeri poßit, dari poſſe in data proportione, quotquot quis iuſſerit, terminos continue proportionales, quorum ſumma ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini ſint numeri integri: & in aliis etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, niſi hi numeri Quotientes ſint producti ex diuiſione ſummæ alicuius quotcunq; terminorum continue proportionalium, per ipſos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo ſatisfaciemus quæſtioni, ſi quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum ſumma æqualis ſit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterum procreato. Nam ſi ſumantur quilibet duo numeri in proportione data, atq; eorum ſumma per eoſdem ſigillatim diuidatur, ſatisfiet quæſtioni propoſitæ per Quotientes inuentos. Vt ſi cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla ſuperbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datam habentes, vel alios quoſuis. Summa etenim priorum 38. diuiſa per 29. & 9. vel poſteriorum ſumma 114. per 87. & 27. diuiſa dabit Quotientes, $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerſo, & quorum aggregatum eſt $5\frac{139}{261}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$. in $4\frac{2}{9}$. gignitur.

VIII.

INTER duos quoſcunq; numeros conſtituemus medium Geometrice proportionalem, ſi eos inter ſe multiplicemus, & procreati

procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterum fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplã, qualem etiam habent 24. ad 6. Itaq; ſi inter datos duos numeros conſtituendus ſit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi poſſit, neceſſe eſt, vt numerus ex vno in alterum productus ſit quadratus. Niſi enim quadratus ſit, non habebit radicem in numeris, ſed eius radix erit numerus, quem Arithmetici ſurdum, vel irrationalem vocant, explicantq; hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidem numeris exprimi nequit, eſſe medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, quæ quidem radix maior eſt, quam 7. cum huius quadratum ſit 49. minor vero quam 8. cum huius quadratum ſit 64. Neq; vero numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius eſt inter 7. & 8. radix eſſe poteſt, etiamſi vnitas in infinitum cogitetur eſſe diuiſa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonſtrabimus, cuiuſmodo non eſt numerus 63.

7.	R. q. 63.	9.

IX.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos ſinguli cadant medij Geometrice proportionales, aſſequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunq;, quorum ſecundus primi ſit quintuplus, & tertius eiuſdem primi ſeptuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmetice proportionales, & primus numerus acceptus in ſecundum ductus producet medium proportionalem Geometrice inter primum quadratum, & ſecundum, in proportione primi aſſumpti numeri ad ſecundum, ſecundus vero numerus aſſumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter ſecundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter ſe habent ſecundus ac tertius numerus aſſumptus. Id quod perſpicue in hoc exemplo apparet.

Tres num. aſſump.	Primus. 8.		quintup. pri. 40.		Septup. pri. 56.
Quad. Arit. pro.	64		1600		3136.
Medij Geomet.		320		2240	

Differentia enim trium quadratorum eſt 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui ſe æqualibus differentijs mutuo ſuperent, ſi pro radicibus eorum ſumes tres numeros, quorum ſecundus ſit primi quintuplus, & tertius eiuſdem primi ſeptuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato, reperientur alij duo maiores cum illo conſtituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati ſtatuatur primus numerus, & alij duo numeri ſumaatur, quorum alter illius radicis ſit quintuplus, & ſeptuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt ſi detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus, ſecundus, 40. & tertius. 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmetice proportionalibus, ſi eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, ſi quam habent, diuidas, erunt producti quoq; numeri, aut Quotientes Arithmetice proportionales, inter quorum binos ſinguli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur; qui medij reperientur eodem modo, ſi nimirum medij inter quadratos inuentos per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt ſi ſuperiores quadrati, vna cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128		3200		6272
Medij Geometr.		640		4480	

SI vero diuidantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (ſunt autem quælibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arithmet. proportio.	8		200		392
Medij Geometr.		40		280	

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti eaſdem ſemper proportiones, quas quadrati, eorumq; medij inter ſe habent. Quod ſi hos 8. 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios 2. 50. 98. Arithmetice proportionales, inter quos cadunt Geometrice medij, 10. & 70. Et ſi deniq; hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometrice ſunt, 5. & 35.

Vbi hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunq; inter tres numeros Arithmetice proportionales, ſiue quadrati ſint, ſiue non, cadunt duo medij Geometrice proportionales, vnus inter primum & ſecundum, & inter ſecundum ac tertium alter, quadratum prioris medij, & quadratum ſecundi numeri Arithmeticæ proportionalitatis, & quadratum poſterioris medij conſtituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in poſteriori exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum, 40. 200. 280. ſunt 1600. 40000. 78400. Arithmetice proportionales, habentes differentiam eandem communem 30400. & ſic de cæteris.

X.

Inter quoſcunq; duos numeros reperiemus quotcunq; medios continue proportionales, iucunda ſane, & artificioſa operatione; quam vt planius explicem, dicenda pauca ſunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex ſuis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, ſecundus terminus radix eſt omnium numerorum inſequentium. Ea enim radix bis poſita, atq; ita in ſe ipſam ducta producit tertium terminum, qui eſt numerus quadratus, radixq; ipſa quadrata dicitur. Eadem radix ter poſita, & primum in ſe, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus eſt,

bus eſt, & propterea radix eius cubica appellatur. Deniq; ſi eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in ſe, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productum, fiet quintus terminus: Et ſi ponatur quinquies, ſiantq; quatuor ordine multiplicationes, orietur ſextus terminus, atq; ita in infinitum: Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & ſignari, non eſt huius loci declarare, ſed ad Algebram tota hæc res ſpectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruendæ ſint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus, notandæ ſunt tres infra ſcriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ ſunt Arithmeticæ, nimirum duæ ſeries naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoq; initium ducens. Vbi perſpicue apparebit, quàm egregium vſum habeat ſeries numerorum naturalis in re propoſita.

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri ſignificantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. propor.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum conſtituendorum, ſecunda numeros, qui ſignificant genera radicum, hoc eſt, quoties terminus ſecundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium inſequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatos numeros proportionalitatis Geometricæ illis reſpondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis ſignificat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix eſt omnium aliorum, ſemel poſitum non eſſe multiplicandum, ſed ipſummet eſſe radicem omnium ex nulla ſui multiplicatione productum. At numerus 2. eiuſdem ſecundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis poſitam bis hoc modo, 2 2. & ita in ſe multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiuſdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis poſitam ter hoc modo, 2.2.2. atq; ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco poſita in eandem 2. poſitam ſecundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio poſitam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ ſub numero 3. ordinis ſecundi. Idem dices de alijs. Vt verbi gratia numerus 7. ſecundæ proportionalitatis monſtrat, radicem eandem 2. tertij ordinis poſitam ſepties, hoc pacto, 2.2.2.2.2.2.2. & in ſe continue ſexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. ſuppoſitum, Nam ex 2. primi loci in 2. ſecundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex 32. in 2. ſexti loci fiunt 64. & deniq; ex 64. in 2. ſeptimi loci fiunt 128. &c. Atq; hoc non ſolum verum eſt in propoſita proportione continua dupla, ſed in omnibus alijs ab vnitate incipientibus, quicunq; numerus ſecundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

Itaq; ſi conſtituere vis quotlibet medios inter duos propoſitos numeros, cape numerum mediorum conſtituendorum in primo ordine. Nam ex vtroq; numero dato extrahenda eſt radix, quæ toties ordine poſita, & continue multiplicata vtrumq; producat, quot vnitates continentur in numero ſecundi ordinis, qui infra numerum mediorum conſtituendorum in ſupremo ordine acceptum ſcriptus eſt. Radices inuentas ſub datis numeris colloca, quamq; ſub ſuo, & ab eiſdem aſcende per continuam vtriuſq; multiplicationem, (ducendo primum quamq; radicem in ſe, deinde in numerum productum, & ſic deinceps.) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices inſtituas à radicibus incipientes, & ab eiſdem denominatas, tot terminorum, (excluſis datis duobus numeris) quot medij termini quæruntur. Poſt hæc ſingulos terminos vnius ordinis duc in ſingulos terminos alterius ordinis aduerſos, & oppoſitos, hoc eſt, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde ſub illo in proximum ſupra hunc, &c. Ita vt in vno ordine ſemper deſcendas à ſupremo ad infimum vſq;, in altero vero ab infimo vſq; ad ſupremum aſcendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli cauſa, ſi inter 9. & 144. inueniendus ſit vnus terminus medio loco proportionalis, ſumemus in primo ordine 1. & ſub hoc termino in ſecundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroq; numero dato eruendam eſſe radicem quadratam, quæ videlicet bis poſita, per eius multiplicationem vtrumq; producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ ſunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus deſideratur, non ſunt inſtituendæ proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant, ſed ipſe radices inter ſe multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. Vt hic vides, 9.36.144. Sic etiam ſi inter 18. & 288. conſtituendus ſit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, ſignabimus priorem hoc modo, R.q.18. poſteriorem autem ſic. R. q. 288. Hæ autem radices inter ſe multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum eſt, duos numeros, quorum neuter poteſt efferri, inter ſe multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonſtratio ex lib. 10. petenda eſt. Quo pacto autem inter ſe multiplicandi ſint duo numeri ſurdi, qui nimirum efferri non poſſunt, quales ſunt R. q. 18. & R.q.288. docebimus in Algebra.

Rurſus ſi dati ſint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij conſtituendi ſint accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine ſecundo ſubſcribitur numerus 4. Igitur ex vtroq; dato numero extrahenda eſt radix, quæ quater poſita, & continue multiplicata vtrumq; producat, quæ quadrati quadrata, vel Zenſizenſica dici ſolet, cuiuſmodi in dato exemplo ſunt 2. & 5. Conſtitues ergo hos ordines trium terminorum ſub 16. & 625. Geometrice proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eiſdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. ſupremo primi ordinis in 5. infimum ſecundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio ſecundo. Deniq; ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCITV autem dignum eſt, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita eſſe 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100.

& 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, ſi maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator eſt proportionis radicum inuentarum, multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rurſum per eundem Quotientem multiplicetur, atq; ita deinceps, conſtituentur inter duos extremos datos medij termini ijdem, etiamſi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non inſtituantur. Vt in exemplo dato. Diuiſa radice 5. per radicem 2. ſit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et ſi rurſus ducas 40. in $2\frac{1}{1}$. procreabis 100. ſecundum medium: Et deniq; ſi 100. ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertium medium.

Perſpicuum autem eſt, inter datos quoslibet numeros non ſemper conſtitui poſſe numerum terminorum propoſitum, qui ſint rationales: propterea quod dati numeri non habent ſemper illas radices, quæ extrahendæ ſunt: aut certe non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus eæ radices poſſunt extrahi, quod etiam ſatis eſſet. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadrati quadratas, hoc eſt, quæ quater poſitæ eos ſuis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoq; inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales ſunt, licet non habeant ſimiles radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet, 48. 120. 300. 750. 1875.

Quamobrem ſi quis deſideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi ſunt duo numeri quomodocunq; datam habentes proportionē. Eorum enim vterq; ſi toties ponatur, quot termini medij quærendi ſunt, & adhuc ſemel, & continue multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medij termini conſtituentur eo modo, quem expoſuimus; hoc eſt, vel inſtituendo ſub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas aſſumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ eſt inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, ſi quis velit duos numeros, inter quos conſtitui poßint quatuor termini medij rationales in proportione ſuperbipartiente tertias, cuius denominator eſt $1\frac{2}{3}$. ſumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem ſuperbipartientem tertias, & vtrumq; quinquies ponemus hoc modo, 6. 6. 6. 6. 6. & 10. 10. 10. 10. 10. Ex multiplicatione enim continua vtriuſq; exiſtent hi numeri 7776. & 100000. inter quos conſtitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis ſuperbipartientis tertias in minorem numerum inuentum 7776. & iterum in numerum productum, &c.

X I.

Numerum quemcunq; datum diſtribuemus in quotuis partes proportionales Geometrice in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continue proportionales in data proportione ſiue minimos ſiue non minimos, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & per eorum ſummam datum numerum partire. Quotiens namq; per ſingulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri ſeruantes datam proportionem inter ſe. Veluti ſi datus numerus 756. ſecandus ſit in 6. partes continue proportionales in proportione dupla; ſi ſumantur 6. termini continue dupli, 3. 6. 12. 24. 48. 96. quorum ſumma eſt 189. & per hanc ſummam datus numerus 756. diuidatur, Quotiens autem 4. per ſingulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continue dupli, conficienteſq; ſimul in vnam ſummam collecti datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eædem partes inuenientur, ſi ſumantur hi alij 6. numeri continue dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. quorum ſumma eſt $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. quorum ſumma eſt 6300. Nam datus numerus 756. diuiſus per ſummam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. diuiſus per poſteriorem ſummam 6300. facit Quotientem $\frac{750}{6300}$. qui ductus in primum numerum aſſumptum 100. producit eandem partem primam 12. & ſic de cæteris.

Quod ſi cupias numerum, qui ſecari poßit in quotuis partes proportionales ſine vlla fractione, (Nam niſi ſeruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunq; in fractiones) aſſequeris propoſitum, ſi ſumas quemcunq; numerum multiplicem ſummæ totidem terminorum proportionalium aſſumptorum. Vt ſi quis quærat numerum, qui poßit diſtribui in 5. numeros integros ſeſquialteram proportionem continuam habentes; ſumptis 5. terminis in ſeſquialtera proportione continue quibuſcunq;, vt 64. 96. 144. 216. 324. quorum ſumma eſt 844. accipiemus huius ſummæ quemcunq; numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per præceptum traditum ſecabitur in 5. numeros integros proportionis ſeſquialteræ continuæ, cum eo diuiſo per ſummam acceptorum numerorum, Quotiens neceſſario ſit numerus integer.

Hinc nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, qua iubeamur in data proportione continua reperire quotuis numeros qui in vnam ſummam collecti conſtituant numerum quemcumq; datum. Nam ſi datus numerus ſecetur in tot partes proportionales datæ proportionis, vt docuimus, ſoluta erit quæſtio. Vt ſi quis inuenire velit 4. numeros triplæ proportionis continuæ, quorum ſumma ſit 100. ſecandus erit hic numerus 100. in 4. numeros proportio[illegible] triplæ, vt in $2\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{2}$. $22\frac{1}{2}$. $67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quòd ſi conficere debeant ſummam 400. erunt numeri quæſiti in tripla proportione continua hi. 10. 30. 90. 270. Horum enim ſumma eſt 400. Si deniq; ſummam conficere debeant non ſuperantē 1. erunt huiuſmodi numeri, $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$. $\frac{27}{40}$. Summa enim horum eſt $\frac{40}{40}$. hoc eſt, 1.

DE PROPORTIONALITATE HARMONICA.

I.

Tres numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuſcunq; ſi primus in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium multiplicetur. Vt ſubiecta exempla demonſtrant.

Arit.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Har.	2. 3. 6.	21.33.77.	24.32 48.	600.1100.6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in ſecundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & ſecundus: ex ſecundo vero in tertium, tertius.

Alio modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi vero eiuſdem Arithmeticæ inter ſe multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in iiſdem exemplis manifeſtum eſt.

Hinc fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta eſt, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

Quapropter ſi reperiendi ſint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atq; adeo & differentiæ, datam habeant proportionem, ſumendi ſunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis conſtituendus: ac deniq; ex hiſce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt ſi quærantur tres, quorum extremi habeant proportionem ſeſquitertiam, ſumemus 3. & 4. inter quos ea proportio reperitur: ſed quia eorum ſumma 7. impar eſt, non poteſt inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumq; per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos, enim 6.8. cadet integer medius proportionalis Arithmetice. 7. nimirum ſemiſsis eorum ſummæ. Ex his igitur tribus 6.7.8. Arithmetice proportionalibus orientur hi tres Harmonice proportionales, 42.48.56. quorum extremi, atq; adeo & differentiæ proportionem ſeſquitertiam datam habent.

Sequitur etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta eſt, conuerſo ordine eſſe proportionales: hoc eſt, in Harmonica ita eſſe ſecundum ad primũ, vt in Arithmetica tertius eſt ad ſecundum. Item in illa ſic eſſe tertium ad ſecundum, vt in hac eſt ſecundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti ſunt ex poſterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo vero poſteriores Harmonicæ procreati ſunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex ſuperioribus exemplis perſpicuum eſt.

Viciſsim ſi primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem eſt) ſi medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo vero extremi Harmonicæ inter ſe multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem ſcilicet prorſus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2.3.6. gigni hanc Arithmeticam, 6.12.18. Siue enim ducas primum 2. in ſecundum 3. & tertium 6. Item ſecundum 3. in tertium 6. produces 6.12.18. ſiue ducas medium 3. in extremos 2.6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

Harmonica proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos ſiue ad maiores numeros progrediendo, ſiue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri ſunt proportionales Harmonice, & tertio adiunguntur duo cum eo conſtituentes quoq; eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus eſt, adiunguntur eodem modo alij duo; atq; vltimo, ſiue ſeptimo, alij duo; & ſic in infinitum. Hoc autem fit verſus maiores numeros progrediendo, ſi poſteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2.3.6. Harmonice proportionalibus, ſi poſteriores duo, 3. 6. ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9.18. atq; ita erunt iam quinq; termini, 2.3.6.9.18. Harmonice proportionales: Et ſi poſteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis. erunt ſeptem hi termini, 2.3 6.9. 18. 27. 54. continue proportionales Harmonice: & ſic progredi poterimus in infinitum, ita vt ſemper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos locorum imparium, vt per tertium, quintum, ſeptimum, nonum, &c. Quòd ſi verſus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et poſteriores duo minores inuenti iterum diuidendi per eundem denominatorem, & ſic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18.9 6. ſi minores duo, 9.6. diuidantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18.6. fient 3.2. atq; ita erunt iam quinq; termini, 18. 9. 6. 3. 2. Et ſi rurſus duo poſteriores inuenti 3. 2. diuidantur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt vltimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18. 9. 6. 3. 2. 1.$\frac{2}{3}$. atq; ita deinceps progredi licebit in infinitum.

Alio modo, & quidem magis proprie, continuatur proportionalitas Harmonica, ſiue ad maiores numeros progrediendo, ſiue ad minores, quando primi tres numeri ſunt Harmonice proportionales; Item relicto primo, alij ſequentes tres; & relictis duobus, ſequentes alij tres, atq; ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, quæ inter extremos aliorum trium. Vt in his 4. numeris, 3.4.6.12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3.4.6. quàm tres 4.6.12. Harmonice proportionales ſunt: ſed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, at extremi poſteriorum 4. 12. triplam. Item continuata eſſe dicitur Harmonica proportionalitas in his quinq; terminis, 10.12.15.20.30 quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus, 15.20.30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant eaſdem proportiones. Quo pacto autem in vtramq; partem hoc modo continuanda ſit, quando continuari poteſt, (neq; enim ſemper ad maiores numeros progrediendo poteſt hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continue Harmonice proportionales, vt expoſuimus, reperiri poſsint, ex iis, quæ ſequuntur, conſtabit.

II.

INTER *quoſuis datos duos numeros conſtitues medium Harmonice proportionalem, hac ratione. Numerum, qui fit ex datorum*

ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem ſummam, Quotientemq; minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem ſummam. Si enim Quotientem ex maiore dato ſubtrahas, reliquus fiet medius terminus quæſitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuenturus medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum ſummam 75. Nam ſi Quotientem 9. minori 15. adijcias, conflabis medium terminum 24. vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, ſi eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum ſummam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

Vides ergo, quando ſumma datorum duorum numerorũ non metitur productũ ex eorundẽ differentia in minorẽ eorum, vel in maiorem, medium inuentum eſſe neceſſario integrum cum fractione. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem ſummam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, 7. $8\frac{4}{17}$. 10. Quia tam 10. ad 7. habent proportionem ſupertripartientem ſeptimas, quàm differentia maiorum $1\frac{12}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumq; numerum 30. partire per eorum ſummam 17. Quotiens enim $1\frac{12}{17}$. ſubtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

Alij tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorum datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuiſione differentiæ datorum duorum numerorum per ſummam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerum minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato ſubtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur. Vt ſi inter 20. & 30. ſit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. ſunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum ſummam 5. fit Quotiens 2. quem ſi ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel ſi eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur ſemper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

Breuius ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerũ, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate ſuperat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; ſi eorum differentia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate ſuperat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo 10. 16. 40.

Sed ad memoriam iuuandam inueniemus fortaſſe commodius; (licet aliquanto longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non ſunt impares, vel pares, ſed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos conſtitue medium Arithmeticè proportionalem, qui ſemper erit ſemiſſis ſummæ eorum. Per eos deinde tres numeros Arithmetice proportionales quære ex regula 1. tres Harmonice proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter ſe proportionem habent, quam dati duo extremi. Quod ſi fiat, vt primus inuentus ad ſecundum, ita primus datus ad aliud; hoc eſt, ſi per primum inuentum diuidatur numerus ex ſecundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius, duplica eos, vt fiant 14. & 20. Summa enim horum 34. par eſt, cuius ſemiſſis 17. eſt medius Arithmetice inter 14. & 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonice proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat, vt primus inuentus 238. ad ſecundum 280. ita primus datus 9. ad aliud, inuenietur numerus $8\frac{4}{17}$. qui medius eſt Harmonice inter 7. & 10. qui ab initio propoſiti fuerunt.

III.

Propoſitis duobus numeris, reperiemus tertium vtroq; maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri poteſt, (Pulchre autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum, qui relinquitur, ſubtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroq; dato maior, quem quærimus. Quod ſi quando diuiſor reperiatur eſſe 0. vel quando amborum differentia ex minore termino ſubtrahi nequit impoſſibile eſt, datis duobus numeris poſſe adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt ſi duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, ſi amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus conſtituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, ſi ad duos terminos 16. 24. tertium adiungamus, nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet, facta ſubtractione differentiæ amborum, quæ eſt 8 ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita ſtabunt 4. termini Harmonice proportionales, 12. 16. 24. 48. Quod ſi tentemus his adiungere alium maiorem, fruſtra laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. reperietur diuiſor eſſe 0. Differentia enim amborum, quæ eſt 24. ſubtracta ex minore 24. relinquit 0. Quod ſi quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius vtroq; maior, 15. Ad hos vero duos 10. 11. apponetur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90. 99. tertius. 110. At vero ad 3. 6. nullus adiungi poterit: quia differentia inter ambos, quæ eſt 3. dempta ex maiore 3. relinquit 0. Atq; eodem modo quando dati numeri habent proportionem duplam, non poteſt illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum ſemper eſt minori termino æqualis. Multo magis cum dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonice quia differentia amborum tunc ſemper maior eſt minore termino, atq; idcirco ſubtractio fieri nequit. Vt ſi dentur numeri 3. 7. quorum proportio eſt dupla ſeſquitertia, nimirum maior, quam dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem eſſe minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

Alij ita inueſtigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumq; productum per numerum, qui relinquitur, ſubtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientem deniq; maiori adijciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. ſi eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, ſubtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad minorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi poſſit tertius maior proportionalis, neceſſe eſt, illorum proportionem eſſe vel ſuperparticularem, vel ſuperpartientem, nimirum dupla minorem. Ex quo liquido conſtat, Harmonicam proportionalitatem non poſſe progredi in infinitum verſus maiores numeros, ſi de continuatione ſecundo modo accepta loquamur, quæ propria

eſt, vt

eſt, vt in prima regula diximus. Nam cum primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla eſt, vel maior, ibi neceſſario proportionalitas conſiſtet, & vltra non promouebitur.

Sequitur quoq; ex priori regula, quando minor terminus ſuperat differentiam amborum ſola vnitate, tertium procreari ex primo in ſecundum: quia productus hic numerus diuiſus per illam vnitatem facit tertium numerum, vt diximus. Conſtat autem numero per vnitatem diuiſo, Quotientem eſſe eundem numerum diuiſum. Vt ſi dentur duo numeri 6. 12. quia minor 6. ſuperat amborum differentiam 5. ſola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hiſce numeris, 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in ſecundum: quia primus ſuperat differentiam priorum duorum ſola vnitate.

Ex poſteriori vero regula ſequitur, quando minor terminus ſuperat amborum differentiam ſola vnitate, tertium procreari, ſi productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adijciatur: quia productus ille diuiſus per illam vnitatem, non facit diuerſum Quotientem ab eo producto, &c. Vt datis eiſdem numeris, 6. 11. ſi differentia 5. ducatur in 11. productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

Quare facile quoq; reperiri poſſunt tres numeri Harmonice proportionales, ſi pro primo ſumatur quilibet numerus, pro ſecundo vero eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio deniq; numerus, qui ex primo fit in ſecundum. Vt ſi primus ſit 8. erit ſecundus 15. & tertius 120. & ſic de cæteris. Proportio autem tam extremorum hoc modo inuentorum, quam differentiarum ſemper erit multiplex à medio, qui perpetuo impar eſt, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio eſt quindecupla.

Vnde ſi quærantur tres minimi numeri integri Harmonice proportionales in quacunq; proportione multiplici, ſi quidem denominator eſt numerus impar, ſtatuemus eũ denominatorẽ in medio ſemiſſem autẽ numeri proxime maioris in primo loco. In tertio deniq; collocabimus eum, qui ex primo in ſecundum fit. Vt ſi deſiderentur tres numeri integri, & minimi in proportione ſeptupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id eſt, ſemiſſem numeri 8. proxime maioris quam 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si vero denominator eſt par, ſtatuemus numerum proxime maiorem in primo loco: in tertio vero collocabimus numerum, qui fit ex illo proxime maiore in denominatorem: In medio deniq; ponemus denominatorem duplicatum. Vt ſi inueniendi ſint tres minimi integri in proportione octupla, conſtituemus 9. qui numerus proxime maior eſt denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8. genitum; in medio deniq; duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet, 9. 16. 72.

Quod ſi tres numeri Harmonice proportionales in data proportione inueniendi ſint, ſiue illi minimi ſint & integri, ſiue non, agendum erit illo modo. In medio ſtatuemus denominatorem datæ proportionis: In primo vero ſemiſſem numeri, qui denominatorem vna vnitate ſuperat: In tertio deniq; loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti ſi quærantur tres in data proportione dupla ſupertripartiente ſeptimas; erit denominator huius proportionis $2\frac{3}{7}$. collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirum ſemiſſis numeri $3\frac{3}{7}$. qui denominatorem $2\frac{3}{7}$. vnitate ſuperat. Tertius deniq; erit $4\frac{8}{49}$. factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur ſtabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}$. $2\frac{3}{7}$. $5\frac{8}{49}$. qui ad hos tres eiuſdem denominatoris reuocabuntur, $\frac{84}{49}$. $\frac{119}{49}$. $\frac{204}{49}$. ſi prius quilibet ad vnicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonice proportionales, eritq; extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla ſupertripartiens ſeptimas, quæ videlicet data eſt.

IV.

Duobus numeris datis, reperiemus tertium vtroq; minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alterum productum partiemur per ſummam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui quæritur, Vt ſi dentur duo numeri 6. 12. ſi diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. ſummam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem vtroq; illis proportionalem, vt hic cernis, 4. 6. 12. Hanc extendemus regrediendo verſus minores numeros, ſi duobus 4. 6. minorem tertium adiungemus 3. hoc modo 3. 4. 6. 12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. ſummam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{7}$. Atq; in hunc modum decreſcet proportionalitas quælibet Harmonica continue in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem ſane varietatem inter has tres proportionalitates, Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hiſce propoſitionibus explicatur.

I. *ARITHMETICA augetur in infinitum, ſed in infinitum non decreſcit.*

II. *HARMONICA contra, decreſcit in infinitum, ſed in infinitum augeri non poteſt. Quod intelligendum eſt, ſi ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam. Hoc eſt, vt primus, ſecundus, ac tertius ſint Harmonice proportionales: Item ſecundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in vtramq; partem extendi poteſt in infinitum, ſicut Geometrica, vt ſupra in regula 1. diximus.*

III. *GEOMETRICA deniq; & augetur, & decreſcit in infinitum.*

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuos, qui varie inter ſe comparati præcipuas perfectasq; conſonantias Muſicas exprimunt. Nam 6. eius baſes quadratæ; 8. anguli ſolidi; 12. lateræ; & 24. anguli plani conſtituunt hos 4. terminos 6. 8. 12. 24. continue proportionales Harmonice. Proportio autem 8. ad 6. eſt ſeſquitertia, quæ conſonantiam Diateſſaron, ſiue Quartam, conſtituit. Proportio vero 12. ad 8. ſeſquialtera eſt, continens conſonantiam Diapenten, ſiue Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla eſt, explicans conſonantiam Diapaſon, ſiue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla eſt, efficiens conſonantiam Diapaſon & Diapenten, hoc eſt, Duodecimam. Deniq; proportio 24. ad 6. quadrupla exiſtit, exhibens conſonantiam Diſdiapaſon, ſiue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, ſi quicunq; numerus, ſiue minimus, ſiue non minimus, ab eis numeratus per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes conuerſo ordine Harmonice proportionales. Et viciſſim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, ſi numerus, quem metiuntur, per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerſo Arithmetice proportionales. Verbigratia. Sint Arithmetice proportionales, 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, quem metiuntur, eſt 720. ex eorũ continua multiplicatione inter ſe procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. ſcripſimus. Priore ergo per ſingulos datos diuiſo, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

POSTERIORE autem per eoſdem datos diuiſo, reperientur hi.

60. 30. 20. 15. 12. 10.

ATQVE hi numeri inuenti eaſdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerſo tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad ſecundum, ita in Arithmetica ſecundus ad primum: Et vt in Harmonica ſecundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad ſecundum, &c. Numeri quoq; per minimum numeratum inuenti, ſunt minimi in ſuis proportionibus. Quod ſi viciſsim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per ſingulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmetice proportionales: & ſi quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt iidem numeri Arithmetice proportionales, per quos Harmonice proportionales inuenti ſunt, & eodem quidem ordine, quo dati ſunt, ſed ordine conuerſo, ſi cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim ſi in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progreſſus ſit, & contra.

IGITVR ſi quis cupiat quotcunq; terminos continue Harmonice proportionales, ſumendi ſunt totidem termini Arithmetice quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus (& minimus quidem, ſi minimi deſiderentur) per ſingulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia poſteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiuſce rei eſt: quia cum ſit, vt 12. primus ad 6. ſecũdum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12 in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex ſecundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifeſtum eſt. Idem conſtat in pluribus terminis, ſi terni ac terni ſumantur, cum ſuis differentiis, vt in his 6. terminis apparet.

Differentiæ	2	4	
Propor. Har.	6	8	12

Differentiæ.		30		10		5		3		2	
Propor. Harm.	60		30		20		15		12		10

[illegible]M ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rurſus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac deniq; ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque it[illegible] vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunq; termini, aut inuenti, ſeruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam ſumptis ternis, ac ternis, cum ſuis differentiis, ſi differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum ac ſecundum, producantq; vtrobiq; numeros æquales, erunt termini omnes continue proportionales Harmonice, ſin minus, nequaquam.

VII.

QVOD ſi quis reperire velit quinq; minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates exiſtant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres inſequẽtes, proportionalitatem Geometricam, & tres poſtremi proportionalitatem Harmonicam: ac deinde primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel ſi reperire quis velit tres numeros in data proportione cõtinue proportionales, ita vt inter primum ac ſecundum cadat medius Arithmetice proportionalis, & inter ſecundum ac tertium medius Harmonice proportionalis, medius denique trium datorum numerorũ ſit inter medios inuentos medius proportionalis Geometrice, atq; quinq; numeri ita inuenti ſint minimi omnium in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione. Sit data proportio tripla, in qua tres minimi ſumantur termini, 9.3.1. Inter primos duos ſtatuatur medius Arithmetice, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. aſſumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. ſtatuatur, vt in primo ordine hic poſito apparet. Sed quia hic Quotiens integer eſt cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in ſecundo ordine vides. Quod ſi eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros ſecundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæſitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18.12.6. Arithmeticam habent proportionalitatem, 12.3.6. Geometricam, & 6.3.2 Harmonicam: ac denique 18.6.2, triplam datam. Quod ſi non inueniendi ſint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi poſſunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum ſecundus, & quartus, inueſtigandi, vt dictum eſt.

9.	6.	3.	$1\frac{1}{2}$.	1.
9.	6.	3.	$\frac{3}{2}$.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

SI minores termini cum maioribus conferendi ſint, & data ſit proportio ſubtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis, 1. 3. 9 ſubtriplis hos quinque 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2.4.6. ſeruant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6.9.18. Harmonicam; & 2. 6.18. ſubtriplam propoſitam. Inueniendi modum conſpicis in hiſce tribus ordinibus appoſitis.

1.	2.	3.	$4\frac{1}{2}$.	9.
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$.	9.
2.	4.	6.	9.	18.

RVRSVS ſit data proportio ſeſquialtera, in qua tres minimi termini ſint, 9.6.4 Inter 9. & 6. medius eſt Arithmetice, $7\frac{1}{2}$. vt in primo ordine, Reuocetur ad vnicã hanc fractionẽ $\frac{15}{2}$. vt in ſecundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro ſecundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in ſecundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factum eſt: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis ſtatuatur medius inter 12. & 8. eiuſdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentique erunt quinque minimi numeri quæſiti, vt in quinto ordine apparet.

9.	$7\frac{1}{2}$.	6.		4.
9.	$\frac{15}{2}$.	6.		4.
18.	15.	12.	$9\frac{3}{5}$.	8.
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.
90.	75.	60.	48.	40.

SI minores numeri cum maioribus comparandi ſint, inuenientur in proportione data, ſubſeſquialtera quinque termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademque in cæteris eſt ratio.

4.		6.		9.
4.	5.	6	$7\frac{1}{5}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{36}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45

POTES quoque, ſi placet in primo ordine omnes quinq; numeros conſtituere, & fractiones, ſi quæ ſint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem; Nam ſi numeratores pro illis ſubſtituas, denominatore cõmuni relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinq; numeros minimos integros quæſitos. Vt ſi ſubquadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1. 4. 16. Additis ſimul 1. 4. erit ſummæ dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmetice inter eos. Et ſi diuidatur quadratus numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonice inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducentur ad eandem denominationem, vt in ſecundo ordine. Et fractionibus ſingulis ad vnicam fractionem reuocatis, conſtituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, conſtituentur quinq; minimi numeri quæſiti, vt in quinto ordine vides. Atq; in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam ſeruantes, in quibus permiſtæ ſunt fractiones, ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$6\frac{4}{10}$.	16
1.	$\frac{25}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
10.	25.	40.	64.	16

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipſi ſint Geometrice proportionales non continue, vnus autem mediorum cum extremis ſeruet proportionalitatem Arithmeticam, alter vero Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri conſtituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipſis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem conſtituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita conſtitues. Sit data proportio quæ 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam ſumma eorum eſt impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmetice conſtituatur 7. hoc modo 12. 7. 2. Quod ſi eorum ſumma fuiſſet par, accepiſſem ſtatim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmetice proportionalibus inueniantur tres Harmonice proportionales per primam regulam, 84. 24. 14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. ve[illegible]. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14. qui ſemper ita inuenti pares erunt, ſtatuatur etiam medius Arithmedice, 49. erunt quatuor quæſiti numeri, 84. 49. 24. 14. Nam extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipſos enim quatuor exiſtit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem ſit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14 vt liquido conſtat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84. 49: 14. Arithmetica. Ac denique inter 84. 24. 14. Harmonica ex conſtructione, vt hic vides.

Tres proportio-	84.	49.	24.	14.	nalitates ſimul.				
Geometrice prop.	84.	49.	74.	14.	Vel	84.	24.	49.	14.
Arithmet. prop.	84.	49.	14.						
Harmonice prop.	84.	24.	14.						

RVRSVS ſit data proportio, quæ 3. ad 2. Quoniam iterum eorum ſumma eſt impar, ſint eorum dupli 6. 4. inter quos ſtatuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 4. hoc modo, 6. 5. 4. Ex his per primam regulam inuenio Harmonice proportionales 30. 24. 20. Conſtituto autem medio Arithmetice 25. inter 30. & 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæſiti, 30. 25. 24. 20. cum habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

Geometrice proport.	30	25	24	20	Vel	30	24	25	20
Arithmet. proport.		30.			25.			20.	
Harmon. proport.		30.			24.			20.	

EOSDEM 4. numeros maximæ harmoniæ reperiemus, ſi pro extremis ſumamus quoſuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos ſtatuatur medius Arithmetice: fiat autem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus Harmonica proportionalitate medius inter eoſdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometrice proportionalibus, quales ſunt 4. inuenti, vnus mediorũ eſt medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius eſt in Harmonica inter eoſdem extremos, vt diximus in 7. proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi 4. numeri inuenti ſunt integri, factum erit, quod proponitur: ſi vero admiſtæ ſint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ 7. ſcripſimus. Vt ſi proportio data ſit dupla, ſtatuemus extremos, 12. & 6. Dimidium ſummæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmetice proportionalis, hoc modo, 12. 9. 6. Si igitur fiat vt 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur ſemper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius. Quare ſic ſtabunt 4. numeri maximæ Harmoniæ, 12. 9. 8. 6. Poſtremo ſi in eadem proportione dupla extremorum ſumamus pro extremis, 20. & 10. inueniemus medium Arithmetice, 15. & Harmonice $13\frac{1}{3}$. in minimis numeris, hoc modo, 20. 15. $13\frac{1}{3}$. 10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $\frac{40}{3}$. reuocemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium ſtatuamus, inuenientur alij, ſi inuentos per denominatorem 3, multiplicemus, vt hic vides. 60. 45. 40. 30.

MINOREM autem Harmoniam ſic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri ſola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continue proportionales Geometrice, quorum extremi pares ambo ſint, vel impares. Si enim inter extremos ſtatuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæſitos. Vt ſi ſumantur hi tres numeri ſeſquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmetice proportionalis, 26. erunt 4. quæſiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36 Geometrice, & tres 16. 26. 36. Arithmetice proportionales ſunt, ex conſtructione.

SI vero ſola Geometrica cum Harmonica deſideretur, cape quoque tres numeros quoſcunq; continue proportionales Geometrice. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur.

Vt ſi

Vt ſi ſumantur ijdem tres ſeſquialteri, 16.24.36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, 22$\frac{2}{13}$. Sic ergo ſtabunt 4. numeri inuenti, 16.22$\frac{2}{13}$.24.36. qui reducentur ad hos integros. 208.286.312.468. Si accepiſſes hos numeros tres duplos. 20.10.5. inueniſſes inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20.10.8.5.

SI denique optes ſolam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonice proportionales. Si namq; inter medium, & alterutrum extremorum ſtatuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt ſi ſumantur hi tres 6.8.12. erit inter priores duos medius Arithmetice proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6.7.8.12. At inter poſteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate 10. Sic ergo ſtabunt 4. inuenti numeri, 6.8.10.12. qui omnes (quod caſu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) ſunt Arithmetice proportionales, & non ſolum tres 8.10.12. ex conſtructione at ſoli tres accepti 6.8.12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi ſint quotcunq; numeri Arithmetice proportionales continue, inter quorum binos ac binos cadant ſinguli medij Harmonice proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmetice pportionales, quot quæruntur; & bini in proportione binorum proximorũ minimi. Si n. accipiatur minimus numerus numeratus à ſummis binorum minimorum acceptorum, atq; hic in ſingulos acceptos numeros Arithmetice proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoſcunq; numeros Arithmetice proportionales, 3.6.9.12. & 1.2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2.3. minimos proportionis 6. ad 9 & 3.4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntq; tres ſummæ binorum minimorum 3.5.7. atq; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas ſeorſum in ſingulos acceptos, 3.6.9.12. procreabis 4. numeros Arithmetice proportionales, quos deſideras. 315.630.945.1260. Nam inter primum & ſecundum in Harmonica proportionalitate medius eſt, 420. Inter ſecundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.

Arith. proport.	315		630		945		1260
Medii Harm.		420		756		1080	

ITAQVE ſi vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonice, ſume duos [illegible] in data proportione, & eorum ſummam duc in duos datæ proportionis. Vt ſi data ſit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1.3. quorum ſummam 4. ſi duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæſitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16.24.48. Si datæ proportionis numeri fuiſſent minimi 1.3. duxiſſemus vtrumq; in eorum ſummam 4. factiq; eſſent hi duo numeri. 4.12. inter quos cadit Harmonice medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunq; terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, aſſequeris in hoc artificio. Sume tot minimos numeros continue proportionales Geometrice, quot deſiderantur, & ſingulos multiplica per ſummam duorum in eadem proportione minimorum: Et ſi quidem producti fuerint omnes pares, ipſi erunt, quos quærimus; ſin minus, eorum dupli dabunt quæſitos numeros. Sint enim inueniendi verbi gratia tres in proportione ſeſquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4.6.9. & duos minimos in eadem 2.3. Horum ſummam 5. duc in ſingulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares ſunt, dupla habebiſq; propoſitos numeros 40.60.90. Nam inter 40.60. medium Harmonicum eſt, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60.90. Harmonicum medium eſt, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. prop.	40			60			90
Medii Harm.		48			72		
Medii Arith.			50				75

HINC facile reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter ſecundum proportionalitatem Arithmeticam, & ſecundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, ſi eorum ſummam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoſcunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, ſi pares ſunt, quæſiti: ſi vero vterq; nõ eſt par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt ſi data ſit proportio ſeſquitertia, cuius minimi numeri ſunt 3.4. eorumq; ſumma, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21.28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non ſunt pares, erunt eorum dupli. 42.56. ij quos quærimus. Poſteriores autem duo, quia pares ſunt, erunt quæſiti. Tam enim inter illos, quam inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifeſtum eſt.

Numeri inuenti.	42			56		84			112
Medii Harmo.		48			Vel		96		
Medii Arithm.			49					98	

XI.

SI vero quis petat ſibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos bini cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inueniantur per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmetice proportionales 2.50.98. inter quorum priores binos ſit medius Geometrice, 10. & inter binos poſteriores 70. ſtatuanturque ordine ſic 2.10.50.70.98. Minimus autem numerus ab his quinq; numeratus ſit 2450. Quo diuiſo per eoſdem quinque numeros, Quotientes ſint, 1225, 245.49.35.25. Si igitur omnes Quotientes ſint pares vel impares, erunt primus, tertius, & quintus, vt 1225.49.25. ij numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonice proportionales, vt conſtat ex 5. regula, cum ſint Quotientes producti ex diuiſione numeri 2450. quem numeri 2.50.98. Arithmetice proportionales numerant, per eoſdem numeros 2.50.98. Inter binos autem cadunt Geometrice proportionales, 245. ſecũdus Quotiẽs; & 35. tertius Quotiens. Habent n. 1225.245.49. eaſdem proportiones conuerſo ordine, quas continue proportionales 2.10.50. habet, vt

conſtat

conſtat ex 7 regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemque modo 49.35.25.eaſdem habebunt proportiones, quas conuerſo ordine habent continue proportionales 50. 70. 98. cum tam illi, quam hi, ſint Quotientes producti per diuiſionem eiuſdem nu- meri 2450.per 2.10.50.& per 50.70.98.Certum autem eſt,inter binos eoſdem 1225. 49. & inter 49.25.cadere quoque ſingulos Arithmetice proportionales,cum omnes pares ponantur,vel impares. Quod ſi non omnes ſint pares,duplicandi erunt omnes 5. Quotientes, vt pares numeri fiant,qui idem omnino præſtabunt, quod quærimus. Habebunt enim eaſdem proportiones,quas eorum ſubdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium ſecundus, quam inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometrice proportionalis. Cum ergo inter eoſdem cadant medij Arithmetice,conſtat propoſitum. Exemplum ſupe- rius ob oculos hic propoſitum eſſe vides.

Tres Har.prop.inuenti.	1225			49			25
Medii Arith.		637			37		
Medii Geometr.			245			35	

XII.

RVRSVS ſi quærantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometrice vnus, & alter Harmonice, ſatisfaciemus quæſtioni hoc modo. Reperiantur iterum, per 9.regulam proportionali- tatis Geometricæ, tres numeri Arithmetice proportionales. 2. 50. 98. inter quorum binos ſinguli medij cadant in proportiona- litate Geometrica; ſumanturque duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum poſteriorum; & horum ſummæ 26. 74. numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducan- tur. Producti enim numeri 1924.48100.94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque eaſdem proportiones habeant quas eo- rum ſubmultiplices 2. 50.98. fit vt quemadmodum inter binos horum ſinguli cadunt medij Geometrice, ita quoq; inter binos illorum ſinguli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia ſummæ minimorum numerorum 1.25.& 25.49.in proportionibus 2.ad 50.& 50.ad 98.(qui tres, 2.50.98. Arithmetice ſunt proportionales) numerant minimum numerum 962.qui in eos tres, 2.50.98.ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum triũ ſinguli medij Har- monice proportionales, vt in 9. regula traditum eſt. Exemplum ergo cum mediis ſic ſtabit.

Arit.prop.nu.	1924			48100			94276
Medii Har.		3700			63700		
Medii Geo.			9620			67340	

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales ſiue Arithmetice, ſiue Geometrice, ſiue Harmo- nice, inter quorum binos cadant terni medij, vnus Arithmetice, alter Geometrice, & reliquus Harmonice. Sint enim primum inueniendi tres Arithmeticæ propor- tionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ propor- tionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij. vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri ſi fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoq; inter binos ſinguli Arithmetice proportionales, atq; adeo quæſtioni ſatisfacient. Si vero non omnes pares ſint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus nu- meris antecedentis regulæ, qui omnes pares ſunt, vt hic apparet.

Arith.prop.	1924				48100				94276
Medii Har.		3700				63700			
Med. Geo.			9620				67340		
Med.Arith.				25012				71188	

DEINDE inueniendi ſint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in ſin- gulis proportionalitatibus ſinguli, ſitque proportio data, quam medij Geometricæ proportionalitatis efficere debent, nimirum ſeſquialtera. Cape quinq; numeros minimos datæ proportionis continue proportionales, 16.24. 36. 54. 81. & duos minimos 4. 9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum ſummam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208. 468. 1053. duplicati, (quoniam ipſi non omnes pares ſunt, aut impa- res; alias non eſſent duplicandi) nimirum 416. 936. 2106. (vt inter binos cadere poſſint ſinguli medij Arithmetice) ſunt ij, quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Haromonice, & Arithmetice alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eoſdem cadunt medij Geometrice, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem ſumma 13. duorum minimorum in ſecundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifeſtum eſt.

Geo.prop.	416				936				2106
Med. Ha.		576				1296			
Med. Geo.			624				1404		
Med. Ar.				676				1521	

POSTREMO ſint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmetice, & alter Geometrice, vt in 11. regula docuimus, ſint pro- portionis priorum duorum minimi duo numori 25.1. & proportionis duorum poſteriorum minimi duo numeri 49. 25. quorum ſummæ 26. 74. numerent minimum numerum 962. Hunc ſi in tres inuentos duxeris, gignes tres quæſitos 1178450. 47138. 24050. Nam inter binos cadent, bini medij, vnus Arithmetrice, & alter Geometrice, quemadmodum inter eorum ſubmulti- plices 1225.49.25. nimirum numeri, qui fiunt ex eodem 962. in medios ſupra inuentos. Item inter eoſdem binos cadent ſinguli medij Harmonice, vt ex 12. regula conſtat, cum producti ſint ex minimo numerato à ſummis minimorum terminorum, o- mnes tres. Exemplum hic habes.

Har.

Har. pro.	1178450				47138				24050
Med.Ar.		612794				35594			
Me.Geo.			235690				33670		
Me. Ha.				90650				31850	

XIV.

PARI *ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4. 2. 1. eritque ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. datæ. Ducatur ſumma 5. ex 4. & 1. collecta in duos quoſuis numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc eſt, duplicatam datæ proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, ſi ambo non ſint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. ſunt quos quærimus. Et ſi vterque eſſet par, aut impar, ipſi eſſent quæſiti, & duplicatio non foret neceſſaria. Ita autem ſe habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.*

Duo numeri inuenti.	120				30
Medius Arithmet.		75			
Medius Geometr.			60		
Medius Harmon.				48	

XV.

POSTREMO *ſi lubeat numerum quemcunque propoſitum diſtribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem ſeruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonice proportionales, in quot partes numerus eſt diſtribuendus. Si enim per eorum ſummam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quæris, eruntque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel ſi per ſummam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in ſingulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt ſi numerus 130. diſtribuendus ſit in tres partes Harmonice proportionales; ſi ſumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum ſummam 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in aſſumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel ſi datum numerum 130. per 26. ſummam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in ſingulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eædem partes, quas inquirimus. Conſtituunt enim datum numerum 130. ſuntque Harmonice proportionales, ſicuti aſſumpti numeri, 6. 8. 12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes* $2\frac{4}{13}$. $3\frac{1}{13}$. $4\frac{8}{13}$. *eodem modo proportionales. Eademq; ratio eſt de pluribus partibus.*

QVO PACTO EX PROPORTIONE æqualitatis omnes inæqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS *tribus terminis æqualibus, ſiue vnitatibus ſiue numeris, mirabile dictu eſt, quam facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter ſe additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.*

ÆQVALES *termini, ſiue numeri, procreant numeros duplos:* DVPLI *triplos:* TRIPLI *quadruplos:* QVADRVPLI *quintuplos & ſic in infinitum.*

DEINDE *ex multiplicibus terminis inuentis, ſi ordinem inuertant, gignentur omnes ſuperparticulares, hoc ſeruato ordine.* DVPLI *inuerſi producunt ſeſquialteros:* TRIPLI *inuerſi ſeſquitertios:* QVADRVPLI *inuerſi ſeſquiquartos: atque ita deinceps.*

TERTIO *ex terminis ſuperparticularibus inuentis, ſi inuertant quoque ordinem, producentur omnes ſuperpartientes, hac ſerie* SESQVIALTERI *inuerſi exhibent ſuperbipartientes.* SESQVITERTII *inuerſi ſupertripartientes:* SESQVIQVARTI *inuerſi ſuperquadrupartientes, &c.*

QVARTO *ex ijſdem terminis ſuperparticularibus eo ordine, quo inuenti ſunt, naſcentur omnes multiplices ſuper particulares, hoc ordine.*

SESQVIALTERI *dant duplos ſeſquialteros:* DVPLI *ſeſquialteri triplos ſeſquialteros:* TRIPLI *ſeſquialteri quadruplos ſeſquialteros, &c.* SESQVITERTII *item gignunt duplos ſeſquitertios:* DVPLI *ſeſquitertij triplos ſeſquitertios:* TRIPLI *ſeſquitertij quadruplos ſeſquitertios, &c.* SESQVIQVARTI *rurſus efficiunt duplos ſeſquiquartos:* DVPLI *ſeſquiquarti triplos ſeſquiquartos:* TRIPLI *ſeſquiquarti quadruplos ſeſquiquartos, &c.*

QVINTO *ex terminis ſuperpartientibus inuentis elicientur omnes multiplices ſuperpartientes, hoc ordine.*

SVPERBIPARTIENTES *generant duplos ſuperbipartientes.* DVPLI *ſuperbipartientes triplos ſuperbipartientes,* TRIPLI *ſuperbipartientes quadruplos ſuperbipartientes, &c.* SVPERTRIPARTIENTES *quoque pariunt duplos ſupertripartientes;* DVPLI *ſupertripartientes, triplos ſupertripartientes:* TRIPLI *ſupertripartientes, quadruplos ſupertripartientes, &c.* SVPERQVADRVPARTIENTES *item gignunt duplos ſuperquadrupartientes:* DVPLI *ſuperquadrupartientes, triplos ſuperquadrupartientes:* TRIPLI *ſuperquadrupartientes, quadruplos ſuperquadrupartientes: atque ſic de cæteris.*

MODVS *autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem expoſuimus, eſt vnicus, iſq; facillimus, nimirum hic.*

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, ſemel ſumpto, & ſecundo bis, & tertio ſemel exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ.

SECVN-

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis conſtituendæ oritur ex ſecun-do,& tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet,ſemel ſumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis,ex qua alia erui debet,ſumptus ſemel.

ATQVE hoc præceptum triplex ſub oculos ponitur hoc appoſito typo, vbi liquido conſtat, qui termini datæ proportionalitatis ſumendi ſint vel ſemel, vel bis, vel omittendi: vt termini alterius proportionalitatis conſtituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS PROPORTIONIS GEOMETRICÆ ex alia Geometrica.

Ordo termin. datæ proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus conſtituitur,ſi dati term.ita ſumantur.	Semel	Bis.	Semel
Secundus conſtituitur,ſi term.dati ita ſumautur.		Semel.	Semel
Tertius conſtituitur,ſi ita ſumantur dati term.			Semel

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram vero in binarijt. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari ſemper minimos terminos cuiuſque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Æqualitatis proportio.	1	1	1		2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	4	2	1		8	4	2
Tripli ex duplis.	9	3	1		18	6	2
Quadrupli ex triplis.	16	4	1		32	3	2
Quintupli ex quadruplis	25	5	1		50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICVLARIVM.

Dupli inuerſo ordine.	1	2	4		2	4	8
Seſquialt.ex duplis inuerſis.	9	6	4		18	12	8
Tripli ordine conuerſo.	1	3	9		2	6	18
Seſquiter.ex triplis inuerſis.	16	12	9		32	24	18
Quadrupli ordine conuerſo.	1	4	16		2	8	32
Seſquiquar.ex quad.conuerſis.	25	20	16		50	40	32

GENERATIO SVPERPARTIENTIVM.

Seſquialteri inuerſi.	4	6	9		8	12	18
Superb.ex ſeſquial.inuerſis.	25	15	9		50	30	18
Seſquiter.ordine inuerſo;	9	12	16		18	24	32
Supertr.exſeſquit.inuerſis.	49	28	16		98	56	32
Seſquiquart.conuerſo ordine.	16	20	25		32	40	50
Superquadrupar.ex ſeſquiquar.conuerſis	81	45	25		162	90	60

GENERATIO MVLTIPLICIVM. Superparticularium.

Seſquialteri directo ordine.	0	6	4		18	12	8
Dupli ſeſquialteri ex ſeſquialt.	25	10	4		50	20	8
Tripli ſeſquial.ex dupl.ſeſquial.	49	14	4		98	28	8
Quadrupl.ſeſqual.ex tripl.ſeſquial.	81	18	4		162	36	8
Seſquitertii ordine recto.	16	12	9		32	24	18
Dupli ſeſquiter. ex ſeſquit.	49	21	9		98	42	18
Tripli ſeſquit.ex dup.ſeſquit.	100	30	9		200	60	18
Quadr.ſeſquit.ex trip.ſeſquit.	169	39	9		338	78	18
Seſquiquarti ordine recto.	25	20	16		50	40	32
Dupli ſeſquiquar.ex ſeſquiqua.	81	36	16		162	72	32
Tripl.ſeſquiq.ex trip.ſeſquiq.	169	52	16		338	104	32
Quad.ſeſquiq.ex trip.ſeſquiq.	289	68	16		578	136	32

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superbipart.ordine recto.	25	15	9		50	30	18
Dupli ſuperbip.ex ſuperbip.	64	24	9		128	48	18
Tripli ſuperbi. ex dupl.ſuperbip.	121	33	9		242	66	18
Quadr.ſuperb.ex trip.ſuperbip.	196	42	9		392	84	18
Supertripart.directo ordine.	49	28	16		98	56	32
Dupli ſupertrip.ex ſupertrip.	121	44	16		242	88	32
Trip.ſupertri.ex dup.ſupertri.	225	60	16		450	120	32
Quad.ſupertri.ex trip.ſupertr.	361	76	16		722	352	32
Superquadrup.recto ordine.	81	45	25		162	90	50
Dupli ſuperquad.ex ſuperq.	196	70	25		392	140	50
Trip.ſuperq.ex dup.ſuperq.	361	95	25		722	190	50
Quad.ſuperq.ex trip.ſuperq.	576	120	25		1152	140	50

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

HIC enim perſpicue cernis, quos libet tres terminos ex tribus proxime antecedentibus procreatos eſſe ex præſcripto triplicis præcepti ſuperioris. Vt verbi gratia poſtremi hi tres. 576. 120.25.ita producti ſunt ex tribus antecedentibus 361.95. 25 .Primus 576. coaceruatus eſt ex primo 361.ſemel,& ex ſecundo 95.bis,& ex tertio 25.ſemel.Secundus autem 120.conflatus eſt ex ſecundo 95.ſemel.Tertius deniq; 25.eſt tertius 25.ſemel ſumptus, vt hæc appoſita formula demonſtrat.Atq; hoc eodem modo omnes alij geniti ſunt,initio facto à terminis æqualibus,1.1.1.vel 2.2.2

QVO PACTO VICISSIM OMNIS PROPORtio inæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.

PROPOSITIS rurſus tribus terminis inæqualibus in quacunq; proportione, reſtituetur viciſſim proportio æqualitatis,non minus iucunda,quam facili ratione,per variam ſubtractionem terminorum inæqualium,vnius ab altero.Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto.

MINVS trium terminorum inæqualium datorum ſtatuatur vnum extremum proportionis,ad quam reductio fit.

MINIMO eodem ſubtracto ex medio, reliquus numerus conſtituatur in medio loco proportionis,ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex conſtituto iam extremo ſemel,& medio termino bis ſumpto,ſubtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione quæuis proportio trium terminorum inæqualium reuocatur ad aliam proportionem, conferendo ſemper maiores numeros cum minoribus;& hæc rurſus eodem modo ad aliam,atq; ita deinceps,donec tres termini æquales occurrant. Quod ſi tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima ſtatim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla,quæ ſequuntur,planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Æqualitatis proportio.	6	6	6

HOC enim exemplum monſtrat,quintuplam proportionem reuocatam eſſe ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & deniq; duplam ad æqualitatem. In hoc altero vero exemplo vides proportionem ſupertripartientem quartas reduci ad ſeſquitertiam,ſeſquitertiam ad triplam,triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.

Proportio ſupertripartiens quartas.	46	28	16
Seſquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis ſemper eſſe duplam,hanc vero ſtatim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduerſione dignum,ſi tres numeri dati fuerint in ſua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam fit reductio,conſiſtere in tribus vnitatibus: Si vero non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis conſiſtere in tribus numeris æqualibus,quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiuſdem generis proportionis.Ita vides in poſteriori exemplo tres datos numeros 49.28.16. minimos eſſe in proportione ſupertripartiente quartas,atq; reductionem factam eſſe ad hanc æqualitatem.1.1.1.At in priori exemplo occupant tres numeri dati,150.30.6.ſextum locum inter omnes tres numeros continuæ proportionis quintuplæ, proptereaque æqualitas inuenta eſt inter hos tres ſenarios,6.6.6.Minimi enim ſiue primi numeri quintuplæ proportionis ſunt,25.5.1.Secundi.50.10.2.Tertij, 75.15.3.Quarti,100.20.4.Quinti 125.25.5.Sexti autem,150.30.6.vt manifeſtum eſt. Idem experiri licebit in omnibus aliis proportionibus.

SED & hoc obſeruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta eſt ad quadruplam, ex qua orta eſt: quadrupla ad triplam. Hæc enim illam genuit, & ſic de cæteris, vſq; ad æqualitatem. In exemplo vero poſteriori, Supertripartiens reuocata eſt ad ſeſquitertiam ordine inuerſo. Conſtat autem, numeros ſeſquitertios conuerſo ordine gignere ſupertripartientes, vt ſupra diximus. Item ſeſquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta eſt ad triplam ordine inuerſo, quemadmodum tripla inuerſa generat ſeſquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, redacta eſt ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.

NEQVE vero ſilentio prætereundum cenſeo, ex tribus terminis cuiuſcunq; proportionalitatis Geometricæ, ſiue ea æqualitatis ſit, ſiue inæqualitatis, gigni poſſe quamlibet trium proportionalitatum, quas ſupra explicauimus, ſi ipſi termini varijs modis inter ſe coagmententur. Proportionem enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, ſi primus terminus ſemel, ſecundus bis, & tertius ſemel pro primo termino ſumatur; pro ſecundo autem ſecundus, & tertius ſemel; pro tertio denique ipſe tertius ſemel, perſpicue conſtat ex iis, quæ paulo ante ſcripſimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT vero vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, ſeruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & ſecundo termino bis, & tertio ſemel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis

SVMMAM vero ex primo, ſecundo, & tertio ſemel confectam, ſtatue ſecundo loco.

TERTIVM denique terminum conſtitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS PROPORTIONIS
Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorum duæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus.	Tertius
Primus fit ex datis term. ita coaceruatis.	Bis.	Bis.	Semel
Secundus vero fit.	Semel	Semel	Semel
Tertius denique hoc modo.			Semel

NIHIL porro intereſt, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an vero maximum, vt ex ſequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ
Proportionalitatis ex Geometrica.

Geomet. prop.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Arith. propor.	5	3	1	20	12	4	34	19	4	29	19	9

CONSIDERATIONE autem digniſſimum eſt, differentiam conſtitutæ proportionalitatis Arithmeticæ ſemper æqualem eſſe ſummæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam conſtituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam eſſe 2. ſummam ex 1.1. In ſecundo, 8. ſummam ſcilicet ex 4.4. In tertio 15. quæ ſumma conficitur ex 9.6. In quarto denique, 10. nimirum ſummam ex 4.6. collectam, atq; ita in alijs.

ITAQVE ſi Arithmetica proportionalitas conſtituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis: vt perſpicuum eſt in prioribus duobus exemplis.

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoq; ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

SVMMAM collectam ex primo bis, & ſecundo ter, & tertio ſemel ſumpto, ſtatue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex ſecundo bis, & tertio ſemel ſumpto, in ſecundo loco.

SVMMAM denique ſecundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil intereſt, vtrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porro huius generationis hic expreſſum vides.

TYPVS PROCREATIONIS HARMONICÆ
proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus fit ex ter. datis ſic in vnum collect.	Bis	Ter	Semel
Secundus vero ſic.		Bis	Semel
Tertius denique hoc modo.		Semel	Semel

GENERATIO PROPORTIONALITATIS
Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Harmo. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15

IAM vero è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quæcunq; ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, faç medium terminum proportionalitatis conſtituendæ.

HOC

HOC medio inuento ſublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus ſemel, & medius inuentus bis in vnam ſummam collecti, & ex maximo dato ſubtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semiſſis ergo huius erit ipſum alterum extremum

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt ſupra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas propoſita oritur ex illa Geometrica, ſi ſuperius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata eſt. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA.

Harmon. propor.	3	4	6	60	40	30	24	16	12
Geometr. propor.	2	1	$\frac{1}{2}$	5	10	20	2	4	8
Æqualitas.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	5	5	2	2	2

AT proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam conſtituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio conſtituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur ſi hic numeris reliquus duplus eſt minimi, ſecto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quam alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

V[illegible]detur Arithmetica proportionalitas, 3.9.15. ſi in Geometrica conſtituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmeticæ datæ, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9. ſupererunt 6. qui numerus duplus eſt minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc 3.3.3. ex qua oritur ſecundum ſuperius præceptum.

3	9	15
3	3	3

SI vero reliquus ille numerus non eſt duplus minimi, ſecandus erit in duas partes, quæ cum minimo conſtituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 34.19.4. Facto in Geometrica extremo vno 4. minimo datæ Arithmeticæ proportionalitatis, eoq; ſubducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non eſt duplus minimi. Quare ſecto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9.6.4. ex qua rurſus ortum ducet, ex præſcripto ſuperioris præcepti.

34	19	4
9	6	4

SED quoniam reliquus ille numerus non poteſt ſemper diuidi in tales duas partes, quæ cum minimo conſtituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuiſio facienda ſit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propoſ. 17. lib. 6.) niſi numeri ſurdi, irrationaleſue adſciſcantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam ſtatim ad æqualitatem, ex qua, ſi termini æquales cum differentia propoſita coaceruentur, ortum duxit; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis ſubducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino ſublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 20.27.34. cuius differentia eſt 7. ſi 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erũt alij duo termini æquales. 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmeticæ proportionalitatis habere debent, conficietur ipſa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

20	27	34
20	20	20

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat ſecundus terminus. Eidem denique minori extremo adiiciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui ſi differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et ſi eadem differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15.15.15. ſi ex ea conſtitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia ſit 20. addatur hæc differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeas ſecundum terminum 35. Quod ſi eadem differentia duplicata, hoc eſt, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adijciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem eſt 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides.

Differentia 20.	15	15	15
	15	35	55

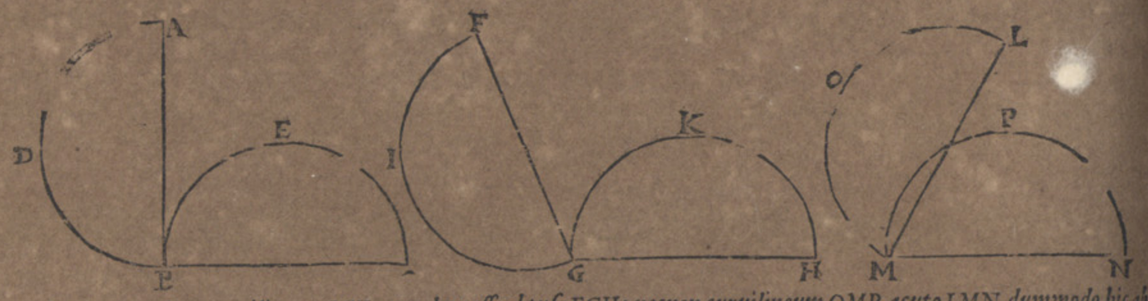
ATQVE pauca hæc prælibaſſe hoc loco ſufficiat ex infinitis, quæ de immenſa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibuſq; proprietatibus dici poſſent. Plura enim & quidem ſcitu periucunda in pleniore noſtra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

V.

RATIONEM habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſe ſe mutuo ſuperare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiuſdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum alijs auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiuſdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis ſint eiuſdem generis quantitatis, proportionem habent inter ſe, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter ſe, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem ſuperet, adeo vt ſi alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiuſdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo poßit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc eſt, bis ſumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter conſtituant triangulum Iſoſceles; [a] erunt duo latera quadrati diametro eiuſdem maiora. Ita quoq; circumferentia circuli, & diameter eiuſdem, proportionem habent, (quamuis nondum ſit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc eſt, ſumpta quater, circumferentiam ſuperat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonſtratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiuſdem, & particulam adhuc paulo minorem ſeptima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura eſt contenta duobus arcubus circulorum inſtar Lunæ nouæ, quando falcata eſſe cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc eſt, ille cuidam lunulæ, hic vero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atq; è contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonſtrauit, lineam aliquam rectam eſſe circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo eſſe æquale, vt in libello de dimenſione circuli demonſtrauit. De æqualitate porro lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoq; inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonſtrari. Oſtendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipſi eſt 4. Poſtulatum, tam recto angulo, quam obtuſo, & acuto, exhiberi poſſe angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus ABC, contentus rectis æqualibus AB, BC, circa quas ſemicirculi deſcribantur ADB, BEC. Quoniam igitur anguli ſemicirculorum ABD, CBE, ſunt æquales; addito communi angulo mixto ABE, fiet angulus totus curuilineus DBE, toti angulo recto ABC, æqualis. Similiter oſtendes, angulum curuilineum IGK, æqualem eſſe obtuſo FGH; necnon curuilineum OMP, acuto LMN, dummodo hic ab angulis ſemicirculorum LMO, NMP, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea LM, & curua MP. Ex quibus conſtat, alterutrum angulorum multiplicatum poſſe alterum excedere; quare proportionem inter ſe habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunq; multiplicata, infinitam nequit ſuperare. Sic neque linea cum ſuperficie, neq; ſuperficies cum corpore, eandem ob cauſam, vllam habebit proportionem. Deniq; non cenſebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus, quantumuis multiplicatus minor adhuc ſemper exiſtit quouis angulo rectilineo, etiam minimo, vt propoſ. 16. lib. 3. demonſtrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiuſdem generis proportionem dicantur habere, hoc eſt, quas magnitudines eiuſdem generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alteram poßit ſuperare, alias vero non, etiamſi in eodem quantitatis genere videantur comprehendi, quales ſunt linea finita, & infinita, angulus rectilineus, & angulus contactus, &c. Hanc ob cauſam in pleriſq; demonſtrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propoſitarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter ſe, donec alterum excedat. Quod etiam facit prapoſ. 1. lib. 10. & in pleriſque alijs propoſitionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiuſdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas eſſe, quæ ſub eodem genere proximo, ſiue infimo continentur. Hac enim ratione non eſſet proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter figuras rectilineas, curuilineaſque, cum non ſub eodem contineantur genere proximo: quod falſum eſſe diximus. Sileant quoque qui exiſtimant, intelligendas eſſe magnitudines in eodem genere quantitatis, ſiue in eodem genere ſubalterno, vt Logici loquuntur; ita vt ſatis ſit, vt duæ quantitates dicantur habere proportionem, ſi ſint vel lineæ, vel ſuperficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio eſſet inter angulum rectilineum, & angulum contactus, cum in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter ſe, linea finita, & linea infinita, cum in genere lineæ exiſtant: quorum vtrumque falſum eſſe, liquido ex hac definitione conſtat.

a 20. primi





PERSPICVVM eſt ex his, quam inepte, & quam falſo, hanc definitionem expoſuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, ſeu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, ſed qualem proportionem duæ quæcunque propoſitæ quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides, ſi magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc eſt, ambarum ſumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipſius A, quam multiplex D, ipſius B; habere magnitudines A, & B, eam inter ſe proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non eſſe definitionem, ſed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonſtratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione eſſe, hoc eſt, A, B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non ergo ita eſt intelligenda hæc definitio, præſertim cum tam ignota ſit hæc proportio inter C, & D, quam illa inter A, & B; quandoquidem ſemper eadem eſt. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Eſt ergo ſenſus huius definitiones ille, quem expoſuimus, vt liquido conſtat ex verbis Euclidis.

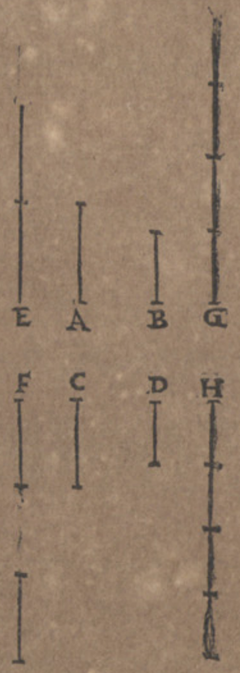
VI.

In eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam,

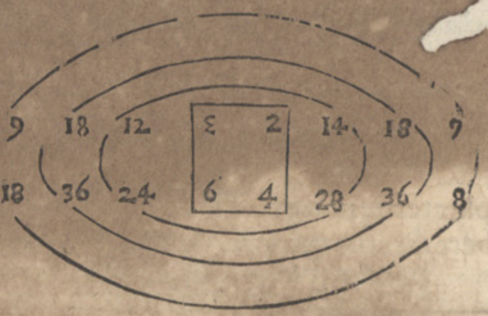
cum

cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiſcunque ſit hæc multiplicatio, vtrumq; ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedunt: ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent.

EXPLICAT hoc loco Euclides, quaſnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B ſecunda; C, tertia; & D, quarta ſumanturq; primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipſius A; & F, ipſius C: Item ſumantur ſecundæ, & quartæ alia quæcunq; æquemultiplicia; G, quidem ipſius B; & H, ipſius D, ſiue hæc duo poſteriora ſint ita multiplicia ſecundæ, & quartæ, ſicut priora duo multiplicia ſunt primæ, & tertiæ, ſiue non. Quod ſi iam inter ſe conferantur ſumpta æque multiplicia ea, quæ inter ſe reſpondent, vt multiplex primæ, & multiplex ſecundæ inter ſe, hoc eſt, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter ſe, hoc eſt, F, & H; deprehenſumque fuerit perpetuo, ea ita inter ſe habere, vt ſi E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex ſecundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus ſit quam H. multiplex quartæ magnitudinis D: Aut ſi E, æquale fuerit ipſi G; etiam F, æquale ſit ipſi H: Aut deniq; ſi E, maius fuerit quam G; etiam F, maius ſit quam H: (quod eſt vtrumq; ab vtroq; vel vna deficere, vel vna æqualia eſſe, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium poßit reperiri, id eſt, vt nunquam E, minus ſit quam G, quin & F, minus ſit quam H; & vt nunquam E, æquale ſit ipſi G. quin & F, ipſi H, ſit æquale. Deniq; vt nunquã E, maius ſit quam G, quin & F, maius ſit, quam H. Si inquam deprehenſum fuerit, æque multiplicia quæuis accepta, perpetuo ſe ſe ita habere, vt dictum eſt; dicetur eadem eſſe proportio primæ magnitudinis A, ad ſecundam magnitudinẽ B, quæ eſt proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod ſi deprehenderetur aliquando, etiam in ſolo vno genere multiplicium, multiplex D, deficere à multiplici G, non autem multiplex E, deficere à multiplici H; Aut E, æquale eſſe ipſi G, at F, non æquale ipſi H; Aut deniq; E, excedere ipſum G, at F, non excedere ipſum H, quamuis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propoſitæ eandẽ habere proportionẽ, ſed diuerſas, vt ex defin. 8. fiet perſpicuũ.



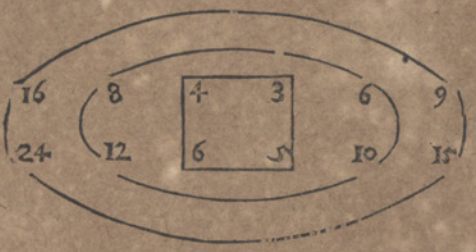
ITAQVE vt demonſtratione aliqua, per hanc 6. definitionẽ, concludantur quatuor quãtitates eandem habere proportionem, oſtendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in aliis ſeruatur) quæcunq; æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuſcunq; æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere ſemper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut exceſſus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri poßit. Similiter ſi quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoq; neceſſe eſt, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere eãdem defectus, æqualitatis, aut exceſſus conditionem, Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perſpiciatur, quonam pacto, propoſitis quatuor magnitudinibus eandem proportionem habentibus: quædam æque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, à quibuſdam æque multiplicibus ſecundæ & quartæ magnitudinis, vtrumq; ab vtroq; vna deficiant; alia vero vna æqualia ſint; alia denique vna excedant, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3. 2. 6. 4. ſumanturq; primi & tertii æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item ſecundi & quarti ſumantur alii æque multiplices, vt ſeptupli 14. & 28. Vides igitur tum 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice ſecundi, quam 24. multiplicem tertii à 28. multiplice quarti. Rurſus primi, & tertii ſumantur alii æque multiplices, nimirum ſextupli, 18. 36. Item ſecundi, & quarti ſumantur alii æque multiplices, vt noncupli 18. & 36. Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem eſſe 18. multiplici ſecundi, quam 36. multiplicem tertii, 36. multiplici quarti. Poſtremo primi, & tertii ſumantur alii æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item ſecundi, & quarti alii æque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem ſecundi, quam 18. multiplicem tertii, ſuperare 8. multiplicẽ quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus, in quacunq; ſumantur multiplicatione, ſemper deprehendatur, vnum trium horum verum eſſe, dicetur eadem eſſe proportio 3. ad 2. quæ eſt 6. ad 4. alias non.

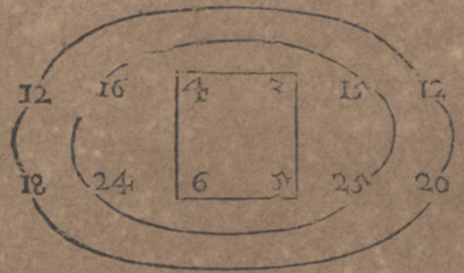


CAMPANVS vero atq; Orontius, longe aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidem velle, tum demũ quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cum primæ, & tertiæ æque multiplicia, à ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, vtrumq; ab vtroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc eſt, in eadem proportione, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedunt proportionaliter, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. Clarius, vt ait Campanus, quando earum æque multiplicia proportionalia ſunt, id eſt, cum eandem proportionem habet multiplex primæ ad multiplex ſecundæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, ſi ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod ſane abſurdum eſt. Præterea ſi Euclides vult, eas magnitudines in eadem eſſe proportione, quarum æque multiplicia (ſi ſumantur, & inter ſe conferantur eo ordine, quo dictum eſt) in eadem proportione exiſtunt; cur obſecro in 4. Theoremate huius libri demõſtrat, ſi fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æque multiplicia eo ordine, quem diximus, ſumpta, eandem quoq; habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem oſtendatur, perſpicuum eſt, idem per idem demonſtrari, quod ridiculum eſt, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, ſi ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non poſſe demonſtrari, vt propriis locis monebimus. Intelligenda eſt igitur definitio, vt expoſuimus; nimirum propoſitis quatuor magnitudinibus, ſi quotieſcunque multiplex primæ deficit à multiplici ſecundæ, vel æquale eſt, vel excedit; neceſſario etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æquale ſit, vel excedat, quicunq; ſit ille defectus, exceſſuſue, non conſiderando, an proportionalis ſit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici ſecundæ deficere, multiplicem vero tertiæ non deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem eſſe multiplici ſecundæ, multiplicem vero tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut denique multiplicem primæ maiorem eſſe multiplice ſe-

cundæ, ad multiplicem tertiæ multiplici quartæ non maiorem. Propoſitis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æque multiplicia ſumpta, vt dictum eſt, perpetuo eam conditionem in defectu, æqualitate, & exceſſu ſeruant, dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid ſit de earum æque multiplicium proportione, quæ nunc non conſideratur: ſed quarto poſtea Theoremate demonſtrabitur, eum defectum, exceſſumue eſſe proportionalem.

PORRO *Campanus conatur oſtendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & exceſſu. Nam ſi*

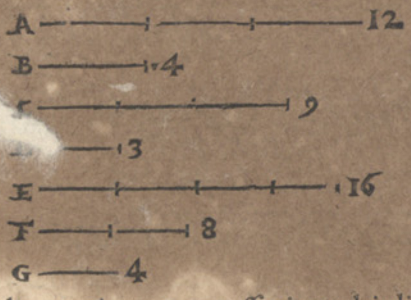




de quocunque intelligeretur, eſſent ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, vt poſe 4. & 6. ſumantur æque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item ſecundi & quarti nempe 3. & 5. æque multiplices, dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem ſecundi, quam 12. multiplex tertij 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur, ſi primi, & tertij ſumãtur quadrupli 16. & 24. ſecũdi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15, Si igitur ſufficit, vt æque multiplicia accepta vna excedant ſeſe quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter ſe mutuo ſuperent, erit eadem proportio 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod falſum eſt, cum proportio 4. ad 3. ſit ſeſquitertia, proportio vero 6. ad 5. ſeſquiquinta. Intelligendus igitur eſt defectus, aut exceſſus æque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non eſſe eandem proportionem 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non ſeſe excedant proportionaliter, vt conſtat. Veruntamen dicendum eſt, Campanum mirum in modum hallucinatum fuiſſe. Quãuis enim numeri æque multiplices ab eo prolati ſeſe vna excedant, tamẽ quam plurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidẽ multiplicem ſecũdi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet à multiplice quarti. Si n. in eius exemplo, primi & tertij ſumantur quadruplices 16. & 24. At ſecundi & quarti, quintuplices ſumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem ſecundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, ſed deficiet. Quod ſi primi, & tertij ſumantur tripli 12. & 18. At ſecundi, & quarti ſumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici ſecundi; At ve[illegible] multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, ſed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur quælibet æque multiplicia dictorum numerorum ſic ſe habere: vt ſi multiplex primi excedit multiplex ſecundi, multiplex tertij excedat quoque neceſſario multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æque multiplicibus ita eſſe contingat: non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius ex 8. definitione conſtabit.

CÆTERVM *definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, ſi modo ſecunda his ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcunque ſumpta ad 9. & 6. vel vna deficiunt ab æque multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. vel æqualia ſunt, vel vna excedunt, &c.*

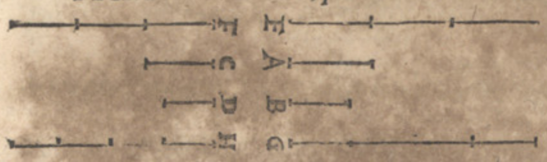
VII. EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.



VT ſi magnitudinũ A, B, C, D, eadẽ ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D, dicẽtur eæ magnitudines proportionales. Eadẽ ratione, ſi eadẽ ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G, dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sũt autẽ quædã magnitudines ꝓportionales continuæ inter quas reperitur ꝓportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G: Quædã vero proportionales ſunt nõ continue, ſed diſcrete, cuiuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his n. interruptio fit proportionũ; in illis vero nequaquã, vt dictũ eſt in 4. definitione.

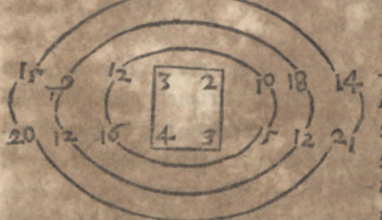
VIII. CVM vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertię non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT *hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere*



proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, dicẽs. Si ſumpta ſint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia ſecundæ & quartæ; deprehenſumque fuerit aliquando, (licet non ſemper) multiplex primæ maius eſſe multiplice ſecundæ multiplex autẽ tertiæ nõ eſſe maius multiplice quartæ, ſed vel minus, vel æquale; dicetur maior eſſe proportio primæ magnitudinis ad ſecundã, quã tertiæ ad quartã: vt perſpicuũ eſt in appoſito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, ſumpta ſunt triplicia E, & F; ſecundæ vero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniã E; multiplex primæ maius quidẽ eſt quã H, multiplex ſecundæ; At F, multiplex tertiæ maius non eſt quã H, multiplex quartæ, immo minus; dicetur maior eſſe proportio A, primæ magnitudinis, ad B, ſecundã ꝙ C, tertiæ, ad D, quartam.

NON *eſt autẽ neceſſe, vt quatuor magnitudinũ, prima ad ſecundã dicatur maiorẽ habere proportionẽ ꝙ tertia ad quartã, æque multiplicia ſecundũ quamuis multiplicationẽ ſic ſe habere, vt multiplex quidẽ primæ excedat multiplex ſecundæ, at*



multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; ſed ſatis eſt, vt ſecundũ aliquã multiplicationẽ ita ſe habeant. Poteſt namque interdũ fieri, vt tã multiplex primæ maius ſit multiplice ſecundæ, quã multiplex tertiæ multiplice quartæ. Itẽ vt & multiplex primæ minus ſit multiplice ſecundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc nõ contingit in omni multiplicatione, ſed aliquãdo multiplex primæ ſuperat quidẽ multiplex ſecũdæ, at multiplex tertiæ vel minus eſt, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorẽ dicetur habere proportionẽ prima magnitudo ad ſecundã, quã tertia ad quartam, non autem eandem, vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo.

Itaque vt quatuor magnitudines dicantur proportionales, neceſſe eſt, vt æquemultiplicia earũ, iuxta quaſuis multiplicationes accepta, vel vna deficiant, vel vna æqualia ſint, vel vna excedant, vt in 6. def. fuit expoſitum: Vt autẽ maiorẽ dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem, multiplex

prima

primæ excedat multiplex ſecundæ, multiplex vero tertiæ non ſuperet multiplex quartæ quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia primæ, ac tertiæ vna excedant æque multiplicia ſecundæ, & quartæ.

QVOD ſi quando è contrario multiplex primæ deficiat à multiplice ſecundæ, non autem multiplex tertiæ à multiplici quartæ, dicetur prima magnitudo ad ſecundam minorem habere porportionem, quam tertia ad quartam: quamuis ſecundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ vna deficiant ab æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ. Vt in eiſdem numeris propoſiti exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. & VIII. QVATVOR MAGNITUDINES PROPORTIONALES, & NON PROPORTIONALES PER EARUM ÆQUE MULTIPLICIA DEFINIERIT.

QVONIAM mirum alicui videri poſſit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc eſt, ita eſſe primam ad ſecundam, vt eſt tertia ad quartam, cum æquemultiplicia primæ ac tertiæ iuxta quamcumque multiplicationem, & æquemultiplicia ſecundæ ac quartæ iuxta quamcumque etiam multiplicationem accepta ita ſe habent, vt quotieſcunque multiplex primæ maius eſt quam multiplex ſecundæ, multiplex quoq; tertiæ maius ſit quã multiplex quartæ; quotieſcunq; vero multiplex primæ æquale eſt multiplici ſecundæ, multiplex etiam tertiæ æquale ſit multiplici quartæ; quotieſcunque denique multiplex primæ minus eſt quam multiplex ſecundæ, multiplex etiam tertiæ minus ſit quam multiplex quartæ: Item quare tum demum quatuor magnitudinum primæ ad ſecundam maiorem eſſe proportionem voluerit, quàm tertiæ ad quartam, cum aliqua æquemultiplicia primæ ac tertiæ, & alia æquemultiplicia ſecundæ ac quartæ accepta ita ſe habent, vt multiplex primæ ſit maius quam multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ maius non ſit, quam multiplex quartæ, ſed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc poſſit, quod ex illo exceſſu, æqualitate, & defectu æque multiplicium eo ordine ſumptorum non ſtatim appareat ſimilitudo proportionum, diſſimilitudoue: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem reſpondetur, Euclidem eas magnitudines voluiſſe appellare proportionales, quarum æquemultiplicia ita ſe habent, vt dictum eſt, quia non habuit quid notius, per quod explicare potuiſſet magnitudines tam incommenſurabiles, quam commenſurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque vero opus eſſe, vt ratio aſſeratur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur, ſed ſatis eſſe, vt nunquam res definita aſſeratur alicui conuenire, niſi prius, definitionem traditam eidem conuenire, demonſtretur. Id quod in aliis etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin[illegible] libr. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea ſuper aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum ſit, angulum quempiam eſſe rectum, niſi prius oſtenderit, eum ab eiuſmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima libr. 3. definiuit ſimilia circulorum ſegmenta eſſe, in quibus anguli exiſtentes ſunt æquales, ita vt tunc ſolum ei concedendum ſit, ſegmenta eſſe ſimilia, cum probauerit angulos in eis exiſtentes eſſe æquales: ſic etiam defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarum æquemultiplicia eam conditionem habent. quam explicauit, ita vt nunquam ei credendum ſit, cum quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionem, vel non eandem, niſi prius demonſtrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus conuenire. Sed quanquam reſponſio hæc vera ſit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi poſſe, vere magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent eſſe proportionales, vel non proportionales; etiamſi eas ſolum Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulo accurratius, Euclidem recte eo modo definiuiſſe magnitudines proportionales, atque adeo ſine vlla dubitatione concedi poſſe à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, vere eandem habere proportionem; illas vero, quibus definitio. 8. conuenit, non eandem proportionem habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandum ad memoriam eſt, duplicem eſſe proportionem; Rationalem, quæ inter quantitates commenſurabiles exiſtit, atque adeo omnis in numeris reperiri poteſt. Et irrationalem, quæ inter quantitates incommenſurablles exiſtit, & nullo modo in numeris poteſt reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionibus diſputationem inſtituiſſet, potuiſſet quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defin. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum: Magnitudines proportionales ſunt, cum prima ſecundæ, & tertia quartæ, æquemultiplex eſt. vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certe (vt nos ad eam defi. addidimus) cum prima ſecundam, & tertia quartam, æqualiter, continet, eademque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Non proportionales vero magnitudines ita definire potuiſſet. Magnitudines non proportionales ſunt, hoc eſt, prima ad ſecundam habet maiorem proportionem, quam tertia ad quartam, cum prima ſecundæ magis multiplex eſt, vel maior pars, maioreſue partes, quam tertia quartæ: Vel certe cum prima ſecundam ſæpius continet, quam tertia quartam, ſiue eadem pars, aut partes vtrobique ſuperſint, ſiue non; Vel cum prima ſecundam toties continet, quoties tertia quartam, ſed prima maiorem inſuper partem, maioreſue partes ſecundæ includit, quam tertia quartæ. Potuiſſet, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, ſi de ſolis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi poſſent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportiones eædem, vel diuerſæ, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, aliisq; ſcriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) eſt habitudo quædam vnius numeri ad alterum, ſecundum quod illius eſt multiplex, vel pars, parteſue: Vel certe ſecundum quod illum continet ſemel, aut aliquoties, & aliquam inſuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perſpicua ſunt tum ex definitionibus quinque ſpecierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, de quibus ſupra egimus; tum ex iis, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. ſcripſimus.

QVONIAM vero Euclides non ſolum proportiones Rationales, ſed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quod in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex eſſe poteſt maioris, neque eam ſemel aut aliquoties, & inſuper aliquam eius partem aut partes continere; Minor item maioris neque pars eſſe poteſt, neque partes; quippe cum magnitudines irrationalem habentes proportionem incommenſurabiles ſint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, poſſint habere. Quocirca coactus eſt ſeſe conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc eſt, ad proportiones numerorum, cum omnis proportio rationalis, ſiue magnitudinum commenſurabilium, ſit, vt proportio numeri ad numerum, vt libr. 10. propoſit. 5. demonſtratur: Coactus, inquam. eſt inueſtigare aliquid, quod certum ſit conuenire quibuslibet quatuor numeris ſiue magnitudinibus commenſurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeo vt, ſi idem illud conuenire demonſtretur quatuor magnitudinibus, etiam incommenſurabilibus, iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici poſſint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immo quam quælibet quatuor magnitudines commenſurabiles eandem habentes proportionem, vel non eandem, neceſſario habere demonſtratur. Neque enim aliunde cognoſcere, vel ex-

plicare aliter poſſumus magnitudines incommenſurabiles proportionales eſſe, aut non proportionales, niſi per aliquid, quod certum ſit conuenire, vt diximus, numeris quibuſcũq;, vel magnitudinibus commenſurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter ſimilitudo, diſſimilitudoue proportionum cernitur. Quemadmodum quia quando in circulorum ſegmentis anguli æquales exiſtentes, ſunt commenſurabiles quatuor rectis, hoc eſt, quando ſunt eadem pars, vel eædem partes quatuor rectorum, ſunt quoque ipſa ſegmenta eadem pars, vel eædem partes circulorum, vt ad finem libr. 6. demonſtrabimus; vt merito ſimilia appellentur, ac propterea & omnia ſegmenta alia, in quibus ſunt anguli æquales, etiamſi non ſint commenſurabiles quatuor rectis, dicantur quoque ſimilia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis conmenſurabiles ſunt, vere illa ſegmenta ſimilia ſunt, hoc eſt, eædem partes circulorum, licet hoc in ſegmentis, quando anguli in eis exiſtentes quatuor rectis ſunt incommenſurabiles, non cernatur, quod tunc ſegmenta neque eadem pars, neque eædem partes poſſint eſſe circulorum, ſed ipſis circulis omnino incommenſurabilia exiſtant. Neque enim aliud indicium habere poſſumus, ſegmenta ſimilia eſſe aut diſſimilia, niſi angelorum in eis exiſtentium æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram ſimilitudinem, aut diſſimilitudinem ſegmentorum circulis commenſurabilium colligimus. Quam ob rem ſicut nemo ſimilitudinem hanc ſegmentorum in dubium reuocat, quamquam hæc ſimilitudo in ſegmentis, quæ circulis incommenſurabilia ſunt, non ita euidenter appareat, vt in ſegmentis, quæ circulis ſunt commenſurabilia; ita non recte fecerit, qui ſimilitudinem proportionum in magnitudinibus incommenſurabilibus in dubium reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum ſit, licet hæc proportionum ſimilitudo non tam euidens ſit in magnitudinibus incommenſurabilibus.

ITAQVE *quoniam propoſitis, quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſque primi ac tertij æquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item ſecundi ac quarti æquemultiplicibus ſecundum quamuis etiam multiplicationem, ſemper verum eſt, vt mox demonſtrabimus, ſi multiplex primi maior eſt multiplice ſecundi, multiplicem tertij maiorem quoque eſſe neceſſario multiplice quarti; Et ſi ille æqualis eſt, hunc quoque eſſe æqualem; & ſi minor, minorem: Et contra quia, propoſitis quatuor numeris, ſumptiſq; æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationẽ. itẽ æquemultiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, ſi multiplice primi exiſtente maiore, quam multiplex ſecundi, multiplex tertij maior quoque ſit, quam multiplex quarti: Et ſi illo exiſtente æquali, hic quoque æqualis ſit, & illo exiſtente minore, hic ſimiliter minor exiſtat, perpetuo verum eſt, quatuor numeros eſſe proportionales: Rurſus quia propoſitis quatuor numeris, quorum primus ad ſecundum maiorem proportionem habeat, quam tertius ad quartum, ſumptiſque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus ſecundi ac quarti, neceſſario interdum accidit, vt multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, multiplex vero tertij non ſit maior multiplice quarti: Et contra quia quatuor propoſitis numeris, ſumptiſque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus ſecundi ac quarti, ſi accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem eſſe multiplice ſecundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, ſine vlla dubitatione verum eſt, maiorem eſſe proportionem primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita ſe res ſemper habet in numeris, atq; adeo & in magnitudinibus commenſurabilibus, ita vt contrarium nunquam inueniatur, non immerito dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommenſurabiles, eandem habere proportionem, cum ſumptis æquemultiplicibus primæ ac tertiæ iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus ſecundæ ac quartæ ſecundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuo deprehenditur, multiplicem tertiæ maiorem eſſe multiplice quartæ, quotieſcunque multiplex primæ maior eſt multiplice ſecundæ; multiplicem vero tertiæ æqualem eſſe multiplici quartæ, quando multiplex primæ æqualis eſt multiplici ſecundæ; multiplicem deniq; tertiæ minorem eſſe multiplice quartæ, hoc ipſo, quod multiplex primæ minor eſt multiplice ſecundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunque magnitudines tam commenſurabiles, quam incommenſurabiles, non habere eandem proportionem, ſed maiorem eſſe proportionem primæ ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam, cum, ſumptis æquemultiplicibus, vt dictum eſt, interdum contingit, multiplicem primæ eſſe maiorem multiplice ſecundæ, multiplicem vero tertiæ non maiorem multiplice quartæ: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, poſterior autẽ in non proportionalib. perpetuo reperitur, vt iamiã demonſtrabimus; nullumq; aliud indiciũ habere poſſumus, quo magnitudines incõmenſurabiles cognoſcantur eſſe proportionales: vel nõ ꝓportionales præſertim cũ magnitudines incommenſurabiles aliis magnitudinibus, quæ hoc modo proportionales eſſe demonſtrantur, ſæpenumero alia via oſtendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum ſit, quin omnes magnitudines, etiam incommenſurabiles, quarum æquemultiplices ita ſe habent, vt in 6. definit. dictum eſt, ſint proportionales, &c. Niſi enim hoc verum eſſet, ſequeretur haud dubie ex illa proportionalitate aliquando abſurdum aliquod manifeſtum: quod tamen hactenus non accidit, ſed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo ſenſu proportionalibus demonſtrantur, veriſſima eſſe plerumque alia via, vt diximus, oſtenduntur; vt poſtea etiam demonſtrabimus. Quæ cum ita ſint, liquido conſtare exiſtimo, cur Euclide: in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem recte) magnitudinum propoſitarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti ſumus Geometrice demonſtremus, adſcitis nonnullis propoſitionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. definit. aut ex demonſtrationibus huius libr. 5. pendent, vt commodiſſime ante libr. 5. poſſint demonſtrari; atq; adeo hic aſſumi, vt iam demonſtrata. Hoc autem efficiemus quatuor propoſitionibus, quæ ſequuntur.*

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſque primi ac tertii æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item ſecundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem; ſi multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, erit quoque multiplex tertii maior multiplice quarti; & ſi multiplex primi æqualis ſit multiplici ſecundi, erit & multiplex tertii æqualis multiplici quarti; ſi denique multiplex primi ſit multiplice ſecundi minor, erit & multiplex tertii multiplice quarti minor.

HABEAT *numerus primus A, ad ſecundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; ſumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices E, F: Item ſecundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiſcunque hæc multiplicatio ſit. Dico ſi E, multiplex primi A, maior eſt quam G, multiplex ſecundi B, maiorem quoque eſſe F, mul-*

multiplicem tertij C, quam H, multiplicem quarti D. Et ſi E, æqualis ſit ipſi G, æqualem quoque eſſe F, ipſi H. Si denique E, minor ſit quam G, minorem quoque eſſe F, quam H. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita C, ad D; [a] *erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D:* [b] *Vt autem A, ad C, ita eſt E, ad F; quod idem numerus ipſos A, C, multiplicans produxerit ipſos E, F, quippe cum E, & F, ipſorum A, & C, ſumpti ſint æquemultiplices. Et eadem de cauſa, vt B, ad D, ita eſt G, ad H. Igitur ex lemmate propoſ. 14. lib. 7. erit quoque, vt E, ad F, ita G, ad H.* [c] *Et permutando, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca ſi E, maior eſt quam G, erit quoque F, maior quam H, vt in primo exemplo. Si vero F, æqualis eſt ipſi G, erit quoque F, ipſi H, æqualis, vt in ſecunda exemplo: Si denique E, minor eſt quam G, erit quoque F, minor quam H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonſtrandum.*

E, 9	A, 3	C, 6	F, 18
G, 4	B, 2	D, 4	H, 8
E, 18	A, 3	C, 6	F, 36
G, 18	B, 2	D, 4	H. 36
E, 12	A, 3	C, 6	F, 24
G, 14	B, 2	D, 4	H, 28

a 13. ſeptimi.
b 17. ſeptimi.
c 13. ſeptimi.

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior ſit proportio primi ad ſecundum, quam tertii ad quartum, ſi ſumantur æquemultiplices primi ac tertii, item æquemultiplices ſecundi ac quarti, fieri poteſt, vt multiplex primi maior ſit, quam multiplex ſecundi, multiplex autem tertii non maior, quam multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad ſecundum B, maiorem proportionem, quam tertius C, ad quartum D. Dico fieri poſſe, vt ſumptis æquemultiplicibus primi A, vt tertij C, itē æquemultiplicibus ſecundi B, & quarti D, multiplex ipſius A, primi ſit maior quam multiplex ipſius B, ſecundi, at multiplex ipſius C, tertij maior non ſit quam multiplex ipſius D. quarti, multiplicantes enim ſe mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. libr. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; ſietque propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronunciat. 9. libr. 7. hoc eſt numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, ſecundo fit in E, tertium, [a] *erit vt D, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.*

K, 56	H, 7	O, 21	I, 28
F, 8	G, 1	A, 3	C, 4
	E, 6	B, 2	D, 3
M, 54	N, 6	P, 20	L, 30
K, 160	H, 440	O, 60	I, 20
F, 8	G, 22	A, 3	C, 1
	E, 80	B, 8	D, 10
M, 160	N, 80	P, 24	L, 39

a 19. ſeptimi.

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunciat. 7. libr. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunciat. 11. libr. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F G, ſietque idcirco ex B, in F G, numerus, quem B, metitur per F G, ex pronunciatio 9. lib. 7. hoc eſt numerus idem, qui ſit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in F G, quartum, & ex A, ſecundo in E, tertium gignitur, [b] *erit vt B, primus ad A, ſecundum, ita E, tertius ad F G, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita F G, ad E. Quoniam ergo eſt, vt F G, ad E, ita A, ad B; Eſt autem proportio A, ad B, poſita maior, quam C, ad D; erit quoque proportio F G, ad E, maior quam C, ad D: Oſtenſum autem eſt, eſſe vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio F G, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus F G, maior erit numero F: quæ omnia ex iis, quæ in defin. 20. lib. 7. ſcripſimus, perſpicue conſequuntur. Superet igitur F G, ipſum F, numero G.*

b 19. ſeptimi.

SVMANTVR iam ipſorum F, G, C, æque multiplices K, H, I, ea lege, vt H, ſit quidem maior quam E, at I, non minor quam D, eritque ex ſcholio propoſ. 5. lib. 7. totus K H, ita multiplex totius F G, vt eſt multiplex K, ipſius F, vel I, ipſius C, Sumantur rurſus ipſorum D, E, æquemultiplices L, M, N, ea lege, vt L, ſit multiplex ipſius D, proxime maior quam I, hoc eſt, tales æque multiplices, vt ſubtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non ſit, quam I, ſed vel æqualis, vt in ſecundo exemplo, vel minor, vt in primo exemplo contingit. Et quoniam oſtenſum eſt ita eſſe D, ad C, vt E, ad F; & ita eſt C, ad I, vt F, ad K, ex conſtructione, quod I, K, ſumpti ſint ipſorum C, F, æquemultiplices; [a] *erit quoque ex æquo, vt D, ad I, ita E, ad K.*

K, 56	H, 7	O, 21	I, 28
F, 8	G, 1	A, 3	C, 4
	E, 6	B, 2	D, 3
M, 54	N, 6	P, 20	L, 30
K, 160	H, 440	O, 60	I, 20
F, 8	G, 22	A, 3	C, 1
	E, 80	B, 8	D, 10
M, 160	N, 80	P, 24	L, 39

a 14. ſeptimi.

PRÆTEREA quoniam oſtenſum eſt eſſe D, ad C, vt E, ad F; erit permutando quoque, D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita eſt L, ad M N; quod idem numerus ipſos D, E, multiplicans fecerit L, M N, quippe cum L, M N, ſumpti ſint ipſorum D, E, æquemultiplices: Et eadem de cauſa, vt C, ad F, ita eſt I, ad K. Igitur ex lemmate propoſit. 14. libr. 7. erit quoque, vt L, ad M N, ita I, ad K, & permutando, vt L, ad I, ita M N, ad K.

QVIA ergo eſt, vt totus L, ad I, ita totus M N, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex M N, ablatus ad eundem K; erit quoque ex theor. 6. ſcholij propoſitio 22. lib. 7: vt reliquus ex L. ad I. ita reliquus ex M N, ad K:

ad K: Eſt autem reliquus ex L, non maior quam I, ſed vel minor, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in poſteriori; propterea quod reliquus ex L, cum D, facit ipſum L, multiplicem ipſius D, proxime maiorem ipſo I, ex conſtructione. Igitur & reliquus ex MN, maior non erit quam K; atque idcirco ſi ex MN, detrahatur N, ipſi E, æqualis, erit reliquus M, vel minor ipſo K, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in poſteriori. Cum ergo H, multiplex ipſius G, ſit maior quam E, vel N, ex conſtructione; erit totus KH, toto MN, maior.

DENIQVE *ſumpto O, ita multiplici ipſius A, vt KH, multiplex eſt ipſius FG, vel I, ipſius C: Itẽ P, ita multiplici ipſius B, vt MN, multiplex eſt ipſius E, vel L, ipſius D: quoniam oſtenſum eſt, ita eſſe FG, ad E, vt A, ad B, ſumptique ſunt ipſorum FG, & A, primi ac tertij, æquemultiplices KH, & O; item ipſorum E, & B, ſecundi ac quarti æquemultiplices MN, & P, ſequitur ex antecedente propoſitione ſi KH, maior eſt quam MN, ipſum quoque O, maiorẽ eſſe quam P. Cum ergo KH, oſtenſus ſit maior quam MN, erit quoque O, maior quam P. Quocirca cum O, I, ſint æquemultiplices ipſorum A, C, primi ac tertij; & P, L, æquemultiplices ipſorum B, D, ſecundi ac quarti, demonſtratumque ſit, maiorem eſſe O, quam P, ſit autem I, minor quam L, ex conſtructione; fieri poteſt, vt exiſtente maiore proportione primi A, ad ſecundum B, quam tertij C, ad D, quartũ, ſumptiſq; æquemultiplicibus, vt dictum eſt, multiplex primi, nimirum O, maior ſit quam P, multiplex ſecundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non ſit quam L, multiplex quarti. Quod demonſtrandum erat.*

QVOD *ſi minor ſit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum, ſumanturque æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices ſecundi ac quarti, fieri quoque poteſt, vt nonnunquam mutiplex primi ſit minor multiplice ſecundi, multiplex vero tertij non ſit multiplice quarti minor.*

IN *eodem enim exemplo, minor eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quam A, tertij ad B, quartum, demonſtratumque eſt, I, multiplicem primi C, minorem eſſe, quam L, multiplicem ſecundi D, at O, multiplicem tertij A, maiorem eſſe quam P, multiplicem quarti B.*

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, ſumptiſq; æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, ſi multiplice primi exiſtente maiore, quam multiplex ſecundi, multiplex tertii maior quoque ſit neceſſario, quam multiplex quarti: & illo exiſtente æquali, hic quoque ſemper ſit æqualis; illo denique exiſtente minore, hic quoque perpetuo minor ſit: erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertii ad quartum.

E, 9	A, 3	C, 6	F, 18
G, 4	B, 2	D, 4	H, 8
E, 18	A, 3	C, 6	F, 36
G, 18	B, 2	D, 4	H, 36
E, 12	A, 3	C, 6	F, 24
G, 14	B, 2	D, 4	H, 28

SINT *quatuor numeri A, B, C, D, ſumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices qualeſcunque E, F. Item ſecundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiſcunque etiam hæc ſit multiplicatio. Dico ſi E, F, multiplices primi ac tertij ſemper ſint vel maiores, quam G, H, multiplices ſecundi & quarti, vel æquales, vel minores, ita eſſe A, primum ad B, ſecundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si namque foret maior proportio A, ad B, vel minor, quam C, ad D, fieri poſſet, veluti in antecedente propoſ. demonſtratum eſt, vt E, multiplex primi eſſet aliquando maior, aut minor, quam G, multiplex ſecundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quam H, multiplex quarti. Quod eſt contra hypotheſin. Eſt ergo A, ad B; vt C, ad D. Quod erat oſtendendum.*

IIII.

PROPOSITIS quatuor numeris, ſumptiſque primi ac tertii æquemultiplicibus, item ſecundi & quarti æquemultiplicibus; ſi quando contingat, multiplicem primi maiorem eſſe multiplice ſecundi, multiplicem vero tertii non maiorem multiplice quarti; Maior erit proportio primi ad ſecundum, quam tertii ad quartum.

SINT *quatuor numeri A, B, C, D, ſumptiſque ipſorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipſorum B, & D, ſecundi ac quarti æquæmultiplicibus G, & H, ſit E, multiplex primi A, maior quam G, multiplex ſecundi B, at F, multiplex tertij C, non maior quam H, multiplex quarti D. Dico maiorem eſſe proportionem primi A, ad B, ſecundum, quam C, tertij ad D, quartum.*

E, 21	A, 3	C, 4	F, 28
G, 20	B, 2	D, 3	H, 30

Quoniam enim maior eſt E, quam G, at F, non maior quam H, erit maior proportio E, ad G, quam F, ad H, cum illa ſit proportio maioris inæqualitatis. hæc vero vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. erit quoque permutando maior proportio E, ad F, quam G, ad H.

a 17. ſeptimi. *a Eſt autem, vt E, ad F, ita A, ad C, quod idem numerus ipſos A, C, multiplicans procreauerit E, & F; quippe cum E, F, æquæmultiplices ſint ipſorum A, C; Eademque de cauſa eſt, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quam B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod oſtendendum erat.*

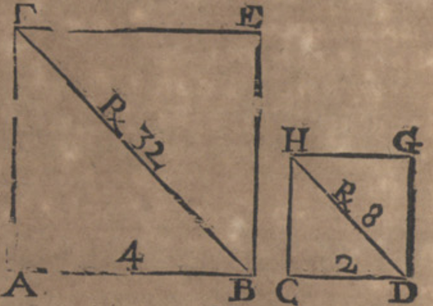
QVOD *ſi multiplex primo ſit minor multiplice ſecundi, ſed multiplex tertij non ſit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum.*

E, 28	A, 4	C, 3	F, 21
G, 30	B, 3	D, 2	H, 20

EADEM *enim omnino demonſtratio eſt, ſi pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri ſunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor eſt quam G, multiplex ſecundi B, ſed F, multiplex tertij C, minor non eſt, quam H, multiplex quarti, &c.*

SED

SED demonſtremus iam, in magnitudinibus, quæ aliis incommenſurabiles ſunt, & quæ ex definit. 6. proportionales ſunt eam plerumq; reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi poßit: adeo vt vere proportionales ſint magnitudines, quibus definitio 6. euenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo ſenſu ſumptis verum conſequitur, & nihil abſurdi inde inferri poteſt. Hoc enim paulo ante demonſtraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta AB, verbigratia, rectæ CD, dupla, & ſuper ipſas rectas deſcribantur quadrata ABEF, CDGH; cum diametris BF, DH. Et quia ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc eſt, quadrati ABEF, quam quadratum diametri DH, quadrati lateris CD, hoc eſt, quadrati CDGH, duplum eſt; ſi ponatur latus AB, 4. & latus CD, 2. erit quadratum ABEF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplũ, 32. ac proinde diameter ipſa BF, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cum ea maior ſit quam 5. minor autem quam 6. nullusque numerus inter 5. & 6. medius, hoc eſt, compoſitus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, in ſe ductus poßit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate ſequenti perſpicuum fiet. Quadratum autem CDGH, erit 4. & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipſa DH, erit radix quadrati numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cum ea maior ſit quam 2. minor autem, quam 3, &c. ita vt proportio tam AB, ad BF, quam CD, ad DH, ſit irrationalis, diameterque propterea BF, lateri AB, & diameter DH, lateri CD, incommenſurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propoſ. vltima lib. 10. demonſtrauit ex iis, quæ l. 6. de magnitudinibus proportionalibus per deſin. 6. huius 5. lib. demonſtrata ſunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiuſdem quadrati eſſe incommenſurabilem, eſſe re ipſa veriſſimum, quippe cum idem nos alia via ſine proportionibus hoc loco oſtenderimus.



RVRSVS quoniam diametri BF, DH, diuidunt angulos rectos quadratorum bifariam, vt in ſcholio propoſ. 34. libr. 1. & in coroll. 2. propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, erunt anguli ABF, AFB, CDH, CHD, ſemirecti, ideoq; inter ſe æquales. Cum igitur & recti anguli A, C, ſint æquales, æquiangula erunt triangula ABF, CDH. Quare [a] erit, vt AB, ad BF, ita CD, ad DH; Et permutando, vt AB, ad CD, ita BF, ad DH. Eſt autem poſita recta AB, rectæ CD, dupla. Igitur & BF, ipſius DH, dupla erit. Itaque cum ex deſin. 6. huius lib. eo deducti ſimus, vt credamus diametrum BF, diametri DH, eſſe duplam, quamuis vtraque diameter ad ſuum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propoſ. 4. lib. 6. ex qua oſtendimus, ita eſſe AB, ad BF, vt CD, ad DH, pendet ex propoſ. 2 & hæc ex 1. eiuſdem lib. 6. Prima autem propoſ. lib. 6. vim ſuam accipit ex deſin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vſi ſumus, ſine eadem deſin. 6. demonſtrari non poteſt in magnitudinibus incommenſurabilibus, vt ex propoſit. 16. libr. 5. conſtat.) videamus, an aliunde cognoſcere poßimus, diametrum BF, diametri DH, vere duplam eſſe, vt ex deſin. 6. concluſum eſt, hoc ipſo, quod latus AB, lateris CD, duplum ponitur, etiamſi proportio tã lateris AB, ad diametrum BF, quam lateris CD, ad diametrum DH, irrationalis ſit. Hoc autem ſine proportionibus facile ita cognoſcemus. Quoniam latus AB, lateris CD, duplum eſt, erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, quadruplum. Poſito ergo quadrato AE, 4. erit quadratum CG, 1. Et quia tam quadratum diametri BF, quadrati AE, quam quadratum diametri DH, quadrati CG, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. duplum eſt; erit quadratum diametri BF, 8. & quadratum diametri DH, 2. atque idcirco illud huius quadruplum erit. Quocirca ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta BF, rectæ DH, dupla erit. Vides ergo rurſus, ſi procedamus per ea, quæ ex deſin. 6. huius libr. de magnitudinibus proportionalibus demonſtrata ſunt, nos perueniſſe ad concluſionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter ſe duplam, ſi latus vnius ſit lateris alterius duplum: vt dubium non ſit, quin magnitudines vere proportionales ſint, quarum æquemultiplicia eam conditionem habent, quam definitio 6. præſcribit. Porro ex regulis quoque numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, conſtat diametrum BF, hoc eſt, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum DH, id eſt, ad R. 8. Nam ſiue R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens ſit R. 4. hoc eſt, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad diametrum DH, denominat; ſiue R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atque hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommenſurabilium proportionibus demonſtrantur ex deſin. 6. huius libr. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæ res argumento rurſum eſt, magnitudines, quibus deſin. 6. huius lib. conuenit, vere eſſe proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonſtrationibus, quæ ex ea deſin. pendent, perpetuo conſentire comperitur, vt iis, qui in Algebræ præceptis verſati ſunt, notiſſimum eſt.

a 4. ſexti.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compoſitus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitum ſecetur, gignere poſſit integrum numerum 32. hoc modo facile demonſtrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunque fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. reuoceturque, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionem $\frac{38}{7}$. Certum autem eſt, denominatorem 7. non metiri numeratorem 38. Alioquin diuiſis 38. per 7. fieret. Quotiens numerus integer ſine fractione, quod eſt contra hypotheſin. Multiplicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in ſe, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonſtrabimusq; ad finem lib. 9. ſi tam numerator 38. in ſe, quam denominator 7. in ſe ducatur.) gignaturq; fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. ſit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt oſtendimus, [a] non metietur quoque quadratus 49. quadratum 1444. Quare diuiſo quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, ſed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratum 1444. cuius contrarium demonſtrauimus. Atq; eadem ratione demonſtrabitur, quemcunq; numerum integrum cum fractione qualibet in ſeipſum ductum gignere numerum integrum cum fractione. Quod ſi fractio, cuius numerator denominatore minor ſit, in ſe dicatur, producetur ſemper fractio, cuius numerator etiam minor eſt denominatore. Nam cum numerator fractionis productæ ſit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, ſi autem datæ fractionis numerator minor denominatore; erit quoq; illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. in ſe gignitur

a 16. Octaui.

tur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor eſt. Itaq; quæcunque fractio in ſe multiplicata gignit numerum non integrum, niſi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, ſed ea fractio numerus integer potius eſt: qualis eſt fractio $\frac{200}{25}$. quæ 4. integras vnitates conſtituit.

IX.

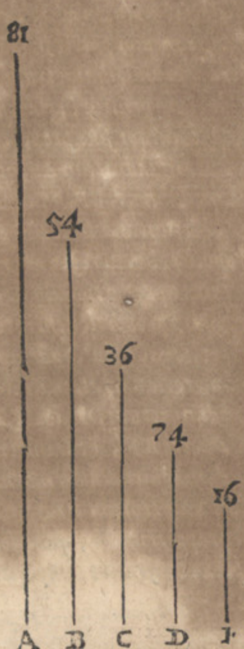
PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.



QVONIAM omnis Analogia, ſeu proportionalitas, quam interpres, vt dictum eſt, proportionem nominat, ſimilitudo eſt duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & conſequentem, neceſſe eſt, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duos terminos antecedentes, ac duos conſequentes. Quare ſi proportionalitas fuerit non continua, requirentur ſaltem quatuor termini, ſiue magnitudines; At vero ſi fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis ſumitur, cum ſit conſequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atq; hic eſt minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuſcunq; ſolum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.



VELVTI ſi ſint magnitudines A, B, C, D, E, contin. proportionales, ita vt ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D: & D, ad E: proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, id eſt, bis ordine poſitam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, ad D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atq; idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id eſt, ter ordine poſitam: Sic quoq; proportio A, ad E, dicitur quadruplicatata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æqualas ſunt proportioni A, ad B, &c.

QVOD ſi è contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione, ſi proponantur plures quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, eſſe duplam proportionis primæ quantitatis ad ſecundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, eſſe triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam, &c. Quod tamen nulla eſt ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc ſignificare voluit, ſed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad ſecundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, vt diximus. Non autem intelligit, illam duplam eſſe huius, ne Theorema proponeret, quod merito quiſpiam concedere recuſaret, Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit eſſe quincuplam? At vero, illam dici huius duplicatam ad ſenſum expoſitum, nemo inficiabitur, eo quod bis ſit poſita, & continue, proportio 25. ad 5. Deinde quomodo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor ſit, hæc autem maior? Nam per propoſ. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quam ad quantitatem 25. propterea quod 25. maior eſt, quam 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob cauſam iam explicatam, licet ſit eius quinta pars. Quare etſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio eſt eiuſdem dupla. Quemadmodũ etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, ſit ſedecupla, vt hic patet 16. 4. 1. Deniq; in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continue proportionalibus, qui fieri poteſt, vt proportio primi ad tertium dupla ſit proportionis primi ad ſecundum, cum ſit omnino eadem? duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quod hæc ordine bis poſita eſt continue inter primum numerum & tertium.

SED *auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt eſſe duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad ſecūdam, (inter quos auctores eſt etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus ſit præſtantiſſimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inæquales, primamq; debere eſſe maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda ſit neceſſario de proportione continua maioris inæqualitatis. Quare mirum non eſt, vt aiunt, neq; proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neq; proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam eſſe. Verum hæc expoſitio non ſolum vera non eſt, ſed Euclidi prorſus eſt contraria: quippe qui aſſumat pleriſq; in locis, triplicatam proportionem reperiri in proportione minoris inæqualitatis. Locus clariſſimus eſt, vt alios omittam, in propoſ. 12. lib. 12. vbi demonſtrat, ſimiles conos, & cylindros in triplicata ratione eſſe diametrorum, quæ in baſibus. Nam ſi referatur maior conus, vel cylindrus ad maiorem; neceſſario in ſecunda parte eius demonſtrationis, aſſumit Euclides demonſtratum eſſe propoſ. 8. eiuſdem lib. 12. pyramides ſimiles, etiamſi minor ad maiorem referatur, in triplicata eſſe homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit propoſitiones illas, in quibus figuræ aliquæ demonſtrantur habere rationum laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiuſmodi eſt 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuerſales, ſi ſolum de proportione maioris inæqualitatis eſſent intelligendæ. Explicanda ergo eſt hæc definitio, vt nos expoſuimus.*

Itaq; hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum ſit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonſtrationes ſequentium librorum percipiantur, rebuſq; poſſint materialibus accommodari. Non autem determinat, quænam proportio ſit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propoſitione 20. lib. 6. conſtat, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam eſſe proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus poſterioris, colligendum erit, ſi continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, eſſe eam, quæ eſt primi termini ad tertium; ita vt ſi prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, poſterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad poſterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ eſt nōcupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis eſt 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perſpicuum eſt. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo eſſe maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum poſterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud ſit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eiſdem his numeris 1. 3. 9. manifeſtum eſt. Simili ratione, quoniam li[illegible]2. propoſ. vltima, demonſtratur ſphæras inter ſe rationem habere ſuarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, ſphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad ſphæram, cuius diameter eſt vnius palmi tantum, proportionem habere quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, vt hic apparet. 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propoſitis duabus ſphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt ſphæræ ipſæ proportionem millecuplam, cum hæc ſit decuplæ triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem eſſe triplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius trigecuplam decuplæ eſſe triplam?

Cæterum propoſita quacunq; proportione rationali, ſi eius denominator in ſe ipſum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propoſitæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore ſcilicet proportionis quadruplæ, in ſe, producuntur 16. ideo proportio ſedecupla dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis ſub quadruplæ, in ſe, producantur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio ſubſedecupla, duplicata proportionis ſubquadruplæ. Quod ſi denominator rurſus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rurſus ſi in poſterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atq; ita de cæteris. Itaq; proportionis duplicatæ denominator ꝓducitur ex denominatore propoſitæ proportionis bis poſito, atq; ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis bis poſito, in hunc modum 3. 3. ac ſic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni poteſt 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propoſitæ proportionis denominatore ter poſito, & ſic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter poſito ſic 3. 3. 3. atq; ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex denominatore quater poſito: Quintuplicata ex eodem quinquies poſito, atq; ita multiplicato, &c. Itaq; duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac defin. agitur nihil aliud eſt, quam multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter ſe. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter ſe habent, quæ propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus eſt, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis poſitus eſt, vel ter, vel quater, &c. atq; ſic multiplicatus fuit, vt expoſuimus. Verbi gratia, propoſitis hiſce quatuor numeris continue proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter poſito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atq; ita multiplicato, dicendo quater quatuor ſunt 16. & quater 16. ſunt 64.

Denominatores.	4	4	4	
Num. propor.	192	48	12	3

Sic etiam inuerſis iiſdem numeris, vt ſint continue proportionales in proportione ſubquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis ſubquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis ſubquadruplæ ter poſito, & ſic multiplicato, ob tres proportiones ſubquadruplas inter extremos interpoſitas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$.

Denominatores.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Num. proport.	3	12	48	192

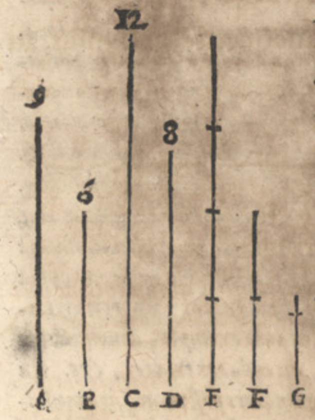
Nihil obſtat ergo, quo minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici poſſit triplicata proportionis ſubquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor ſit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus eſt ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter poſito, & ſic multiplicato, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici poteſt triplo maior proportione ſubquadrupla 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. ſed $\frac{3}{4}$. atq; ita proportio ſub-

ſeſquitertia dicetur tripla proportionis ſubquadruplæ: ſicut etiam non proportio à 64. denominata, ſed proportio duodecupla, eſt proportionis quadruplæ tripla; propterea quod denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. ſed 12. Porro continuatis quotcunq; numeris proportionalibus, ſiue maiores cum minoribus, ſiue minores cum maioribus conferantur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter ſe multiplicatis, demonſtrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum eſſe alterius, duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus eſt, vel triplus, &c. ita vt proportio decupla ſit dupla quintuplæ, & ſextupla ſit tripla duplæ, &c. oſtendemus ad finem lib. 9. tractatumq; eſt hoc argumentum copioſe à Rodulpho Volumnio in Diſputatione de proportione proportionum. Nunc ſatis ſit, hoc ipſum communi hominum iudicio ex ſenſibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens ſit 10. & Patiens 1. quis tam mente captus erit, qui non ſtatim intelligat, ſi idem Agens augeatur, vt fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorem habere potentiam reſpectu eiuſdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla cuius denominator 20. duplus eſt denominatoris 10. dupla eſt proportionis decuplæ, non autem proportio centupla, vt auctores contrariæ ſententiæ volunt, ſed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10. in ſe, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplam proportionem habentes interijciuntur, vt hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiam ſi è contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia ſubdecuplam, ita vt Agens ſit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod ſit 2. duplo eſſe potentius reſpectu eiuſdem Patientis 10. quàm Agens 1? Cum ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionem ſubquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis ſumpto, erit profecto proportio ſubquintupla proportionis ſubdecuplæ dupla, non autem illa quæ ſubcentupla eſt, vt prædicti auctores volunt, cum hæc longe minor ſit, quam ſubdecupla. Dicetur tamen proportio ſubcentupla proportionis ſubdecuplæ duplicata, propter cauſam ſæpius explicatam, vt hic patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obſcure colligi poteſt, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, ſapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem vero, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habere conditionem ſuperficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Deniq; proportionem, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interijciantur, obtinere naturam ſolidi, atq; adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus conſurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebræ regulam expoſuerunt.

XI.

HOMOLOGÆ, ſeu ſimiles ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.



Definiuit ſupra proportionalitatem, proportionum eſſe ſimilitudinem. Docet iam, non ſolum in proportionalitate quauis proportiones dici ſimiles; Verum etiam terminos ipſos, ſeu quantitates, ſimiles dici, homologasue; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, ſeu ſimiles proportione inter ſe, nec non conſequentes inter ſe, vt intelligeremus in quamplurimis demonſtrationibus, quænam latera figurarum inter ſe comparata, antecedentia debeant eſſe proportionum, & quænam conſequentia, vt in 6. lib. perſpicuum fiet. Si igitur eſt proportio A, ad B, quæ C, ad D, dicetur quantitas A, ſimilis quantitati C, & B, ſimilis ipſi D. Propter ſimilitudinem enim proportionum, neceſſe eſt, vtramq; magnitudinem antecedentem vel æqualem eſſe vtriq; conſequenti, vel eodem modo maiorē, aut minorem: Alias non haberet vtraq; antecedens ad vtramq; conſequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propoſitis, in quibus antecedentes maiores ſunt eodem modo conſequentibus, videlicet dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tam E, & F, homologæ ſunt, quam F, & G, vt conſtat. Atq; hanc ob cauſam Euclides in defin. 6. & 8. iuſſit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc eſt, antecedentium: Item alia æque multiplicia ſecundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum conſequentium. Hæ enim ſimiles ſunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione conſtat: in magnitudinibus vero non proportionalibus diſſimiles.

Orontius, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter ſe conferri poſſe & antecedentes magnitudines; & conſequentes; veluti in ſequentibus definitionibus patebit. Verum ſi verba definitionis diligentius ponderentur, & vſus eiuſdem in 6. lib. conſideretur, noſtram expoſitionem huic anteferendam eſſe, nemo dubitabit.

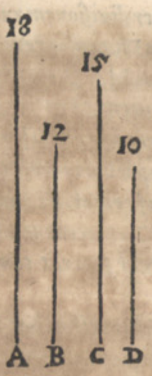
XII.

ALTERNA ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentē, & conſequentis ad conſequentem.

EXPLICAT *hic quoſdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentiſſimus eſt vſus apud Geometras. Hi autem ſunt numero ſex, Primus dicitur proportio alterna, ſiue permutata: Secundus, inuerſa, ſeu proportio è contrario: Tertius, compoſitio rationis, ſeu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuiſio rationis, vel diſiuncta proportionalitas; Quintus, conuerſio rationis, ſiue euerſa proportionalitas: Sextus deniq; vocatur proportio ex æqualitate, ſeu æqua proportio. Alterna igitur ſeu permutata proportio, inquit eſt, cum propoſitis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem eſſe proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem poſterioris, quam habet conſequens illius ad conſequentem huius. Vt ſi ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem eſſe proportionem A, ad C; quæ eſt B, ad D, dicemur argumentari à permutata proportione. Græci ſcriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt eſt A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, ſeu viciſſim, erit*

quoq;

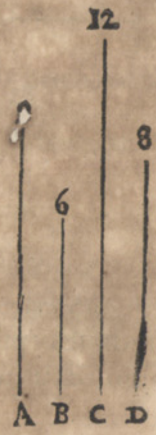
quoq; A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem eſſe huiuſmodi illationem, demonſtrabitur propoſ. 16. lib. huius. Cæterum in hoc modo argumentandi, neceſſe eſt, omnes quatuor magnitudines eſſe eiuſdem generis, vt inter binas vt vt aſſumptas proportio eſſe poſſit. Non enim recte infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D, cum nulla ſit proportio lineæ ad numerum, aut contra, vt perſpicuum eſt ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui ſequuntur; poſſunt eſſe priores magnitudines in vno genere magnitudinis, & poſteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonſtrationibus huius lib. 5. conſtabit.



XIII.

INVERSA ratio, eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad conſequentem.

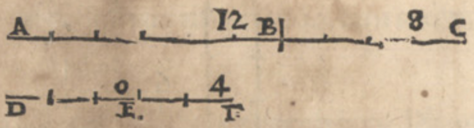
VT ſi ex eo, quod eſt A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita eſſe B, ad A, vt D, ad C, hoc eſt, conſequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuerſa proportione In hac argumentatione ſic ferè loquuntur auctores. Vt eſt A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel è contrario, erit quoq; B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum eſſe, oſtendetur in coroll. propoſ. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines poſſunt eſſe vnius generis, & poſteriores alterius. Recte namq; licebit inferre: vt ſe habet linea A, ad lineam B, ita ſe habet triangulum, ſeu numerus C, ad triangulum, ſeu numerum D, Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, ſeu numerus D, ad triangulum, ſeu numerum C, vt ex coroll. propoſ. 4. conſtabit.



XIV.

COMPOSITIO rationis, eſt ſumptio antecedentis cum conſequente, ceu vnius, ad ipſam conſequentem.

SIT proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoq; eſſe proportionem totius AC, nempe antecedentis cum conſequente, ad BC, conſequentem, quam habet tota DF, antecedens nimirum cum conſequente, ad EF, conſequentem; dicetur huiuſcemodi argumentatio compoſitio rationis, eo quod ex antecedente, & conſequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos ſcriptores reperies in hac argumentione; Vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonſtrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propoſ. 18.



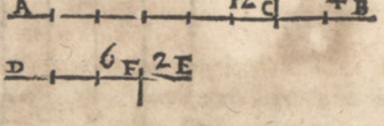
Huic modo argumentandi per compoſitionem rationis addi poſſunt alij duo. Primus dici poteſt, Compoſitio rationis conuerſa; quando nimirum ſumitur antecedens, & conſequens, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt ſi eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimuſq; Ergo vt AC, ex antecedente, & conſequente conflata, ad antecedentem AB, ita eſt DF, ex antecedente & conſequente compoſita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem eſſe validam, demonſtrabimus ad propoſ. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compoſitionem rationis conuerſam.

Alter modus dici poteſt, Compoſitio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & conſequentem, ceu ad vnam. Vt ſi eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimuſq; per compoſitionem rationis contrariam; Igitur erit vt AB, antecedens ad totam AC, ex antecedente, & conſequente compoſitam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente, & conſequente compoſitam. Atq; hanc argumentandi formulam valere, ad propoſ. 18. huius lib. oſtendemus.

XV.

DIVISIO rationis, eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſam conſequentem.

VT ſi dicatur, quæ proportio eſt totius AB, ad CB, ea eſt totius DE, ad FE; Igitur erit & AC, exceſſus, quo antecedens conſequentem ſuperat, ad CB, conſequentem, vt DF, exceſſus, quo conſequentem excedit antecedens, ad FE, conſequentem. In diuiſione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hæc porro illatio oſtendetur propoſ. 17. huius lib.



Poſſunt etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuiſionem rationis conuerſam dicere poſſumus; quando nimirum conſequens ad exceſſum, quo conſequentem ſuperat antecedens, refertur. Vt ſi eſt, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, con-

FE, concludimuſq; per diuiſionem rationis conuerſam; Ergo erit, vt CB, conſequens ad AC, exceſſum, quo antecedens conſequentem ſuperat, ita FE, conſequens ad DF, exceſſum quo antecedens ſuperat conſequentem. Valere autem hanc argumentationem, oſtendemus ad 17. propoſ. huius lib,

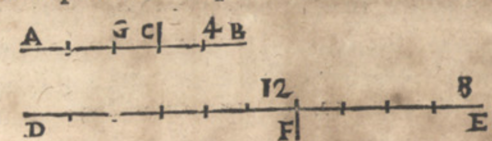
Perſpicuum autem eſt, vt vtraq; harum argumentationum per Diuiſionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & noſtra, antecedentem debere eſſe maiorem conſequente. Aliàs Diuiſio fieri non poſſet.

Alter modus appellari poteſt Diuiſio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum exceſſu, quo conſequens antecedentem ſuperat. Vt cum dicimus. Ita ſe habet AC, ad AB, vt DF, ad DE. Igitur erit quoq; per diuiſionem rationis contrariam vt AC, antecedens ad CB, exceſſum, quo conſequens antecedentem ſuperat, ita DF, antecedens ad FE, exceſſum, quo antecedentem ſuperat conſequens. Qui modus argumentandi demonſtrabitur etiam à nobis ad propoſ. 17. huius lib.

Porro manifeſtum eſt, in hac Diuiſione rationis contraria conſequentem debere eſſe maiorem antecedente, vt ſumi poſſit exceſſus, quo conſequens antecedentem ſuperat.

XVI.

CONVERSIO rationis, eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo ſuperat antecedens ipſam conſequentem.



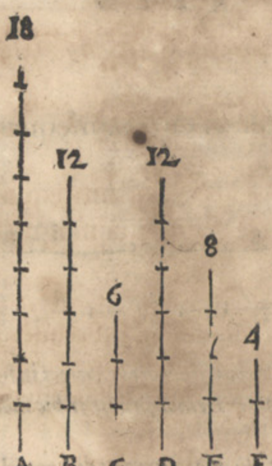
QVOD ſi colligamus hoc modo. Sicut eſt tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, exceſſum, quo conſequentem ſuperat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemur per conuerſionem rationis argumentari. Vnde ſic fere loquuntur ſcriptores. Igitur per conuerſionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propoſ. 19. huius lib.

Liquido etiam conſtat, in hoc modo argumentandi per conuerſionem rationis antecedentem debere conſequentem ſuperare, vt exceſſus, quo antecedens conſequentem ſuperat, ſumi poſſit.

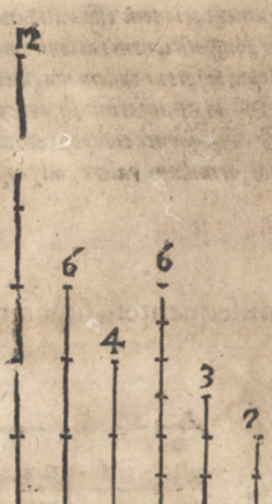
XVII.

EX æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ ſumantur, & in eadẽ ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ſic & in ſecundis magnitudinibus prima ad vltimam ſeſe habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per ſubductionem mediorum.



SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, ſintq; binæ ac binæ in eadem proportione, hoc eſt, A, ad B, vt D, ad E, & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam eſſe proportionem A, ad C, primæ ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ eſt D, ad F, primæ magnitudinis ad vltimam in ſecundis magnitudinibus; dicetur huiuſmodi argumentandi formula deſumpta ex æquo, ſiue ex æqualitate, in qua ſcilicet extremæ magnitudines, ſubductis medijs, colliguntur habere vnam, eandemq; inter ſe proportionem; vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando ſumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinate procedendo, altero vero, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus ſequentib. definitionibus, quid ſit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

ORDINATA proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad cõſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam, vt conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

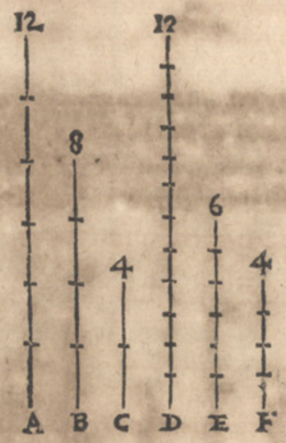
VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rurſus vt B, conſequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, conſequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in ſecundis ſeruatur; cum vtrobiq; conferatur primum prima cum ſecunda; deinde ſecunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate ſeruatur Ordinata proportio, demonſtratur propoſ. 22. huius lib. eam argumentationem eſſe bonam.

XIX.

XIX.

PERTVRBATA autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & alijs, quæ ſint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

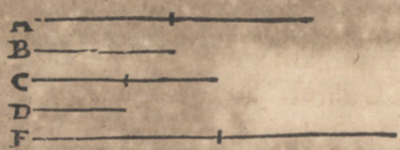
SI autem ſit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur huiuſcemodi proportio, Perturbata: quòd non ſeruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum ſecunda, at in ſecundis ſecunda cum tertia; deinde in primis ſecunda cum tertia, at in ſecundis prima cum ſecunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate ſeruatur Perturbata proportio, demonſtratur, eam argumentationem eſſe bonam, propoſ. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, ſemper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiam ſi plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propoſ. 22. & 23. huius lib. perſpicuum fiet.



Vtuntur Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam, quod vt hic ſubijceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiuſmodi eſt.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo propoſita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad qua uis magnitudinem propoſitam.

VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo propoſita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propoſitam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quænam ſit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non eſt, eam eſſe poſſe in rerum natura, cum id contradictionem non implicet, vt Philoſophi loquuntur, neq; abſurdi aliquid ex eo conſequatur.

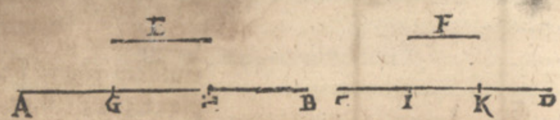


THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

SI ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æque multiplices; quam multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æquè multiplices. Dico magnitudines AB, CD, ſimul, tam eſſe multiplices magnitudinum E, F, ſimul, quam eſt multiplex AB, ipſius E, vel CD, ipſius F. Cum enim AB, CD, ſint æque multiplices ipſarum E, & F, ſi AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipſi E, æquales, & CD, quoque in magnitudines CI, IK, KD, ipſi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, C, D, ſint ipſarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in in AB, perfecte contineatur, quoties F, in CD, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus, conſtat) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot ſunt magnitudines CI, IK, KD, Quoniam vero AG, & E, æquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur æquales CI, & F,[a] erunt AG, CI, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt GH, & IK, ſimul æquales ipſis E, & F, ſimul; Nec non HB, & KD, eiſdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, ſimul, in AB, CD, ſimul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB, CD, ſimul, ipſarum E, & F, ſimul, vt conſtat ex ijs, quæ in defin. 2. lib. huius ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 2. pron.

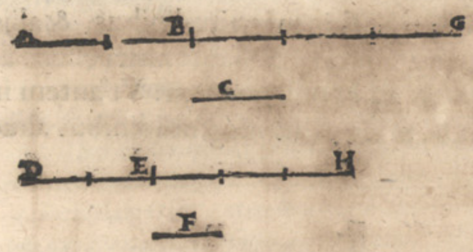


SCHOLIVM.

HOC idem demonſtrabitur vniuerſe propoſ. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Neceſſarium autem fuit, idipſum prius hoc loco in proportione multiplici demonſtrare, quia ex eo aliæ propoſitiones demonſtrandæ ſunt, antequam propoſitio 12. poſſit demonſtrari.

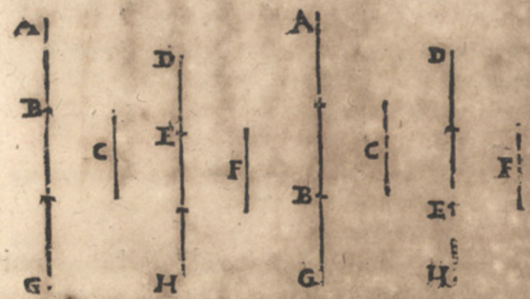
THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ, erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.



SIT magnitudo prima AB, tam multiplex ſecundæ C, quam eſt multiplex DE, tertia, quartæ F; Rurſus tam ſit multiplex BG, quinta ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt EH, ſexta ipſius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compoſitam, tam multiplicem eſſe ſecundæ C, quam multiplex eſt, DE, tertia compoſita cum ſexta EH, ipſius F, quartæ. Cum enim AB, ſint æque multiplices ipſarum C, F, erunt in AB, tot magnitudines ipſi C, æquales, quot ſunt in DE, æquales ipſi F. Eadem ratione erunt & in BG, tot æquales ipſi C, quot ſunt in EH, æquales ipſi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales multitudines BG, EH. erunt totæ multitudines AG, DH, æquales. Quare toties comprehenditur C, in AG, quoties F, in DH: Ideoq; tã multiplex eſt AB, (prima compoſita cum quinta) ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt DH, (tertia compoſita cum ſexta) ipſius F, quartæ. Si prima itaque ſecundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.



QVOD ſi prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint ſecundæ, & quartæ; Quinta vero & ſexta, æque multiplices ſecundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æque multiplices fuerint ſecundæ & quartæ; At quinta & ſexta, æquales ſecundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota AG, (prima & quinta) tam multiplex ſecundæ C, quam multiplex eſt tota DH, (tertia ac ſexta) ipſius F, quartæ. Semper enim AG, multitudo magnitudinum æqualium ipſi C, oſtendetur æqualis eſſe ipſi DH, multitudini magnitudinum ipſi F, æqualium, vt perſpicuum eſt in appoſitis figuris. Si vero tam prima & tertia, quã quinta, & ſexta æquales ponantur ſecundæ, & quartæ, luce clarius eſt, primam & quintam ſimul, atq; tertiam & ſextam ſimul, æquemultiplices eſſe, nimirum duplices, ſecundæ & quartæ magnitudinum.

HOC quoq; ab Euclide concludetur, in omni genere proportionis vniuerſe propoſ. 24. ſed operæ pretium fuit, idipſum prius in proportione multiplici demonſtrare, vt ea, quæ ſequuntur, demonſtrari poſſint.

iij.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ſit prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; ſumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, ſumptarum vtraque vtriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.



SIT prima magnitudo A, tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt C, tertia quartæ D; ſumanturque E, F, æquè multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem eſſe E, ipſius B, ſecundæ, quam eſt F, ipſius D, quartæ. Nam cum E, & F, ſint æque multiplices ipſarum A, & C; ſi diſtribuantur E, & F, in magnitudines ipſis A, & C, æquales, vt in EG, GH, HI, & FK, KL, LM, erunt tot partes in E, æquales ipſi A, quot ſunt in F, æquales ipſi C. Quoniam vero EG, FK, æquales ſunt ipſis A, & C; ſunt autem A, & C, æque multiplices ipſarum B, & D, ex hypoteſi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL. Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam eſt multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex FK, tertia quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ſecundæ B, quam multiplex eſt KL, ſexta eiuſdem quartæ D, [a] Erit & EH, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex FL, compoſita ex tertia & ſexta, quartæ D. Rurſus cum ſit EH, prima tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt FL, tertia quartæ D, vt proxime demonſtratum eſt; ſit autem & HI, quinta tam multiplex ſecundæ B, quam eſt LM, ſexta multiplex quartæ D; [b] Erit & EI, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt FM, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod oſtendendum erat.

a 2. quinti.

b 2. quint.

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propoſ. 22. non ſolum in magnitudinibus æque multiplicibus, ſed etiam in omnibus, quæ bina ſumptæ eandem habent proportionem, ſiue rationalem, ſiue irrationalem; ſed neceſſarium fuit ipſum prius hic in proportione multiplici demonſtrare, vt inſequens propoſ. 4. demonſtrari poſſit.

iiij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi pro vt inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

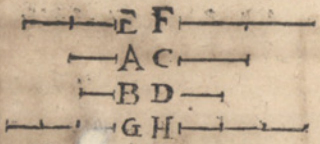
SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item ſecundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationẽ: ſiue E, F, ita multiplices ſint ipſa-

ipſarum A,C,ſicut G,H,ipſarum B,D,ſiue non. His poſitis,conſtat ex defin.6.hu-
ius lib.ſi E,deficit *a* G,etiam F,deficere ab H; Et ſi E,æqualis eſt ipſi G,etiam F,æ- *a 3. quinti.*
qualem eſſe ipſi H:Et denique ſi E,excedit G,etiam F, excedere H. Alioquin non
eſſet,per defin. 6.eadem proportio A,ad B,quæ C,ad D,ſi earum æque multiplicia
non ſemper ita ſe haberent.Dico iam, multiplicia primæ ac tertiæ non ſolum vna
deficere à multiplicibus ſecundæ ac quartæ,aut vna æqualia eſſe, aut vna excedere,
vt diximus, ſed eandem quoque inter ſe proportionem habere, nimirum ita eſſe
E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem ſecundæ B, vt F, multiplicem tertiæ
C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc eſt ſi rurſus E, ſtatuatur prima magnitudo;
G,ſecunda;F,tertia,& H,quarta;ſumanturq; ipſarum E, F, æque multiplicia qua-
liacunque;Item ipſarum GH,quæcunq; etiam æque multiplicia; Multiplicia ipſa-
rum E, F, à multiplicibus ipſarum G, H, vel vna deficere, vel vna æqualia eſſe,vel
vna excedere, vt vult definitio 6.Idem namq; eſt, quatuor magnitudines eandem
habere proportionem, & earum æquemultiplicia ſumpta diximus, vel vna defice-
re,vel vna æqualia eſſe,vel vna excedere.Capiantur enim rurſus I,K,ipſarum E,F,
æque multiplices;Item L,M,æque multiplices ipſarum G,H.Quoniam igitur tam
multiplex eſt E,prima ipſius A, ſecundæ, quam F, tertia ipſius C, quartæ; ſumptæ
ſunt autem & I,K,æque multiplices ipſarum E,F,primæ ac tertiæ: *b* Erunt quoque
ex æquo IK,æque multiplices ipſarum A,C,ſecundæ & quartæ. Eadem ratione e- *b 3. quinti.*
runt L,M,ipſarum B,D,æque multiplices. Et quia ponitur proportio A,primæ ad
B,ſecundam,quæ C, tertiæ ad D, quartam, oſtenſæque ſunt I, K, æque multiplices
primæ & tertiæ A,C Item L,M,æque multiplices ſecūdæ & quartæ B,D,*c* fit vt ſi I,
multiplex primæ deficit ab L, multiplici ſecundæ, etiam K, multiplex tertiæ ne- *c 6. defin. quinti.*
ceſſario deficiat ab M, multiplici quartæ: & ſi I, æqualis eſt ipſi L, etiam K, ipſi M,
ſit neceſſario æqualis: & denique ſi I, excedit ipſum L, etiam K,excedat neceſſario
ipſam M: Idemq; oſtendetur in quibuſcunq; æque multiplicibus magnitudinum
E,& F, nec non magnitudinum G, & H: quia ſemper hæc æquemultiplicia, quæ-
cunq; ſint, *d* æquemultiplicia quoque erunt magnitudinum A,C, & B,D. Itaque *d 3. quinti.*
cum I,& K, ſint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multi-
plices ſecundæ G, & quartæ H; oſtenſumq; ſit,ſi I,multiplex primo minor fuerit,quam L,multiplex ſecundæ,
multiplicem tertiæ K,minorem quoque eſſe,quam M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in qua-
cunque multiplicatione; *e* Erit, vt E,prima ad G, ſecundam, ita F, tertia ad H,quartam. Si prima igitur ad ſe- *e 6. definit. quinti.*
cundam eandem habuerit rationem,&c. Quod erat demonſtrandum.



COROLLARIVM.

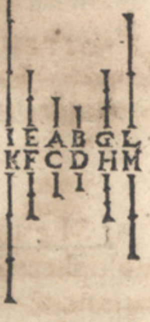
HINC facile demonſtrabitur Inuerſa ratio,quam Euclides defi. 13. explicauit; hoc eſt ſi quatuor magni-
tudines fuerint proportionales, eaſdem & contra, ſeu inuerſa ratione proportionales eſſe. Sit enim A,ad B,vt
C,ad D. Dico eſſe conuertendo,vt B,ad A,ita D,ad C. Sumptis enim E,F,æ-
quemultiplicibus ipſarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H,æquemultipli-
cibus ipſarum BD, ſecundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B,
ſecundam ſe habet,vt C,tertia ad D,quartam, *f* neceſſario ſequitur,ſi E,mul- *f 6. defin. quinti.*
tiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex ſecundæ, vel æqualis, vel ma-
ior,etiam F,multiplicem tertiæ minorem eſſe,vel æqualem, vel maiorem, quam H, multiplicem quartæ; Per-
ſpicuum eſt,ſi è contrario G,maior fuerit quam E,vel æqualis,vel minor,etiam H,maiorem fore,vel æqualem,
vel minorem,quam F, ſecundum quamcunque multiplicationem ſint ſumpta hæc æque multiplicia. Nam ſi
vtraq; E,F,minor eſt,quam vtraq; G,H,erit contra vtraque G,H,maior quam vtraque E,F,& ſi vtraque E,F,
æqualis eſt vtrique G,H,erit è contrario,vtraque G,H,vtriq; E,F,quoque æqualis:Et denique ſi vtraque E,F,
maior eſt,quam vtraque G,H,erit vice verſa,vtraque G,H,minor,quam vtraque E,F.Itaque quoniam primæ
B,& tertiæ D,ſumpta ſunt,æquemultiplicia G,H;Item ſecundæ A,& quartæ C,æquemultiplicia E,F,oſtēſum-
que eſt,G,H,vel vna excedere E,F,vel vna æqualia eſſe vel vna deficere,ſecundum quamcumq; multiplicatio-
nem ea multiplicia ſumantur; *g* erit vt B,prima ad A,ſecundam,ita D, tertia ad C,quartam. Quod erat demon- *g 6. defin. quinti.*
ſtrandum.



SCHOLIVM.

*HÆC propoſitio cum ſuo corollario vera eſt, ſiue duæ magnitudines A, B, ſint eiuſdem generis cum duabus magnitudi-
nibus C, D, ſiue non, vt ex demonſtratione liquet.*

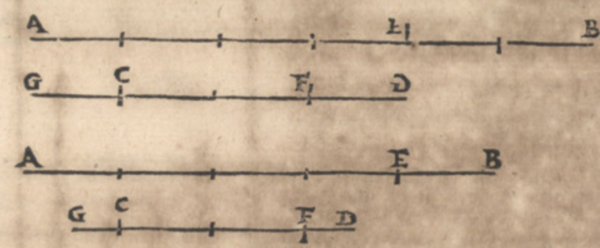
*ORONTIVS quartum hoc Theorema ſic conatur demonſtrare. Poſtquam ex 3. propoſ. huius lib. oſtendit I,K, eſſe æque
multiplices magnitudinum A,C; Item L,M, eſſe æque multiplices magnitudinum B, D, infert ſtatim per con-
uerſum 6. definitionis, iuxta ſuam expoſitionem, ita eſſe I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem,
inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonſtratio admodum eſt vitioſa, tum quia ſecundum
hunc ſenſum demonſtratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportionalibus, æque-
multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices ſecundæ & quartæ eandem habere proportionem, ex eo, quod
ex 6. defin. vt ipſe explicauit, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ eandem
habēt proportionem; quod eſt abſurdum, tum etiam, quia eodem modo ſtatim à principio licuiſſet illi inferre,
ſic eſſe, per 6. defin. E, ad G, vt F, ad H, ſine acceptione nouarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim
eſt maior ratio in illis, quam in his. Reijcienda eſt ergo huiuſcemodi demonſtratio, vna cum expoſitione 6. defi-
nitionis, vt ſupra diximus. At iuxta noſtram interpretationem eiuſdem definitionis conſtat ſolum, ſi I, mi-
nor eſt, quam L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorem eſſe, vel æqualem, vel maiorem, quam M, quemad-
modū & idem conſtat in æque multiplicibus E, F, G, H, & in quibuſcunque aliis, ſi ſumantur, pro vt inter ſe re-
ſpondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita eſſe E, primam ad G, ſecundam, vt eſt F, tertia ad H, quartam, quandoquidem il-
lis 6. definitio conuenit,*



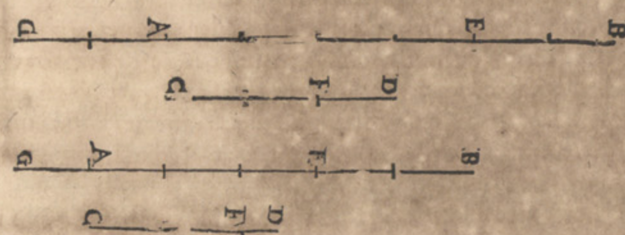
THEOR. 5. PROPOS. 5.

v. SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITA multiplex ſi tota AB, totius CD, vt eſt multiplex AE, ablata ablatæ CF, ſiue AE, CF, ablatæ ſint totis AB, CD, commenſurabiles, vt in prima figura, ſiue incommenſurabiles, vt in ſecunda figura. item ſiue AE, CF, compoſitæ ſint ex eiſdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, vt in priori figura, ſiue non ex eiſdem, vt in poſteriori figura. Dico reliquam EB, ita eſſe multiplicem reliquæ FD, vt eſt tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuſpiam magnitudinis, videlicet ipſius GC, vt eſt AE, multiplex ipſius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, ęque ſunt multiplices ipſarum CF, GC; *a* erit tota AB, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipſius CF, hoc eſt omnes omnium, vt
a 1 quinti. vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB ipſius CD, quam eſt multiplex AE, ipſius CF. Igitur AB, tam eſt multiplex ipſius GF, quam multiplex eſt ipſius CD; *b* atque idcirco æquales ſunt GF, CD. Ablata igitur cõ-
b 6. pron. muni CF, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipſius FD, quam multiplex eſt ipſius GC. Sed ita multiplex poſita fuit EB, ipſius GC, vt AE, ipſius CF, hoc eſt, vt tota AB, totius CD. Quare tam multiplex eſt reliqua EB, reliquæ FD, quam eſt tota AB, totius CD, quod eſt propoſitum.



ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, vt ablata AE, ablatæ CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, eſſe ſic multiplicem, vt eſt tota totius. Poſita enim GA, ita multiplici ipſius FD, vt eſt AE, ipſius CF, vel vt tota AB, totius CD, quoniam AE, GA, æque multiplices ſunt ipſarum CF, FD; *c* erit tota GE, ſic multip[illegible] totius
c 1. quinti. CD, vt AE, ipſius CF: Sed ita quoque multiplex eſt AB, eiuſdem CD, vt AE, ipſius CF, ex hypotheſi. Æque multiplices ſunt igitur GE, AB, ipſius CD; *d* atque adeo inter ſe æquales.
d 6. pron. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB: Ideoque æque multiplices ipſius FD; cum GA, ſit multiplex poſita ipſius FD: Atqui ita eſt multiplex poſita GA, ipſius FD, vt AB, ipſius CD. Igitur & EB, reliqua ſic erit multiplex ipſius FD, reliquæ vt AB, tota totius CD; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.



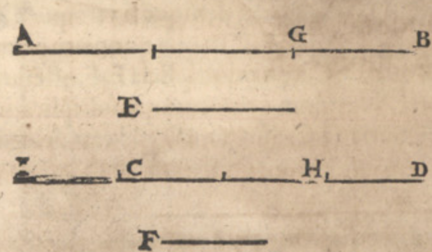
SCHOLIVM.

VNIVERSE id ipſum demonſtrabitur propoſ. 19. in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, & non tantum multiplicis, vt hic eſt factum.

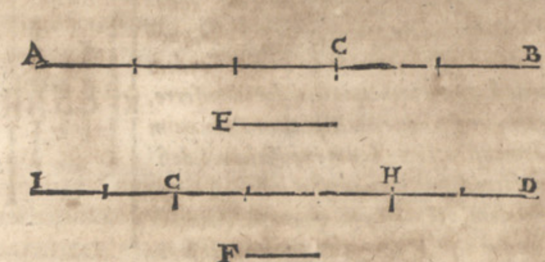
THEOR. 6. PROPOS. 6.

vj. SI duæ magni[illegible]udines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

SINT magnitudines AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem ęque multiplices. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG, eiuſdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipſi E, vel eius multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicē, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipſi E. Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim, CI, æqualis ipſi F. Et quia prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, quā CH, tertia multiplex eſt quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & CI, ſexta æqualis eſt quartæ F; *a* erit AB, prima cum quinta, ita multi-
a 2. quinti. plex ſecundæ E, vt HI, tertia cum ſexta, multiplex eſt quartæ F: Atqui CD, ipſius F, erat quoq; tam multiplex, quam AB, multiplex eſt ipſius E. Æque multiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F. *b* Ideoq; æquales inter ſe. Qua-
b 6. pron. re dempta CH, communi remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod eſt popoſitum.



SIT deinde GB, multiplex ipſius E. Dico ita quoq; eſſe multiplicem HD, ipſius F. Poſita namque CI; ita
c 2 quinti. multiplici ipſius F, vt eſt multiplex GB, ipſius E; *c* erit vt prius AB, ita multiplex ipſius E, vt HI, multiplex eſt
d 6. pron. ipſius F. *d* Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, eſt ita multiplex ipſius F, vt GB, ipſius E, multiplex eſt, ex hypotheſi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipſius F, quā GB, ipſius E, multiplex eſt, quod eſt propoſitum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, &c. Quod oſtendendum erat.



SCHO-

SCHOLIVM.

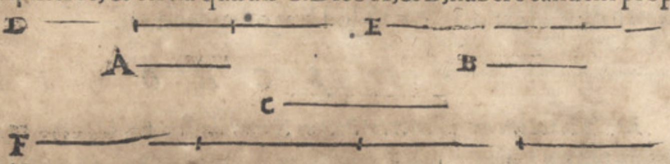
Hoc quoq; oſtendemus vniuerſe propoſ.24. in omni genere proportionis.

BREVIVS totam propoſ. ita demonſtrabimus. Quoniam AB, CD, ſunt ipſarum E, F, æque multiplices; erunt in AB, tot magnitudines æquales ipſi E, quod ſunt magnitudines in CD, æquales ipſi F. Rurſus quia AG, CH, earundem EF, æque multiplices ſunt; erunt quoq; in AG, tot magnitudines ipſi E, æquales, quod ſunt magnitudines in CH, ipſi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus AB, CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD: ac proinde ſi GB, æqualis ſit ipſi E, erit quoq; HD, ipſi F, æqualis: Si autem GB, multiplex ſit ipſius E; erit ita multiplex HD, ipſius F, vt GB, multiplex eſt ipſius E: quandoquidem toties E, in GB, continetur, quoties F, in HD, exiſtit, vt oſtenſum eſt.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij

ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter ſe, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, viciſſim ad A, & B, eandem quoq; proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipſarum æqualium A, B; a eruntq; D, E, æquales inter ſe. Capiatur rurſus F, vtcunque multiplex ipſius C. Quoniam igitur D E, æquales ſunt, fit vt vtraque vel minor ſit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ minores ſint ipſa F, multiplice ſecundæ & quartæ C, (eſt enim C, inſtar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; b erit ea proportio primæ A, ad C, ſecundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.



a 6. pron.

b 6. defin. quinti.

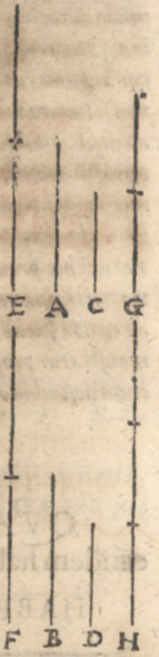
EODEM pacto oſtendemus F, vel minorem eſſe vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus ſecundæ A, & quartæ B, vel vna æqualis ſit, vel maior; c Erit quoque ea proportio primæ C, ad ſecundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod eſt propoſitum. Poſſet breuius ſecunda hæc pars oſtendi per coroll. 4. propoſ. ex inuerſa ratione. Cum enim oſtenſum iam ſit, eſſe A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. Quod erat demonſtrandum.

c 6. defin. quinti.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, nihil poſſe in hac propoſ. colligi ex defin. 6. iuxta expoſitionem Campani ac Orontij. Neq; enim per demonſtrationem conſtat, vtramq; multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F, ſed ſolum, cum illæ ſint æquales, vtramque eſſe vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici F. Idemq; cernitur in omnibus fere propoſitionibus, quæ per 6. definitionem propoſitum colligunt: Vt merito illa expoſitio reiecta ſit à nobis.

EODEM fere modo oſtendemus, æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi loco multiplicis F, ſumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omiſit, vtitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ ſequuntur, perinde ac ſi in hac propoſ. 7. eſſet demonſtratū. Sint enim tam A, & B, inter ſe æquales, quam C, & D, inter ſe. Dico eſſe A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipſarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipſarum C, & D, ſecundæ, & quartæ; d erunt tam E, & F, inter ſe æquales, quam G, & H, inter ſe. Quare ſi E, multiplex primæ deficit à G, multiplice ſecundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet; & ſi æqualis, æqualis; & ſi ſuperat, ſuperabit. e Eadem ergo eſt proportio A, primæ ad C, ſecundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod eſt propoſitum.



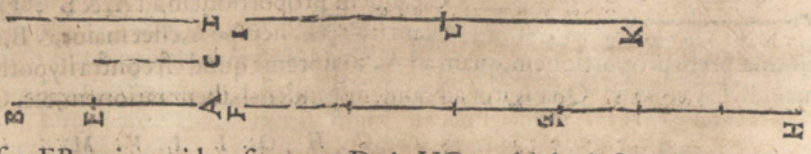
d 6. pron.

e 6. definit. quinti.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

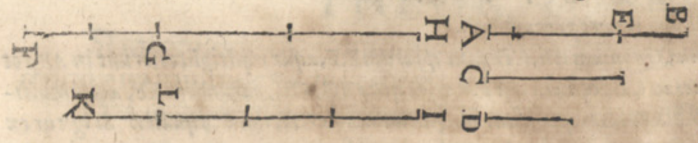
INÆQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

SINT magnitudines inæquales, AB, maior & C, minor, tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem eſſe proportione C, ad D. At è conuerſo, maiorem eſſe proportionem D, ad C, quam D, ad AB. Intelligatur n. in AB, magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis minori C, vt ſit reliqua EB. Vtraque deinde EB, AE, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt GF, multiplex ipſius EB, maior quidem ſit, quam D; At HG, multiplex ipſius AE, non ſit minor eadem D, ſed vel maior, vel æqualis. In priori figura neceſſe fuit ſumere GF, HG, triplas ipſarum EB, AE; quia dupla ipſius AE, eſſet minor, quam D. Loco triplarum potuiſſent accipi quæcunque aliæ æquemultiplices maiores. In poſteriori autem figura ſatis eſt, ſumere ipſarum EB, AE, duplas GF, HG; quia vtraque GF, HG, maior eſt, quam D. Poſſent tamen pro duplis ſumi quæcunq; aliæ maiores æque multiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices ſunt duarum BE, EA; a erit & tota FH, ita multiplex totius AB, vt FH. ipſius AE, hoc eſt, ipſius C, cum æquales ſint poſitæ C, & AE. Capiatur quoque ipſius D, multiplex IK, quæ proxime maior ſit, quam HG, nempe dupla, vt in priori figura. Quod ſi dupla maior non fuerit quam HG, ſumatur tripla, vel quadrupla, &c. In poſteriori figura accepta eſt IK, ipſius D, quadrupla, quia tam dupla quam tripla minor eſt, quam HG, at quadrupla iam maior eſt. Abſciſſa ergo LK, quæ æqualis ſit ipſi D, non erit IL, maior quam HG, (alias IK, non eſſet multiplex ipſius D, proxime maior quam HG; ſed & IL, maior quoque eſſet quam GH. Quod ſi IK, dupla ſit ipſius D, perſpicuum eſt, IL, non eſſe maiorem, quam HG; cum



a 1. quinti.

HG, cum HG, poſita ſit non minor quam D, hoc eſt quam IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipſi IL, vel maior. Et quia FG, maior eſt poſita quã D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG maior quam LK. Cum ergo HG, non minor ſit quam IL, vt demonſtratum eſt, ſed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quam IK.



Itaque cum FH, HG, ſint æque multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipſius D, quæ inſtar eſt ſecundæ & quartæ: ſit autem FH, multiplex primæ, maior quam IK, multiplex ſecundæ; At HG, multiplex tertiæ, non ſit maior, quã IK, multiplex quartæ, immo minor, ex hypotheſi; (ſumpta enim eſt IK, multiplex ipſius
b 8. def. D, maior quam HG,) *b* erit maior poportio AB, primæ ad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

QVONIAM vero è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda & AB, quarta) maior eſt quam HG, multiplex ſecundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non eſt, quã
c 8. defin. FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, maior ſit, quam IK, vt oſtenſum eſt; *c* erit maior proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

S C H O L I V M.

RECTE *autem animaduertit Petrus Nonius in ſua Algebra de proportione agens, per hanc propoſ. 8. probari non poſſe, angulum rectum maiorem habere proportionem ad quemuis alium angulum, quam angulum ſemicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior ſit angulo ſemicirculi: quia exceſſus anguli recti ſupra angulum ſemicirculi, qui eſt angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus ſuperare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propoſ. demonſtratione requiritur. Nam FG, multiplex exceſſus EB, ſuperare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum ſemicirculi non dicitur proprie habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui eiuſdem naturæ non eſt cum vtroque angulo, quod ita multiplicari non poſſit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim; ſi ad lineam vnius palmi addi poſſet punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur proprie linea illa compoſita maior, quam linea vnius palmi, propterea quod exceſſus eſt indiuiſibilis, & alterius naturæ; Item quemadmodum ſi ad figuram planam quamcumq; apponeretur linea vnius pa[illegible]i, non diceretur hæc magnitudo ex diuerſis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere proprie proportionem maioris inæqualitatis. quod exceſſus non ſit eiuſdem naturæ cum plana illa figura: Ita quoq; non habet angulus rectus proprie ad angulum ſemicirculi proportionem maioris inæqualitatis; quippe cum angulo ſemicirculi adiectus ſit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atque adeo rectus angulus angulum ſemicirculi excedat quantitate diuerſæ naturæ, vt dictum eſt. Itaque non ſolum eæ magnitudines proportionem proprie non habent quarum alterutra multiplicata alteram ſuperare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: ſed neque eæ proprie dicentur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum exceſſus diuerſam ab eis naturam habet, cuiuſmodi ſunt angulus rectus, & angulus ſemicirculi. Adeo vt tunc ſolum proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter ſe, quando & alterutra multiplicata alteram ſuperare poteſt, & exceſſus earum multiplicatus ſuperare quoq; poteſt vtramque. Fateor rem hanc eſſe perobſcuram, & quæ vix recte intelligi poſſit: Verum hoc prouenit ex indiuiſibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis ſunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ veriſſima quidem ſunt propter demonſtrationem euidentem, ſed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facile intellectus ſe expediat. Verbi gratia, Veriſſimum eſt, ſphæram tangere planum in puncto, vt à Theodoſio demonſtratur propoſ. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non ſequatur, ſi globus continue moueatur ſuper planum, lineam rectam deſcribi compoſitam ex punctis, nemo ad hunc vſque diem ſic explicauit, vt omni ex parte difficultas ſit ſublata.*

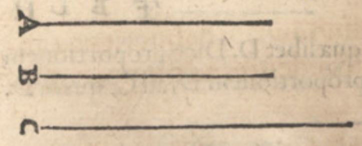
ix.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque ſunt inter ſe æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, eſſe inter ſe æquales. Sit enim, ſi fieri poteſt, altera, nempe A, maior & B, minor. *a* Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt A, & B, ſed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rurſus A, & B, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe A, eſſet maior, & B, minor; *b* haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod eſt contra hypotheſin. Non igitur maior erit A, quam B, ſed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 8. quinti.



b 8. quinti.

S C H O L I V M.

CONVERTIT *hæc propoſitio 9. vtramq; partem theorematis 7. vt manifeſtum eſt.*

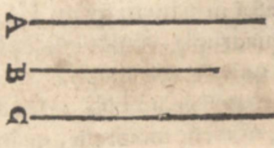
x.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem eſſe, quam B: Si enim A, foret ipſi B, æqualis, *a* haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor eſſet, quam B, *b* haberet B, maior ad C, proportionem maiorem, quam A, minor ad eandem C, quod eſt cõtra hypotheſin. Non eſt igitur A, æqualis vel minor quam

a 7. quinti.



b 8. quinti.

quam B,ſed maior. Habeat ſecundo C,ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem eſſe quam A. Non enim æqualis erit B, ipſi A; *c* alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod eſt contra hy- c 7. quinti.
potheſin. Neque vero B, maior erit quam A, *d* alias haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam d 8. quinti.
ad B, maiorem: quod magis eſt contra hypotheſin. Minor igitur eſt B, quam A, quod eſt propoſitum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

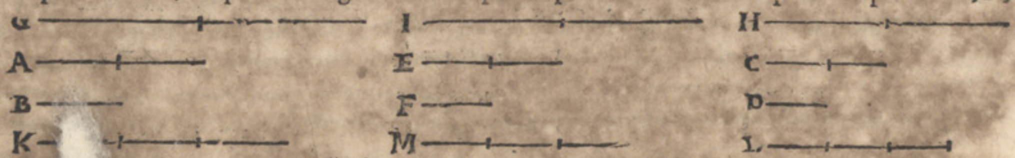
SCHOLIVM.

HÆC quoq; propoſitio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perſpicuum eſt.

THEOR. 11. PROPOS. 11. xj.

QVÆ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, eaſdem eſſe inter ſe, ſecundum definitionem 6. hoc eſt ſumptis æquemultiplicibus ipſarum A, C; Item æquemultiplicibus ipſarum B, D; ſemper contingere, vt multiplices ipſarum A, C, à multiplicibus ipſarum B, D, vel vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedãt.



Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes conſequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam vt E, tertia ad F, quartam; *a* fit vt ſi G, multiplex primæ deficit à K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque I, multiplex a 6. defin.
tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel maior, æqualis quoque ſit I, ipſi M, vel maior: *b* Sed quinti.
(vt eodem modo oſtendetur) ſi I, minor eſt, quam M, vel æqualis, vel maior eſt quoque H, minor quam L, vel b 6. defin.
æqualis, vel maior; propterea quod ponitur eſſe E, prima ad F, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare ſi quinti.
G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice ſecundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et ſi G, æqualis eſt, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior quam L. Idemque oſtendetur accidere in quibuſcunque aliis æque multiplicibus. *c* Quapropter erit A, prima ad B, ſecundam, vt C, ter- c 6. defi.
tia ad D, quartam. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Quod erat oſtendendum. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione. Quæ eiſdem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Vel ſi ſit, vt A, ad B, ita C, ad D, ſit autem E, ad F, vt A, ad B, & G, ad H, vt C, ad D: erit quoque E, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eædem ſunt proportioni A, ad B, [d] *erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D,* [e] *erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.* d 11. quint. e 11. quint.

A,	3.	B,	2:	C,	6.	D,	4
E,	9.	F,	6:	G,	12.	H.	8.

RVRSVS, ſi ſint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eædem inter ſe: ſit autem vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H, I, ad K; & L, ad M, eædem inter ſe. Nam vt proxime in quatuor proportionibus oſtenſum eſt, vt G, ad H, ita eſt I, ad K; propterea quod hæ proportiones ſimiles ſunt proportionibus A, ad B, & C, ad D.

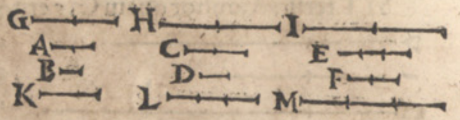
A,	3.	B,	2.	C,	6.	D,	4.	E,	9.	F,	6.
G,	12.	H.	8.	I,	18	K.	12.	L,	30.	M,	20.

Eodem modo erit, vt I, ad K, ita L, ad M; cum proportiones I, ad K, & L, ad M, eædem ſint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales ſunt. Item erit, vt G, ad H, ita L, ad M; cum hæ proportiones eædem ſint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio eſt de pluribus.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

SI ſint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

QVOD in propoſ. 1. de proportione multiplici demonſtrauit, oſtendit hic de omni genere proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, C, D; E, F, proportionales hoc eſt, ſit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt eſt vna antecedentium ad vnam conſequentium, nimirum A, ad B, ita eſſe omnes antecedentes ſimul A, C, E, ad omnes conſequentes ſimul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus conſequẽtium, *a* erunt omnes G, H, I, ſimul omnium A, C, E, a 1. quinti.
ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipſius A; & omnes



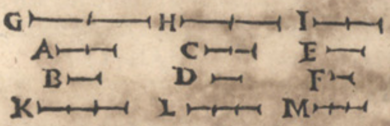
K, L, M, ſimul omnium B, D, F, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipſius B. Quoniam vero ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; *b* fit vt ſi b 6. definit.
G, multiplex primæ deficit à K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quar- quinti.
tæ, & I, ab M: Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel maior, æqualis quoque ſit H, ipſi L, & I, ipſi M, vel maior. Ac proinde ſi G, minor eſt, vel æqualis, vel maior quam K, & omnes G, H, I, ſimul omnibus K, L, M, ſimul minores ſint, vel æquales vel maiores. *c* Quocirca vt eſt A, prima ad B, ſecundam ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si ſint c 6. defin.
itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat. quinti.

THEOR.

xiij.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoq; ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.



SIT prima A, ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam: ſit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, ſextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, ſecundam eſſe maiorem quam E, quintæ ad F, ſextam, ſecundum definitionem 8. hoc eſt, ſumptis æque multiplicibus ipſarum A, E; Item æque multiplicibus ipſarum B, F, contingere poſſe, vt multiplex ipſius A, excedat multiplicem ipſius B, at multiplex ipſius E, multiplicẽ ipſius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam; *a* fit vt ſi G, multiplex primæ exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, *b* non neceſſario I, excedit ipſam M. ſed æqualis aliquando erit. vel minor; quod maior ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M. *c* Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quamobrem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.

a 6. defin. quinti. b 8. def. quinti. c 8. defi. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, ſextam; erit quoq; proportio A, primæ ad B, ſecundam minor quam E, quintæ ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quam E, ad F, hoc eſt, proportio E, primæ ad F, ſecundam maior quam C, tertiæ ad D, quartam; [d] *fit vt ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, vel ei æqualis ſit.* [e] *Sed ſi H, deficit ab L, vel æqualis eſt, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario G, excedet ipſam K,* [f] *atq; idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, ſecundam, quam tertiæ ad B, quartam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F. Quod eſt propoſitum.*

d 8. defi. quinti. e 6. defi. quinti. f 8. defin. quinti.

EODEM modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque multo magis ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

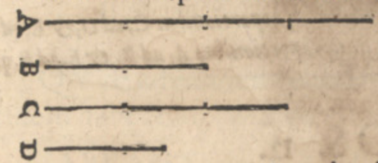
QVOD ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, qnam quinta ad ſextam: Prima quoque multo magis ad ſecundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

xiv.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

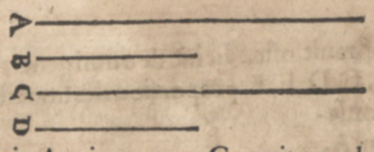
SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior quam quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, ſecundam vt C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D. Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque eſſe B, ipſa D. Sit primum A, maior quam C, *a* eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam vt A, tertia ad B, quartam, proportio autem A, tertiæ ad B, quartam maior eſt, vt oſtendimus, quam C, quintæ ad B, ſextam: *b* Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam. *c* Minor eſt ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D. Quod eſt propoſitum.



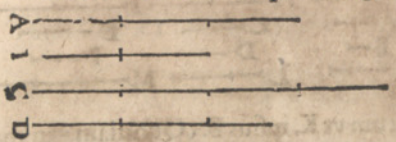
a 8. quinti. b 13. quint. c 10. quint.

SIT deinde A, æqualis ipſi C; *d* eritque idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, *e* erunt quoq; inter ſe eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; *f* Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitũ.



d 7. quinti. e 11. quint. f 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C, *g* eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A minoris ad B, eandem. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; eſt autem ptoportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, ſextam: *h* Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam; *i* Ideoque B, minor erit, quam D, quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.



g 8. quinti. h 13. quinti. i 10. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſecunda maior ſit, vel æqualis, vel minor, quam quarta, erit quoq; eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quam tertia. Sit enim primum B, maior, quam D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem eſſe, quam C. Cum enim B, maior ſit qnam D; k *erit maior proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur eſt, vt prima A, ad ſecundam B, ita tertia C, ad quar-*

k 8. quinti.

ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt maior, quam C, quintæ ad B, ſextam;[l] *erit quoq; proportio A, primæ ad B, ſecundam maior, quam C, quintæ ad B, ſextam:*[m] *ac proinde A, maior erit, quam C, quod eſt propoſitum.* l 13. quinti m 10. quin.

DEINDE *ſit B, æqualis ipſi D, vt in ſecunda figura. Dico & A, ipſi C, eſſe æqualem. Cum enim B, ipſi D, ſit æqualis*[n] *erit C, ad B, vt C, ad D: Eſt autem quoq; A, ad B, vt C, ad D.*[o] *Igitur erit quoq; ita A, ad B, vt C, ad B; propterea q; A, ipſi C, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.* n 11. quint. o 9. quinti.

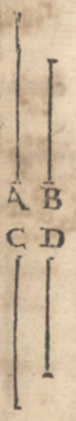
TERTIO *ſit B, minor quam D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem eſſe, quam C. Cum enim B, minor ſit quam D, erit*[p] *minor proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur eſt, vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt minor, quam C, quintæ ad B, ſextam,*[q] *erit quoq; proportio A, primæ ad B, ſecundam minor, quam C, quintæ ad B, ſextam.*[r] *Igitur maior erit C, quam A, ac proinde A, minor erit, quam C. Quod eſt propoſitum.* p 8. quinti. q 13. quint. r 10. quint.

BREVIVS. *Si B, maior eſt, quam D, & A, dicatur non maior, quam C, ſed vel minor, vel æqualis,*[s] *erit quoq; B, minor quam D, vel æqualis, quod eſt contra hypotheſin. Eademq; ratio eſt in alijs caſibus.* s 14. quint.

VEL *ſic Si eſt A, ad B, vt C, ad D; erit conuertendo B, ad A, vt D, ad C. Ergo ſi B, maior eſt, vel minor, vel æqualis ipſi D;*[t] *erit quoque A, maior, vel minor, vel æqualis ipſi C.* t 14. quin.

NON *demonſtrauit autem Euclides, ſi prima maior eſt, vel æqualis vel minor, quam ſecunda, tertiam quoq; maiorem eſſe vel æqualem, vel minorem, quam quartam; (quo tamen argumentandi modo pleriq; Geometrarum tum veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perſpicuum eſt ob ſimilitudinem proportionum. Hinc enim fit, ſi vtraque eſt proportio maioris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem, id eſt, primam ac tertiam, maiorem eſſe vtraque magnitudine conſequente, hoc eſt, ſecunda ac quarta: Si vero vtraque proportio eſt æqualitatis, vtramque magnitudinem antecedentem vtrique conſequenti æqualem eſſe. Si denique vtraque proportio eſt minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraque conſequente eſſe minorem.*

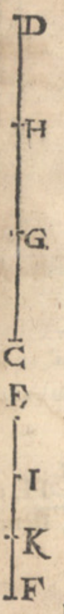
VERBI *gratia, ſi eſt vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quocirca ſi A, prima maior eſt quam B, ſecunda, erit & C, tertia maior quam D, quarta; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi minor, minor. Quod eſt propoſitum. Quod tamen Geometrice oſtendemus cum Federico Commandino, licet id non ſit neceſſarium, ad propoſ. 16. huius lib.*

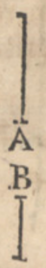


THEOR. 15. PROPOS. 15. xv.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuo reſpondent, ita ſumantur.

SINT partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita eſſe CD, ad EF, vt A, ad B. Cum enim CD, & EF, ſint æque multiplices ipſarum A, & B, continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CH, GH, HD, æquales ipſi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipſi B *a* eritque CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & A, æquales inter ſe ſint, necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK, & HD, ad KF, vt A, ad B, *b* ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt CG, ad EI, hoc eſt, vt A, ad B, *c* ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, ſimul ad omnes EI, IK, KF, ſimul, quod eſt propoſitum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c, Quod erat demonſtrandum. a 7. quinti. b 11. quint. c 12 quint.

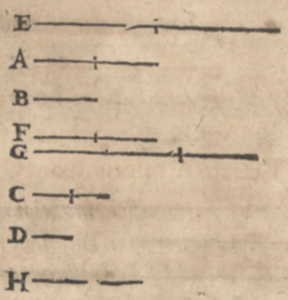




THEOR. 16. PROPOS. 16. xvj.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

HIC demonſtratur alterna, ſiue permutata proportio, ſeu ratio, quæ defin. 12. explicata eſt. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſſim, ſeu permutando, eſſe quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ ac ſecundæ, æque multiplices E, F. Item ipſarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices G, H; *a* eritque E, ad F, vt A, ad B, cum E, & F, ſint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; erunt & ipſæ *b* inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D; *c* erunt & ipſæ eædem inter ſe; hoc eſt, vt eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. *d* Quare ſi E, prima maior eſt quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, ſecunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta ſint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H. *e* Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, ſint æque multiplices primæ A, ac tertiæ B; At G, & H, æquemultiplices C, ſecundæ & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat. a 15. quint. b 11. quint. c 11. quint. d 14. quin. e 6. defin. quinti.



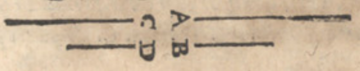
S C H O L I V M.

PORRO *demonſtratio huius propoſ. locum ſolum habet quando quatuor magnitudines ſunt eiuſdem generis. Nam ſi duæ A, B, eſſent vnius generis, & duæ C, D, alterius; eſſent quoq; multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet ſunt A, B, & multiplices G, H, alterius; in quo nimirum exiſtunt C, D. Quare non poſſet dici E, maior quam G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vſurpanda igitur erit permutata proportio in ſolis quatuor magnitudnibus eiuſdem generis. Quod nonnulli philoſophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuerſorũ generum.*

EX hoc & illud demonſtrabitur, quod ad finem ſcholij propoſ. 14. ex ipſa ſimilitudine proportionum oſtendimus, recepimusq; non demonſtraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam ſecunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per ſe notum ſit, vt ad propoſ. 14. diximus, demonſtrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, ſi A, prima maior eſt, quam B, ſecunda; C, tertiam maiorem eſſe quarta D, & ſi eſt æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem. [f] *Erit enim per-*



f 16. quint.
g 14. quin. *mutando, vt A, ad C, ita B, ad D.* [g] *Quare ſi A, prima maior eſt, quam B, tertia, erit & C, ſecunda maior, quam D, quarta; & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor. Quod eſt propoſitum.*

SED & hæc demonſtratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines ſunt eiuſdem generis. Quare ſatius eſt illud ex natura proportionum monſtrare, vt à nobis ad propoſ. 14. factum eſt. Ita enim verum erit ſemper id, quod proponitur, etiamſi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, ſint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

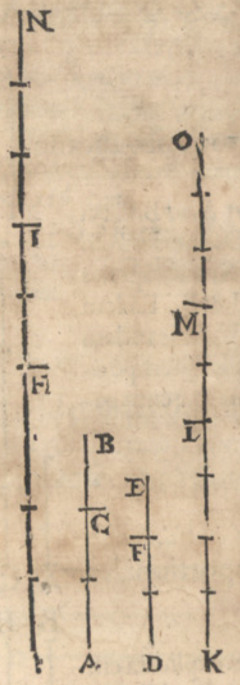
THEOR. 17. PROPOS. 17.

xvij.

SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuiſæ proportionales erunt.

HOC loco demonſtrat Euclides Diuiſionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compoſitæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc eſt, ſit AB, ad CB, vt DE, ad EF. Dico & diuiſas eaſdem proportionales eſſe, hoc eſt, vt eſt AC, ad CB, ita eſſe DF, ad FE, in eo ſenſu, quem definitione 6. expoſuimus. Ipſarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; *a* eritque GI, ita multiplex ipſius AB, vt eſt GH, ipſius AC, hoc eſt, vt KL, ipſius DF, *b* ita quoque multiplex eſt KM, ipſius DE. Æque multiplices ergo ſunt GI, KM, ipſarum AB, DE. Capiantur rurſus IN, MO, æque multiplices ipſarum CB, FE. Quoniam igitur ſic eſt multiplex HI, prima ſecundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE: Item tam eſt multiplex IN, quinta ſecundæ CB, quam multiplex eſt MO, ſexta quartæ FE; *c* erit & HN, ſic multiplex ſecundæ CB, vt LO, multiplex eſt quartæ FE. Itaque cum ſit AB, prima ad CB, ſecundam, vt DE, tertia ad FE, quartam; ſumptæque ſint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item ſecundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices HN, LO, *d* fit vt ſi GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice ſecūdæ CB, etiā KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & ſi æqulalis, æqualis; & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam GI, ab HN, quam KM, ab LO, abatis communibus HI, LM, deficiet quoque GH ab IN, & KL, ab MO. Et ſi GI, æqualis fuerit ipſi HN, & KM, ipſi LO, ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipſi IN, & KL, ipſi MO. Ft ſi denique GI, exceſſerit ipſam HN, & KM, ipſam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipſam IN, & KL, ipſam MO. Quam ob rem cum GH, KL, ſumptæ ſint æque multiplices primæ AC, & tertiæ DF: Idem IN, MO, æque multiplices ſecundæ CB, & quartæ FE, oſtenſumque ſit, (in quacunque multiplicatione illæ æquemultiplices fuerint acceptæ) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus ſecundæ & quartæ vel vna deficere, vel æquales eſſe, vel vna excedere; *e* Erit AC, prima ad CB, ſecundam, vt DF, tertia ad FE, quartam, quod eſt propoſitum. Si compoſitæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

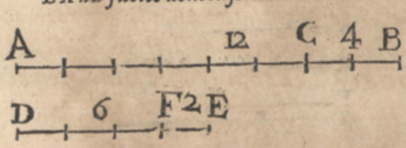
a 1. quinti.
b 1. quinti.
c 2. quinti.
d 6. defin. quinti.
e 6. defi. quinti.



SCHOLIVM.

EX his facile demonſtrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuiſionem rationis conuerſam diximus: Hoc eſt, ſi eſt, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; eſſe quoque vt CB, ad AC, ita FE, ad DF, quod ita patet. Quoniam eſt vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, [f] *erit diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod eſt propoſitum.*

f 17. quint.



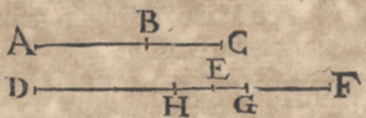
NVLLO etiam negotio demonſtrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem defin. 15. Diuiſionem rationis contrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor eſt quam conſequens, non autem maior, vt in Diuiſione rationis, quam Euclides definiuit, vt ea, quam proxime demonſtrauimus. Sit enim vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico eſſe quoque per diuiſionem rationis contrariam, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim
g 17. quint. *eſt vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF.* [g] *Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Ac proinde conuertendo rurſus, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoq; compoſitæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compoſitionem rationis, quam definitione 14. deſcripſit. Sint n. diuiſæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc eſt, AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico & compoſitas ꝓportionales eſſe h. e. vt eſt AC, ad BC, ita eſſe DF, ad EF. Si n. nō eſt, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF, ad ali-

ad aliquam magnitudinem minorem ipſa EF, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipſa EF, ſi fieri poteſt, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur eſt, vt AC, ad BC, ita DF, ad GF; *a* Erit diuidendo quoque, vt AB, ad BC, ita DG, ad GF: Sed vt AB, ad BC, ita propoſita quoque eſt DE, ad EF. *b* Igitur erit etiam, vt DG, prima ad GF, ſecundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima maior ſit, quam D, tertia, *c* erit quoque GF, ſecunda maior quam EF, quarta, pars quam totũ. Quod eſt abſurdũ.



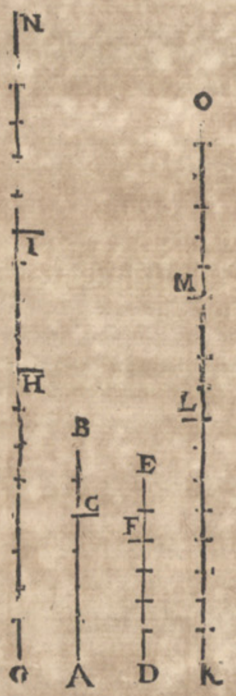
a 17. quint.
b 11. quint.
c 14. quint.

HABEAT deinde, ſi fieri poteſt, DF, ad HF, maiorem ipſa EF, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur eſt, vt AC, ad BC, ita DF, ad HF; *d* erit diuidendo quoque vt AB, ad BC, ita DH, ad HE. Sed vt AB, ad BC, ita poſita etiam eſt DE, ad EF. *e* Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HF, ſecundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor ſit quam DE, tertia, erit quoque HF, ſecunda minor quã EF, quarta, totum quam pars, quod eſt abſurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipſa EF, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipſam EF, erit, vt AC, ad BC, quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

d 17. quint.
e 11. quint.

SCHOLIVM.

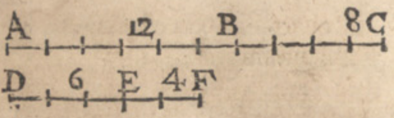
HANC propoſitionem demonſtrant nonnulli cum Campano eadem ferme ratione, qua antecedentem propoſitionem Euclides demonſtrauit, hoc videlicet modo. Sint diuiſæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc eſt, AC, ad CB, vt DF, ad FE. Dico eas etiam compoſitas proportionales eſſe, vt AB, quidem ad C, B, ita DE, ad FE. Sumantur enim, vt in antecedente propoſitione, ipſarum AC, CB, DF, FE, æque multiplices GH, HI, KL, LM. Item ipſarum CB, FE, aliæ æque multiplices IN, MO, [f] *eruntque rurſus GI, KM, ipſarum AB, DE, æque multiplices.* [g] *Item HN, LO, ipſarum CB, FE, vt in præcedenti Theoremate oſtenſum eſt. Quoniam vero ponitur eſſe AC, prima ad CB, ſecundam, vt DF, tertia ad FE, quartam. ſumptæque ſunt GH, KL, æque multiplices primæ ac tertiæ AC, DF. Item ſecundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices IN, MO,* [h] *fit vt ſi GH, multiplex primæ AC, deficit ab IN, multiplice ſecundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF deficiat ab MO, multiplice quartæ FE, & ſi æqualis, æqualis; & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam GH, ab IN, quam KL, ab MO, additis communibus HI, LM, deficiet quoque GI, ab HN, & KM, ab LO. Et ſi GH, æqualis fuerit ipſi IN, & KL, ipſi MO; additis communibus HI, LM, erit & GI, ipſi HN, æqualis, & KM, ipſi LO. Et deniq; ſi GH, excesserit ipſam IN, & KL, ipſam MO, additis communibus HI, LM, excedet quoque GI, ipſam HN, & KM, ipſam LO. Quoniam ergo ſi GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice ſecundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficit ab LO, multiplice quartæ FE, & ſi æqualis, æqualis, & ſi excedit, excedit;* [i] *erit AB, prima ad CB, ſecundam, vt DE, tertia & FE, quartam. Quod eſt propoſitum. Itaq; ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.*



f 1. quinti.
g 2. quinti.
h 6. defin. quinti.
i 6. defi. quinti.

VERVM hæc demonſtratio non recte colligit propoſitum ex defin. 6. propterea quod HN, LO, non ſunt ita multiplices ipſarum CB, FE, vt multiplices acceptæ ſunt IN, MO, earundem CB, FE. Vnde merito dubitare quis poſſet an ſecundum quamcunque multiplicationem æque multiplices ſeruent eam conditionem defectus æqualitatis, atq; exceſſus, quam Euclides in 6. defin. poſtulauit, quandoquidem in hac demonſtratione liberum non eſt aſſumere ipſarum CB, FE, quaſcunq; æquemultiplices, ſed tales duntaxat, quales conſurgunt ex HI, IN, & ex LM, MO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propoſitionis demonſtratione obijci non poteſt: quippe cum IN, MO, ſumptæ ſint ipſarum CB, FE, æquemultiplices qualeſcunque, ipſæq; eædem remanent æquemultiplices earundem CB, FE, in diuiſa proportionalitate. Quam ob rem præferenda eſt Euclidis demonſtratio huic demonſtrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne eam ſtudioſus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, vt bonam: præſertim cum oſtenſiua ſit, illa vero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non poteſt.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin. 14. deſcripſimus. Priorem diximus compoſitionem rationis conuerſam. Sit enim vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis conuerſam eſſe quoq; vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quoniam enim eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. [k] *Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE, quod eſt propoſitum.*



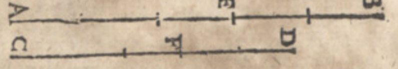
k 18. quint.

POSTERIOREM modum uocauimus compoſitionem rationis contrariam. Sit ergo rurſus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, Dico per compoſitionem rationis contrariam, eſſe quoq; vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. [l] *Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rurſus erit, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.* *l 18. quinti*

THEOR. 19. PROPOS. 19. xix.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum, ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

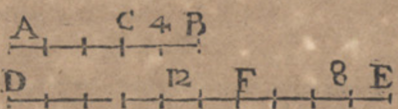
QVOD in propoſ. 5. demonſtratum eſt de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, eſſe ad reliquam FD, vt eſt tota AB, ad totam CD. Cum enim ſit AB, ad CD, vt AE, ad CF, *m* erit & permutando AB, ad AE, vt CD, ad CF. *n* Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF. *o* Quare permutando rurſus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc eſt, vt tota AB, ad totam CD, cum poſita ſit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 16. quint.
b 17. quint.
c 16 quint.

COROLLARIVM.

HINC facile demonſtrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui ſumitur à conuerſione rationis, iuxta 16. defin.



SIT enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuerſionem rationis eſſe quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim ſit, vt
d 17. quin. AB, ad CB, ita DE, ad FE, *d* erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF,
a 18. quint. *e* ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

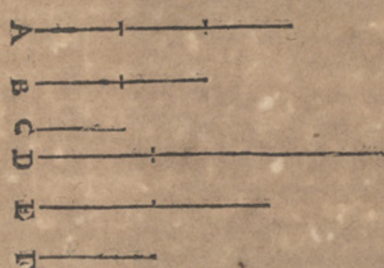
OMNES Euclidis interpretes conuerſionem rationis demonſtrant hac ratione. Quoniam eſt, vt AB, ad CB, ita
f 16. quinti. *DE, ad FE; [f] erit permutando, vt tota AB, ad totam DE, ita CB, ablata ad ablatam FE. [g] Igitur vt tota AB, ad totam DE, ita*
g 19. quin. *erit quoq; reliqua AC, ad reliquam DF; Et proinde permutando rurſus, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.*

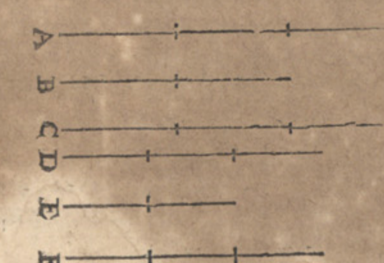
SED quis non videt, hanc demonſtrationem conuenire ſolum magnitudinibus eiuſdem generis, cum in ea vſurpetur alterna, ſiue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiuſdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propoſ. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuerſione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiuſdem generis, reiecta hac communi interpretum demonſtratione, noſtram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamſi priores duæ quantitates AB, CB, ſint vnius generis, nimirum lineæ, poſteriores vero duæ DE, FE, alterius generis, nimirum vel ſuperfices, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non aſſumpta fuit alterna, ſiue permutata proportio.

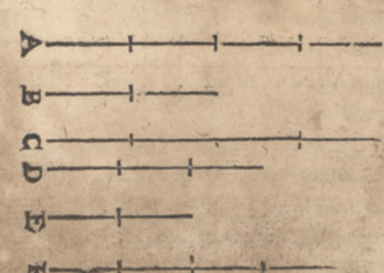
THEOR. 20. PROPOS. 20.

xx.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta quam ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.







SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, ſitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, ſit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico &
a 8. quinti. D, quartam eſſe maiorem F, ſexta. Cum enim A, maior ſit quam C, *a* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad
b 13. quint. B. Eſt autem vt A, ad B, ita ad D, ad E. *b* Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita eſt F, ad E. (Cum enim ſit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E. Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E, *c* quare D, maior
c 10. quint. erit, quam F. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde A, æqualis ipſi C. Dico & D, æqualem
d 7. quinti. eſſe ipſi F. Cum enim A, ſit ipſi C æqualis *d* erit A, ad B,
e 11. quint. vt C, ad B. Eſt autem vt A, ad B, ita D, ad E. *e* Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B: At vt C ad B, ita eſt F, ad E. per inuerſam rationem, vti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt
f 9. quinti. F, ad E: *f* Ideoque æquales erunt D, & F. Quod eſt propoſitum.

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, mino-
g 8. quinti. rem eſſe, quam F. Cum enim A. minor ſit quam C, *g* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad
h 13. quint. B, ita eſt D, ad E. *h* Minor ergo quoque proportio eſt D, ad E, quam C, ad B. Eſt autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor eſt quoque
i 10. quinti. proportio D, ad E, quam F, ad E, *i* propterea que D, minor erit quam F. Quod eſt propoſitum. Si ſint itaque tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c.

SCHOLIVM.

PORRO propoſitione 22. oſtendet Euclides, A, & D, magnitudines non ſolum eſſe maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & E, vt hic demonſtrauit, ſed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonſtrare non poterat, niſi prius theorema hoc oſtendiſſet, vt ex eadem propoſitione 22. erit perſpicuum.

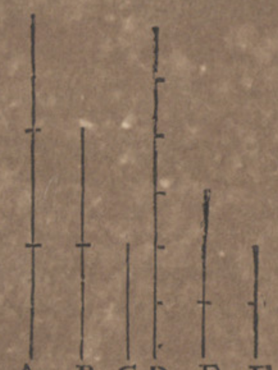
THEOR. 21. PROPOS. 21.

xxj.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ; ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

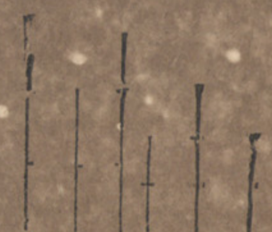
SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; ſitque earum proportio perturbata, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, primo maior quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem ſexta, F. Cum enim A, maior ſit quam C, *a* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Eſt autem vt A, ad B, ita E, ad F. *b* Maior ergo quoque proportio eſt E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita eſt D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. *c* Ideoque maior erit D, quam F. Quod eſt propoſitum.

a 8. quinti. *b 13. quint.* *c 10. quint.*



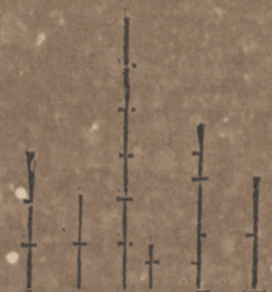
SIT deinde A, ipſi C, æqualis. Dico D, quoque ipſi F, eſſe æqualem. Cum enim A, ſit æqualis ipſi C, *d* erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita eſt E, ad F. *e* Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Eſt autem ex inuerſa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; *f* atque idcirco D, ipſi F, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

d 7. quinti. *e 11. quint.* *f 9. quinti.*



SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem eſſe quam F. Cum enim A, ſit minor quam C, *g* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita eſt E, ad F. *h* Minor eſt ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuerſa ratione, eſt vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; *i* ac propterea D, minor erit quam F, quod eſt propoſitum. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c. Quod oſtendendum erat.

g 8. quinti. *h 13. quinti* *i 10. quinti.*



S C H O L I V M.

CÆTERVM propoſ. 23. oſtendet Euclides duas magnitudines A, & D, non ſolum eſſe maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, ſed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem ſine auxilio huius theorematis demonſtrare non poterat, vt ex propoſ. illa 23. patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxij.

SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadẽ ratione ſumãtur: Et ex æqualitate in eadẽ ratione erunt.



IAM hic demonſtrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio eſt ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: ſitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoq; ex æqualitate eſſe A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, D, æquemultiplicibus G, H: Item ipſarum B, E, æquemultiplicibus I, K: Item ipſarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt D, tertia ad E, quartam, *a* erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem ſecundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum ſit B, prima ad C, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; *b* erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem ſecundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur ſunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione ſumuntur; *c* ſit vt ſi G, prima ſuperat tertiam L, ſuperet neceſſario quoque H, quarta ſextam M; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vna ab L, M, æque multiplicibus ſecũdæ C, & quartæ F, vel vna ęquales ſint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione ſumpta ſint ea multiplicia: *d* erit A, prima ad C, ſecundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod eſt propoſitum.

a 4. quinti. *b 4. quinti.* *c 10. quint.* *d 6. defin. quinti.*

DEINDE ſint plures magnitudines tribus, ita vt ſit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc eſſe vt A, ad

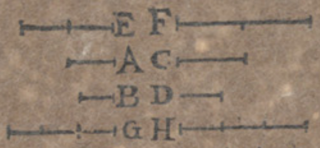
N,ita D,ad O.Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus,eſſe A,ad C,vt D,ad F:ponatur autem C,
ad N,vt F,ad O,erunt tres magnitudines A,C,N,& aliæ tres D,F,O,quæ binæ in eadem ratione ſumuntur. Er-
go ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, rurſus erit,vt A,ad N,ita D,ad O. Eodemque modo idem
oſtendetur in quinque magnitudinibus,per quatuor;ſicut id in quatuor demonſtratum fuit per tres; Et ſic de
pluribus.Itaque ſi ſint quotcunque magnitudines,&c.Quod erat oſtendendum.

S C H O L I V M.

*CÆTERVM non videtur hoc loco diſsimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare,quan-
quam à nemine,quod ſciam,ſit adhuc demonſtratum.Id autem eiuſmodi eſt.*

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem,quam tertia ad quartam; Habebunt
etiam æque multiplices primæ ac tertiæ,ad ſecundam & quartam eandem rationem: Item æ-
que multiplices ſecundæ & quartæ ad primam ad tertiam, eandem rationem habebunt. Et
contra eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad æque multiplices primæ & tertiæ:
Item prima ac tertia ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, rationem habebunt eandem

*SIT enim vt A, prima ad B,ſecundam,ita C, tertia ad D,quartam; ſumanturque E,F,ipſarum A, C, æquemultiplices:
Item G,H,æquemultiplices ipſarum B,D.Dico ita eſſe E,ad B,vt F,ad D; Item ita G,ad*



*A,vt H.ad C.Et contra,ita eſſe B,ad E,vt D,ad F:Item ita A,ad G,vt C,ad H.Quoniam
enim eſt,vt E,ad A,ita F,ad C,ex conſtructione,cum vtrobiq; ſit eadem proportio mul-
tiplex;ponitur que vt A,ad B,ita C, ad D; [c] erit ex æquo,vt E,ad B,ita F,ad D. Rurſus*
e 22. quin. *quia eſt,vt G, ad B, ita H,ad D, quod vtrobique ſit eadem proportio multiplex,ex con-
ſtructione; eſtque vt B,ad A,ita D,ad C; (Cum enim ponatur,vt A,ad B,ita C,ad D,erit conuertendo,vt B,ad A,ita D,ad C,)*
f 22. quint. *[f] erit ex æquo,vt G,ad A,ita H, ad C.*

DEINDE,quia eſt vt B,ad A,ita D,ad C,per inuerſam rationem;Et vt A, ad E, ita C, ad F,quod ex conſtructione vtro-
g 22. quin. *bique ſit eadem proportio ſubmultiplex;[g] erit ex æquo,vt B,ad E,ita D,ad F.Rurſus quia ponitur,vt A,ad B, ita C, ad D;eſtq;*
h 22. quin. *vt B,ad G,ita D,ad H,quod ex conſtructione ſit vtrobique eadem proportio ſubmultiplex; [h] erit ex æquo, vt A, ad G,ita C,ad
H.Quod eſt propoſitum.*

*EX quo conſtat modus argumentandi,quo frequentiſsime vtuntur Geometræ, maxime Archimedes, Apolloni[illegible]rga-
us, Theon,& alij.Videlicet,vt A,ad B,ita eſt C,ad D.Ergo vt E,dupla,vel tripla,vel quadrupla,&c. ipſius A, ad B, ita quoque
erit F,dupla,vel tripla,vel quadrupla,&c.ipſius C,ad D.Item vt A,ad B,ita eſt C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum,
vel quadruplum,&c.ipſius B,nimirum ad G,ita erit quoque C,ad duplum,vel triplum, vel quadruplum, &c. ipſius,D, vide-
licet ad H.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

xxiij.

SI ſint tres magnitudines,aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſu-
mantur,fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erũt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate,quando proportio eſt perturbata. Sint enim tres ma-
gnitudines A,B,C,& aliæ tres D,E,F,ſitque perturbata earum pro-
portio,hoc eſt,ſit vt A,ad B,ita E,ad F; & vt B,ad C,ita D,ad E. Di-
co quoque ex æqualitate eſſe vt A, ad C,ita D,ad F. Sumptis enim
a 15. quinti. ipſarum A,B,D, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipſarum C,E,F,
æquemultiplicibus K,L,M; *a* Erit vt A,ad B,ita G,ad H,cum G,H,
ſint ipſarum A,B,æquemultiplices : At vt A, ad B, ita eſt E,ad F;
b 11. quint. *b* Igitur vt G,ad H,ita quoq; eſt E,ad F; *c* Sed vt E,ad F, ita eſt quo-
c 15. quint. que L,ad M,quod L,M,ſint ipſarum E,F,æquemultiplices. *d* Igitur
d 11. quint. erit quoque vt G,ad H,ita L,ad M.Rurſus quoniam eſt B,prima ad
e 4. quinti. C,ſecundam,vt D,tertia ad E, quartam; *e* erit quoque vt H,multi-
plex primæ B, ad K, multiplicem ſecundæ C, ita I, multiplex tertiæ
D,ad L,multiplicem quartæ E.Quia igitur ſunt tres magnitudines
G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione ſumantur,
eſtque earum proportio perturbata; cum oſtenſum ſit eſſe vt G,ad
H,ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; *f* fit vt ſi G, prima ſuperat
f 21. quint. tertiam K,ſuperet quoque quarta I,ſextam M; & ſi æqualis, æqua-
lis;& ſi deficit deficiat. Itaque cum G, & I, æquemultiplices primæ
A,& tertiæ D,à K,& M,æquemultiplicibus ſecundæ C,&quartæ F,
vel vna deficiant,vel vna æquales ſint, vel vna excedant; *g* erit vt A,
g 6. definit. quinti. prima ad C,ſecundam,ita D,tertia ad F, quartam,quod eſt propo-
ſitum.Itaque ſi ſint tres magnitudines,&c.Quod demonſtrandum
erat.



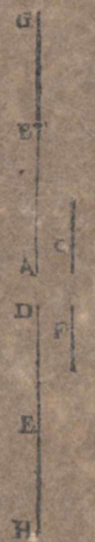
S C H O L I V M.

*Quod ſi fuerint plures magnitudines tribus, fueritq; earum proportio per-
turbata,nimirum ſi fuerit A,ad B,vt F,ad O,& B,ad C,vt E,ad F; & C, ad
N,vt D,ad E.Dico adhuc eſſe vt A,ad N,ita D,ad O,quanquam proportio ex
æqualitate,quando proportio eſt perturbata, apud Geometras in vſu non ſit in pluribus magnitudinibus, quam in tribus,quæ
cauſa fuit,cur Euclides antecedentem propoſitionem de quotquot magnitudinibus,hanc autem de tribus duntaxat propoſue-
vit,quamuis vera etiam ſit de pluribus,quod ita probatur. Cum iam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C,vt F,
ad O;Ponatur autem eſſe ita C,ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C,N,& aliæ tres D,E,O,quæ binæ in eadem ſu-
muntur proportione, & earum proportio eſt perturbata. Ergo rurſus ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa,erit vt
A ad N,ita D,ad O.Eodemque modo idem oſtendetur in quinq; magnitudinibus, per quatuor, ſicut vt in quatuor fuit demon-
ſtratum,per tres.Et ſic de pluribus.Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 24. PROPOS. 24. xxiv.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

QVOD propoſitione 2. demonſtrauit Euclides de ſola proportione multiplici, demonſtrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, ſecundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, ſecundam, vt EH, ſexta ad F, quartam. Dico ita eſſe AG, compoſitam ex prima ac quinta, ad ſecundam C, vt eſt DH; compoſita ex tertia & ſexta, ad quartam F. Cum enim ſit vt BG, ad C, ita EH, ad F, erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur eſt AB, ad C, vt DE, ad F, & C, ad BG, vt F, ad EH, [a] erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. a 22. quin.
[b] Componendo igitur erit vt tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. b 18. quint.
Itaque cum rurſus ſit AG, ad BG, vt DH, ad EH, & BG, ad C, vt EH, ad F: [c] erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F. c 22. quin.
Quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HÆC propoſitio vera eſt, ſiue magnitudines AB, BG, & C, ſint eiuſdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, ſiue non, vt ex demonſtratione conſtat.

[E]ODEM fere modo oſtendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate ſexto huius lib. demonſtratum eſt in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

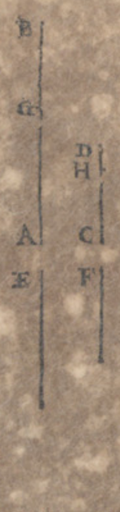
SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad eaſdem eandem proportionem: & reliquæ ad eaſdem eandem proportionem habebunt.

Habeant enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc eſt, ſit AG, ad C, vt DH, ad F. Item detractæ AB, DE, ad eaſdem C, F, eandem habeant proportionem; ita vt ſit quoq; AB, ad C, vt DE, ad F. Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad eaſdem C, F, hoc eſt, eſſe BG, ad C, vt EH, ad F. Cum enim ſit vt AB, ad C, ita DE, ad F, erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur eſt AG, ad C, vt DH, ad F, & C, ad AB, vt F, ad DE: [d] erit ex æqualitate AG, ad AB, vt DH, ad DE. d 22. quin.
[e] Diuidendo erit quoq; vt BG, ad AB, ita EH, ad DE. Itaq; cum rurſus ſit BG, ad AB, vt EH, ad DE, & AB, ad C, vt DE, ad F: e 17. quin.
[f] erit ex æquali BG, ad C, vt EH, ad F. Quod eſt propoſitum. f 22. quint.

THEOR. 25. PROPOS. 25. xxv.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT enim AB, ad CD, vt E, ad F, ſitque AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, ſimul eſſe maiores duabus CD, & E, ſimul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipſi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipſi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc eſt, vt AB, ad CD. Quare cum ſit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH: [a] erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: a 19. quint.
Eſt autem AB, (cum ſit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales ſunt; ſi ipſis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipſi AG, & CH, ipſi E, fient AG, & F, ſimul æquales ipſis E, & CH, ſimul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, ſimul maiores quam E, & CD, ſimul, cum GB, ſit maior quam HD. Quod eſt propoſitum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

NECESSARIO autem ſequitur, ſi antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, conſequentem alterius eſſe omnium minimam; vt in propoſito exemplo cernere licet. Cum n. ſit vt AB, ad CD, ita E, ad F, & AB, prima maior quam tertia E, [b] erit quoq; CD, ſecunda maior quam F, quarta. Item quia maior eſt AB, quam CD, erit quoq; E, maior quam F, ob eandem proportionem AB, ad CD, & E, ad F, vt in ſcholio propoſ. 14. oſtendimus. Quod ſi è contrario antecedens b 14. quin.

 vnius

vnius proportionis fuerit omnium minima, erit conſequens alterius omnium maxima, vt conſtat, ſi dicatur eſſe F, ad E, vt CD, ad AB. Debent quoq; omnes quatuor magnitudines eſſe eiuſdem generis, alias non poſſet vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neq; ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multũ diſſimile, videlicet.

SI tres magnitudines fuerint proportionales : Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C, ſitq; A, & maxima, & C, minima. Dico A, & C, ſimul maiores eſſe dupla ipſius B. Sumpta enim D, ipſi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, ſimul maiores erunt, quam B, & D, ſimul,[b] vt proxime demonſtratum eſt, hoc eſt, quam dupla ipſius B. Quod eſt propoſitum.

b 25. quin.

HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quaſdam propoſitiones, quibus ſæpenumero grauiſſimi Scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, eaſq; quaſi eſſent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri poteſt, breuitate demonſtrare, necnon in numerum, ac ſeriem propoſitionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinib. improportionalibus, quarum prima hæc eſt.

xxvj.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

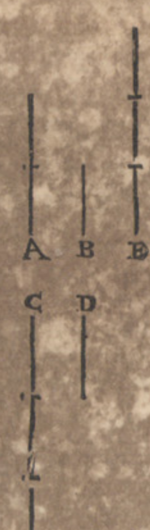
SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.



HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem eſſe proportione D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritq; proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B,[a] ac propterea A, maior erit quam E.[b] Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt eſt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor eſt quoque, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.

a 10. quint.
b 8. quint.

SCHOLIVM.



EODEM fere modo demonſtrabimus, ſi prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem eſſe proportionẽ ſecundæ ad primam, quam quartæ ad tertiam; dummodo vocem, maioris, mutemus in vocem, minoris, & contra.

SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico, conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B,[c] ac propterea A, minor erit, quam E.[d] Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior eſt, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.

c 10. quint.
d 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quam C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B.[e] Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quam B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.

e 26. quin.

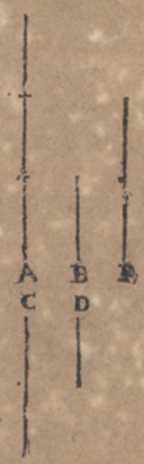
THEO-

THEOR. 27. PROPOS. 27. xxvij.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque viciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam ſecunda ad quartam.

HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem eſſe quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque eſſe E, ad B, vt C, ad D, eritque proportio A, ad B, maior etiam quam E, ad B: [a] Ideoque A, maior erit quam E. [b] Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. [c] Quoniam vero permutando eſt, vt E, ad C, ita B, ad D, (cum poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod eſt propoſitum.

a 10. quin.
b 8 quinti.
c 16. quint.

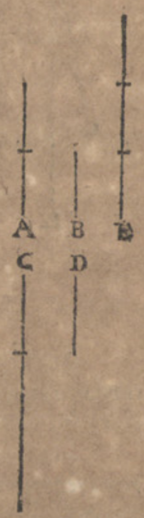


SCHOLIVM.

Similiter oſtendemus, ſi prima ad ſecundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, viciſſim primæ ad tertiam minorem eſſe proportionem, quam ſecundæ ad quartam

Sit namq; minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoq; eſſe proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, minor quoq;, quam E, ad B; [d] *Ac propterea A, minor erit, quam E.* [e] *Quare minor erit proportio A, ad C, quam E, ad C,* [f] *Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D, (cum poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod eſt propoſitum.*

d 10. quint.
e 8. quinti.
f 16. quint.



Aliter. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quam C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [g] *Ergo permutando, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B:* [h] *ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quàm B, ad D. Quod eſt propoſitum.*

g 27. quin.
h 26. quin.

THEOR. 28. PROPOS. 28. xxviij.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem eſſe proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim eſſe GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritq; proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC; [a] Ideoque AB, maior quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, maior quam GC; [b] maiorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, [c] vt eſt GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF, (quod poſita ſit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.

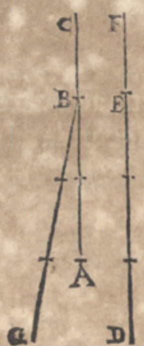
a 10. quint.
b 8. quinti.
c 18. quin.



SCHOLIVM.

EADEM *ratione oſtendemus, ſi proportio primæ ad ſecundam minor fuerit, quam tertiæ ad quartam, minorem quoque eſſe proportionem primæ & ſecundæ ſimul, ad ſecundam, quam tertiæ & quartæ ſimul, ad quartam.*

SIT



a 10. quin.
b 8. quinti.
c 28. quin.

SIT enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem eſſe proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim eſſe GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritq; proportio AB, ad BC, minor quoq;, quam GB, ad BC; [a] *ideoq; AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, minor, quam GC,* [b] *minorq; propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF. (quod poſita ſit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. Quoniam minor eſt proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF; erit maior proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC. [c] *Igitur componendo, maior quoq; proportio erit DF, ad EF, quàm AC, ad BC, ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.*

xxix.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.



a 10. quint.
b 8. quinti.
c 17. quint.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem eſſe propoportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim eſſe GC, ad BC, vt DF, ad EF, eritq; proportio AC, ad BC, maior quoq; proportione GC, ad BC: [a] ideoque maior erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC: maior erit AB, quam GB: [b] Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC. [c] Sed diuidendo, vt eſt GB, ad BC, ita eſt DE, ad EF. (Poſita namque eſt GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.



d 10. quint.
e 8. quinti.
f 17. quint.
g 29. quin.

Quod ſi prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad ſecundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.

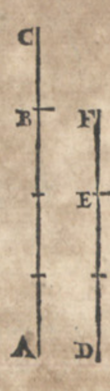
SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico diuidendo quoq; minorem eſſe proportionem AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Intelligatur enim eſſe GC, ad BC, vt DF, ad EF; eritq; proportio AC, ad BC, minor quoq;, quam GC, ad BC: [d] *ideoq; minor erit AC, quàm GC. Ablata ergo communi BC; minor erit AB, quàm GB:* [e] *Ac propterea minor erit proportio AB, ad BC, quàm GB, ad BC:* [f] *Sed diuidendo eſt, vt GB, ad BC, ita DE, ad EF. (Poſita namq; eſt GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur minor quoq; proportio erit AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. Quoniam minor proportio eſt AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quam AC, ad BC. [g] *Igitur & diuidendo, maior erit proportio DE, ad EF, quam AB, ad BC: atq; idcirco minor erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod eſt propoſitum.*

xxx.

THEOR. 30. PROPOSITIO 30.

SI compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.



a 29. quin.
b 26. quin.
c 28. quin.

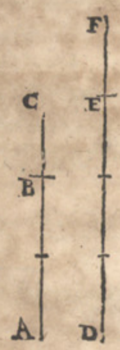
SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuerſionem rationis, minorem eſſe proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim ſit AC, ad BC, maior proportio, quam DF, ad EF; [a] erit & diuidendo, maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. [b] Quare conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE; [c] Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

Non diſsimili ratione oſtendemus, ſi compoſita prima cum ſecunda minorem habuerit proportionem ad ſecundam, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam, per conuerſionem rationis, maiorem eſſe proportionem primæ & ſecundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam.

Sit enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico per conuerſionem rationis maiorem eſſe proportionem AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Cum enim minor ſit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF; [d] erit & diuidendo minor proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quare [e] conuertendo, erit maior proportio BC, ad AB, quàm EF, ad DE: [f] Ac proinde & componendo maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.

d 29. quin.
e 26. quin.
f 28. quint.



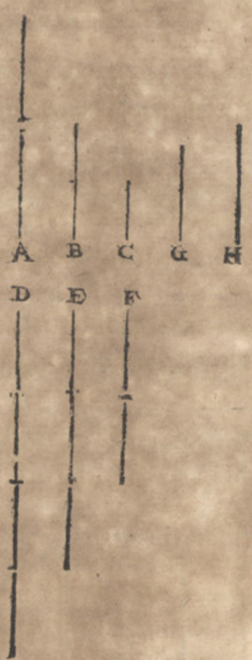
Aliter. Quoniam minor proportio eſt AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. [g] Ergo per conuerſionem rationis minor erit proportio DF, ad DE, quàm AC, ad AB: Hoc eſt, maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.

g 30. quin.

THEOR. 31. PROPOS. 31. xxxj.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitque maior proportio A, ad B, quam D, ad E: Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque eſſe A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, vt E, ad F, eritque propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C; [a] Ideoque B, maior erit quam G. Quare [b] maior erit proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; [c] Ideoque A, maior erit, quam H. [d] Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: [e] Atqui vt H, ad C, ita eſt, ex æqualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita eſt H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.



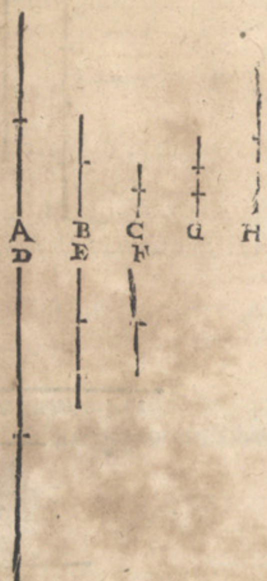
a 10. quint.
b 8. quint.
c 10. quin.
d 8. quinti.
e 22. quin.

SCHOLIVM.

Eadem ratione oſtendemus, ſi fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F. Vel contra, ſi proportio A, ad B fuerint maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F, ex æqualitate maiorem eſſe quoq; proportionem A, ad C, quam D, ad F.

Sit enim primum A, ad B, vt D, ad E, ſed maior proportio B, ad C, quam E, ad F. Intelligatur eſſe G, ad C, vt E, ad F, eritq; propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C: [f] Ideoq; B, maior erit quam G. [g] Quare maior erit proportio A, ad G, quam A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quam D, ad E. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt D, ad E, eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G, [h] Ideoq; A, maior erit, quam H. [i] Quare maior erit proportio A, ad C, quam H, ad C. [k] Atqui vt H, ad C, ita eſt, ex æqualitate, D, ad F, (quoniam vt D, ad E, ita eſt H, ad G, & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoq; erit A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.

f 10. quint.
g 8. quint.
h 10. quint.
i 8. quin.
k 22. quin.



Deinde ſit maior proportio A, ad B, quam D, ad E, ſed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur eſſe G, ad C, vt E, ad F, eritq; propterea etiam B, ad C, vt G, ad C: [l] ideoq; B, ipſi G, æqualis erit. [m] Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit quã D, ad E. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt D, ad E, eritq; propterea maior proportio A, ad G quã H, ad G, [n] Ideoq; A, maior erit, quam H. [o] Quare maior proportio erit A, ad C, quam H, ad C: [p] Atqui vt H, ad C, ita eſt, ex æqualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita eſt H, ad G & & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoq; proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.

l 9. quinti.
m 7. quin.
n 10. quin.
o 8. quint.
p 22. quin.

Non diſsimiliter demonſtrabimus, ſi proportiones priorũ magnitudinũ minores fuerint, etiã proportionem extremarũ eſſe minorem.

minorem. Idemq; eueniet, ſi fuerit A, ad B, vt D, ad E; ſed minor ſit proportio B, ad C, quam E, ad F: Aut contra, ſi proportio A, ad B, fuerit minor, quam D, ad E, at B, ad C, ſit, vt E, ad F. Eadem namq; ſemper erit demonſtratio, ſi modo vocem, maioris, vbiq; permutes in vocem, minoris, vt patet.

Quod ſi plures fuerint magnitudines tribus, ſiue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum ſint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum, ſiue vna tantum maior, quam vna, vel duæ, &c. oſtendemus maiorem vel minorem quoq; eſſe proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ poſteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propoſ. 22. tradidimus: adhibendo propoſ. 22. loco huiuſ. propoſ. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales ſunt tribus magnitudinibus alterius ordinis. Item vſurpando hoc ſcholium, quando vna tantum proportio in tribus magnitudinibus æqualis eſt vni tantum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

a 31. quint. b 31. quint. *Nam ſi maior eſt proportio A, ad B, quam E, ad F, & maior B, ad C, quam F, ad G, & maior C, ad D, quam G, ad H; [a] erit ex æquo maior proportio A, ad C, quam E, ad G. Quia igitur rurſus maior proportio eſt A, ad C, quam E, ad G, & maior C, ad D, quam G, ad H; [b] erit quoq; ex æquo maior proportio A, ad D, quam E, ad H.*

c 22. quin. *Quod ſi tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales ſint, ſed maior ſit proportio C, ad D, quam G, ad H: [c] erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc ſcholio, maior proportio erit A, ad D, quam E, ad H.*

Si vero maior proportio ſit A, ad B, quam E, ad F, ſed tres B, C, D, proportionales ſint tribus F, G, H, erit ex hoc ſcholio, maior proportio A, ad C, quam E, ad G; Et rurſus maior A, ad D, quam E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

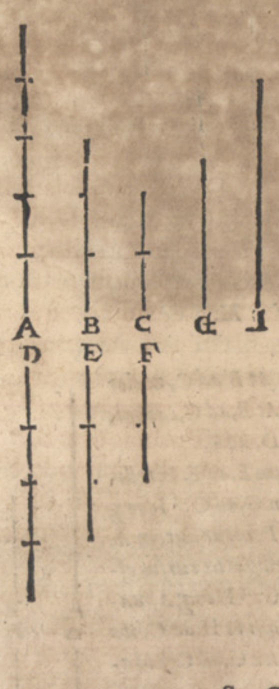
Si autem maior ſit proportio A, ad B, quam E, ad F: ſed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quam G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F, ſed maior proportio B, ad C, quam F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit ſemper ex hoc ſcholio, maior proportio A, ad C, quam E, ad G: ac proinde rurſus maior A, ad D, quam E, ad H, &c.

Idem concludes, ſi omnes proportiones vnius ordinis ſint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna vel duæ. Item ſi ſint plures magnitudines, vt propoſitione 22. diximus.

xxxij.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

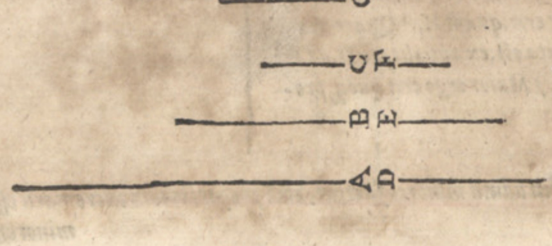
SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.



SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitque maior proportio A, ad B, quam E, ad F. Item maior B, ad C, quam D, ad E, Dico eſſe quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, vt D, ad E, eritq; propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C. [a] Ideoque maior erit B, quam G. [b] Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quam eiuſdem A, ad B, maiorem; Eſt autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior eſt proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; [c] ideoque maior erit A, quam H. [d] Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C: [e] At vt H, ad C, ita eſt ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita eſt G, ad C, & vt E, ad F, ita eſt H, ad G.) Maior ergo etiã eſt proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.

a 10. quint.
b 8. quinti.
c 10 quint.
d 8. quinti.
e 23. quint.

S C H O L I V M.



EADEM ratione, ſi fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F. At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel contra, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F, at B, ad C, eadem, quæ D, ad E, oſtẽdemus, ex æqualitate maiorem eſſe proportionem A, ad C, quã D, ad F, vt in propoſita figura perſpicitur.

HAVD ſecus oſtendemus, ſi proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam extremorum proportionem eſſe minorem, &c.

QVOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, demonſtrabimus, maiorem quoq; vel minorem eſſe proportionem

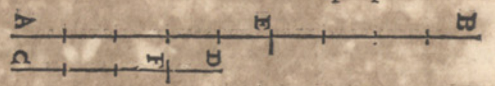
primæ

primæ priorum ad vltimam, quam primæ poſteriorum ad vltimam, ea arte, qua vſi ſumus propoſ. 23. &c. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi diligenter demonſtrationes ſcholij præcedentis propoſ. conſiderentur.

THEOR. 33. PROPOS. 33.

xxxiij.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.



SIT maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, maiorem eſſe, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim maior ſit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; *a* erit quoque permutando, maior proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; *b* ac propterea, per conuerſionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD, *c* Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc eſt, EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod eſt propoſitum. a 27. quin. b 30. quin. c 27 quint.

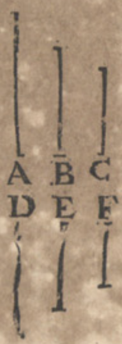
SCHOLIVM.

QVOD ſi tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, vt ex modo demonſtrandi liquet, ponendo ſemper vocem, minoris, pro voce maioris; & vocem, maioris, pro voce minoris.

THEOR. 34. PROPOS. 34.

xxxiv.

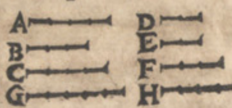
SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundæ ad ſecundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam; & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoq; prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam poſteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam poſteriorum.



SINT primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F. Sit autem maior proportio A, ad D; quam B, ad E; Item maior B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionem ipſarum A, B, C, ſimul ad ipſas D, E, F, ſimul maiorem eſſe proportione ipſarum B, C, ſimul ad ipſas E, F, ſimul; minorem vero, proportione A; ad D; maiorem deniq; etiam proportione C, ad F. Cum enim maior ſit proportio A, ad D, quam B, ad E; *a* erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E, *b* Igitur componendo, maior erit proportio ipſarum A, B, ſimul ad B, quam ipſarum D, E, ſimul ad E; *c* Permutando ergo rurſus, maior erit proportio A, B, ſimul ad D, E, ſimul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; *d* habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quã tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. *e* Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; *f* & componendo ergo maior eſt proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F, *g* Et rurſus permutando maior proportio omnium A, B, C, ſimul ad omnes D, E, F, ſimul quam B, C, ad E, F, quod eſt primum. a 27. quin. b 28. quin. c 27. quin. d 33. quint. e 27. quin. f 28. quint. g 27. quin.

ITAQVE cum ſit maior proportio totius A, B, C, ad totam DEF, quam ablatæ B, C, ad ablatam E, F, *h* erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod eſt ſecundum. h 33. quint.

QVONIAM vero maior eſt proportio B, ad E, quam C, ad F; *i* erit permutando maior quoq; B, ad C, quã E, ad F; *k* & componendo, maior totius BC, ad C, quam totius E, F, ad F, *l* & rurſus permutando, maior B, C, ad E, F, quam C, ad F. Eſt autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt oſtendimus, quam B, C, ad E, F, Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam vltimæ C, ad vltimam F, quod eſt tertium. i 27. quint. k 28. quin. l 27. quint.



DEINDE ſint quatuor magnitudines vtrobiq; cum eadem hypotheſi, hoc eſt, ſit quoq; maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem conſequi. Vt enim iam in tribus eſt oſtenſum, maior eſt proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. *m* Permutando ergo maior erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H, *n* & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H, *o* & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H, quod eſt primum. m 27. qui. n 28. quin. o 27. quin.

ITAQVE cum ſit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, *p* erit & reliquæ A, ad reliquam D: maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quod eſt ſecundum. p 33. quint.

QVONIAM vero, vt in tribus eſt demonſtratum, maior eſt proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H, vt fuit oſtenſum; multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod eſt tertium.

EADEM arte concludes, eadem conſequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in ſex per quinque, & in ſeptem, per ſex, &c. quemadmodum oſtendimus in quatuor, per tres. Conſtat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

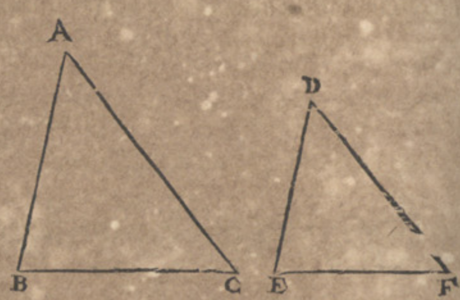
EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.

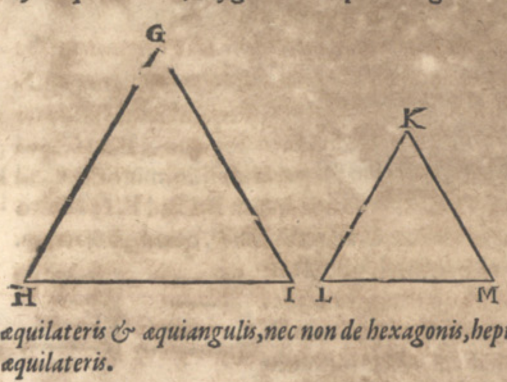
I.

SIMILES figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula ABC, DEF, ſimilia dicentur, ſi fuerint æquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipſi E; & C, ipſi F, æqualis ſit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc eſt, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF; & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.



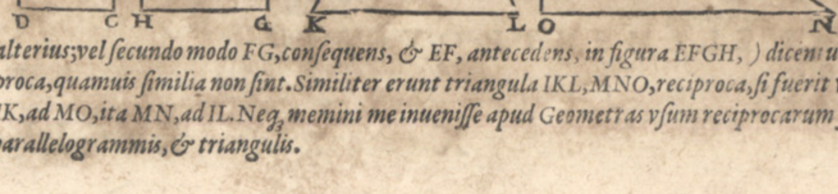
QVOD ſi anguli vnius æquales fuerint angulis alterius, ſinguli ſingulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ ſimiles: cuiuſmodi ſunt quadratum, & figura altera parte longior. Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales, vtpote rectos, at latera vnius lateribus alterius proportionalia non ſunt, quippe cum latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeāt proportionem æqualitatis, latera vero figuræ altera parte longioris circa quemuis angulum rectum, proportionem inæqualitatis. Ex quibus conſtat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, eſſe ſimiles, quanquam inter ſe maxime ſint inæquales. Cuiuſmodi ſunt triangula æquilatera GHI, KLM. Propter laterum enim æqualitatem, erit GH, ad GI, vt KL, ad KM. Item GH, ad HI, vt KL, ad LM, & GI, ad IH, vt, KM, ad ML, cum ſemper ſit proportio æqualitatis. Idem dicendum eſt de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de aliis id genus figuris rectilineis æquiangulis, atq; æquilateris.



II.

RECIPROCÆ autem figuræ ſunt, cum in vtraq; figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

VT ſi in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, vt vtrobiq; ſit & antecedens, & conſequens diuerſarum proportionum, hoc eſt, vt ſit ea proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC, ſeu eadem AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (vtroq; enim modo AB, eſt antecedens vnius proportionis & BC, conſequens alterius, in figura ABCD, quemadmodum & primo modo EF, eſt conſequens vnius, & FG, antecedens alterius; vel ſecundo modo FG, conſequens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur huiuſmodi parallelogramma reciproca, quamuis ſimilia non ſint. Similiter erunt triangula IKL, MNO, reciproca, ſi fuerit vt IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel vt IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neq; memini me inueniſſe apud Geometras vſum reciprocarum figurarum in aliјs figuris, quam in parallelogrammis, & triangulis.

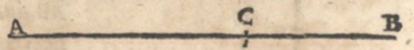


III. SE-

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cum vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ad minus ſe habuerit.

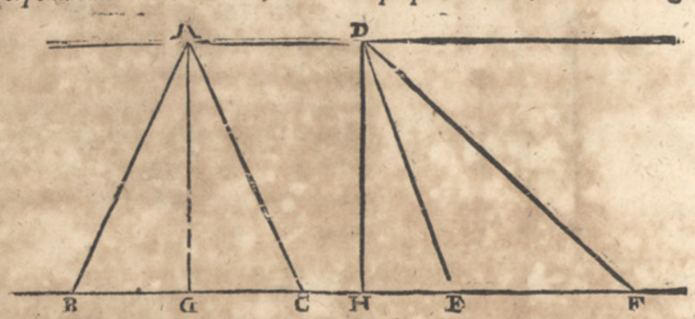
SI linea recta quæuis AB, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt ſit, quemadmodum tota AB, ad maius ſegmentum AC, ita AC, maius ſegmentum ad CB, minus ſegmentum; dicetur diuiſa eſſe ſecundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuiſionem docebit Euclides propoſ.30. huius lib. eamq; ſub aliis verbis iam docuit lib.2. propoſ.11. vt fiet perſpicuum propoſ.30. huius lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atq; vtilitates lineæ hoc modo diuiſæ, vt ex libris Stereometriæ conſtabit, præſertim lib.13. vt non immerito à quibuſdam dicta ſit diuina proportio, in quam linea eo modo eſt diuiſa.



IIII.

ALTITVDO cuiuſque figuræ eſt linea perpendicularis à vertice ad baſin deducta.

SI à vertice A, trianguli ABC, ad baſin BC, perpendicularis ducatur AG, dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta eſt perpendicularis AG. Sic etiam perpendicularis DH, ducta à D, vertice trianguli DEF, ad baſin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaq; ſi duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad baſes (ſiue hæ protractæ ſint, ſiue nõ) demiſſæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiuſmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem huiuſmodi perpendiculares erunt æquales, cum baſes figurarum,



ac vertices in eiſdem conſtituti fuerint parallelis, cuiuſmodi ſunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eiſdem parallelis conſtitutorum. Cum enim anguli AGH, DHG, interni ex eadem parte ſint duobus rectis æquales, immo duo recti;[a] *erunt rectæ AG, DH, parallelæ; Sunt autem & AD, GH, parallelæ, eo quod ponantur triangula in eiſdem eſſe parallelis conſtituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG;*[b] *ac propterea latera oppoſita AG, DH, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod ſi in eiſdem triangulis vertices ponantur C, & F, baſes vero AB, & DE; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad Baſin DE, protractam æqualis non eſt perpendiculari ex C. ad baſin AB, deductæ, cum nec triangula ipſa in eiſdem parallelis poßint conſtitui, vt manifeſtum eſt.*

a 28. primi
b 34. prim.

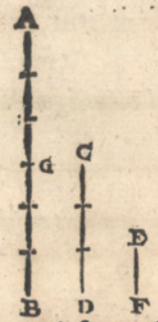
RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiuſuis definita eſt per lineam perpendicularem, quæ à vertice ad baſin deducitur: quoniam, vt ſcribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimenſione, menſura cuiuſcunq; rei debet eſſe ſtata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, ſicut & vulgus, omnia metiuntur, ſola linea perpendicularis certa eſt, determinatæq; longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminatæq;. Qua de re plura ſcripſimus ad initium commentariorum, quos in ſphæram Ioan. de ſacro boſco edidimus.

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta ſit magnitudo antecedens ad conſequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. oſtendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere conſequentem; denominator vero proportionis ſubquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem eſſe partẽ quartam conſequentis, &c.) dici ſolet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis; vt idem ſignificet quãtitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, ſeu quantitates inter ſe multiplicatæ effecerint illam proportionem, ſeu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, ſiue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & ſextupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem ſextuplæ, hoc eſt, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2.3.5. inter ſe multiplicati gignunt 30. denominatorem illius. Sic etiam proportio dupla dicetur componi ex ſeſquialtera, & ſeſquitertia: quia ſeſquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$, ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem ſeſquitertiæ gignit 2. denominatorem duplæ. Rurſus eadem proportio dupla componetur ex ſeſquiſeptima, & ſupertripartiente quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter ſe multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem dupla proportio componi dicetur ex ſubſeſquiquarta, & dupla ſeſquialtera; propterea quod harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter ſe multiplicati producunt quoq; eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis aliis proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici poteſt, vt paulo poſt patebit.

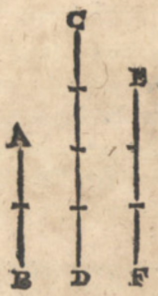
PORRO quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs conſtet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter ſe multiplicatis producatur, vt quinto libro defin.10. expoſuimus: ita vt ſi fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad ſecundam; ſi tres, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuſcunq; ordine poſitis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam conſurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis. Quod quidem primum inductione quadam Theonis Alexãdrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonſtrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Aſcalonita lib.2. Archimedis de ſphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propoſ.11. Altera autem à Vitellione lib.1. prop.13. ſuæ Perſpectiuæ, comprobabimus.



THEON igitur rem propoſitam ita conatur abſoluere. Habeat AB, ad CD, rationem datam, veluti duplam aut triplam, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandem quoq; datam. Dico quod ipſius AB, ad EF, ratio conſtat ex AB, ad CD, & ex CD, ad EF, ratione, vel quod ipſius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipſius CD, ad EF, rationis quantitatem efficit ipſius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quam CD, maior; & CD, quam EF, & ſit quidem AB, ipſius CD, dupla, & CD, ipſius EF, tripla. Quoniam igitur CD, ipſius EF, tripla eſt, ipſius autem CD, dupla eſt AB; erit AB, ipſius EF, ſextupla. Quoniã ſi triplũ alicuius duplicamus, fit ſextuplum; hoc enim eſt proprie compoſitio. Vel ſic. Quoniam AB, dupla eſt ipſius CD, diuidatur AB, in ipſis CD, æqualia, hoc eſt, AG, & GB: & quoniam CD, ipſius EF, tripla eſt, æqualis autem eſt AG, ipſi CD; & AG, igitur ipſius EF, tripla eſt: Id propterea & GB, ipſius EF, tripla eſt. Tota igitur AB, ipſius EF, ſextupla eſt. Ipſius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitem, compoſita ex ipſius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



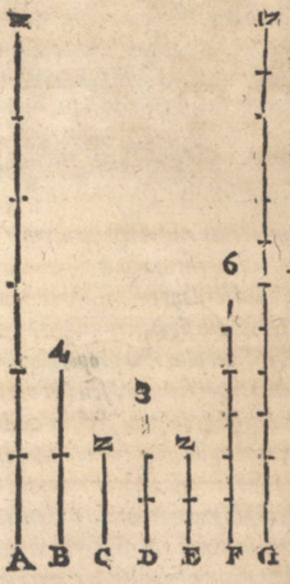
SIMILITER autem, & ſi minor fuerit CD, vtraq; ipſarum AB, & EF, idipſum colligitur. Sit enim rurſus AB, ipſius CD, tripla, at CD, ipſius EF, ſit dimidia. Et quoniam CD, ipſius EF, dimidia eſt, ipſius autem CD, tripla eſt AB, erit AB, ſeſquialtera ipſius EF. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipſum ſemel, & dimidium. At quoniam AB, ipſius CD, tripla eſt, & CD, ipſius EF, dimidia: qualium AB, æqualium ipſi CD, trium, talium eſt EF, duorum. Quare ſeſquialterum eſt AB, ipſius EF. Igitur ratio ipſius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, compoſita ex ipſius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



SED iam rurſus ſit CD, vtraq; ipſarum AB, & EF, maior, & ſit quidem AB, ipſius CD, dimidium, & CD, ipſius EF, ſeſquitertium. Quoniam igitur, qualium eſt AB, duorum, talium eſt CD, quatuor, qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium EF, trium. Connectitur igitur rurſus ratio ip[illegible] AB, ad EF, per CD, medium limitem, quæ duorum eſt ad tria. Similiter quoq; & in pluribus, & in reliquis caſibus. Et manifeſtum eſt, quod ſi à compoſita ratione quæuis vna compoſitarum auferatur, vno ſimplicium eiecto, reliqua compoſitarum aſſumetur.

HÆC ad verbum deſumpſimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

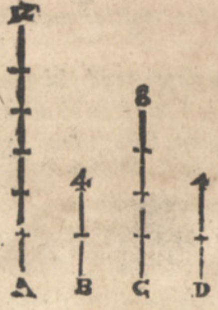
EVTOCII vero demonſtratio ita ſe habet.



SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facile demonſtrabitur, aſſumpto prius hoc principio. Quantitatem, ſeu denominatorem cuiuſuis proportionis multiplicatum in conſequentem magnitudinem proportionis eiuſdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad conſequentem, neceſſe eſt, conſequentem ſumptam ſecundum denominatorem, hoc eſt, multiplicatam in denominatorem, reſtituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4. ad 20. habent proportionem ſubquintuplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{5}$. fit, vt $\frac{1}{5}$. in conſequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D, proportionis vero B, ad C, denominator ſit E, & D, multiplicans E, producat F. Dico F, eſſe quantitatem, ſiue denominatorem proportionis A, ad C, hoc eſt, ſi multiplicetur F, in C, produci A, Producatur namq; G, ex multiplicatione F, in C, Dico G, ipſi A, æqualem eſſe, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, ſit denominator proportionis A, ad B, ſi multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione ſi E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B, (nam ex F, in C, fit G, & ex E, in C, fit B, vt dictum eſt,) [a] erit vt F, ad
a 18. ſepti. E, ita G, ad B, Rurſus quia D, multiplicans E, & B, producit
b 17. ſept. F, & A, [b] erit vt E, ad B, ita F, ad A, & permutando vt E, ad F, ita B, ad A, & conuertendo rurſus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita oſtenſum eſt eſſe G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoque æquales, erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoq; A, ex F, in C, proptereaq; F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod eſt propoſitum.

A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4
G, 100. F, 20.

SIMILIS ratio eſt in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad vltimam componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Vt ſi fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, cõponetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B. B, ad C. & C; ad D. Nam ſi intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, vt oſtenſum eſt: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoq; ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod eſt propoſitum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunq; magnitudinibus.

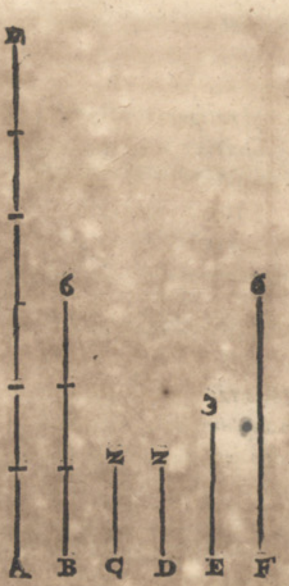


VITELLIO denique huiuſmodi affert demonſtrationem,

SINT

SINT tres magnitudines A, B, C, Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A,ad B;& B,ad C. Hoc autem demonſtrabitur,aſſumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem conſequentem proportionis producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A,ad B;& E,denominator proportionis B,ad C, At F,denominator proportionis A,ad C. Demonſtrandum eſt igitur F, produci ex D,in E,quod ita fiet. Quoniam quod ex F,prima quantitate in C,quartã producitur,æquale eſt ei,quod ex D.ſecunda in B, tertiam gignitur,cum ſemper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, conſequentem producitur A, antecedens; ſimiliter ex D, denominatore in B, conſequentem producitur antecedens A,)[a] erit vt F,prima ad D,ſecundam,ita B, tertia ad C,quartam. Cum igitur E.ſit denominator proportionis B, ad C;erit quoque E,denominator proportionis F,ad D. Quare E,multiplicans conſequentem D, producet antecedentem F. Quod eſt propoſitum. Hac Vitellio.

A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
F,20.



a 19. ſepti.

IDEM oſtendetur in pluribus magnitudinibus,vt prius ex Eutocio. Veluti,datis 6.magnitudinibus A,B,C,D,E,F, componetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B;B,ad C;C,ad D;D,ad E;& E,ad F.Nam vt oſtenſum eſt,proportio A, ad F,cõponitur ex proportione A,ad B,& B,ad F.Hæc autem proportio B,ad F.componitur ex proportione B,ad C,&C,ad F:Et hæc proportio C,ad F,cõponitur ex proportione C,adD,& D,ad F:Atq; hæc tandem proportio D,ad F,componitur ex proportione D, ad E,& E,ad F.Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc eſt, denominator proportionis A,ad F, gignitur ex quinq; denominatoribus quinq; proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
12.	6.	3.	2.	1.	4.

EX his liquido conſtat id,quod ad defin.10.lib.5.docuimus:nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continue proportionalibus,proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc eſt, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad ſecundam,in ſe ipſum multiplicato,& ex eodem in numerum productum,& ſic deinceps, donec tot multiplicationes fiant vna minus,quot proportiones inter primam quantitatem,& vltimam ſunt interpoſitæ: Adeo vt duplicata proportio alicuius proportionis conſurgat,cum huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatem, & tertiam poſitas) atq; ita in ſe multiplicatur;triplicata vero,quando item denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam poſitas) atq; ita multiplicatur, primum in ſe,deinde iterum in numerũ productũ.Et ſic de quadruplicata,quintuplicata, & de alijs dicendũ eſt in infinitum.Eſt n.eadẽ demonſtratio in magnitudinibus continue proportionalib.& in magnitudinib.non proportionalibus:Solum in illis denominatores æquales erũt.Vt ſi A,B,C,ponãtur cõtinue ꝓportionales, æquales erunt denominatores D,E;& F.erit denominator ꝓportionis duplicatæ,&c.

ETSI autem demonſtratio tam Eutocij, quam Vitellionis proprie quadrat in proportiones tantum rationales, cum vtraq; propoſitionibus lib.7.Euclidis nitatur:quia tamen,quæ de numerorum proportionib. demonſtrantur,conueniunt quoq; magnitudinibus incommenſurabilibus,hoc eſt,proportionibus irrationalibus,dici poteſt vtraq; demonſtratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamſi non conſtaret,propoſitis pluribus magnitudinibus,denominatorem proportionis,quam prima ad vltimam habet,produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter ſe,vt demonſtrauimus,non tamen propterea demonſtrationes,in quibus compoſitio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cum in illis hæc denominatorũ multiplicatio non vſurpetur.Nam quemadmodum, propoſitis pluribus magnitudinibus continue proportionalib. primam ad tertiam dixit Euclides definit.10.lib.5.habere proportionem duplicatam eius,quam prima habet ad ſecundam; nimirum compoſitam ex duabus proportionibus intermediis,æqualibus: primam vero ad quartam habere proportionẽ triplicatam eius,quam prima ad ſecundam habet,h.e.compoſitam ex tribus intermediis proportionib.æqualibus,& ſic deinceps;nulla facta mentione multiplicationis denominatorũ:Ita quoque,ſi ponãtur ordine plures magnitudines eiuſdem generis non continue proportionalibus,dicetur prima ad vltimã habere proportionem compoſitam ex omnibus proportionibus intermediis,licet inter ſe non ſint omnes æquales,ſiue aliquæ ſint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis,ſiue omnes eiuſdem generis ſint,ſolum eam ob cauſam, quod illæ proportiones intermediæ ſint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quẽmadmodum defin. 10. lib. 5. proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata,hoc ſolo nomine,quia duæ proportiones æquales interpoſitæ ſunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non ſit aliud diſcrimen inter hanc compoſitionem proportionum, & illam duplicationem, triplicationem, &c. quæ lib. 5. explicata eſt, quam quod in duplicatione, triplicatione, &c. proportionum interijciuntur proportiones omnes æquales, in compoſitione vero proportionum non neceſſe eſt,interpoſitas proportiones æquales eſſe.Multiplicatio tamen denominatorum vtilis eſt,vt ſciamus, quænam ſit illa proportio,quæ alterius dicitur duplicata,triplicata,&c. vel quæ ex propoſitis proportionibus compoſita eſſe dicitur.

VERBI gratia.Vt ſciamus,quæ proportio ſit illa,quæ dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo,10.10.& vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100,denominator eſt proportionis,quæ decuplæ eſt duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis,quæ eiuſdem decuplæ triplicata dicitur,ponemus 10.denominatorem ter hoc modo 10.10.10.& primum in ſecundum ducemus,& numerum productum 100.in tertium.Nam numerus hic procreatus 1000.denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de aliis quoq; proportionibus dicendum eſt.Sed hoc etiam diſcemus abſq; denominatorum multiplicatione. Nam ſi continuentur tres numeri in proportione data,vt in tractatu proportionum,cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus,habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: ſi vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis.Conferendus autem eſt maior cum minore,quando data proportio eſt maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore,cum data proportio minor inæqualitatis eſt. Veluti ſi deſideretur proportio decuplæ proportionis du-

plicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla hoc modo, 1.10.100. Vel 3.30.300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centupla eſt, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ ſubcentupla eſt, dicitur duplicata proportionis ſubdecuplæ 1. ad 10. vel. 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoſcamus, quænam ſit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla ſeſquialtera, & ſeſquitertia, ſtatuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3.2.$1\frac{1}{2}$.$1\frac{1}{3}$. eosq; inter ſe multiplicabimus, primum 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rurſus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & ſic deinceps, ſi plures eſſent denominatores. Vltimus n. productus 12. eſt denominator proportionis, quæ ex datis proportionib. componi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia. Hoc autem intelligemus etiam ſine hac multiplicatione denominatorum. Si namq; proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad ſecundum habeat primam proportionem componentem, ſecundus ad tertium ſecundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintū quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, compoſita ex datis proportionib. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla ſeſquialtera, & ſeſquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6.4.3. Vel in his 108.36.18.12.9. Vel in his 12.4.2.$1\frac{1}{3}$.1. Vbiq; enim primus numerus ad ſecundum proportionem habet triplam, ſecundus ad tertium duplam, tertius ad quartum ſeſquialteram, & quartus ad quintum ſeſquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duo decupla eſt, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ ſint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propoſ. 4.

ITAQVE cum Euclides demonſtrat hoc lib. prop. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compoſitam ex duab. proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit quam ſi duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogrāma inter ſe habere quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt ſi proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus ſecundi fuerit, vt 8. ad 3, proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud eſt intelligendum, quā ſi ſumantur tres numeri, 24.9.18. quorum primus ad ſecundum eſt, vt 8. ad 3. & ſecundus ad tertium, vt 1. ad 1. proportionem parallelogrāmi primi ad ſecundū eſſe eandē, quā habet primus numerus 24. ad tertiū 18. quæ eſt ſeſquitertia. Proportio n. 24. ad 18. cōponitur vt dictū eſt, ex proportionib. 24. ad 9. & 9. ad 18. h. e. ex ꝓportionib. 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera eſſe diximus.

PORRO quemadmodū interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionē, & triplicatam, &c. vere eſſe maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem eſſe intelligendam de magnitudinibus continue proportionalib. in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falſum eſſe ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac compoſitione proportionum, extremorum proportionē, quæ ex proportionib intermediis componi dicitur, vere eſſe maiorē qualibet intermediarū componentiū, vtpote conflatā ex additione omniū intermediarum proportionum inter ſe, ac proinde omnes intermedias proportiones debere eſſe minores extremorum proportione. Verū hoc falſum eſt, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex prop. 23. huius lib. protulimus, perſpicuum eſt. Nā propoſitis tribus hiſce numeris, 24.9.18. qui habent eaſdem proportiones ordine inter ſe, quas latera vnius parallelogrāmi ad latera alterius parallelogrāmi habēt; erit proportio parallelogrāmi ad parallelogrammū eadē, quæ 24. ad 18. nimirū ex laterū proportionib. compoſita, vt Euclides demonſtrat. Quis autē non videt, proportionē 24. ad 18. quæ ſeſquitertia eſt, multo minorē eſſe proportione 24. ad 9. quæ dupla eſt ſuperbipartiēs tertias? Sed de hac re plura ſcribemus ad finem lib. 9.

HÆC cum ita ſint, ſi quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id eſt, quarum denominatores inter ſe multiplicati gignant datæ proportionis denominatorē, ſtatuēdi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoſcunq; tot numeri medij quicunque, quot proportiones cōponētes deſiderātur, minus vno. Vt ſi quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio cōponatur, ſatisfiet quæſtioni, ſi inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50.10.1. nā extremorū proportio 100 ad 1. cōponitur ex intermediis tribus, h. e. ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoq; ſi alios numeros ſtatuas medios hoc modo, 100.10.3.1. cōponetur eadē proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla ſeſquitertia, & tripla. Sic etiā vides hic, 2.3.1.10.1. duplam proportionē compoſitā eſſe ex quatuor, nimirū ex ſubſeſquialtera, tripla, ſubdecupla, & decupla. Quod ſi quis petat quotuis proportiones datā proportionē cōponentes, quæ etiā omnes datæ ſint præter vnā, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas ꝓportiones cōponentes ordine. Hæ n. cū proportione, quā vltimus medius ad alterū extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt ſi quis dicat, da mihi quinq; proportiones, quarū quatuor ſint, dupla, tripla, ſeſquialtera, & quintupla ſeſquitertia, componentes proportionem ſeſquialteram inter 9. & 6. ſtatuemus hos quatuor numeros medios, 9.$4\frac{1}{2}$.$1\frac{1}{2}$.$1\frac{3}{16}$.6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplam, & $1\frac{1}{2}$. ad 1. ſeſquialteram: & 1. ad $\frac{3}{16}$. quintuplam ſeſquitertiam. Ex his etenim quatuor, vna cum proportione $\frac{3}{16}$. ad 6. quæ eadem eſt, quæ 1. ad 32. componitur proportio ſeſquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, ſi datæ quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6.12.36.54.288.9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplam; & 54. ad 36. ſeſquialteram; & 288. ad 54. quintuplam ſeſquitertiā. Nā quinta proportio 9. ad 288. eadem eſt, quæ prius $\frac{3}{16}$. ad 6. qualis eſt 1. ad 32.

EX his nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, qua quiſpiam poſtulat ſibi dari quotuis numeros, qui inter ſe multiplicati procreent datum quemcunq; numerum. Si namq; ſumantur duo numeri habentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos ſtatuantur tot numeri quicunq; minus vno, quot numeri deſiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui quæruntur. Nam ij inter ſe multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demōſtratum eſt, hoc eſt, numerum datum. Veluti ſi quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. ſtatuemus inter duos numeros 500.5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoſcunque, hoc modo 500. 250.50. 5. eruntq; tres quæſiti numeri, 2.5.10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quod ſi quis poſtulet vnum numerum, qui vna cum quotlibet alijs datis, ſi inter ſe multiplicentur, producat datum quemcunq; numerum: Sumendi erunt rurſus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis aliis numeris denominatæ. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt ſi dentur hi quatuor numeri, 2.3.$1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. quæraturq; quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum $1\frac{1}{2}$. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem ſeſquialteram habentes à dato numero $1\frac{1}{2}$. denominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportiones à 2.3.$1\frac{1}{2}$.$5\frac{1}{3}$. denominatas, hoc modo, 9.$4\frac{1}{2}$.$1\frac{1}{2}$.$1\frac{3}{16}$.6. Quintus enim numerus quæſitus erit denominator proportionis $\frac{3}{16}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{32}$. Nam quinque hi numeri 2.3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. $\frac{1}{32}$. quorum priores quatuor dati ſunt, quintus autem inuentus, inter ſe multiplicati procreant datum numerum $1\frac{1}{2}$. Idem quintus numerus $\frac{1}{32}$. inuenietur, ſi quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6.12.36. 54.288.

1.288.9. Denominator n. proportionis 9. ad 288. eſt $\frac{1}{32}$. vt prius. Sic etiam ſi quærendi ſint quatuor numeri, qui inter ſe multiplicati procreent 1. ſtatuemus inter quoſuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4.2.1.3.4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2. 2. $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$. ſunt quatuor numeri, qui quæruntur, quippe cum inter ſe multiplicati gignant 1.

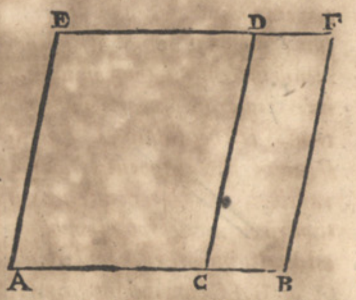
FACILIVS huiuſmodi quæſtiones ſoluuntur, ſi tot numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter ſe multiplicentur, & per vltimum numerum productum, diuidatur datus numerus, qui gigni debet. Quotiens enim & aſſumpti numeri, multiplicati inter ſunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæſtione, ſi hi tres numeri, verbi gratia, 4.5. 6. inter ſe multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. qui produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quæſiti ſunt 4.5.6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$. fit 1.

POSTREMO neq; hoc prætermittendum eſt, videlicet: Quemadmodum, ordine poſitis quotcunq; numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonſtrauimus; ita poſitis quotcunque numeris ordine, ita tamen, vt quilibet inſequens ſit ſuo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentiis intermediorum numerorum. Vt hic 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. eſt 710. At differentia inter 3. & 7. eſt 4. Inter 7. & 12. eſt 5. Inter 12. & 20, eſt 8. Inter 20. & 30. eſt 10. Inter 100. deniq; & 713. eſt 613. quæ omnes differentiæ 4.5.8.10. 70.613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

ATQVE hæc dicta ſint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6.l. poſitis, quibus addendam eſſe cenſemus ſequentem ſextam, quæ multum conducet, vt facilius intelligantur 27.28.29. & 30. propoſitiones huius libri, & quam plurimæ aliæ decimi libri. Ea autem eſt eiuſmodi:

VI.

PARALLELOGRAMMVM ſecundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam ſit ea, ſecundum quam applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato conſtituatq; cum eo totum vnum parallelogrammum.



SIT data recta linea AB, ſupra quam conſtituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, ſed deſit CB; & ducta BF, parallela ipſi CD, donec cum ED, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum ABFE. Parallelogrammum igitur AD, applicatum ſecundum rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, appelletur defectus.

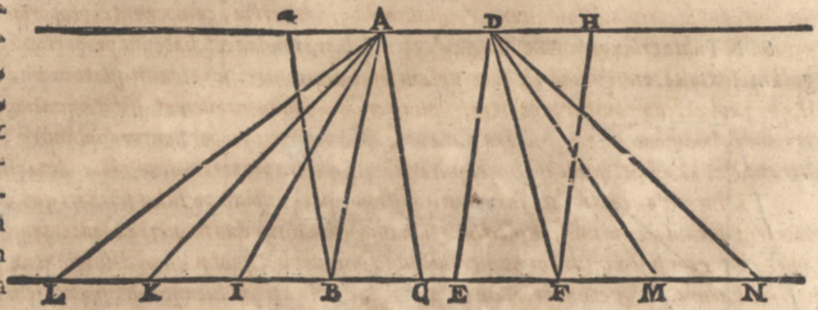
RVRSVS ſit data recta linea AC, ſupra quam conſtituantur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB, maius recta data AC; & ducatur CD, ipſi BF, parallela. Parallelogrammum igitur AF, applicatum ſecundum rectam AC, excedere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, vocetur exceſſus.

HIC autem defectus DB, vel exceſſus, in rectangulis quidem eſſe poteſt vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perſpicuum eſt.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes.

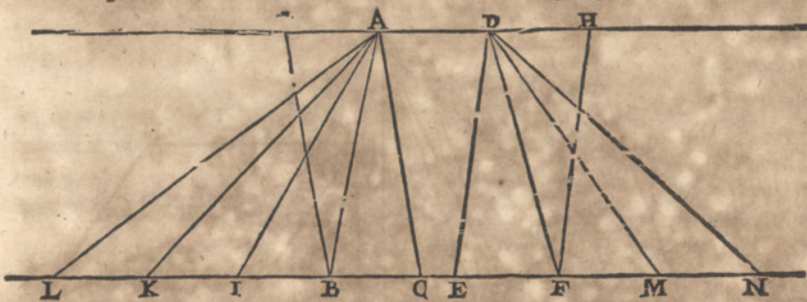
SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum baſes BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiuſdem altitudinis, quorum eædem baſes BC, EF. Dico ita eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammũ CG, ad parallelogrammum EH, vt eſt baſis BC, ad baſin EF. Hoc eſt, ſi baſis BC, ſtatuatur prima magnitudo, & baſis EF, ſecunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus ſecundæ & quartæ vel vna deficere, vel vna æqualia eſſe, vel vna excedere, vt definitio 6. libr. 5. exigit.



Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter eaſdem parallelas GH, LN. (Nam vt in defin. 4. dictum eſt, triangula ac parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinẽ, cum inter eaſdem fuerint conſtituta parallelas: ſic enim perpendiculares à verticibus ad baſes demiſſæ æquales erunt,) & ex BL, ſumantur quotcunque rectæ BI, IK, KL, ipſi BC, æquales; Item ex FN, abſcindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL; DM, DN. [a] erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, inter ſe æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quammultiplex eſt ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoq; erit triangulum ACL, ttianguli ABC; & quammultiplex eſt recta EN, rectæ EF, tam quoq; multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia ſunt diuiſa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero ſi baſis CL, æqualis fuerit baſi EN, [b] neceſſario triangulum ACL, æquale eſt triangulo DEN, ac proinde ſi CL, maior fuerit quam EN, neceſſario ACL, maius

a 38. primi.
b 38. primi.

maius eſt quam DEN, & ſi minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & trangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta triangulo DEN, æquemultiplicibus ſecundæ EF, & quartæ DEF, vel vna æqualia erunt, vel vna excedẽt, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. [a] Quare quæ proportio eſt primæ BC, ad ſecundam EF, baſis ad baſim, ea eſt tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur baſis ad baſin, ita eſt triangulum ad triangulum. Quod eſt propoſitum.



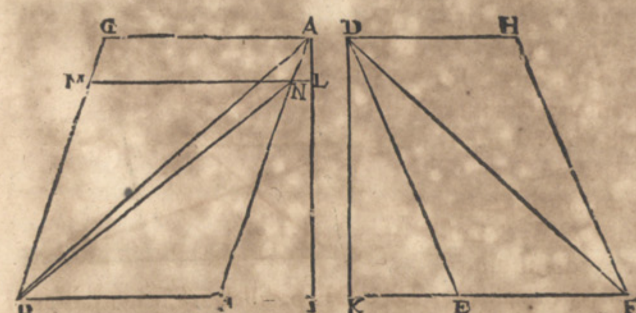
a 6. defi. quinti.

b 15. quinti. c 34. pri. d 34. pri. e 11. quinti. QVONIAM autem [b] vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt parallelogrammum CG, ([c] quod duplum eſt trianguli ABC,) ad parallelogrammum EH; ([d] quod eſt duplum trianguli DEF,) perſpicuum eſt, [e] ita quoque eſſe parallelogrammum ad parallelogrammum, vt eſt baſis ad baſin. Quod tamen eodem argumento confirmari poteſt, quo vſi ſumus in triangulis, ſi prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipſi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipſi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita ſe habent inter ſe, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & conuerſum huius demonſtrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt baſes, æquales habent altitudines, vel eandem.

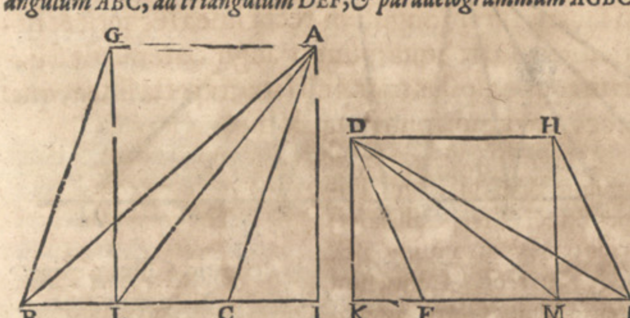


SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammũ AGBC, ad parallelogrammũ DEFH, vt baſis BC, ad baſin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK; eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit AI. ſi fieri poteſt, maior, quam DK. Abſciſſa igitur IL, ipſi DK, æquali, ductaque LM, ipſi BC, parallela, quæ latus AC, ſecet in N, coniunctaque recta BN; *a 1. ſexti. b 11 quinti. c 9. quinti.* [a] *erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt baſis BC, ad baſin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF.* [b] *Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem;* [c] *Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt altitudines AI, DK, ſed æquales. Eadem eſt ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento oſtendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia eſſe, ſi altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.*

ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonſtrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eædem, ita ſe habent inter ſe, vt altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia baſes æquales BC, EF. Dico eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, eſt ad altitudinem DK. Si enim ſumantur rectæ IL, KM, baſibus BC, EF, æquales, ducanturque rectæ LA, MD; *d 38. primi.* [d] *erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum ſint ſuper baſes æquales LI, BC, & inter eaſdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF.* *e 7. quinti. f 1. ſexti.* [e] *Quare erit, vt ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM.* [f] *Eſt autem, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam ſi baſes ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad DK. Quod eſt propoſitum.*



g 15. quinti. a 34. primi. b 34. pri. c 11. quinti *QVONIAM vero eſt,* [g] *vt ABC, ad DEF, ita parallelogrammum AGBC,* [a] *quod trianguli ABC, duplum eſt, ad parallelogrammum DEFH,* [b] *quod trianguli DEF, eſt duplum.* [c] *Erit quoque AGBC, ad DEFH, vt AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, ſi rectæ ducantur LG, MH. Idem ſequetur, ſi triangula, & parallelogramma eandem habuerint baſin.*

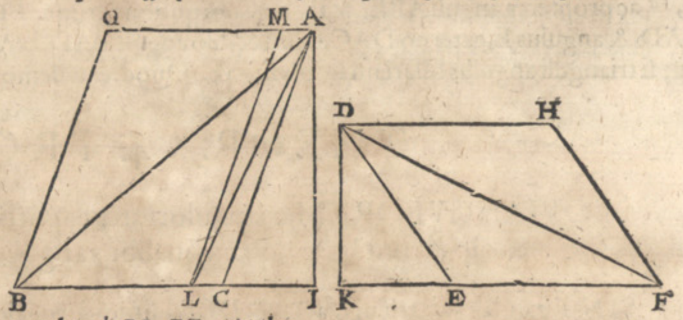
HOC vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant.

SIT

SIT triangulum A B C, ad triangulum DEF; & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo A I, ad altitudinem D K. Dico eorum baſes BC, EF, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit BC, ſi fieri poteſt, maior, quam EF. Abſciſſa igitur BL, ipſi EF, æquali, ductaque recta LA; erit vt proxime demonſtrauimus, ABL, ad DEF, vt AI, ad DK: Sed vt AI, ad DK, ita ponitur eſſe ABC, ad DEF, [d] *Igitur ABL, ABC, ad DEF, eandem habent proportionem;* [e] *Ac proinde inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes BC, EF, ſed æquales. Eademque eſt ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento ducta LM, ipſi GB, parallela, oſtendemus, parallelogramma MGBL, A G B C, æqualia eſſe, ſi baſes B C, E F, dicantur inæquales, & B L, E F, æquales.*

d 11.quinti
e 9.quinti



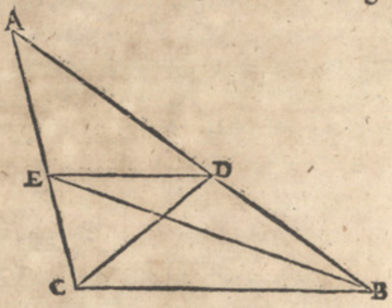
IN omnibus autem his non variabitur demonſtratio, etiamſi triangula, & parallelogramma ſint rectangula, ita vt altitudines ſint ipſorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos aſſumpſimus caſum difficiliorum, quando ſcilicet neutrum eſt rectangulum. Ita enim demonſtratio maiore indiget nonnunquam conſtructione.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

IN triangulo A B C, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, ſecta eſſe proportionaliter in D, & E, hoc eſt, eſſe vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, [a] erunt triangula DEB, DEC, ſuper eandem baſin DE, & inter eaſdem parallelas D E, BC, conſtituta inter ſe æqualia. [b] Quare vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita eſt triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: [c] Atqui vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita eſt baſis A D, ad baſin DB; (cum hæc triangula ſint eiuſdem altitudinis, vt conſtat, ſi per E, agatur parallela recta ipſi AB.) & eadem ratione, vt triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita eſt baſis AE, ad baſin EC. [d] Vt igitur AD, ad DB, ita eſt AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem ſint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & eiuſdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) quod eſt propoſitum.

a 37.primi
b 7.quinti
c 1.ſexti.
d 11.quinti



SECET deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam eſſe reliquo lateri BC. Ductis enim rurſum rectis C D, B E, [e] erit vt baſis AD, ad baſin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum ſint eiuſdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. [f] Igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulū DEB, ita AE, ad EC: Sed rurſus [g] vt baſis AE, ad baſin EC, ita eſt triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum ſint altitudinis eiuſdem. [h] Igitur vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita eſt triangulum idem ADE, ad triangulum DEC. [i] Æqualia ergo ſunt triangula DEB, & DEC: ac propterea, cum eandem habeant baſin D E, [k] inter eaſdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela eſt DE, ipſi BC. quod eſt propoſitum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

e 1.ſexti.
f 11.quinti.
g 1.ſexti.
h 11.quinti
i 9.quinti.
k 39.primi.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad ſectionem producitur, bifariam ſecat trianguli ipſius angulum.

IN triangulo ABC, recta AD, ſecet primo angulum BAC, bifariam. Dico eſſe vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipſi AD, donec cum CA. producta conueniat in E; (coibunt autem omnino BE, CA, propterea quod anguli C, & CBE, minores ſunt duobus rectis. Cum enim C, & CDA, [a] minores duobus rectis ſint; [b] ſit autem angulus CDA, angulo CBE, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & CBE, duobus rectis minores. [c] eritque angulus EBA, æqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter ſe æquales; [d] Ideoque & rectæ BA, EA, inter ſe æquales. [e] Vt igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. [f] Atqui vt EA, ad AC, ita eſt BD, ad DC. cum in triangulo BCE, recta AD, ſit parallela lateri BE. [g] Igitur vt BA, ad AC, ita eſt BD, ad DC. quod eſt propoſitum.

a 17.primi.
b 29.primi
c 29.primi.
d 6.primi.
e 7.quinti.
f 2.ſexti.
g 11.quinti



SIT deinde vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam A D, bifariam ſecare angulum B A C. Agatur enim rurſus per B, recta B E, ipſi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur vt BA, ad AC, ita

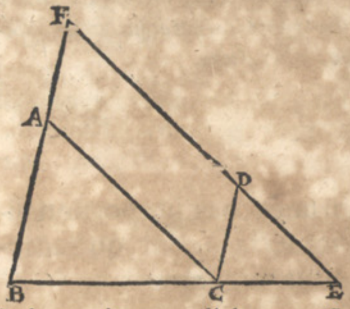
e 2.ſexti. AC, ita ponitur BD, ad DC, [e] Vt autem BD, ad DC, ita eſt EA, ad AC; (quod in triangulo BCE, recta AD,
f 11.quinti. ſit lateri BE, parallela) [f] erit vt BA, ad AC, ita EA, ad eandem AC. [g] Æquales igitur ſunt BA, & EB, inter
g 9.quinti. h 5.primi. ſe, [h] ac propterea anguli ABE, & E, æquales quoque erunt. [i] Cum igitur angulus ABE, æqualis ſit alterno
i 29.primi. BAD, & angulus E, externo DAC, erunt & duo anguli BAD, DAC, inter ſe æquales, quod eſt propoſitum. Itaque ſi trianguli angulus biſariam ſectus ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

iiij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

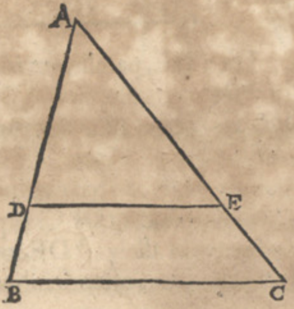
ÆQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

SINT æquiangula triangula ABC, DCE, ſintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, BAC, CDE. Dico eſſe AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE: Ita enim latera circa æquales angulos ſunt proportionalia, homologaque ſunt ea latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur, hoc eſt, & antecedentia omnia æquales reſpiciunt angulos, & conſequentia ſimiliter. Conſtituantur latera BC, CE, ſecundum lineam rectam, ita vt angulus DCE, externus ſit æqualis interno ABC, pariterq; externus ACB, interno DEC,



a 17.primi. b 13.prõ. Et quia duo anguli ABC, ACB, [a] minores ſunt duobus rectis: eſt autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. [b] Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus
c 28. pri. DCE, æqualis eſt interno oppoſito ABC; [c] parallelæ erunt CD, & BF:
d 34.primi Eadem ratione parallelæ erunt CA, & EF, quod angelus externus ACB, ſit æqualis interno DEC. Parallelogrammum eſt igitur ACDF, [d] proptereaq; recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam
e 2.ſexti. f 16.quinti. g 2. ſexti. h 16 quinti. igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela eſt lateri EF, [e] erit AB, ad AF, hoc eſt, ad DC, (quæ æqualis eſt ipſi AF,) vt BC, ad CE. Permutando [f] igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Ruſus quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela eſt lateri BF, [g] erit BC, ad CE, vt FD, hoc eſt, vt CA, (quæ æqualis eſt ipſi FD,) ad ED. Permutando [h] igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur ſit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad
i 22.quinti CA, vt CE, ad ED: [i] erit & ex æquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod eſt propoſitum. Æquiangulorum ergo triangulorum proportionalia ſunt latera, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

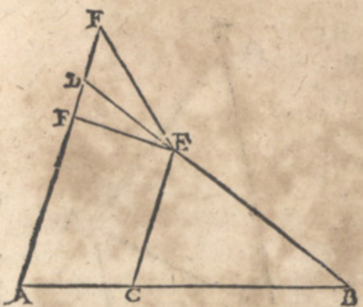


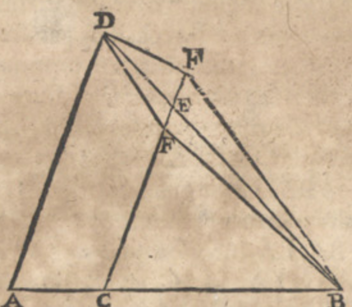
HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo ſimile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE. Dico triangulum ADE, triangulo ABC. eſſe ſimile. Æquiangula
k 29.pri. namque ſunt, [k] cum anguli ADE, AED, Æquales ſint angulis ABC, ACB, externis; & angulus
l 4. ſexti. A, communis. Quare vt demonſtratum eſt, [l] habent latera circa æquales Angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, ſimilia ſunt.

SCHOLIVM.

NON alienum à noſtro inſtituto eſſe puto, ſi hic demonſtremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonſtrat in libello Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua; Secundum vero in commentariis in Apollonii Conica. Horum primum eſt.

SI ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelę inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita vt proportionē habeant eandem, quam rectæ inter ipſas, & alterum extremum punctum incluſæ: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ.





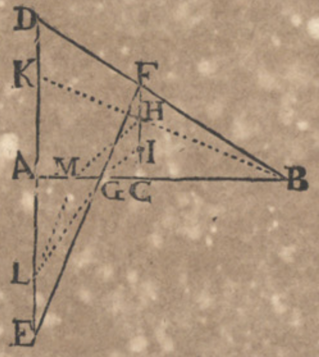
SIT recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB. BC, ita vt ſit AD, ad CE, ſicut AB, ad BC; vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, tranſire per punctum D. Ite rectam, quæ coniungit extrema B, & D, tranſire per punctum E. Si enim recta BE, non tranſit per D, coeat cum AD, in F. puncto, quod ſit vel ſupra D, vel infra, vt in
a 4. ſexti. b 16. quinti. *prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propoſ. triangula BAF, BCE, ſimilia ſunt; [a] erit, vt AB, ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando, [b] vt AB, ad BC, ita AF, ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita erat quoq; AD, ad CE. [c] Igitur erit, vt AE, ad CE,*
c 11. quinti *ita AD, ad CE: [d] Ac propterea æquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta BE, per*
d 9.quinti. *punctum D. Quod eſt primum.*

RVRSVS

RVRSVS ſi recta BD. non tranſit per E, tranſeat per F, punctum, quod ſit vel ſupra E, vel infra, vt in ſecunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propoſ. triangula BAD, BCF, ſimilia ſunt; [c] *erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF:* [d] *& permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autẽ AB, ad BC. ita quoq; erat AD, ad CE.* [e] *Igitur erit, vt AD, ad CF, ita AD, ad CE:* [f] *Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod eſt abſurdũ. Tranſit ergo recta BD, per E. Quod eſt ſecundũ.*

c 4. ſexti.
d 16 quinti.
e 11. quinti
f 9. quinti.

HOC etiam verum eſt, quando duæ parallelæ in diuerſas partes ducuntur, habentes eandem proportionem, quam ſegmenta rectæ inter parallelas conterminas, & punctum idem cum ipſa datam rectam. Vt in figura problematis 7. ſcholij propoſit. 17. ſi fuerint parallelæ AE, FC, in diuerſas partes ductæ, fueritque vt AE, ad CF, ita AG, ad CG, tranſibit recta EF, per G, hoc eſt, duæ rectæ EG, FG, vnam rectam conſtituent. Cum enim ſit, vt AE, ad CF, ita AG, ad CG; erit permutando quoque, vt AE, ad AG. ita CF, ad CG. Cum ergo anguli alterni A, C, æquales ſint; [g] *erunt quoq; anguli AGE, CGF, æquales. Cum ergo AC, ſit linea recta, conſtituent EG, FG, lineam quoq; rectam ex iis, quæ ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. demonſtrauimus. ALTERVM vero eſt.*



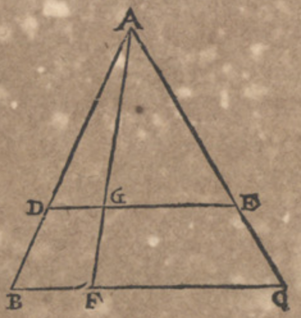
g 6. ſexti.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur: & ex quocunq; pũcto illius lateris ad angulũ oppoſitũ recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in eaſdẽ rationes.

IN triangulo ABC, ducta ſit DE, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur FA, ſecans DE, in G. Dico eſſe, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propoſ. ſimilia ſunt; [h] *erit vt AF, ad BF, ita AG, ad DG,* [i] *& permutando, vt AF, ad AG, ita BF, ad DG. Atq; eodem argumento concludemus eſſe, vt AF, ad AG, ita FC, ad GE.* [k] *Igitur erit, vt BF, ad DG. ita FC, ad GE, & permutando, vt BF, ad FC, ita DG, ad GF. Quod eſt propoſitum.*

h 4. ſexti.
i 16. quinti
k 11. quinti

ALITER. Quoniam triangula ABF, ADG, ſimilia ſunt, nec non triangula AFC, AGE, per coroll. huius propoſ. [l] *erit, vt BF, ad FA, ita DG, ad GA: Item vt FA, ad FC, ita GA, ad GE.* [m] *Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonſtrandum.*



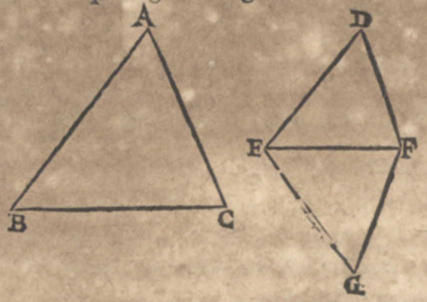
l 4. ſexti.
m 22. quinti.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

v.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus & homologa latera ſubtenduntur.

HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, ſitque AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF, ad FD, & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula eſſe æquiangula, angulum ſcilicet A, æqualem eſſe angulo D, & angulum B, angulo E, & Angulum C, angulo F. Sic enim anguli æqualis reſpiciunt homolaga latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, conueniantque rectæ EG, FG, in G: [a] eritq; reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur ſunt triangula ABC, GEF. Quare [b] vt AB, ad BC, ita eſt GE, ad EF: Vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [c] Igitur vt GE, ad EF, ita eſt DE, ad EF, eandem: [d] proptereaq; æquales erunt GE, DE. Rurſus, [e] quoniam vt BC, ad CA, ita eſt EF, ad FG: Vt autem BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; [f] erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; [g] ideoq; æquales erunt FG, FD. Itaq; cum latera EG, FG, æqualia ſint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique; & baſis communis EF; [h] erunt anguli G, & D, æquales; [i] ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus, G, æqualis ſit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemq; modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit. quod eſt propoſitum, Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod oſtendendum erat.



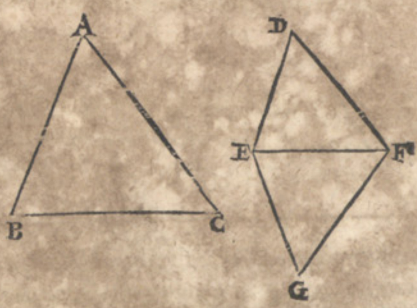
a 32. primi
b 4. ſexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 4. ſexti.
f 11. quinti.
g 9. quinti.
h 8. primi.
i 4. primi.

THEOR. 6. PROPOSITIO 6.

vj.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesq; habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.

SIT angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, ſintq; latera AB, BC, ꝓportionalia laterib. DE, EF, hoc eſt, ſit AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales eſſe, angulũ ſ. A, angulo D, & angulũ C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera reſpiciũt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C. angulus EFG, eritq; vt in præcedenti propoſ. dictũ eſt, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare [a] vt AB, ad BC, ita eſt, GE, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [b] Igitur vt DE, ad EF, ita eſt GE, ad eandem EF; [c] atque idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia ſint lateribus GE, EF, & anguli ipſis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus eſt æqualis angulus FEG, æqualis eſt poſitus angulus DEF, proptereaque æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF.)



a 4. ſexti.
b 11. quinti
c 9. quinti.

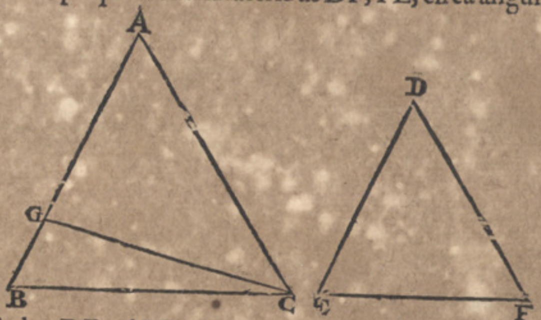
[d] *erunt*

d 4. pri. [d] erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, ſit æqualis angulo A,& angulus EFG,angulo C; erunt etiam angulis A,C, æquales anguli D, EFD, & ob id æquiangula erunt triangula ABC,DEF,quod eſt propoſitum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem,&c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 7. PROPOSITIO 7.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero ſimul vtrumque aut minorem,aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula,& æquales habebunt eos angulos,circum quos proportionalia ſunt latera.

SIT angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F, & latera A C, C B, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc eſt ſit vt AC,ad CB, ita DF, ad FE, hac tamen lege,vt quilibet reliquorum angulorum B,&E,ſit vel minor recto,vel non minor.Dico æquiangula eſſe triangula,angulos ſcilicet ACB, & F, circa quos ſunt latera proportionalia,& angulos B,& E, æquales eſſe. Sit enim primum tam B,quam E,recto minor: Quo poſito,ſi anguli ACB,&F, non ſunt æquales,ſit ACB,maior: quam F: fiatque ipſi F, æqualis ACG, Cum igitur, & angulus A,



a 32. pri. angulo D,ponatur æqualis, [a] erit & reliquus AGC, re-
b 4.ſexti. liquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF, æqui-
c 11. quinti angula erunt. Quare [b] vt AC,ad CG, ita erit DF, ad EF:
d 9. quinti. Sed vt DF, ad FE,ita ponitur AC,ad CB. [c] Vt igitur AC,ad CG,ita erit eadem AC, ad CB, [d] ac propterea æ-
e 5. primi. quales erunt C G, C B, [e] & anguli C B G, C G B, æquales. Cum igitur angulus B,ponatur recto minor, erit &
f 13. primi. CGB,minor recto,ideoque ei deinceps AGC, recto maior; [f] cum AGC, CGB, ſint duobus rectis æquales: Eſt autem oſtenſus angulus AGC,angulo E,æqualis. Maior igitur recto eſt quoque angulus E: Sed poſitus eſt etiam recto minor. Quod eſt abſurdum.

SIT deinde tam B,angulus,quam E,recto non minor; eritque vt prius,angulus B, angulo CGB, æqualis,ideoq; & CGB,recto non minor erit; ac propterea anguli CBG,CGB,in triangulo BCG,non miores erunt
g 17. primi. duobus rectis,ſed vel maiores,vel æquales duobus rectis.quod eſt abſurdum. [g] Sunt enim duobus rectis mino-
h 32. primi res.Non ergo inæquales ſunt anguli ACB,& F,ſed æquales,atque [h] idcirco reliqui etiam anguli B,& E,æquales erunt. quod eſt propoſitum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem,&c. Quod demonſtrandum erat.

S C H O L I V M.

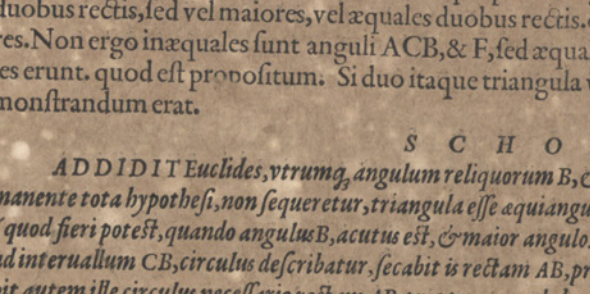
ADDIDIT Euclides,vtrumq; angulum reliquorum B,& E,debere eſſe vel minorẽ recto,vel non minorem. Nam alias,
i 19. primi. *manente tota hypotheſi,non ſequeretur,triangula eſſe æquiangula. Si enim in eodem triangulo ABC, ſit CG,æqualis ipſi CB, (quod fieri poteſt,quando angulus B,acutus eſt,& maior angulo A. Sic enim [i] erit latus CA,latere CB,maius, Si igitur ex C,ad interuallum CB,circulus deſcribatur,ſecabit is rectam AB,priuſquam rectam AC, quæ longior eſt,quam CB, ſecet. Secabit autem ille circulus neceſſario rectam AB,propterea quod ob acutum angulum B,recta AB,intra eum circulum cadit:quippe cum infra contingentem lineam ducatur,quæ ad B,angulum rectum conſtituit cum CB,vt patet ex propoſ. 16. lib.3.) habebunt duo triangula ABC,AGC,vnum angulum vni angulo æqualem,immo angulum A,communem; & circum alios angu-*
k 7. quinti *los ACB,ACG, latera proportionalia,hoc eſt, [k] vt AC, ad CB, ita erit eadem AC, ad CG, cum æquales ponantur rectæ CB, CG,& tamen non ſunt vllo modo æquiangula triangula ABC,AGC,vt conſtat. Quod ideo euenit,quia non vterq; angulorum A B C,AGC,minor eſt recto,vel non minor. Immo ABC,eſt quidem recto minor.AGC,vero recto maior. Cum enim CG, CB,*
l 5. primi. m 17. vel 32. pri. *latera æqualia ſint, [l] & ideo anguli CBG, CGB, æquales; [m] erit vterque eorum recto minor, [n] ac propterea AGC, recto maior.*
n 13. primi.

viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo,ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perdendicularem triangula,tum toti triangulo,tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

IN triangulo ABC, angulus BAC,ſit rectus, à quo ad baſin perpendicularis agatur AD. Dico triangula ADB, ADC, ſimilia eſſe & toti triangulo ABC, & inter ſe. Cum enim in triangulis A BC, DBA, anguli BAC,



a 32. primi. & ADB, ſint recti, & angulus B, communis; [a] erunt & reliqui anguli ACB,& DAE,æquales. Æqui-
b 4. ſexti. angulũ eſt igitur triangulum DBA,triangulo ABC, [b] ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia,&c. hoc eſt,erit vt CB,ad BA, ita BA,ad BD;& vt BA,ad AC,ita BD,ad DA;& vt BC, ad CA,ita BA,ad AD, Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur,vt vult propoſ. 4 huius libr. Quare ſimile eſt triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem modo oſtendetur triangulum ADC, ſimile eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, & ADC, ſunt recti, & angulus
c 32. primi C,communis; [c] ac propterea reliqui anguli ABC,& CAD,æquales. Quare [d] vt BC,ad CA,ita eſt CA, ad CD;
d 4. ſexti. & vt CA,ad AB,ita CD,ad DA,& vt CB,ad BA,ita CA,ad AD.Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus,ex præſcripto propoſ. 4. huius lib. Non ſecus demonſtrabitur, ſimilia inter ſe eſſe triangula ADB,

ADB,& ADC,cum anguli ADB, ADC,ſint recti,& anguli ABD, CAD, oſtenſi æquales,nec non anguli BAD, ACD. Atque idcirco ſit [c] vt BD, ad CA, ita DA, ad DC; & vt DA, ad AB, ita DC, ad CA; & vt AB, ad BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit, &c. Quod erat demonſtrandum. d 4. ſexti.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſin demittitur, eſſe mediam porportionalem inter duo baſis ſegmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam baſin, & illud ſegmentum baſis, quod ei lateri adiacet.

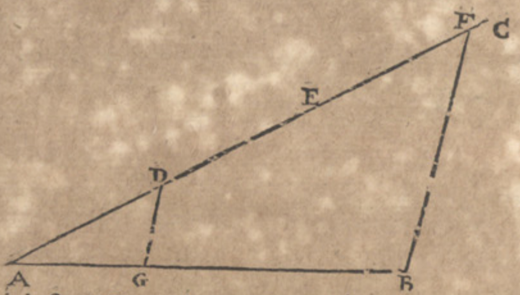
OSTENSVM eſt enim, eſſe vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, eſſe mediam proportionalem inter BD, & CD: Item eſſe vt CB, ad BA, ita BA, ad BD; & idcirco BA, mediam eſſe proportionalem inter CB, & BD: Denique eſſe vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, eſſe proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod eſt propoſitum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. xi.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.

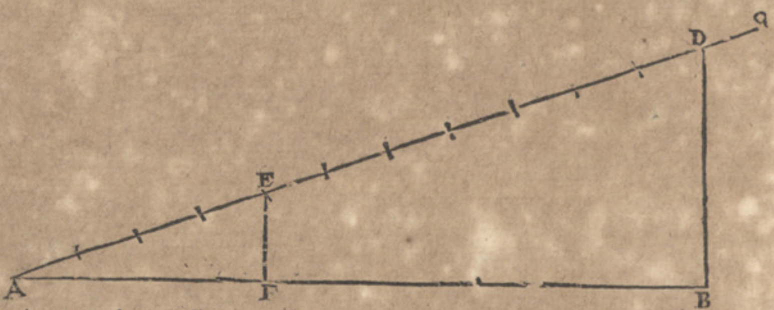
IMPERETVR, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunq; faciens angulum CAB; & ex AC, abſcindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda eſt ex AB, vt in propoſito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, eſſe partem tertiam imparatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB, parallela ſit recta DG; [a] erit vt FD, ad DA, ita BG, ad GA. [b] Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipſius AD, eſt tripla, ex conſtructione. Igitur & BA, ipſius AG, erit tripla; ideoq; AG, tertia pars erit ipſius AB, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abſtulimus. Quod faciendam erat.

a 2. ſexti.
b 18. quinti.



SCHOLIVM.

QVOD ſi ex AB, auferenda ſit pars non aliquota, ſed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirum quæ contineat quatuor vndecimas ipſius AB, ſumendæ erunt ex AC, vndecim partes æquales vſque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur DB; & huic parallela EF, ex E, termino quatuor partium. Nam AF, erit pars imperata: Erit enim rurſus vt DA, ad AE, ita BA, ad AF. Quare, & conuertendo vt AE, ad AD, ita AF, ad AB: Eſt autem AE, pars continens quatuor vndecimas ipſius AD, ex conſtructione. Igitur & AF, eadem pars erit rectæ AB. Quod eſt propoſitum. Non aliter detrahetur ex AB, pars complectens quotcunq; partes ipſius aliquotas non facientes vnam.

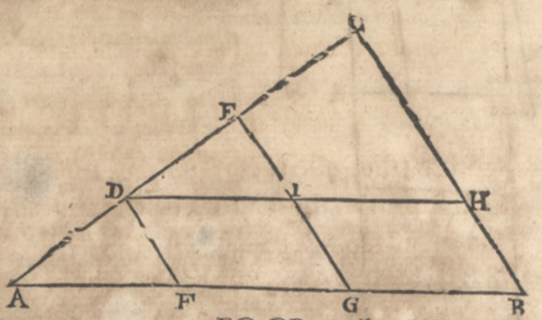


PROBL. 2. PROPOS. 10. xij.

DATAM rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit.

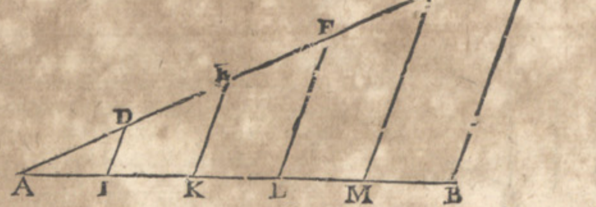
SIT recta AB, ſecanda ſimiliter, vt ſecta eſt recta AC, in D, & E, hoc eſt, in partes, quæ ſint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulũ quemcunq; BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipſi BC. Dico rectam AB, ſimiliter eſſe ſectam in F, & G, vt eſt ſecta AC, in D, & E. [a] vt AD, ad DE, ita eſt AF, FG. Proportionales ergo ſunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod ſi ducatur DH, ipſi FB, parallela, ſecans EG, in I; [b] erit rurſus, vt DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc eſt, ita FG, ad GB; [c] quod FG, ipſi DI, & GB, ipſi IH, æqualis ſit. Quare proportionales quoq; erunt partes FG, GB. partibus DE, EC. Eademq; ratio eſt de pluribus partibus, ſi ex E, & C, ipſi AB, parallelæ agantur, &c. Itaq; datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecuimus, vt data altera recta ſecta fuit. Quod faciendum erat.

a 2. ſexti.
b 2. ſexti.
c 34. primi.

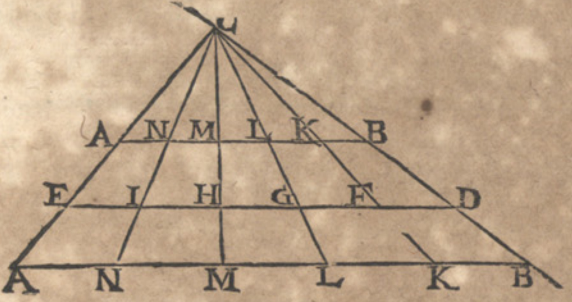


SCHOLIVM.

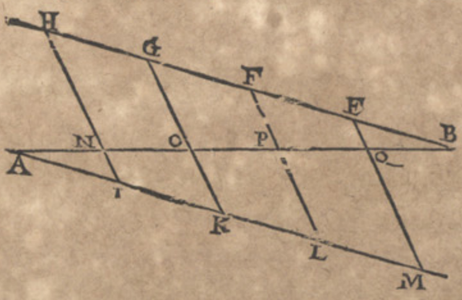
EX hoc problemate colligi poteſt facilis admodũ via, ac ratio diuidendi lineam rectam datã in partes quotcunq; æquales: id, quod nos ad propoſ. 10. l. 1. facturos recepimus, & aliam iam via idẽ ad propoſ. 40. l. 1. demonſtrauimus. Sit enim data recta AB, diuidenda in quinq; partes æquales: Ducta recta AC, faciente cum AB, quemcunq; angulum CAB, ſumantur ex ea quinq; partes æquales AD, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta AH, vtcunq; eſt diuiſa, ſi ex H, ad B, ducatur recta HB, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur DI, EK, FL, GM; erit AB, ſimiliter diuiſa, vt AH, vt



conſtat ex demonſtratione huius problematis. Cum igitur AH, ſit diuiſa in quinq; partes æquales, erit & AB, in totidem æquales partes diuiſa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta AB.



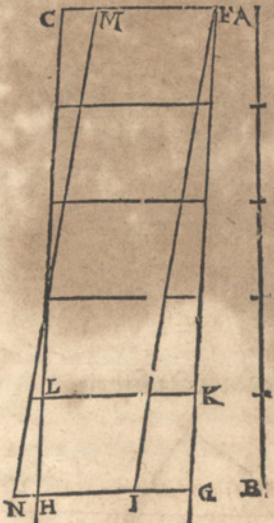
HVIC rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi poſſunt aliæ non iniucundæ. vt propoſ. 10. l. 1. ſumus polliciti, atq; ad propoſ. 40. l. I. demonſtrauimus. Sit enim rurſus data linea recta AB, diuidenda in quinq; partes æquales. Ducatur ex B. recta BC, vtcunq; faciens angulum cum AB; Deinde ex aſſumpto puncto D, ſiue ſupra B, ſiue infra, agatur DE, parallela ipſi AB, ex qua abſcindantur quinq; æquales partes DF, FG, GH, HI, IE, ea lege tamẽ, vt ſi D, eſt ſupra B, recta DE, ex quinq; partibus æqualibus conſtans, minor ſit, quam AB, maior vero, ſi D, exiſtit infra B. poſtremo ex A, per E, recta ducatur AC, occurrens ipſi BC, in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur CK, CL. CM, CN, quas dico diuidere rectam AB, in quinq; partes æquales. Cum enim DE, ſit parallela ipſi AB, diuidentur EH, & AM in triangulo CAM, proportionaliter, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Cum ergo EH, ſecta ſit bifariam in I ſecta quoq; erit AM, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL; & recta MK, in triangulo CMK; & recta LB, in triangulo CLB, ſecta erit bifariam. Eſt ergo AN, ipſi NM; & NM, ipſi LM; & ML, ipſi LK; & LK, ipſi KB, æqualis; ac proinde AB, ſecta erit in quinq; partes æquales. Quod eſt propoſitũ.



ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ BC, AD, inter ſe parallelæ; hoc eſt, conſtituentur angulos A, B, æquales: Et ex BC, abſcindantur quatuor partes æquales BF, EF, FG, GH, vt ſint tot partes, vna minus, in quot eſt linea diuidenda; His autem ex AD, totidem æquales reſecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM. FL, GK, HI, ſecantibus rectam AB, in N, O, P Q, dico ipſam AB, ſectam eſſe in quinq; partes æquales. Cum enim æquales ſint, & parallelæ GH, IK,

d 33. primi.

[d] erunt & HI, GK, parallelæ; Eademq; ratione parallelæ erunt GK, FL, EM. Quare cum AM, ſecta ſit in quatuor æquales partes, erit & AQ. ſimiliter in quatuor æquales partes diuiſa, vt conſtat ex demonſtratione huius 10. propoſ. Eadem ratione diuiſa erit & BN, in quatuor partes æquales, eo quod BH, in totidem eſt partes æquales diuiſa. Quare cum tam AN, quam BQ æqualis ſit ſingulis partibus NO, OP, PQ; erunt omnes quinque partes AN, NO, OP, PQ, QB, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.



ALITER. Præparetur prius inſtrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis inter ſe parallelis vtcunq; CD, EF; ex vtraq; abſcindantur partes inter ſe æquales quotcunq;, ſaltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina pũcta correſpõdẽtia lineis rectis iũgantur. Deinde beneficio circini capiatur lõgitudo rectæ AB, diuidẽdæ, eaq; ex aliquo puncto lineæ CE, vt ex E, trãsferatur in inſtrumẽtũ ad pũctũ I, illius lineæ trãſuerſæ, quæ tot ſpatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidẽda, qualis in exẽplo eſt recta GH; ea enĩ includit quinq; ſpatia. Poſtremo ex E, ad I, recta ducatur EI, quã dico diuiſã eſſe in quinq; æquales partes. Cũ enim GK, HL, æquales ſint, & parallelæ;

e 33. primi.

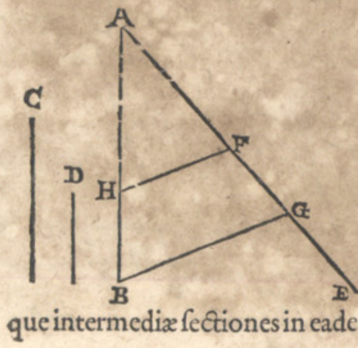
[e] erũt quoq; GH. KL, parallelæ. Eodẽq; modo oẽs lineæ inter rectas CD, EF, inter ſe parallelæ oſtẽdẽtur. Quare, vt ex demonſtratiõe huius 10. prop. liquet, quemadmodum EG, diuiſa eſt in quinq; partes æquales, itẽ ſimiliter in totidẽ diuiſa erit EI. Nã ſi pũctũ E, ſumptũ nõ fuerit idẽ quod E, vel C, producẽda eſt IE, donec cũ EF, vel DC, coeat. Tunc enĩ vt in hac 10. prop. probatũ eſt, erũt rectæ EI, EG, ſimiliter diuiſæ. Quod ſi forte IE, nec cum FE, nec cũ DC, cõcurrat, ſed vtriq; ſit parallela,

f 34. primi.

[f] erũt ſingulæ partes rectæ EI, ſingulis partib. rectæ EG, æquales. ob parallelogramma inter parallelas incluſa. Cum ergo omnes partes rectæ EG, ſint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ EI, æquales. Si igitur beneficio circini ſingulæ partes lineæ EI, transferantur in rectam propoſitam AB, ipſi EI, æqualem, diuiſa erit & AB, in quinque partes æquales. Quod eſt propoſitum.

EST autem nonnunquã neceſſe lineas parallelas extra inſtrumentum producere. Vt ſi eadẽ linea transferatur ab M, vſq; ad N, punctum lineæ GH, protractæ, erit quoq; MN, diuiſa in quinq; partes æquales. Vt conſtat, ſi ducatur ex M, ipſi EG, parallela, vſq; ad rectam GH: Vel ſi NM, producatur, donec cum GE, producta conueniat. Quod ſi linea diuidenda fuerit admodũ breuis, accipiendæ erunt parallelarũ CD, EF, minores, &c. Si vero linea ſit longiuſcula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura ſpatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nã duo, vel tria, vel quatuor ſpatia, &c. dabunt vnam partẽ. Vt ſi diuidenda ſit in tres partes, trãſferaturq; in ſex ſpatia, dabunt duo ſpatia vnam partem: ſi transferatur in quindecim ſpatia, dabunt quinq; ſpatia vnam partem propterea quod quinq; ſpatia conficiunt tertiam partem quindecim ſpaciorum. Sic ſi linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim ſpatia, dabunt nouem ſpatia vnam partem; quippe cum nouem ſpacia conſtituant ſemiſſem octodecim ſpatiorum: & ſic de ceteris.

EODEM modo, ad ſimilitudinem huius propoſitionis, licebit nobis facili negotio ſequens problema, quod non raro à Geometris adhibetur, demonſtrare. quod eſt eiuſmodi.



DATAM rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunq; datam.

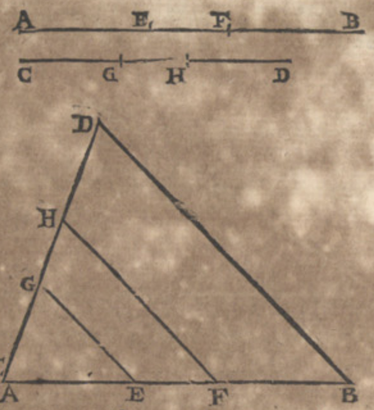
SIT ſecanda recta AB, in duas partes, quæ habeant proportionem inter ſe, quam rectæ C, & D. Ex A, ducatur linea AE, faciens angulũ A, quẽcunq;, ex qua abſcindatur recta AF, ipſi C, & FG, ipſi D, æqualis: Ducta deinde GB, ducatur ei per F, parallela FH. Dico AB, ſectam eſſe in H, ſecundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifeſtum eſt,

g. 7 ſexti.

[g] cum ſit, vt AF, ad FG, atque adeo, vt C, ad D, ita AH, ad HB.

POSTREMO inſeremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam ſectiones pertinens, deſumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineę ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.



SECENTVR rectæ, AB, CD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt ſit AE, ad EB, ſicut CG, ad GD; Itẽ AF, ad FB, vt CH, ad HD. Dico ſectiones intermedias EF, GH, proportionales quoque eſſe cum duobus ſegmentis FB, HD; vel cum duobus AE, CG, hoc eſt, eſſe FB, ad EF, vt HD, ad GH. Item AE, ad EF, vt CG, ad GH. Cum enim ſit, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD, erit componendo, vt AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum ſit, vt AF, & FB, ita CH, ad HD, erit componendo, vt AB, ad FB, ita CD, ad HD, ad conuertendo, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaque cum ſit, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et vt AB, ad EB, ita CD, ad GD: [h] *Erit ex æquo, vt FB, ad EB, ita HD, ad GD, Et conuertendo, vt EB, ad FB, ita GD, ad HD: Et per conuerſionem rationis, vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, & diuidendo, vt FB, ad EF, ita HD, ad GH, Quod eſt primum.* k 22. quinti.

RVRSVS, quia eſt, vt AE, ad EB, ita CD, ad GD, Et vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, vt oſtenſum eſt; erit ex æquo, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH, Quod eſt ſecundũ.

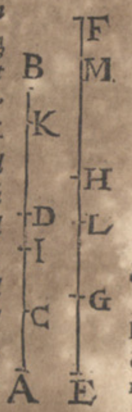
BREVIVS idem demonſtrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus BCD, vel BAD, iunganturque rectæ DB, HF, GE, Quia igitur ponitur, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD, [i] *Parallela erit GE, ipſi DB, Rurſus, cum ponatur, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD;* [k] *Parallela erit quoque HF, ipſi DB.* [l] *Quare & GE, HF, inter ſe parallelæ erunt: Ac propterea* [m] *erit, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod eſt ſecundum.* i 2. ſexti. k 2. ſexti. l 30. primi. m 2. ſexti.

EODEM modo, ſi puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. oſtendemus eſſe, vt BF, ad EF, ita HD, ad GH, & conuertendo, vt EF, ad FB, ita GH, ad HD. Quod eſt primum.

IDEM verum eſt, ſi magnitudines AB, CD ſint diuerſæ, vt v. g. AB, ſuperficies, & CD, linea, vel corpus vt ex priori demonſtratione conſtat.

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema quod ſequitur.

SI linea recta ſit ſecta in quotcunq; partes Arithmetice proportionales, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quæ illæ proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineæ Arithmetice proportionales.



RECTA linea AB, ſecta ſit in partes AC, CD, DB, Arithmetice proportionales hoc eſt habentes eundem exceſſum: [n] *Secetur autem recta EF, in partes EG, GH, HF, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere exceſſum, hoc eſt, Arithmetice eſſe proportionales. Sit. n. CI, ipſi AC, & DK, ipſi CD, æqualis: vt ID, ſit exceſſus inter CD, AC; & KB, exceſſus inter DB, CD, atque adeo ipſi ID, æqualis. Sit quoque GL, ipſi EG, & HM, ipſi GH, æqualis; vt LH, exceſſus ſit inter GH, EG, & MF, exceſſus inter HF, & GH. Probandum eſt, exceſſus LH, MF, æquales eſſe. Quoniam igitur eſt, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH, erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam eſt, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF, erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita ſi plures fuerint partes, habebunt ſemper partes lineæ AB, ad partes lineæ EF, ſingulæ ad ſingulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non ſint continue proportionales. Itaque cum ſit, vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc eſt, ita CI, ad GL,* [o] *erit quoque reliqua ID, ad reliquam LH. vt tota CD, ad totam GH. Rurſus quia eſt, vt DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc eſt, ita DK, ad HM,* [p] *erit quoque reliqua KB, ad reliquam MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc eſt, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID, ad LH, vt CD, ad GH.* [q] *Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, ad MF. Eſt autem ID, ipſi KB, æqualis.* [r] *Igitur & LH, ipſi MF, æqualis erit: atq; idcirco EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales erunt, cum exceſſus habeant æquales. Quod eſt propoſitum.* n 10. ſexti. o 19. quinti p 19. quinti q 11. quinti r 14. quinti

HOC theorema nullo modo conuerti poteſt. Non enim ſequitur, ſi duæ lineæ ſectæ ſint in partes Arithmetice proportionales, partes vnius habere eaſdem proportiones, quas partes alterius habent. Nam ſi lineæ EF, ſecunda pars ſtatuatur GM, ita vt exceſſus inter EG, GM, ſit LM. Deinde ipſi GM, poſt M, ſumatur portio ipſi GM, æqualis, eiq; adiiciatur idem exceſſus LM, fient tres partes Arithmetice proportionales in linea EF, & tamen non habent eaſdem proportiones inter ſe, quas habent partes lineæ AB: [s] *quippe cum minor ſit proportio EG, ad GM, quam EG, ad GH, hoc eſt, quam AC, ad CD.* s 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum vna ad vnam poſteriorum.

VT in ſuperiori figura, quoniam erat, vt AC, ad EG, hoc eſt, vt CI, ad GL, ita CD, ad GH; oſtenſum eſt ita quoque eſſe exceſſum ID, ad exceſſum LH, vt CD, ad GH, Itaque ſi AC, CD, ſint duplæ, aut dimidiatæ partes ipſarum EG, GH, erit quoque ID, dupla vel pars dimidiata ipſius LH, &c.

EX his quoque hoc problema abſoluemus.

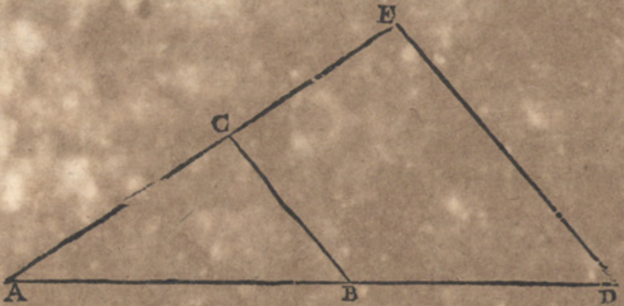
LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmetice proportionales ſecare.

SIT enim recta EF, ſecanda in tres partes Arithmetice proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quomodocunq; Arithmetice proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur data recta EF, [t] *ſecetur ſimiliter in G, H, vt AB, in CD, ſecta eſt, erunt partes EG, GH, HF. Arithmetice proportionales, vt demonſtratum eſt.* t 10. ſexti.

HÆC omnia vera etiam ſunt in numeris, & in quibuſuis aliis magnitudinibus, cum ſemper eadem ſit demonſtratio. Atq; ex his deſumpſimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ poſtremam rationem diſtribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ eaſdem habent proportiones, quas aſſumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ, cum ſemper fiat vt ſumma aſſumptorum numerorum, ad datum numerum, ita ſinguli numeri aſſumpti ad aliud. Hinc enim fit, numeros aſſumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic oſtenſum eſt, partes inuentæ ſunt, Arithmetice proportionales.

PROBL. 3. PROPOSITIO 11. x.

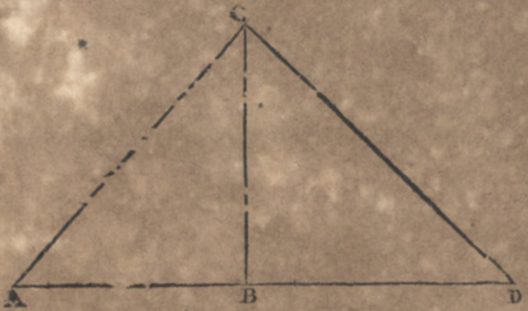
DVABVS datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.



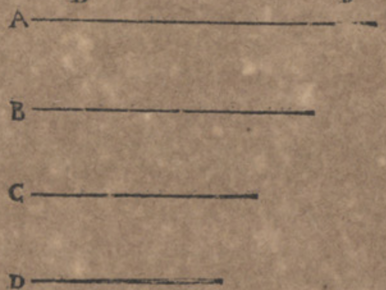
SINT duæ rectæ AB, AC, ita diſpoſitæ, vt efficiant angulum A, quemcunq;, ſitq; inueniẽda illis tertia proportionalis, ſicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus eſſe antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipſi AC, quæ conſequens eſſe debet, ſiue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE occurrens ipſi AC, productæ in E. Dico CE, eſſe tertiam proportionalem, hoc eſt, eſſe vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela ſit recta BC; [a] erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: [b] Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipſi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod eſt propoſitum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiã proportionalẽ adinuenimus. Quod erat faciendũ.

a 2. ſexti.
b 7. quinti.

SCHOLIVM.

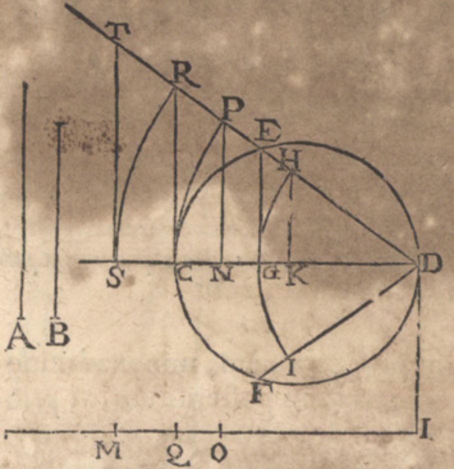


ALITER idem demonſtrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ AB, BC, conſtituantur ad angulum rectum ABC, & coniungantur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur ex C, ad AC, perpendicularis CD, occurrens ipſi AB, productæ in D. Dico BD, eſſe tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo ACD, angulus ACD, ſit rectus, & ab eo ad baſin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. propoſ. 8. huius libr. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc eſt, vt AB, ad BC, ita erit BC, ad BD, Quod eſt propoſitum.



INVENTA autem tertia linea continue proportionali, ſi primam omiſeris, & aliis duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt ſi [illegible] is A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis. ſexta, ſeptima, octaua; & ſic in infinitum.

EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continue proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primum data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectam CD, ipſi A, æqualem deſcribatur circulus CEDF, in quo applicentur DE, DF, ipſi B, æquales. Applicata autem regula punctis F, F, ducatur recta EG, quæ ad CD, perpendicularis erit. Cum enim recta DC, per centrum tranſiens ſecet arcum ECF, biſariam, (ablatis enim æqualibus arcubus DE, DF, ex ſemicirculis æqualibus DEC, DFG, reliqui arcus CE, CF, æquales erunt.) ſecabit eadem & rectam ductam EF, biſariam, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 27. l. 3. oſtendimus. [c] Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, ſi duceretur recta EC, [d] angulus ad E, in ſemicirculo rectus eſſet; erit ex coroll. propoſ. 8. huius lib. DE, media proportionalis inter CD, DG: ac proinde DG, erit tertia proportionalis ipſis CD, DE, hoc eſt, datis duabus A, & B. Quod ſi ex D, per G, arcus deſcribatur ſecans rectas DE, DF, in H, I; applicataq; regula ad puncta H, I, ducatur recta HK; erit DK, quarta proportionalis. Nam propter angulos HDG, IDG, (qui [e] ob æquales arcus EC, FC, æquales ſunt) [f] arcus HC, IG, æquales erunt; ac propterea, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. recta ducta HI, biſariam ſecabitur in K; [g] ideoq; & ad angulos rectos. [h] Parallelæ ergo ſunt EG, HK. [i] Vt igitur recta ED, ad DG, ita erit DH, hoc eſt, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor lineæ CD, DE, DG, DK, continue proportionales. Quod ſi ex D, per K, alius arcus deſcribatur ſecans rectas DE, DF, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.



c 3. tertij.
d 31. tertij.
e 27. tertij.
f 26. tertij.
g 3. tertij.
h 28. prim.
i 2. vel 4. ſexti.

DEINDE ſit data proportio lineæ B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis DC, LM, ad DL, perpendicularibus, abſcindantur rectæ DN, LO, minori B, æquales, applicataq; regula ad puncta O, N, ducatur recta N, P, [k] quæ ad DC, perpendicularis erit, [l] cum ſit parallela ipſi DL. Sumpta deinde recta DC, æquali ipſi A, maiori, deſcribatur ex D, per C, arcus ſecans rectã NP, in P, extendaturq; ex D, per P, recta DPT, eritq; DP, ipſi DC, hoc eſt, ipſi A, æqualis. Abſciſſa quoque LQ, ipſi DC, æquali applicataq; ad puncta Q, C, regula. ducatur recta CR, quæ eadem ratiõe ad DC, perpendicularis erit, & ipſi NP, parallela. [m] Et quoniam eſt, vt ND, ad DP, hoc eſt, vt B, ad A, (quod ND, DP, ipſis B, A, acceptæ ſint æquales) ita CD, ad DR, hoc eſt, ita DP, ad DR; erunt tres rectæ ND, DP, DR, continue proportionales; ideoq; DR, ipſis B, A, tertia proportionalis erit. Quod ſi ex D, per R, arcus deſcribatur ſecans DC, in S, & rectæ DS, æqualis auferatur LM, applicataq; regula ad pũcta M, S, recta ducatur ST, erit DT, quarta proportionalis. Nam eadẽ ratione erit ST, ipſi CR, parallela, & ad DC, perpẽdicularis. [n] Quare erit, vt CD, ad DR, hoc eſt, vt A, ad DR, ita SD, id eſt, DR, ad DT. Sunt ergo quatuor lineæ ND, DP, DR, DT, cõtinue ꝓportionales. Quod ſi ex D, per T, aliꝰ arcꝰ deſcribatur ſecãs rectã DC, ꝓtractã, inuenietur eadẽ arte q̃nta ꝓportionalis atq; ita in infinitũ.

k 29. primi
l 33. primi.
m 2. vel 4. ſexti.
n 2. vel 4. ſexti.

EX his ſine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometrice omnino, ſed quaſi attentando, & praxim ipſam iterum atque iterum repetendo, donec id, quot quærimus, aſſequamur. Vt ſi inter CD, DK, inueniendæ ſint duæ mediæ proportionales, deſcripto circa maiorem CD, circulo CEDF, erigemus ex K, ad CD, perpendicularem KH, ducemusque DH, ea lege, vt ex puncto E, (vbi DH, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad DC, demiſſa EG, auferat rectam DG, rectæ DH, æqualem, hoc eſt, vt arcus ex D, per H, deſcriptus tranſeat per punctũ G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales. Nã vt oſtendimus, eſt

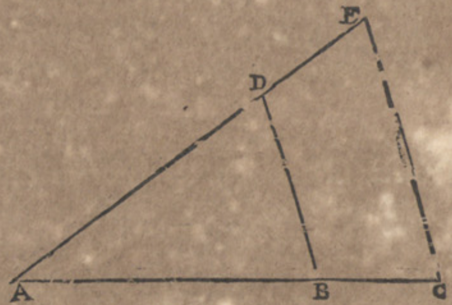
vt CD,

ut CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. [a] *Et ut DE, ad DG, ita DH, hoc eſt, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continue proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales ſunt. Quod ſi rectæ DH, DG, comperiantur non eſſe æquales, ſi quidem DH, fuerit minor, eleuanda erit DH, magis; ſi vero maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.* a 2. vel 4. ſexti.

PROBL. 4. PROPOS. 12. x.

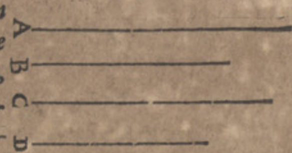
TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda ſit quarta proportionalis; ſicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartã. Diſponantur primæ duæ AB, BC, ſecundũ lineam rectam, quæ ſit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, eſſe quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE, acta ſit parallela BD; [a] erit ut AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta eſt proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis; quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat. a 2. ſexti.



S C H O L I V M.

HINC facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri poſſint. Si enim datæ ſunt duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, ſi tertia qualibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, ut ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur ſex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ ſemper eandem habeant proportionem.

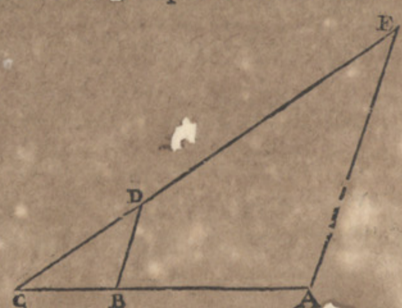


OSTENDEMVS etiam cum Pappo ſequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ ſit ad tertiam, ut prima ad ſecundam.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, oporteatq; inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam ſit, ut AB, prima ad BC, ſecundam. Diſponantur primæ duæ AB, BC, in directum, ut faciant rectam AC: Tertia vero CD, cum ſecunda BC, faciat angulum C, quemcunq;. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, productæ in E. Dico ED, eſſe quartam, hoc eſt, eſſe ED, ad DC, tertiam, ut eſt AB, prima ad BC, ſecundam. Hoc autem manifeſtum eſt, [b] *cum AC, EC, proportionaliter ſecentur in B, & D, punctis.* b 2. ſexti. c 12. ſexti.

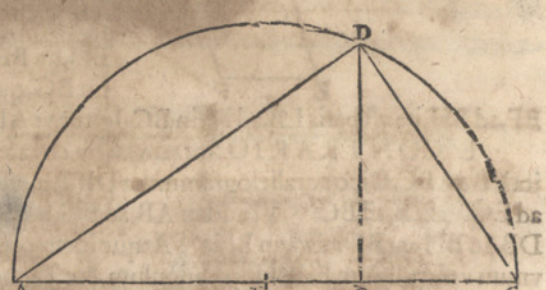
ALITER. Ex ſecunda CB, fiat prima, & ex prima AB, fiat ſecunda. [c] *atq; inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: ut ſit ſecunda CB, ad primam BA, ut tertia CD, ad quartam DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, ſecundam, ut DE, quarta ad CD, tertiam.*



PROBL. 5. PROPOS. 13. xi.

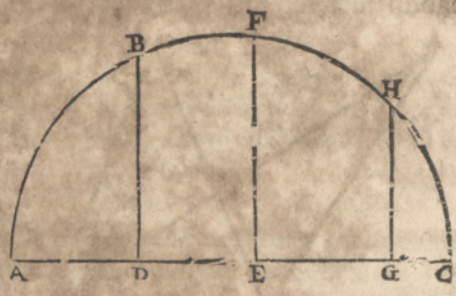
DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

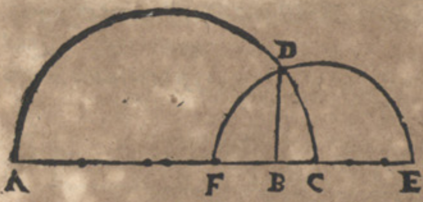
SINT duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda eſt proportionalis, diſpoſitæ ſecundum lineã rectam AC. Diuiſa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, vel EC, ſemicirculus deſcribatur, ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vſq;. Dico BD eſſe, mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; [a] erit angulus ADC, rectus in ſemicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta ſit ad baſin AC, perpendicularis DB, erit per corollarium propoſ. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis mediam proportionalem adinueniemus. Quod erat faciendum. a 31. tertij.



S C H O L I V M.

PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vſque, mediam eſſe proportionalem inter duo diametri ſegmenta, quæ à perpendiculari facta ſunt. Detur enim ſemicirculus ABC, & ex puncto D, diametri AC, ducatur ad circumferentiam recta DB, perpendicularis ipſi AC. Dico DB, eſſe proportionalẽ mediã inter AD, & DC: Id quod liquido conſtat ex demonſtratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ AB, CB; [b] *fiet angulus ABC, rectus. Quare per coroll. propoſ. 8. conſtat propoſitum. Eadem ratione erit perpendicularis EF, media proportionalis inter AE, & CE. Item GH, inter AG, & GC, atq; eodem modo de aliis quibuſcunque dicendum eſt, quæ ex quibuſuis punctis diametri ad ipſam diametrum perpendiculares ducentur.* b 31. tertij.

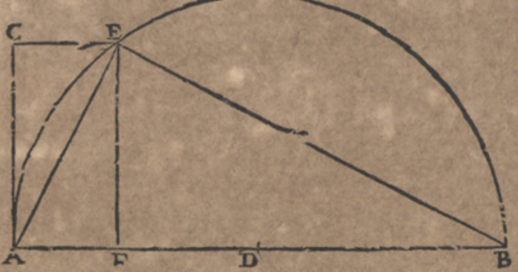




QVANDO minor data linea eſt valde exigua, ſecabit perpendicularis BD, nimis oblique circumferentiam in D. Quare vt exquiſitius tunc punctum D, inueniatur, multiplicabimus minorem lineam BC, quoties libuerit. v. g. ſumemus BE, ipſius BC, quadruplam, maiorem vero lineam AB, in tot partes æquales ſecabimus, quotuplex eſt BE, ipſius BC: ſitq; vna pars BF: ita vt eandem proportionem habeat AB, ad BF, quam BE, ad BC. Ac tandem circa EE, circulus deſcribatur ſecans BD, in D: eritq; BD, media proportionalis inter BF, BE, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus. Dico eandem eſſe mediam proportionalem inter AB, BC. Cum enim ſit vt prima AB, ad ſecun-
c 18. ſexti. *dam BF, ita tertia BE, ad quartam BC;* [c] *erit rectangulum ſub AB, prima, & BC, quarta, æquale rectangulo ſub BF, ſecunda,*
d 17. ſexti. *& BE, tertia.* [d] *Sed hoc æquale eſt quadrato BD. Igitur & illud.* [e] *Quapropter BD, media proportionalis eſt inter AB, BC.*
e 17. ſexti. *Non autem te moueat, quod citauerimus propoſ. 16. & 17. huius, quæ nondum ſunt demonſtratæ: quia hæc demonſtratio cum ſua conſtructione differri poteſt poſt propoſit. 17. huius, ita vt nullũ periculum ſit petitionis principij, vt Philoſophi loquuntur.*

EX PELETARIO.

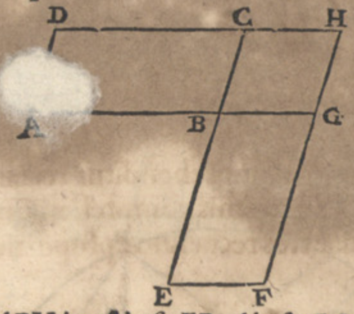
DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non ſit, quam dupla illius) ita ſecare, vt data recta ſit media proportionalis inter ſegmenta huius.



SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor nõ ſit, quam dupla ipſius AC, ſed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius ſegmenta, media proportionalis ſit AC. Diſponantur rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuiſa AB, bifariam in D, ex D, centra, interuallo autem DA, vel DB, ſemicirculus deſcribatur AEB. Deinde per C, ducatur ipſi AB, parallela CE, ſecans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem neceſſario CE, circumferentiam, vel tanget. Nam ſi minor ſit quàm dimidium rectæ AB, hoc eſt, minor, quam ſemidiameter ad angulos rectos erecta ex D, ſecabit circumferẽtiam; tanget autem eandem circumferentiam, ſi æqualis ſit dimidio rectæ AB, hoc eſt, æqualis ſemidiametro ex D, ad angulos rectos erectæ. Cum ergo poſitum ſit, AC, non eſſe maiorem dimidio rectæ AB, ſecabit neceſſario AC, circumferentiam, aut tanget.) a quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit vt iam eſt demonſtratum, ex coroll. propoſ. 8. huius libr. EF, media proportionalis inter AF, & FB. [f] *Cum igitur EF, æ-*
f 37. primi. *qualis ſit ipſi AC, eo quod parallelogrammum ſit ACEF; (Eſt enim CE, ipſi AF, parallela per conſtructionem,* [g] *& AC, ipſi*
g 28. primi. *EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod eſt propoſitum.*

xiij. THEOR. 9. PROPOS. 14.

ÆQVALIVM & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

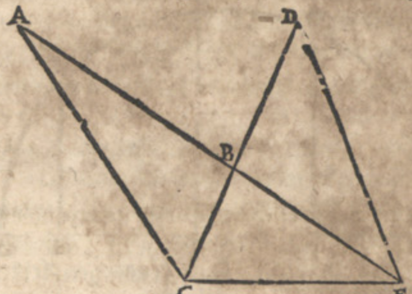


SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, ſint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propoſ. 15. libr. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quo-
a 7. quinti. niam igitur æqualia ſunt parallelogramma DB, BF: [a] erit vt DB, ad
b 1. ſexti. BH, ita BF, ad idem BH: Sed vt DB, ad BH, [b] ita eſt AB, baſis ad baſin BG, quod parallelogramma ſint eiuſdem altitudinis; & ſimiliter vt BF, ad BH, ita eſt baſis EB, ad baſin BC. Igitur vt AB, ad BG, ita eſt EB, ad BC. Quod eſt propoſitum.

E CONTRARIO ſint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc eſt, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogrammma DB, BF, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione; cum ſit, vt AB;
c 1. ſexti. ad EG, ita EB, ad BC: [c] Vt autem AB, ad BG, ita DE, ad BH; & vt EB, ad BC, ita BF, ad idem BH; erit quoque
d 9. quinti. DB, ad BH, ita BF ad idem BH. [d] Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

xiv. THEOR. 10. PROPOS. 15.

ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorũ, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia.



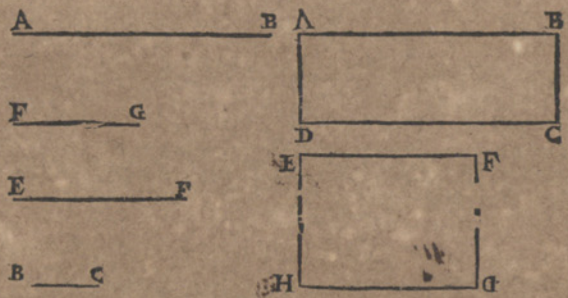
SINT duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt AB, BE, vnam efficiant lineam rectam. Quod facto, cum anguli ABC, DBE, ſint æquales; erunt & DB, BC, vna recta linea, vt demonſtratum eſt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta
a 7. quinti. CE, quoniam æqualia ſunt triangula ABC, DBE, [a] erit vt ABC, ad
b 1. ſexti. BCE, ita DBE ad idem BCE. Sed vt triangulum ABC, ad triangulum BCE, [b] ita eſt baſis AB, ad baſin BE, quod hæc triangula eiuſdem ſint altitudinis; & ſimiliter vt DBE, & BCE, ita eſt baſis DB, ad BC. Quare vt AB, ad BE, ita eſt DB, ad BC. Quod eſt propoſitum.

IAM

IAM vero contra, ſint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc eſt, vt AB, ad BE, ita DB, ad
BC. Dico triangula ABC, DBE, eſſe æqualia. Facta enim conſtructione eadem, cum ſit vt AB, ad BE, ita DB, ad
BC; vt autem AB, ad BE, *c* ita triangulum ABC, ad triangulum BCE; & vt DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad c 1. ſexti.
triangulum idem BCE; Erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, *d* propterea que æqualia erunt triangula d 9. quinti.
ABC, DBE. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 11. PROPOS. 16. xv.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub mediis comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub mediis continetur, rectangulo; illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

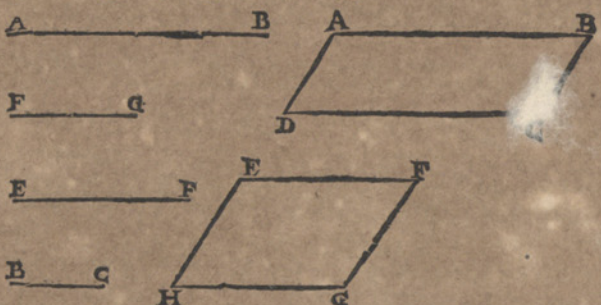


SINT quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; vt quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC: Sitque rectangulum ABCD, comprehẽſum ſub extremis AB, BC; rectangulum vero EFGH, comprehenſum ſub mediis EF, FG: Dico rectangula AC, EG, eſſe æqualia. Cũ enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit vt AB, ad FG, ita EF, ad BC, erunt
latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. *a* Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod eſt pro- a 14. ſexti.
poſitum.

CONTRA vero, ſint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, eſſe
proportionales, hoc eſt, eſſe vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia ſint rectangula AC, EG, habeant-
que angulos æquales, nempe rectos B, & F, *b* erunt latera circa hoſce angulos reciproca; ſicut quidem AB, ad b 14. ſexti.
FG, ita EF, ad BC. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

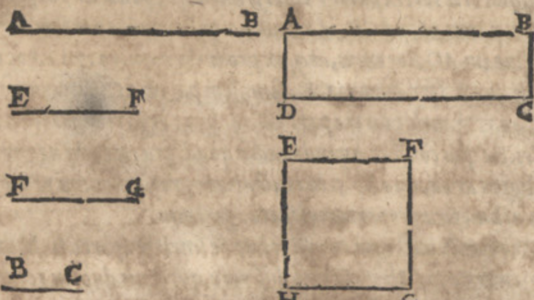
SCHOLIVM.

IDEM verum eſt, etiamſi parallelogramma AC, EG, *non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehenſi ſint æquales. Veluti manifeſtum eſt in hac figura. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.*



THEOR. 12. PROPOS. 17. xvj.

SI tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod à media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



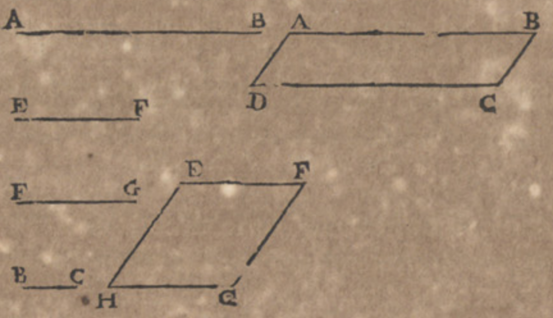
SINT tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: ſitque rectangulum ABCD, contentum ſub extremis AB, BC, & quadratum mediæ EF, ſit EFGH. Dico æqualia eſſe rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis ſit ipſi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehenſum ſub mediis
EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. *a* Quare rectangulum AC, comprehenſum ſub extremis AB, a 16. ſexti.
BC, æquale eſt quadrato EG, hoc eſt, rectangulo ſub mediis EF, FG, comprehenſo: Quod eſt propoſitum.

SED ſint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico eſſe vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum b 16. ſexti.
enim æqualia ſint rectangula AC, & EG; *b* erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: *c* Vt autem FG, ad BC, ita eſt EF, c 7. quinti.
ipſi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita eſt EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX poſteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam eſſe mediam proportionalem inter quaſuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, oſtenſum fuit, eſſe vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media eſt proportionalis inter AB, & BC.

SCHOLIVM.



EADEM omnino conſequuntur etiamſi parallelogramma non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita vt EG, ſit Rhombus, & AC, Rhomboides. Non enim diſsimilis erit in his demonſtratio, vt fig[illegible] dicat.

LIBET hoc loco cum Peletario demonſtrare problema non inutile ad lineas proportionales ſpectans: quod eſt eiuſmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rurſus partiri in duas partes, vt omnes tres partes ſint continue proportionales.



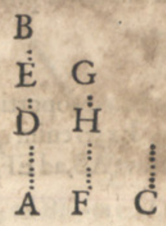
SIT recta AB, diuiſa inter C, vtcunque, oporteatq; partem CB, ita ſecare in duas alias partes, vt omnes tres partes continue proportionales ſint. Secetur AC, bifariam in F, & FC, iterum bifariam in I, vt CI, quarta pars ſit primæ partis AC; & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares BE, IK, primæ parti AC, æquales, ducaturq; recta EK, ita vt rectangulum IE, comprehenſum ſit ſub AC, prima parte, & rectæ IB, compoſita ex altera parte BC. & ex
c 6. ſecundi *CI, quarta parte primæ partis. Et quoniam AC, diuiſa eſt bifariam in F, eiq; addita in rectum CB,[c] erit rectangulum ſub AB, BC, vna cum quadrato ex CF, æquale quadrato ex BF: Eſt autem rectangulum IE, minus rectangulo ſub AB, BC, vna cum quadrato ex CF, (Ducta enim CD, ad AB, perpendiculari, erit rectangulum CE, contentum ſub AC, CB, minus rectangulo ſub AB, BC: At rectangulum CK, quadrato ex CF, æquale, cum vtrumque quarta*
d 1. ſexti. *pars ſit quadrati ex AC; rectangulum quidem CK,[d] quia ſic eſt rectangulum CK, ad quadratum ex AC, hoc eſt, ad rectangulum ſub AC, CD, vt CI, ad CA; ac proinde cum CI, ſit quarta pars rectæ AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC; At vero quadratum ex CF, quarta pars eſt eiuſdem quadrati*
e 14. ſecun- *ex AC, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2.) Igitur minus quoq; erit quadrato ex BF. Si igitur[e] fiat quadratum rectangulo IE, æquale, erit eius latus minus recta FB, maius autem quam FC, quippe cum quadratum ex FC, æquale ſit oſtenſum rectangulo CK, ac propterea minus rectangulo IE. Sit ergo latus illud FL. Dico partem CB, ita ſectam eſſe in L, vt tres partes AC, CL, LB, ſint continue proportionales. Deſcribatur enim ex FL, quadratum FM, rectaq; DC, extendatur ad O, & latus ML, ad P: ſumptiſq; duabus FG, LQ, ipſi CF, æqualibus, ducatur recta GQ, ſecans CO, in H. Eritq; CG, quadratum rectæ CF, ob æqualitatem re-*
f 34. primi. *ctarum CF, FG. Et quia ablatis æqualibus FC, FG, ex æqualibus FL, FN, reliquæ CL, GN, æquales ſunt;[f] & eſt CL, ipſi HQ, & GN, ipſi HO, æqualis; æquales quoque erunt HQ, HO; ideoq; HM, quadratum erit rectæ CL. Rurſus quia tam rectangulum CQ, comprehenditur ſub CL, & CH, ſiue CF, ſemiſſe ipſius AC, quam rectangulum GO, ſub GN, ſiue CL, & GH, ſiue CF, ſe-*
g 1. ſecundi *miſſe eiuſdem AC, ſiue CD;[g] erunt duo rectangula CQ, GO, ſimul æqualia rectangulo CP, comprehenſo ſub eadẽ CL, & CD, quæ ipſi CH, GH, ſimul æqualis eſt. Itaq; cum rectangulum IE, quadrato FM, æquale ſit; & rectangulum CK, quadrato CG; & rec[illegible] CP, duobus rectangulis CQ, GO, ſimul: erit reliquum rectangulum LE, comprehenſum ſub BE, ſiue AC, & BL, reliquo quadrato HM, æquale. Quocirca, cum datis tribus rectis AC, CL, LB, rectangulum LE, ſub extremis AC, BL, com-*
h 17. ſexti. *prehenſum æquale ſit quadrato HM, mediæ CL;[h] erunt ipſæ tres lineæ AC, CL, LB, continue proportionales. Quod eſt propoſitum.*

IN numeris idem problema ita perficietur. Poſteriori parti numeri propoſiti adijciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nam ſi ex radice inuenta dematur ſemiſsis prioris partis, reliqua fiet ſecunda pars proportionalis, quam ſi ex poſteriori parte dati numeri ſubtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti ſi linea AB, ponatur 76. pars autem AC, 36. & CB, 40. adijciemus CI, hoc eſt, 9. quartã partẽ prioris partis 36. ad CB, id eſt ad 40. poſteriorem partem, & conflatum numerũ 49. lineam ſcilicet IB, in priorẽ partẽ 36. ſiue in lineam AC, ducemus, atq; ex producto numero 1764. hoc eſt, ex rectangulo IE, radicem quadratam eruemus 42. pro linea FL, ex qua ſi detrahemus CF, ſemiſſem partis AC, nimirum 18. reliqua erit pars CL, 24. Hæc ablata ex tota poſteriori parte CB, 40. remanebit tertia pars LB, 16. Sunt ergo tres partes AC, CL, LB, numeri AB, 76. hæ tres. 36. 24. 16. continue proportionales. Ex quo conſtat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non poſſe in numeris. Atque hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finem ſcripſimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus diſputauimus, non alienum erit à noſtro inſtituto, de eiſdem quoq; cum Pappo Alexandrino diſſerere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuſcunq; Medietatis, ſiue Arithmeticæ, ſiue Geometricæ, ſiue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quam ab Euclide factum eſt. Hoc autem exequemur ſequentibus propoſitionibus, quarum prima hæc ſit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT datæ duæ rectæ AB, & C, (quæ per vnitates in longum diſpoſitas hic repreſentantur) inter quas media proportionalitate Arithmetica ſit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis FH, & ex maiore AB, abſcindatur alia æqualis AD: Diuiſo autem ſegmento BD, bifariam in E, ſumatur ipſi DE, æqualis HG. Dico FG, eſſe mediam Arithmetice proportionalem inter AB, & C. Excedit enim AB, ipſam FG, exceſſu BE; & FG, ipſam C, exceſſu GH, ſiue DE. Cum ergo duo exceſſus BE, DE, ſint æquales, ex conſtructione, liquido conſtat rectas AB, FG, & C, Arithmetice proportionales eſſe

HINC efficitur, mediam lineam FG, eſſe ſemiſſem ſummæ ex extremis conflatæ. Cum enim tam AD, quam C, ipſi FH, ſit æqualis, erit ſumma ex AD, & C, ipſius FH, dupla: Eſt autem & DB, ipſius HG, dupla. [a] *Igitur & ſumma ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, ſemiſsis erit ſummæ extremarum. Quod eſt propoſitum.* a 21. quinti.

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate [illegible]nire.

SINT *in eadem figura, datæ duæ rectæ AB, & FG, quibus inuenienda ſit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, exceſſui BE, quo AB, ipſam FG, ſuperat, æqualis: & ipſi FH, ponatur æqualis C. Dico C, eſſe tertiam proportionalem minorem. Excedit enim AB, ipſam FG, exceſſu BE; & FG, ipſam C, exceſſu GH: qui quidem duo exceſſus BE, GH, ex conſtructione, æquales ſunt.*

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT *in eadem figura datæ duæ rectæ C, & FG, quibus inuenienda ſit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipſi FG, æqualis, eiq; addatur EB, exceſſui GH, quo FG, ipſam C, ſuperat, æqualis. Dico AB, eſſe tertiam proportionalem maiorem; ita vt tres AB, FG, & C, ſint proportionales Arithmetice. Nam AB, excedit ipſam FG, exceſſu BE; & FG, ipſam C, exceſſu GH. Cum ergo duo exceſſus BE, GH, ex conſtructione, ſint æquales, patet propoſitum.*

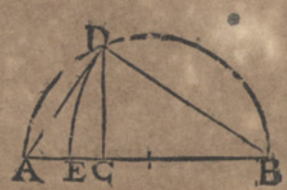
ITAQVE *datis duobus numeris inæqualibus 30. 16. ſi ſemiſsis exceſſus, nimirum 7. minori 16. adijciatur, conflabitur medius proportionalis Arithmetice, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16 Vel medius terminus habebitur, ſi ſummæ extremorum ſemiſsis ſumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum eſt 46. & eius ſemiſsis 23. medium terminum conſt[illegible]it.*

SI *vero ex minore 16. detrahatur exceſſus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.*

SI *deniq; maiori 30. adijciatur exceſſus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet. 44. 30. 16.*

IIII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.



SINT *datæ rectæ AB, BC, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda ſit media Geometrice proportionalis. Deſcripto circa maiorem AB, ſemicirculo ADB, excitetur ex C, ad AB, perpendicularis CD; & ex B, per D, arcus deſcribatur ſecans AB, in E. Dico BE, mediam proportionalem eſſe inter AB, BC, in proportionalitate Geometrica: Ductis enim rectis AD, BD;* [a] *erit angulus ABD, rectus. Igitur ex coroll. propoſ. 8. huius lib. recta BD, hoc eſt, ipſi æqualis BE, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod eſt propoſitum.* a 31. tertij.

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportioualitate Geometrica inuenire.

SINT *in eadem figura datæ rectæ AB, BE, eundem poſsidentes terminum B, quibus inuenienda ſit minor tertia Geometrice proportionalis. Deſcripto circa maiorem AB, ſemicirculo ADB, deſcribatur ex B, per E, arcus ſecans circumferentiam ADB, in D, puncto ex quo ad AB, perpendicularis demittatur DC. Dico BC, tertiam proportionalem eſſe ipſis AB, BE. Ductis enim rectis AD, BD;* [a] *erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propoſ. 8. huius lib. erit BD, hoc eſt, ipſi æqualis BE, media proportionalis inter AB, BC: Id eſt, erit AB, ad BE, vt BE, ad BC. Quod eſt propoſitum.* a 21. tertij.

VI.

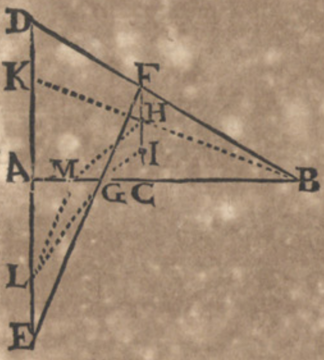
DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT *in eadem figura datæ rectæ CB, BE, eundem terminum B, poſsidentes, quibus inuenienda ſit maior tertia Geometrice proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad EB, perpendicularis CD, quam arcus ex B, per E, deſcriptus ſecet in D. Ducta autem recta BD, excitetur ad eam in D, perpendicularis DA, ſecans BE, productam in A. Dico AB, tertiam proportionalem eſſe ipſis CB, BE. Quoniam enim angulus ADB, rectus eſt; erit ex coroll. propoſ. 8. huius lib BD, hoc eſt, BE, ipſi æqualis, media proportionalis inter BC, & AB: Hoc eſt, erit CB, ad BE, vt BE, ad AB. Quod eſt propoſitum.*

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT



SINT datæ rectæ AB,BC, eundem terminum B,poſſidentes, inter quas inuenienda ſit media Harmonice proportionalis.Ducta per A,ad AB,perpendiculari DE, ponantur æquales AD, AE, quantæcunque. Excitetur quoq; ex C, ad AB, perpendicularis CF, ſecans ductam rectam BD,in F,puncto,ex quo ad E, recta ducatur FE,ſecans AB, in G.Dico BG,eſſe mediam Harmonice proportionalem inter AB,BC,hoc eſt, eſſe AB,primam ad teriam BC, vt AG, exceſſum inter primam AB,ac mediam BG,ad GC, exceſſum inter mediam BG,&
m28.quin. *tertiam BC:[m] Quoniam enimCF,parallela eſt ipſi DE,ob rectos angulos A,C,erit ex ſcho-*
lio propoſ.4. huius lib.triangulum BCF, triangulo BAD,ſimile: hoc eſt, erit vt AB,ad AD, ita BC,ad CF;& permutando, vt AB,ad BC,ita AD,ad CF,hoc eſt, ita AE, ad CF. Rurſus
n 4.ſexti. *ob ſimilitudinem triangulorum AEG,CFG,[n] erit vt AE,ad AG,ita CF,ad CG;& permutando vt AE, ad CF,ita AG, ad GC. Erat autem vt AE,ad CF,ita AB,ad BC. Igitur erit quoq; AB, ad BC, prima linea ad tertiam, vt AG, exceſſus inter primam AB, & mediam BG,ad GC,exceſſum inter mediam BG,& tertiam BC.Quod eſt propoſitum.*

NON *determinantur autem magnitudines rectarum AD , AE, quia vtcunq; ſumantur ſiue maiores,ſiue minores,eadem media BG,inuenietur.Sint enim aliæ æquales AK,AL.Ducta autem recta BK,ſecet perpendicularem CF,in H,iungaturque recta LH:quam dico per G,tranſire.Si enim tranſeat per aliud punctum,vt per M,inter A, & G,oſtendemus eodem modo, eſſe vt AB,ad BC,ita AM,ad MC.Fient enim rurſus triangula æquiangula ALM,MHC,ſi recta eſt HML.Eſt autem vt AB,ad BC,ita AG,ad GC,vt oſtenſum eſt.Igitur erit quoque AM,ad MC, vt AG, ad AC, quod eſt abſurdum. Nam[o] minor eſt pro-*
o 8.quinti. *portio AM,ad GC,quam AG,ad GC:Sed adhuc minor eſt proportio AM,ad MC, quam ad GC. Multo ergo minor erit proportio AM,ad MC,quam AG,ad GC,Non ergo ita eſt AM,ad MC,vt AG,ad GC,:ac propterea HL,non ſecabit AG,in M. Eodem modo non ſecabit GC.Tranſit igitur per G:atque idcirco eadem media BG,inuenietur per rectas AK AL,æquales.*

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

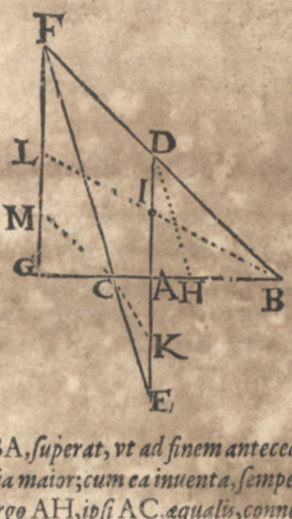
SINT in eadem figura datæ rectæ AB,BG,eundem poſſidentes terminum B,quibus inuenienda ſit minor tertia Harmonice proportionalis.Ducta DE,ad AB,perpendiculari,ponantur æquales AD,AE,quantæcunque:iuncta autem recta BD,ducatur ex E,per G,recta ſecans BD,in F,puncto,ex quo ad AB.perpendicularis demittatur FC.Dico BC,ipſis AB,BG,eſſe Harmonice proportionalem,hoc eſt,eſſe AB,primam ad BC,tertiam,vt eſt AG, exceſſus inter primam & ſecundam,ad GC,exceſſum inter ſecundam ac tertiam.Quod quidem demonſtrabitur, vt in præcedenti propoſitione.

NON *determinantur etiam hic magnitudines rectarum AD, AE, quia vtcunq; ſumantur ſiue maiores, ſiue minores, eadem tertia BC,reperietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL:Ducta autem recta BK,ſecet perpendicularem CF,in H,iungaturq; recta LG,quam dico cadere in H.Si enim cadat infra,vt in I,oſtendemus eodem modo,eſſe vt AB, ad BC, ita AK , ad CH, hoc eſt,ita AL,ad CH.Vt autem AB,ad BC,ita erat AG,ad GC.Erit igitur quoq; vt AG,ad GC, ita AL, ad CH. Et quia ſi re-*
p 4. ſexti. *cta linea eſt LGI , ob ſimilitudinem triangulorum ALG,CIG,[p] eſt vt AL, ad AG, ita CI, ad GC, erit permutando,vt AL,ad*
q 9.quinti. *CI,ita AG,ad GC. Cum ergo oſtenſum ſit eſſe vt AG,ad GC,ita AL,ad CH,erit AL,ad CH,vt ad CI. [q] Æquales ſunt igitur CH,CI,totum & pars,quod eſt abſurdum.Non ergo cadet LG,infra H,eodemq; modo oſtendemus non cadere ſupra. Cadit ergo in H,vbi BK, perpendicularem CF, ſecat ; ac proinde ex H, demiſſa perpendicularis HC, ad AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC,proportionalem Harmonice.*

HINC *ſequitur,datis tribus rectis Harmonice proportionalibus, minimam eſſe maiorem exceſſu, quo media minimam ſuperat.Cum enim ſit,vt AB,ad BC,ita AG,ad GC;ſit autem AB, prima maior quam AG, exceſſus inter primam AB, & me-*
r 14.quinti *diam BG;[r] erit quoq; BC,tertia maior quam GC,exceſſus inter mediam BG, & minimam BC.*

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.



SINT datæ rectæ AB,BC,eundem habentes terminum B,quibus inuenienda ſit maior tertia Harmonice proportionalis.Ducta per A,ad BC,perpendiculari DE, ponantur æquales AD,AE,quantæcunque,ducaturq; recta BD,quam productam ſecet EC,producta in F, puncto (quod autem conueniant BD, EC, mox demonſtrabimus) ex quo ad BC, productam demittatur perpendicularis FG. Dico GB, ipſis CB, BA, Harmonice proportionalem eſſe:Hoc eſt,eſſe GB, primam ad BA, tertiam, vt GC, exceſſum inter primam GB,& mediam BC,ad
s 28. prim. *CA,exceſſum inter mediam CB,& tertiam BA, [s] Quoniam enim GF,ipſi AD,parallela eſt, ob angulos rectos G, A; erit ex ſcholio propoſ.4. huius lib.triangulum BAD, triangulo BGF, ſimile, id eſt,erit vt GB,ad GF,ita BA,ad AD;& permutando, vt GB,ad BA,ita GF,ad AD,*
t 4. ſexti. *hoc eſt, ad AE. Rurſus ob ſimilitudinem triangulorum FGC, EAC, [t] erit vt FG,ad GC, ita EA, ad CA; & permutando vt FG, ad AE, ita GC, ad CA.Erat autem vt FG,ad AE,ita GB, ad BA.Igitur erit quoq; vt GB,prima,ad BA, tertiam ita GC, exceſſus inter primam GB,& mediam BC,ad CA,exceſſum inter mediam BC,& tertiam BA,Quod eſt propoſitum.*

QVOD autem BD,EC,conueniant,ſic probabitur.Quoniam BC,ponitur media,& BA, tertia,ſiue minima, maior erit BA, tertia quam CA, exceſſus, quo media BC, minimam BA,ſuperat, vt ad finem antecedentis problematis oſtendimus. Niſi enim maior eſſet AB, quam AC, non poſſet reperiri tertia maior;cum ea inuenta,ſemper demonſtraretur tertia AB,maior exceſſu AC, quo media tertiam ſuperat. Abſcindatur ergo AH,ipſi AC,æqualis,connectaturq; recta HD.Quoniam igitur latera AE,AC,lateribus AD, AH, æqualia ſunt, an-
u 4.primi. *guloſq; comprehendunt æquales,vtpote rectos,ſiue ad verticem A,[u] erunt & anguli ACE, AHD, æquales:qui cum alterni ſint;*

ſint;[b] erunt rectæ EC,HD,parallelæ;[c] ac proinde anguli interni DHC,HCF, duobus rectis æquales erunt. Cum ergo[d] angulus b 27.primi.
DHC, maior ſit interno angulo B, erunt duo anguli BCF, CBF, duobus rectis minores.[e] Quocirca BD,EC, coibunt vt eſt pro- c 29. primi
poſitum. d 16.primi. e 13.pron.

NON determinantur quoq; hic magnitudines rectarum AD, AE, quia vtcunq; ſumantur ſiue maiores, ſiue minores,
eadem tertia BG,reperietur. Sint enim aliæ æquales AI, AK: Ducta autem recta BI, quæ producta ſecet perpendicularem FG,
in L, ducatur KC, quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M, oſtendemus eodem modo, eſſe vt GB,ad BA,
GL,ad AI,id eſt,ad AK. Vt autem GB,ad BA,ita erat GC,ad CA. Erit igitur vt GC,ad CA, ita GL, ad AK. Et quia,ſi recta
KCM,ob ſimilitudinem triangulorum GMC,AKC,[f] eſt vt GM,ad GC,ita KA, ad AC, erit permutando, vt GM, ad f 4. ſexti.
KA,ita GC,ad CA. Cum ergo oſtenſum ſit,eſſe vt GL,ad AK,ita GC,ad CA,erit quoq; GM,ad AK, vt GL, ad AK.[g] Æquales g 9.quinti.
ſunt igitur GM,GL,pars & totum,quod eſt abſurdum. Non ergo cadet KC,infra L:eademq; ratione neq; ſupra cadet. Cadit
ergo in L,vbi BI,producta perpendicularem FC,ſecat; ac proinde ex L,demiſſa perpendicularis LG, ad GB, cadet in G,exhibe-
bitq; eandem tertiam GB,maiorem,Harmonice proportionalem.

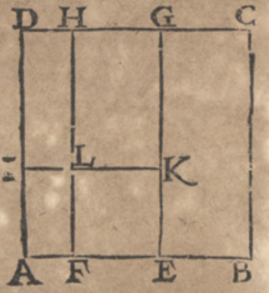
Ex his perſpicuum eſt,quando duo numeri proportionem habent duplam,vel dupla maiorem,illis non poſſe adiungi ter-
tium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in 3. regula proportionalitatis Harmonicæ
diximus. Quia enim oſtendimus, BA, minimam lineam eſſe maiorem exceſſu AC, quo media BC, minimam AB ſuperat;erit
AB,maior ſemiſſe ipſius BC;ac proinde BC,ad AB,media ad minimam, minorem proportionem habebit, quam duplam. Quod
ſi BC,ad AB,eſſet dupla,vel maior quam dupla,,eſſet AB,vel æqualis ipſi AC,vel minor. Quare vt oſtenſum eſt,non poſſet repe-
riri tertia maior in Harmonica proportionalitate:quia EC,cum BD,non coiret.

SED demonſtremus etiam cum Io. Baptiſta Benedicto,qua ratione ijdem termini proportionalitatis Harmonicæ in nu-
meris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium,quas in tractatione proportionum in lib. 5, explicauimus.
Vtemur autem nonnullis propoſitionibus libri 7. cum ea ex lib. 5. & 6.non pendeant, atq; idcirco ante hos libros demonſtrari
poßint. Hinc igitur exordium ſumemus.

X.

EX datis quibuſuis duobus numeris,tres numeros Harmonice proportionales,quorum
extremi eandem proportionem habeant,quam dati duo numeri,reperire.

EX qualibet recta AB, deſcribatur quadratum ABCD, ſumptiſq; duabus partibus æqualibus BE, EF, in latere AB,du-
cantur EG,FH,ipſis AD,BC,parallelæ. Item ſumpta recta AI,æquali ipſi BE,vel EF,agatur IK,ipſis AB, DC, parallela ſecans
FH,in L. Erit rectangulum AG,contentum ſub AB,(id eſt,ſub ſumma rectarum AE,EB;[a] cum a 34. primi
EG,ſit ipſi BC, ideoq; ipſi AB, æqualis) & AE, (maiore ſcilicet parte ſummæ AB.) Rectangu-
lum vero EC,continebitur ſub AB,(hoc eſt,ſub eadem ſumma rectarum AE,EB,) & EB,(mi-
nore videlicet parte eiuſdem ſummæ AB.) Tam deniq; rectangulum AK, quam GL,ſub parti-
bus AE,EB,comprehendetur; propterea quod AI, ſumpta eſt ipſi EB, æqualis; & HL, LK,ipſis
AE,EB,æquales.[b] Cum enim FH, ipſi AD, hoc eſt,ipſi AB;& FL, ipſi AI, hoc eſt ipſi EB,ſit æ- b 34.prim.
qualis:erit reliqua HL,reliquæ AE, æqualis:at[c] KL, ipſi EF, ſiue ipſi EB,æqualis eſt. Ex quo c 34.prim.
fit,duo rectangula AK, KH,ſimul continere duplum eius,quod ſub partibus AE, EB, contine-
tur. Dico rectangulum AG; & ſummam duorum rectangulorum AK, KH; & rectangulum
EC,conſtituere proportionalitatem Harmonicam:hoc eſt,vt eſt AG,primum, ad EC,tertium,



ita eſſe IH,exceſſum inter primum AG,& ſecundum HLIAEG,ad AL,exceſſum inter ſecundum HLIAEG, & tertium EC,ſiue
FG,[d] quod ipſi EC,æquale eſt. Nam cum HL,ipſi AE;& LF,ipſi EB,æqualis ſit,vt oſtendimus;[e] erit AE,ad EB,vt HL,ad LF. Vt d 36.primi.
autem AE,ad EB,[f] ita eſt AG,ad EC:Et vt HL,ad LF,ita eſt HI, ad HL. Igitur erit quoq; AG,primum ad EC,tertium,vt HI, e 7. quinti. f 1. ſexti.
exceſſus inter primum ac medium,ad AL,exceſſum inter medium ac tertium. Quod eſt propoſitum.

ITAQVE ſi AE,ponatur 6.& EB, 4.erit ſumma AB,10.quam ſi ducamus in AE,& EB,fiet AG,60.& EC,40. Duplum
autem eius,quod fit ex AE,in EB,hoc eſt, HLIAEG,fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonice proportio-
nales erunt 60.48.40.quorum extremi eandem proportionem habent,quam dati numeri 6.4. Cum enim eadem ſumma 10.ex
6.& 4.collecta multiplicans vtrumq; 6.4.produxerit extremos 60 40.[g] erit 60.ad 40.vt 6.ad 4. Quod etiam patet ex figura. g 17.ſepti-mi.
[h] Eſt enim AG,id eſt,60.ad EC,id eſt,ad 40.vt AE,id eſt,6.ad EB,id eſt,ad 4. h 1.ſexti.

HAC arte,ſi ſumma quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumq; ſeorſum, gignentur extremi ter-
mini proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem,quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit nu-
merus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter ſe.

EX his facile etiam inueniemus tres numeros Harmonice proportionales, quorum extremi proportionem habeant da-
tam,& medius ſit dato numero æqualis. Vt ſi extremi debeant habere proportionem quintuplam, mediuſq; ſit 30.ſumendi
ſunt 5. & 1. in data proportione, & eorum ſumma 6. in vtrumq; ducenda, vt fiant 30.& 6. inter quos ſtatuatur medius 10.
qui duplus eſt producti ex multiplicatione datorum numerorum 5.& 1.vnius in alterum:eruntq; 30.10.6. Harmonice propor-
tionales,vt dictum eſt. Deinde datus medius 30. diuidatur per medium inuentum 10. & Quotiens 3.per tres inuentos 30. 10. 6.
multiplicetur. Ita enim fient tres numeri quæſiti 90.30.18.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. ſtatuatur medius Arithmetice proportionalis, 5. nimirum ſemiſsis eorum ſummæ;
hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos ſtatuatur medius 24. quem
extremi inter ſe multiplicati producunt,hoc modo, 30.24.20. Dico hos tres eſſe Harmonice proportionales. Quoniam enim tres
numeri 60.48.40.qui fiunt ex ſumma 10.datorum numerorum 6.4. in datos numeros 6. & 4.& ex 4.in 6.bis dupli ſunt triũ
numerorum hic inuentorũ,quod hi producti ſint ex ſemiſſe ſummæ datorum numerorũ in datos numeros, & ex 4.in 6.ſemel,
vt perſpi-

vt perſpicuum eſt: erit quoq; tam exceſſus inter 60. & 48. duplus exceſſus inter 30. & 24. quam exceſſus inter 48. & 40. ipſius exceſſus inter 24. & 20. vt ad propoſ. 10. oſtendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. ſint Harmonice proportionales, vt in præcedenti problemate demonſtrauimus; erunt quoque eorum ſemiſſes, 30. 24. 20. [i] *eaſdem habentes proportiones, Harmonice proportionales; quandoquidem & exceſſus eandem proportionem habent, quam exceſſus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum exceſſus numerorum 30. 24. 20. ſemiſſes ſint horum numerorum 60. 48. 40. exceſſuum, vt dictum eſt.*

60. 48. 40
30. 24. 20.

i 15. quinti.

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. inter quos inueniendus ſit medius proportionalis Harmonice. Dematur ex maiore AB, 15. numerus BD, minori BC, 10. æqualis, & reliquus numerus AD, 5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem BC, 10. productusq; numerus 50. diuiſus per AC, 25. ſummam datorum numerorum, faciat Quotientem DE, 2.

A... E.. D.......... B.......... C

qui additus minori BD, 10. faciat BE, 12. Dico BE, eſſe medium proportionalem Harmonice inter AB, BC, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AD, in BC, fit, diuiſo per AC. Quotiens eſt DE; producetur idem numerus diuiſus ex DE, Quotiente in diuiſorem AC, vt conſtat ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus fit ex AC, primo, in DE, quartum qui ex BC, vel BD, ſecundo in AD, tertium; [b] *erit AC, primus ad BC, ſecundum, vt AD, tertius ad DE, quartum: Et diuidendo, AB, ad BC, primus datus ad tertium datum, vt AE, exceſſus inter primum AB, & medium inuentum, BE, ad DE, exceſſum inter medium BE, & BD, ſiue tertium BC. Sunt ergo AB, BE, BC, nimirum 15. 12. 10. Harmonice proportionales: Quod eſt propoſitum.*

b 19. ſeptimi. vel 16. ſexti.

Itaq; ſi differentia datorum numerorum ducatur in minorem, numeruſq; productus diuidatur per datorum numerorum ſummam, ac deniq; Quotiens minori adijciatur, conflabitur medius terminus Harmonicæ proportionalitatis.

XII.

DATIS duabus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & AC, 12. quibus inueniendus eſt minor Harmonice proportionalis. Addatur BD; æqualis ipſi BC, exceſſui inter datos numeros. Per hanc ſummam AD, 18. collectam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum,

A.......... E.. C... B... D

diuidatur numerus 36. factus ex minore dato AC, in BC, differentiam datorum numerorum; & Quotiens CE, ex minore dato AC, detrahatur. Dico reliquum AE, 10. eſſe terminum tertium minorem quæſitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BC, fit, diuiſo per AD, Quotiens eſt CE, producetur idem numerus diuiſus ex CE, Quotiente in diuiſorem AD, multiplicato, vt ex Diuiſionis defin. manifeſtum eſt. Quia igitur idem numerus gignitur ex AD, primo, in CE,

A.......... E.. C... B... D

quartum, qui ex BC, ſecundo in AC, tertium; [a] *erit AD, primus ad BC, ſecundum, hoc eſt, ad BD, vt AC, tertius ad CE, quartum. Et diuidendo, AB, ad BD, hoc eſt ad BC, vt AE, ad CE: Et permutando, AB, primus datus ad AE, tertium inuentum, vt BC, exceſſus inter primum AB, & medium AC, ad CE, exceſſum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, id eſt, 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod eſt propoſitum.*

a 19. ſeptimi. vel 16. ſexti.

Itaq; ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus. Quotienſq; ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

A L I T E R.

SINT rurſum dati duo numeri AB, 15. & AC, 12. quibus inueniendus ſit maior in Harmonica Medietate. Maiori AB, addatur BD, æqualis differentiæ BC, 3. datorum numerorum. Et per ſummam AD, 18. diuidatur numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum AB, AC, hoc eſt, 15. 12. inter ſe procreatus. fitq; quotiens AE, 10. Dico AE, minorem extremum eſſe in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex AB, in AC, gignitur, diuiſo per AD, Quotiens fit AE, producetur idem numerus

A.......... E.. C... B... D

diuiſus ex AE, Quotiente in diuiſorem AD, multiplicato, vt ex defin. Diuiſionis conſtat. Quia igitur idem numerus fit ex AD, primo in AE, quartum, qui AB, ſecundo in AC, tertium; [b] *erit AD, primus ad AB, ſecundum vt AC, tertius vt AE, quartum; ac proinde cum AD, maior ſit, quam AB, erit quoq; AC, maior quam AE. Quare erit & diuidendo BD, id eſt, BC, ad AB, vt CE, ad AE: Et conuertendo AB, ad BC, vt AE, ad CE; Et permutando AB, primus ad AE, tertium inuentum, vt BC, exceſſus inter primum AB, & medium AC, ad CE, exceſſum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, hoc eſt, 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod eſt propoſitum.*

b 19. ſeptimi. vel 16. ſexti.

ITAQVE ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter ſe procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII. DA-

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT dati duo numeri AB,10.& AC,12.quibus inueniendus ſit tertius maior in Medietate Harmonica. Ex minore AB detrahatur BD, æqualis differentiæ BC,2.datorum numerorum. Et per reliquum numerum AD,8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero AC, 12. in differentiam datorum numerorum BC, 2. vel BD. Quotiens autem CE, 3. maiori numero

A........ D.. B.. C... E

AC,12.adijciatur. Dico ſummam AE,15.eſſe terminum maiorem in proportionalitate, ſiue Medietate Harmonica, hoc eſt, tres numeros AE, AC, AB, nimirum 15.12.10. eſſe Harmonice proportionales. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BD. fit, diuiſo per AD, Quotiens fit CE, producetur idem numerus diuiſus ex CE, Quotiente in diuiſorem AD, multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex AC, primo in BD, quartum, qui ex CE, ſecundo in AD, tertium, [a] erit AC, primus ad CE, ſecundum vt AD, tertius ad BD, quartum: Et componendo AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc eſt, ad BC: Et permutando AE, primus ad AB, tertium, vt CE, exceſſus inter primum AE, & medium AC, ad exceſſum BC, inter medium AC, & tertium AB. Sunt ergo tres numeri AE, AC, AB, nimirum 15.12.10. Harmonice proportionales. Quod eſt propoſitum. a 19. ſeptimi. vel 16. ſexti.

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotienſque maiori numero adijciatur, conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rurſus duo dati numeri AB,10.& AC, 12. quibus inueniendus ſit maior in Harmonica Medietate. Ex minore AB, demătur BD, æqualis exceſſui BC, datorum numerorum: Et per reliquum numerum AD, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum AB,10.& AC,12.procreatus, Quotienſq; fit AE,15. Dico AE, eſſe terminum maiorem in

A........ D.. B.. C... E

proportionalitate Harmonica. Quoniam enim numero, qui fit ex AB, in AC, diuiſo per AD, Quotiens eſt AE, producetur idem numerus diuiſus ex AE, Quotiente in diuiſorem AD, ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus gignitur ex AB, primo in AC, quartum, qui ex AD, ſecundo in AE, tertium; [b] erit AB, primus ad AD, ſecundum, vt AE, tertius ad AC, quartum; ac proinde cum AB, maior ſit quam AD, erit & AE, maior quam AC. Et cum ſit, vt AE, ad AC, ita AB, ad AD, erit per conuerſionem rationis AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc eſt, ad BC. Et permutando AE. primus inuentus ad AB, tertium, vt CE, exceſſus inter primum AE, & medium AC, ad BC. exceſſum inter medium AC, & tertium AB. Igitur tres numeri AE, 15, AC, 12. AB, 10. Harmonice proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum. b 19. ſeptimi. vel 16. ſexti.

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter ſe genitus, dabit quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonſtrare, quibus ad finem tractationis proportionum, ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & viciſſim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate. Geometrica tam æqualium terminorum, quam inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIV.

PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus; Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta: ac ſumma conflata ex ſecundo & tertio ſemel: ac tertius ſemel, ſunt Geometrice proportionales.

SINT tres termini continue proportionales Geometrice, A,B,C, ſitq; D, ſumma ex A, ſemel, & B, bis & C, ſemel collecta: At E, ſumma ex B, & C, ſemel conflata, ac deniq; F, ipſi C, æqualis. Dico D, E, F, Geometrice quoq; proportionales eſſe. Cũ enim ſit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque componendo A, B, ſimul ad B, vt BC, ſimul ad C. [c] Igitur omnes antecedentes ſimul, c 12. quinti.

A, 1. B, 1. C, 1. A, 12. B, 6. C, 3.
D, 4. E, 2. F, 1. D, 27. E, 6. F, 3.

nimirum A,B, & B,C, ad omnes conſequentes ſimul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc eſt, B,C, ad vnam conſequentem C. Eſt autem D, æqualis ipſis A,B, & B,C; & E, ipſis B,C, ac deniq; F, ipſi C. Igitur erit quoq; D, ad E, vt A, ad F: ac proinde D,E,F, Geometrice ſunt proportionales. Quod eſt propoſitum.

HINC manifeſtum eſt, ſi termini A,B,C, ſint æquales; D,E,F, eſſe duplos. Nam B, C, ſimul dupli erunt ipſius C; ac propterea & E, ipſius F: quod E, ipſis B, C; & F, ipſi C: ſit æqualis. Cum ergo D,E,F, ſint continue proportionales, ipſi erũt in dupla proportione. Quod ſi termini æquales A, B, C, ſint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D,E,F, in minimis terminis 4.2.1. propterea quod F, æqualis eſt ipſi C, hoc eſt, vnitati.

A,	B,	C,
1.	1.	1.
D,	E,	F,
4.	2.	1.

SI vero

A,	B,	C,
4.	2.	1.
D,	E,	F,
9.	3.	1.

SI vero A,B,C,ſint dupli,erunt geniti D, E, F, tripli. Nam ſi B,ipſius C,duplus eſt;erit ſumma ex B, C, collecta,id eſt,E,ipſius C,hoc eſt,ipſius F,triplus:ac proinde D,E,F, continuam proportionem triplam habebunt. Atq; eodem modo ex triplis orientur quadrupli,ex quadruplis quintupli, & ſic in infinitum.

A,	B,	C,
1.	2.	4.
D,	E,	F,
9.	6.	4.

A,	B,	C,
1.	3.	9.
D,	E,	F,
16.	12.	9.

AT ſi termini A,B,C,ſint dupli inuerſo ordine,erunt D,E,F, geniti,ſeſquialteri. Nam cum B,ſit ſemiſsis ipſius C;erit ſumma ex B,C,collecta,hoc eſt,F,ipſius C,ſiue ipſius F,ſeſquialtera. Eodem modo ſi A, B, C,ſint conuerſo ordine tripli,erunt procreati D, E, F, ſeſquitertij. Nam B,erit ipſius C,tertia pars.Igitur ſumma ex B,C,conflata,id eſt,E, continebit C,ſiue F,ſemel, & inſuper eius partem tertiam:ac propterea D,E,F,habebunt continuam proportionem ſeſquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuerſis naſcentur ſeſquiquarti, & ex inuerſis quintuplis ſeſquiquinti,atq; ita in infinitum.Non aliter monſtrabimus,aliarum proportionum generationes ex aliis proportionibus recte eſſe præſcriptas in tractatione proportionum.Item recte quamcumq; proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem,qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus Geometrice proportionalibus; Summa ex primo bis, ſecundo bis,& tertio ſemel collecta: ac ſumma ex primo, ſecundo & tertio ſemel conflata:ac deniq; tertius ſemel, ſunt Arithmetice proportionales.

SINT tres termini Geometrice proportionales, A,B,C,ſitq; D,ſumma collecta ex A, bis ex B, bis & ex C, ſemel: At E, ſumma conflata,ex A,B,C,ſemel: Ac deniq; F,ipſi C,æqualis.Dico D,E,F,eſſe Arithmetice proportionales. Quoniã n. ſumma

A, 1. B, 1. C, 1. A, 12. B, 6. C, 3.

D, 5. E, 3. F, 1. D, 39. E, 21. F, 3.

ex A,bis,& B,bis,& C,ſemel,hoc eſt,terminus D,ſuperat ſummam ex ABC,ſemel, hoc eſt, terminum E, aggregato ex A,B, ſemel collecto.Item ſumma ex A,B,C,hoc eſt,terminus E,ſuperat terminum C,ſiue F, eodem aggregato ex A,B,ſemel collecto

A, 3. B, 20. C, 1. D, 47. E, 24. F, 1.

erit idem exceſſus inter D,& E,qui inter E, & F;ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, ſiue Medietatem conſtituent. Quod eſt propoſitum.

EADEM prorſus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuſcunque, etiamſi non ſint proportionales:vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus,ſiue inæqualibus,Geometrice proportionalibus;Summa collecta ex primo bis,ex ſecundo ter,& tertio ſemel: ac ſumma conflata ex ſecundo bis,& tertio ſemel:& deniq; ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coaceruata,Harmonice proportionales ſunt.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C, ſitq; D,ſumma collecta ex A, bis ex B,ter, & ex C, ſemel: At E, ſumma ex B,bis & C,ſemel conflata: Ac deniq; F,ſumma ex B, ſemel & C,ſemel collecta. Dico D,E,F, conſtituere proportio-

A, 1. B, 1. C, 1. A, 12. B, 6. C, 3.

D, 6. E, 3, F, 2, D, 45. E, 15. F, 9.

nalitatem,ſiue Medietatem Harmonicam.Quoniam enim eſt,vt A,ad B,ita B,ad C;erunt ex ſcholio propoſ.22.lib.5.vt A,bis ad
a 12.quinti *B,ita B,bis ad C.Igitur componendo,vt A,bis, & B,ſemel ad B,ita B,bis, & C,ſemel ad C. [a] Igitur vt omnes antecedentes ſimul,nimirum A,bis,& B,ter,& C,ſemel,hoc eſt,terminus D,ad omnes conſequentes ſimul,nimirum ad ſummam ex B, C, id eſt,ad F,ita vnum antecedens,nimirum A,bis,& B,ſemel ad B.Eſt autem A,bis,& B,ſemel,exceſſus,quo A,bis,& B,ter,& C, ſemel,ſuperant B,bis,& C,ſemel,hoc eſt,exceſſus inter D,primum terminum, & medium E: At B,exceſſus, quo B, bis, & C, ſemel,ſuperant ſummam ex B,C,hoc eſt,exceſſus inter E,medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F,tertium,ita exceſſus inter primum & medium, ad exceſſum inter medium ac tertium; ideoq; D, E, F, Harmonice proportionales erunt. Quod eſt propoſitum.*

SEMPER autem minimi termini procreantur D,E,F,quando dati termini A,B, C,ſunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifeſtum eſt.Quando autem A,B,C,non ſunt vnitates,etiamſi in ſua proportione minimi ſint,non ſemper creantur minimi termini D,E,F.Id quod liquido conſtat ex his exemplis.In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis ſeſqui-

A, 9. B, 6. C, 4. A, 1. B, 4. C, 16. A, 9. B, 12. C, 15.

D, 40. E, 16. F 10. D, 30. E, 24. F, 20. D, 70. E, 40. F, 28.

quialteræ, & in ſecundo ex minimis terminis ſubquadruplæ proportionis, & in tertio ex minimis terminis ſubſeſquitertiæ proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod ſi termini inuertantur, tum demum (quod mirum eſt) minimi termini Medietatis Harmonicæ procreabuntur,vt hæc exempla demonſtrant.

A, 4. B, 6. C, 9. | A, 16. B, 4. C, 1. | A, 16. B, 12. C, 9.

D, 35. E, 21. F, 15. | D, 45. E, 9. F, 5 | D, 77. E, 33. F, 21.

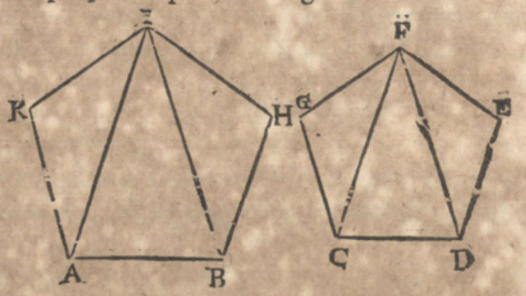
PROB.

PROBL. 6. PROPOS 18. xix.

A DATA recta linea dato rectilineo ſimile; ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere.

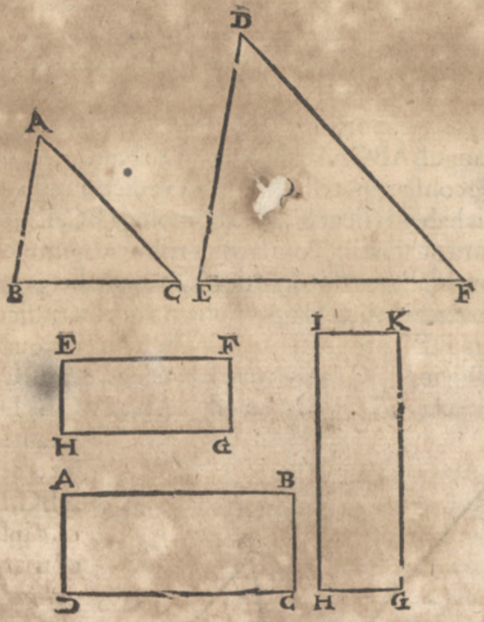
SIT data recta AB, ſuper quam deſcribendum ſit rectilineum rectilineo CDEFG, ſimile ſimilerque poſitum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad ſingulos angulos oppoſitos rectæ lineæ, quæ rectilineum reſoluant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI; coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores ſunt, cum æquales ſint duobus angulis FCD, FDC, *a* qui duobus rectis ſunt minores) *b* eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rurſus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus BIH. Et *c* quia duo anguli EDF, EFD, minores ſunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: *d* Et quia duo anguli GCF, GFC, minores ſunt duobus rectis: erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atq; ita procedatur, donec abſoluantur omnia triangula rectilinei propoſiti, ſi plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, ſimile eſſe, ſimiliterq; poſitum. Cum enim angulus IAB, conſtitutus ſit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt conſtat ex cōſtructione; cum ſingulæ partes vnius ſingulis partibus alterius factæ ſint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero *e* ita eſt AB, ad BI, vt CD, ad DF: & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE: *f* erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia ſunt, *g* quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia ſunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. *h* Rurſus ita eſt HI, ad IB, vt EF, ad FD: & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC: & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. *i* Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG, & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & ſic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum ſint æquiangula, habeantq; latera circa æquales angulos proportionalia, ſimilia ſunt, ſimiliterq; deſcripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 17. primi.
b 32. prim.
c 17. primi.
d 17. primi.
e 4. ſexti.
f 22. quint.
g 4. ſexti.
h 4. ſexti.
i 22 quint.



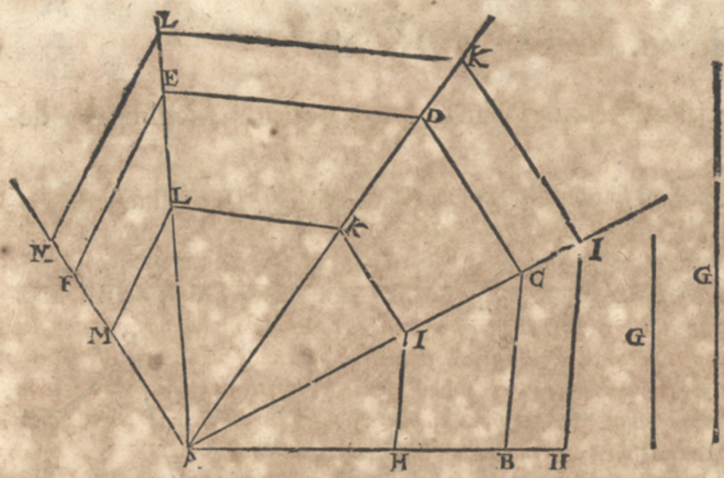
SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea ſuper lineas rectas deſcripta, eſſe ſimilia & ſimiliter poſita, quando anguli æquales conſtituuntur ſuper ipſas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, quam latera proportionalia ſemper ordine ſeſe conſequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non ſolum erunt ſimilia, ſed etiam ſuper rectas BC, EF, ſimiliter deſcripta, ſi anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita ſit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At ſupra rectas BC, DE, non dicentur ſimiliter eſſe deſcripta (quamquam ſimilia ſint) cum anguli B, C, non ſint æquales angulis D, E. Similiter rectangula AC, EG, ſimilia, dicentur ſimiliter eſſe deſcripta ſuper rectas DC, HG, quoniam vt AD, ad DC, ita eſt, EH, ad HG, &c. At vero rectangula AC, IG, non dicentur ſimiliter deſcripta ſuper rectas DC, HG, quamuis ſint ſimilia, vt manifeſtum eſt. Eadem tamen ſimiliter erunt deſcripta ſuper rectas DC, IH, vel ſuper rectas AD, GH.



CÆTERVM omnes figuræ ſecundum conſtructionem huius problematis deſcriptæ, ſunt neceſſario ſimiliter poſitæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, ſuper lineas AB, & CD, deſcriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, ſunt quoq; poſitæ ſimiliter ſuper quælibet earum latera.

FORTASSIS autem expeditius Problema propoſitum conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo ABCDEF, ſuper datam rectam G, vel aliam ei æqualem, deſcribendum ſimile rectilineum, ſimiliterq; poſitum. Productis duobus lateribus AB, AF, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ AC, AD, AE, quantumlibet. Deinde ex AB, abſcindatur AH, æqualis datæ rectæ G, vel certe ex ipſa AB, vlterius producta, ſi forte G, fuerit maior, quam AB. Poſt hæc per H, agatur recta HI, lateri BC, parallela, & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & ſic deinceps, donec omnia latera ſuas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF, factumq; erit, quod proponitur: hoc eſt, figura AHIKLM, ſuper rectam



AH, datæ rectæ G, æqualem, ſimilis erit, ſimiliterq́ poſita figuræ propoſitæ ABCDEF, ſuper rectam AB, conſtitutæ. Cum n. angulus HAM, ſit communis; & angulis ABC, AFE, [k] *æquales ſint anguli AHI, AML; Itẽ angulis ACB, ACD, æquales ſint anguli AIH, AIK, hoc eſt, toti angulo BCD, æqualis ſit angulus totus HIK; Eodemq́ modo angulis CDE, DEF, æquales ſint anguli IKL, KLM: Æquiangula erunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK, AKL, ALM, ſimilia ſint, per coroll. propoſ. 4. huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF; Erit,* [l] *vt AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rurſus vt BC, ad CA, ita HI, ad IA. Et vt CA, ad CD, ita IA, ad IK: ac proinde ex æquo, vt BC, ad CD, ita HI, ad IK, &c. Igitur ex defin. ſimilia ſunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, atq́ adeo ſimiliter poſita, per ea, quæ proxime hoc ſcholio ſcripſimus.*

k 29. primi

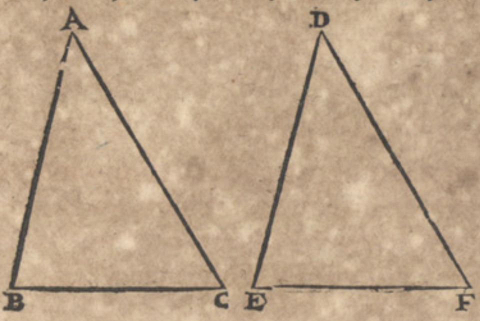
l 4. ſexti.

xvij.

THEOR. 13. PROPOS. 19.

SIMILIA triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

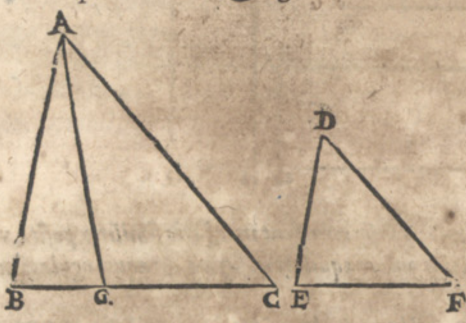
SINT triangula ſimilia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et ſit vt AB, ad BC, ita DE ad EF, &c. Dico triangula inter ſe rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa BC, & EF, vel AB, & DE, vel AC, & DF; Hoc eſt, ſi homologis lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis BG: ita eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectam BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defi. 10. lib. 5. proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF: proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, FF. Ita vt nihil aliud ſit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras ſimiles, ſimiliterque poſitas habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quam ita eſſe triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt eſt prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continue proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic ſunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continue proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF.





Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis BG, illis æqualis: ita vt proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, ſit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, *a* quod ipſa inter ſe æqualia ſint, ob angulos B, C, angulis EF, æquales,
a 26. primi & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam latus BC, ad latus EF, habet, duplicata. Quod etiam hinc conſtare poteſt. Quoniam, vt dictum eſt, triangula ABC, DEF, æqualia ſunt, hoc eſt, proportionem æqualitatis habent, ſicut & latera homologa BC, EF: proportio autem æqualitatis duplicata ſolum efficit proportionem æqualitatis: (Poſitis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad ſecundam, vt conſtat ex defin. 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, ſicuti & prima ad ſecundam,) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam eius, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde BC, latus latere EF, maius; & ex BC, *b* abſcindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG,
b 11. ſexti. ducaturq́; recta AG. Quia igitur eſt vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando vt AB, ad DE, ita BC, ad EF:
c 11. quinti Vt autem BC, ad EF, ita eſt per conſtructionem EF, ad BG, Vt ergo AB, ad DE, *c* ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula
d 15. ſexti. ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, *d* ipſa inter ſe æqualia erunt; & propterea vt triangulũ ABC,
e 7. quinti. ad triangulum DEF, *e* ita erit idem triangulum ABC, ad triangulum ABG. Vt autem triangulum ABC, ad triãgulum ABG,
f 1. ſexti. eiuſdem altitudinis, *f* ita eſt baſis BC, ad baſin BG. Igitur vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt BC, ad BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, ſint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, ſecundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter ſe ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

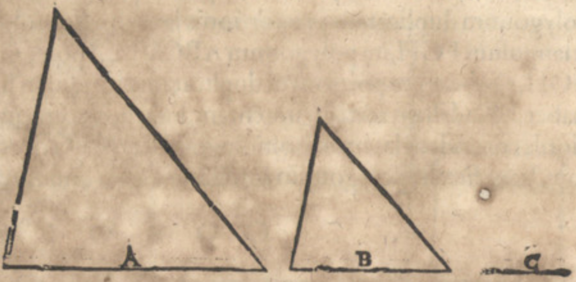


COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſupra ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum.

SINT

SINT enim tres rectæ proportionales A,B,C; & ſuper primam A, & ſecundam B, conſtituta triangula A, & B, ſimilia, ſimiliterq́ deſcripta. Dico, vt eſt recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita eſſe triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, eſt, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B, g Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoq́ proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B. g 19. ſexti.



EODEM modo oſtendes, ita eſſe triangulum ſupra ſecundam ad triangulum ſupra tertiam ſimile ſimiliterq́ deſcriptum, vt eſt prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C,B,A, & ſuper B, ſecundam, & A, tertiam conſtituantur triangula ſimilia ſimiliterq́ poſita B, & A. Dico, vt eſt, recta C, ad rectam A, ita eſſe triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata eſt proportionis C, ad B, hoc eſt, rectæ B, ad rectam A.[h] Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, ſunt latera homologa: Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A. h 19. ſexti.

S C H O L I V M.

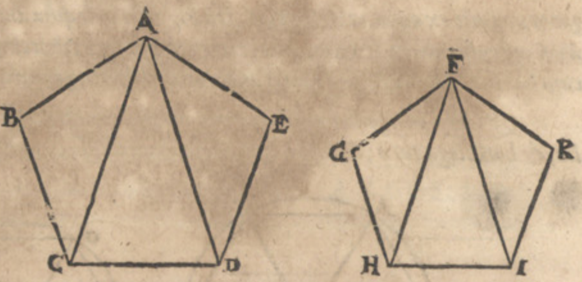
ITAQVE ſi proportio lateris BC, ad latus EF, nota ſit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoſcemus quoq́ ex hac propoſ. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum ABC, ad triangulum DEF. Si enim proportio 6. ad 5. continuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc eſt, habebit proportionem, cuius denominator eſt $1\frac{11}{25}$. Quia enim proportio 36. ad 25. eſt duplicata proportionis 36. ad 30. ſiue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam, vt hoc theoremate oſtenſum eſt; erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. Eandem propotionem triangulorum cognoſcemus, ſi denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{5}$. in ſe multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id eſt, $1\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata eſt proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quod hæc etiam duplicata ſit eiuſdem proportionis laterum.

SIC etiam, ſi latera homologa haberent proportionem, quam 10. ad 1. haberent triangula proportionem, quam 100. ad 1. cum hæc illius ſit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id eſt, 10. in ſe multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ decuplæ duplicata eſt.

THEOR. 14. PROPOS. 20. xviij.

SIMILIA polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

SINT polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & ſic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula ſimilia, quæ ſint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad ſingulos angulos oppoſitos, quæ ſint AC, AD, FH, FI; diuiſaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis eſt angulo G, ex hypotheſi, & circa ipſos latera proportionalia; *a* æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Itẽ angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppoſitos: *b* Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter ſe ſimilia erunt. Eadem ratione erunt ſimilia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde *c* quia eſt vt AC, ad CB, ita FH, ad HG, ob ſimilitudinem triangulorum ABC, FGH; vt autem CB, ad CD, ita eſt, ex hypotheſi, HG, ad HI, ob ſimilitudinem polygonorum: *d* erit ex æquo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; eſt autem & ablatus ACB, oſtenſus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. *e* Quare triangula ACD, FHI, cum habeant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt, ideoque ſimilia. Eademque ratio eſt de aliis omnibus triangulis, ſi plura fuerint.



a 6. ſexti.
b 4. ſexti.
c 4. ſexti.
d 22 quinti.
e 6 ſexti.

DICO præterea, triangula hæc eſſe homologa totis polygonis, hoc eſt, ita eſſe quodlibet triangulum in vno polygono ad ſuum correſpondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonũ. Quoniam enim ſimilia ſunt triangula ABC, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cum vtraque hæc proportio triangulorum ſit duplicata eiuſdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neq; diſſimili ratione concludetur quoque eſſe triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, ſi plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius ſint antecedentia, & triangula alterius conſequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum conſequens *f* ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad ſibi reſpondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis. f 12. quint.

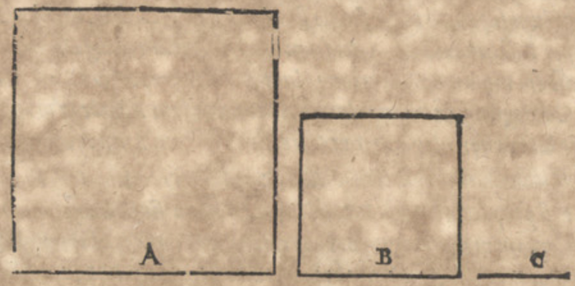
DICO poſtremo, polygona inter ſe proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa, hoc eſt, ſi homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt eſt prima linea AB, ad tertiam inuentã: ac proinde, cum propor-

 tio AB,

tio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG, dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim ſit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum vero ABC, ad triangulum
g 19. ſexti. FGH, g habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc eſt eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter ſe proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc eſt, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentam. Itaq; ſimilia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi fuerint tres rectæ proportionales, vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe polygonum ſuper primam deſcriptum, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum: Vel ita eſſe polygonum ſuper ſecundam deſcriptũ ad polygonum ſuper tertiam ſimile ſimiliterque deſcriptum.



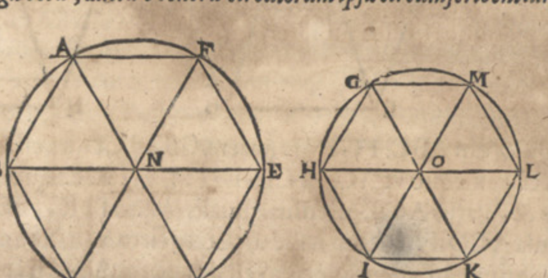
HOC non aliter demonſtrabitur ex hoc theoremate, quam oſtenſum fuit corollarium præcedentis theorematis ex ſuo theoremate. Vt perſpicuum eſt in hac figura appoſita.

SCHOLIVM.

QVANDO polygona ſimilia ſunt pentagona, vt in figura, demonſtrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI, ſimilia eſſe. Quoniam anguli ACB, FHG, æquales ſunt, ob ſimilitudinem triangulorum ABC, FGH; ſi auferantur ex angulis BCD, GHI, qui æquales etiam ſunt, ob ſimilitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eademq; ra-
h 32. primi. *tione æquales oſtendentur anguli ADC, FIH: ac propterea h & reliqui CAD, HFI, æquales erunt. Igitur cum æquiangula ſint*
i 4. ſexti. *triangula ACC, FHI, i habebunt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde ſimilia erunt.*

AT vero quando polygona habent plures angulos, demonſtrandum eſt, triangula media ſimilia eſſe, ex æqualitate, & propoſ. 6. huius lib. vt in propoſitione factum eſt: quia non poſſunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet prope præcedens triangulum ſimile exiſtit, qualis eſt angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, oſtendi non poteſt æqualis angulo FIH; quod tunc alia adhuc triangula ſuperſint vſque ad triangula ſimilia AED, FKI; &c. Hoc ideo dixerim, ne quis exiſtimet fruſtra in propoſ. nos dixiſſe, ita eſſe AC, ad CB, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI: ac proinde ex æqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; ideoq; cum anguli ACD, FHI, ſunt æquales, ſimilia eſſe triangula ACD, FHI. Hæc enim demonſtratio eſt omnino neceſſaria, conuenitq; omnibus polygonis quotcunq; angulorum; cum omnia triangula media eo modo oſtendantur eſſe ſimilia, vt perſpicuum eſt. Nam ſi triangula ADE, FIK, non eſſent vltima, demonſtrarentur ſimilia hoc modo. Quoniam eſt vt AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob ſimilitudinem triangulorum ACD, FHI: Itẽ vt DC, ad DE, ita IH, ad IK, ob ſimilitudinem polygonorum; erit ex æquo, vt AD, ad DE, ita FI, ad IK. Et quia angulus CDE, æqualis ponitur angulo HIK: Eſt autem & ablatus
k 6. ſexti. *ADC, oſtenſus ablato FIH, æqualis; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, æqualis. k Quare triangula ADE, FIK, ſimilia erunt cum habeant latera circa æquales angulos ADE, FIK, proportionalia. Atq; ita deinceps, ſi fuerint plura triangula.*

QVOD ſi polygona ſimilia, fuerint æquilatera, & æquiangula, diuidentur quoq; in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis è centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona ſimilia æquilatera, & æquiangula ABCDEF, GHIKLM, quæ circumſcribantur à circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, ſimilia eſſe, & homologa totis polygonis. Quoniam enim anguli CND, IOK, æquales ſunt; (quod æque ſubmultiplices ſint quatuor rectorum. Nam vtrumque ſpatium N & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cum enim anguli in centro N, inſi-



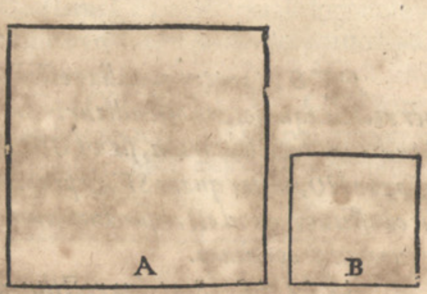
l 27. tertij. *ſtant æqualibus arcubus, l ipſi inter ſe æquales erunt: eademq; ratione anguli in centro O, æquales erunt) Sunt autem & late-*
m 6. ſexti. *ra circum ipſos proportionalia, cum vtrobiq; ſit proportio æqualitatis; m Similia erunt triangula NCD, OIK. Eademq; eſt ratio de cæteris. At vero hæc triangula eſſe homologa totis polygonis, nullo negotio demonſtrabitur. Cum enim tota polygona ſint*
n 15. quin. *ipſorum triangulorum æque multiplicia, vt patet, n habebunt vtiq; eandem cum ipſis proportionem.*

PORRO ex hoc theoremate perfacile demonſtrabimus theorema illud, quod iam aliter in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati. latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum eſſe quadrati B. Cum enim omnia quadrata ſint ſimilia, vt conſtat ex defin. 1. huius lib erit, per hanc propoſ. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B, quæ cum inter ſe proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, vt hic apparet 1.2.4.

SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum eſſe lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata ſit proportionis laterum homologorum, vt dictum eſt; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in exemplo adducto ſuperius apparet.



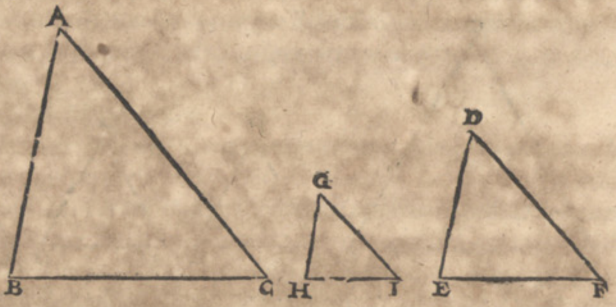
ITAQVE ſi proportio lateris AB, ad latus FG, in polygonis, quæ in propoſ. deſcripſimus, nota ſit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoſcemus quoq; ex hac propoſ. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc eſt, habebit proportionem, cuius denominator eſt $1\frac{9}{16}$. *Quia enim proportio 25. ad 16. eſt duplicata proportionis 25. ad 20. ſiue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG, ponuntur habere; demonſtratumq; eſt hoc theoremate, polygona quoq; habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoſcetur ſi denominator proportionis laterum homologorum, nimirum* $1\frac{1}{4}$. *in ſe multiplicetur. Productus enim numerus* $\frac{25}{16}$. *id eſt,* $1\frac{9}{16}$. *erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex iis, quæ in deſin. 10. libr. 5. ſcripſimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum, cum hæc ſit etiam duplicata eiuſdem proportionis laterum homologorum.*

SIC etiam, ſi latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam, cum hæc illius ſit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in ſe multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

THEOR. 15. PROPOS. 21. XX.

QVÆ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

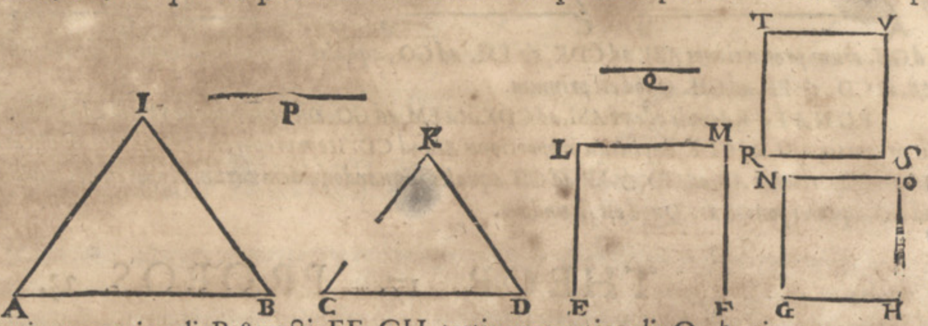
SINT rectilinea ABC, DEF, rei ctilineo GHI, ſimilia. Dico & ipſa inter ſe eſſe ſimilia. Cum enim propter ſimilitudinẽ, anguli rectilinei ABC, æquales ſint angulis rectilinei GHI; Itẽ eadẽ de cauſa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiuſdẽ rectilinei GHI; [a] erũt anguli rectilinei ABC, ęquales angulis rectilinei DEF. (a 1. pron.) Rurſus cum ob eandẽ ſimilitudinẽ, latera rectilinei ABC, proportionalia ſint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet iis, quæ circum æquales ſunt angulos: Item eandem ob cauſam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiuſdem rectilinei GHI; [b] erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. (b 11. quinti) Atq; adeo per definitionem, ſimilia exiſtent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. Quod erat oſtendendum.



THEOR. 16. PROPOS. 22. XXI.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterq; deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Conſtituanturq; ſuper AB, CD, duo quæcunq; rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta ABI, CDK; Item ſuper EF, GH, alia duo quæcũq; rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea eſſe proportionalia, vt quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. [a] Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. (a 11. ſexti.) [b] eritque ex æquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q: (b 22. quinti.) Vt autem AB, ad P, ita eſt rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, ſimile ſimiliterque deſcriptum, ex coroll. propoſ. 20. huius lib. vel ſi fuerint triangula, ex coroll. propoſ. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. [c] Igitur vt ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod eſt propoſitum. (c 11. quinti)

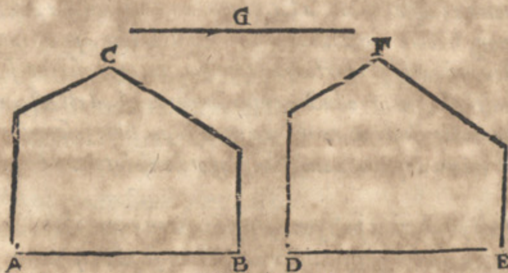


DEINDE ſint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, eſſe quoq; proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. [d] Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, ſuper quam deſcribatur rectilineum RSVT, ſimile rectilineo EM, ſimiliterq; poſitum; [e] & ob id rectilineo GO. (d 12. ſexti.) Quoniam igitur eſt, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoq;, vt iam eſt oſtenſum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. (e 21. ſexti.) Vt autem ABI, ad CDK, ita quoq; ponitur EM, ad GO. [f] Igitur erit vt EM, ad RV, ita EM, ad GO; (f 11. quinti) [g] Atq; idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum ſint ſimilia ſimiliterq; poſita, conſiſtent neceſſario, vt mox oſtendemus ſuper rectas RS, GH, æquales. [h] Quare erit vt EF, ad RS, ita EF, ad GH. (g 9. quinti.) Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. (h 7. quinti.) [i] Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum. (i 11. quinti)

LEMMA.

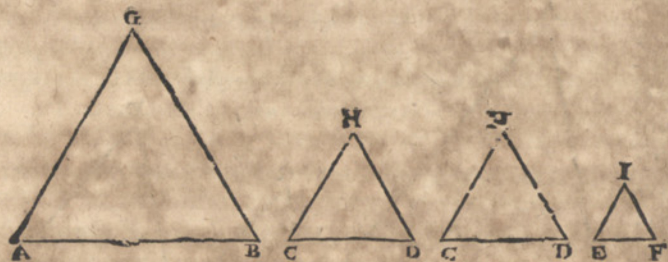
QVOD autem æqualia rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta, qualia ſunt GO, RV, conſiſtant ſuper rectas æquales, ita oſtendetur. Si enim inæquales ſunt GH, RS; ſit GH, maior. Cum igitur, ob ſimilitudinem rectilineorum, ſit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, maior quam RS, erit quoque HO, maior quam SV, & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipſum poſſit conſtitui; quod eſt abſurdum, cum ſit contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt rectæ GH, RS. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & ſimilia ſimiliterq; poſita. Dico latera homologa, cuiuſmodi ſunt rectæ AB, DE, eſſe æqualia. Si enim non credantur æqualia, ſit AB, maius, quam, DE, inueniaturq; rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo eſt, vt AB, ad DE, ita DE, ad G, Eſt autem AB, maior, quam DE, Erit quoq; DE, maior, quam G, ac propterea multo maior AB, quam G. Vt vero AB, ad G, ita eſt rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propoſ. 19, vel 20. huius lib. Igitur cum AB, maior ſit, quam G, erit quoq; rectilineum ABC, maius rectilineo DEF, quod eſt abſurdum, cum poſitum ſit æquale. Non ergo maior eſt AB, recta quam recta DE. Sed neq; minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus oſpenderetur rectilineo DEF. quod eſt contra hypotheſin. Quare æquales ſunt rectæ AB, DE.



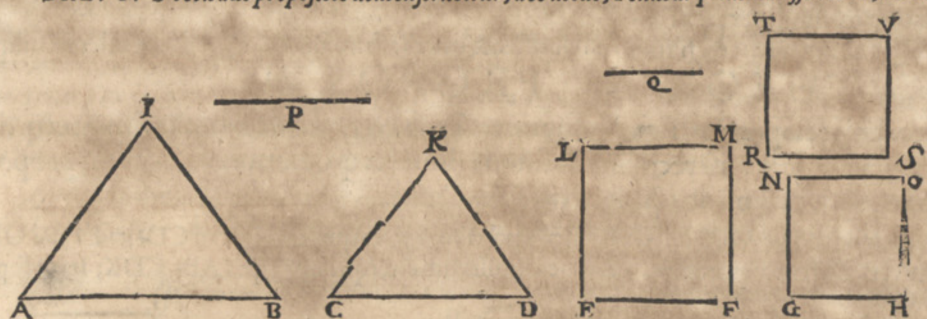
SCHOLIVM.

Eodem modo, ſi fuerit tres rect[illegible] proportionales; erunt & recti linea ſimilia ſimiliterq; deſcripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim ſumatur linea media, eiuſq; rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonſtrauit. Cum igitur id, quod à ſecunda eſt deſcriptum, æquale ſit ei, quod à tertia, immo idem; manifeſtum eſt, quod proponitur.



BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur, hoc modo; Ponatur primum eſſe vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico eſſe quoque vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO, a Cum enim ſit proportio relictilinei ABC, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD. Item proportio rectilinei EM, ad rectilineum GO, duplicata proportionis EF, ad GH, erunt proportiones ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales; quandoquidem duplicatæ ſunt proportionum æqualium AB, ad CD, & EF, ad GH. Quod eſt primum.

a 19. vel 20. ſexti.



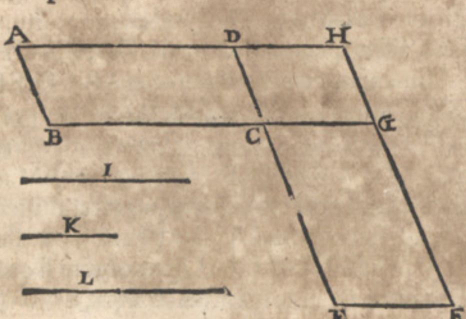
b 19. vel 20. ſexti.

PONATVR deinde eſſe vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Dico eſſe quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. b Cum enim ſit proportio ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD: Item proportio EM, ad GO. duplicata proportionis EF, ad GH: Erunt proportiones AB, ad CD, & EF, ad GH, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.

xxiiij.

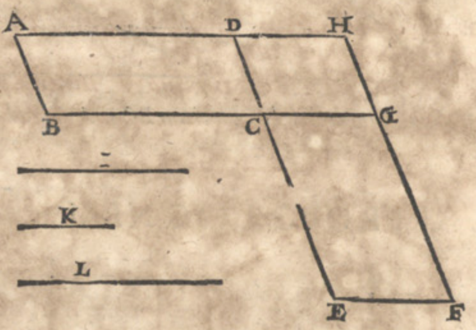
THEOR. 17. PROPOS. 23.

ÆQVIANGVLA parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.



SINT parallelogramma æquiangula AC, CF. habentia angulos BCD, ECG æquales. Dico ꝓportionē eorū eſſe cōpoſitam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum ſint in vno Parallelogrammo, & conſequentia in altero; hoc eſt, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compoſitam eſſe ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectā CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Id eſt, ſi ſumantur tres lineæ I, K, L,

K, L, ita vt I, ad K, ſit, ſicut BC, latus ad latus CG, & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita eſſe parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt eſt recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defi. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallel. CF, dici cōpoſitā eſſe ex eiſdē ꝓportionib. hoc eſt, ex ꝓportionib. BC, ad CG, & DC, ad CE. Cōiungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG. efficiant vnam lineam rectam: Quo poſito, cum anguli BCD, ECG. ſint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producantur deinde AD, FG, donec conueniant in H; Sumptaque recta I, quacunq;, [a] inueniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta propoſitionalis L. Quoniam igitur eſt, [b] vt BC, ad CG, ita AC, ad CH, Vt autem BC, ad CG, ita poſita eſt I, ad K, [c] erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento oſtendes eſſe, vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt DC, ad CE, [d] ita eſt HC, ad CF. Cum ergo poſita ſit K, ad L, vt DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L: [e] Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defi. huius lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eiſdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF. Eademque ratione oſtendemus, proportionem AC, ad CF, componi ex propoſitionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt BC, CE, efficiant vnam rectam lineam, &c. Æquiangula itaq; parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum.



a 12. ſexti.
b 1. ſexti.
c 11. quinti
d 1 ſexti.
e 22. quin.

SCHOLIVM.

EXPEDITIVS idem demonſtrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, vt prius; [f] Cum ſit vt AC, ad CH, ita BC, ad CG, & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE; Proportio autem AC, ad CF, componatur, per definitionem, ex intermediis proportionibus AC, ad CH, & CH, ad CF; componetur quoq; eadem proportio AC, ad CF, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE, quæ illis intermediis ſunt æquales. Quod eſt propoſitum.

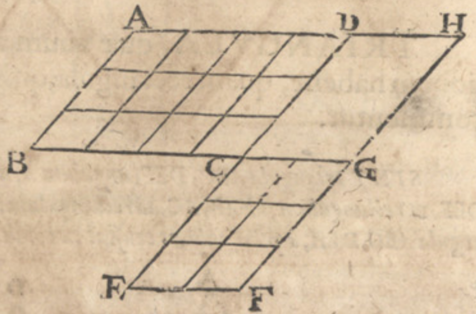
f 1. ſexti.

HANC porro propoſ. demonſtrat etiam Euclides in num. lib. 8. propoſ. 5.

ITAQVE ſi proportiones laterum, nimirum BC, ad CG, & DC, ad CE, notæ ſint in numeris, veniemus quoque ex hac propoſ. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, in numeris, hoc modo. Sit proportio BC, ad CG, eadem, quæ 11. ad 5. & DC, ad CE, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt ſit 77. ad 35. ſicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc eſt, ex proportionibus laterum, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, [g] quod proportio parallelogrammorum ſit etiam compoſita ex eiſdem proportionibus laterum: hoc eſt, proportio parallelogrammorum denominabitur à $1\frac{22}{55}$. Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex iis, quæ propoſ. 4. lib. 8. demonſtrantur, vel certe hoc modo. Poſita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ eſt poſterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturq; numerus $7\frac{6}{7}$. Ita ergo ſtabunt tres numeri habentes duas illas proportiones, 11. 5. $7\frac{6}{7}$. Quod ſi tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{55}{7}$. & alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eiſdem proportionibus.

g 23. ſexti.

SIC etiam ſi proportiones laterum ſint, vt 4, ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hiſce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hiſce minimis 2. 1. 1. Et quia prius ad tertium eſt duplus, erit quoq; parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perſpicuum eſt. Nam ſi latus BC, diuidatur in 4. partes æquales, & CG, in 2. At DC, in 3. & CE, in 3. ita vt BC, ad CG, proportionem, habeat duplam, at DC, ad CE, proportionem æqualitatis, vt poſitum eſt: ducantur autem per puncta diuiſionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum AC, 12. rhombos æquales, at CF; ſolum 6. atque adeo parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, duplam proportionem habebit, vt dictum eſt.



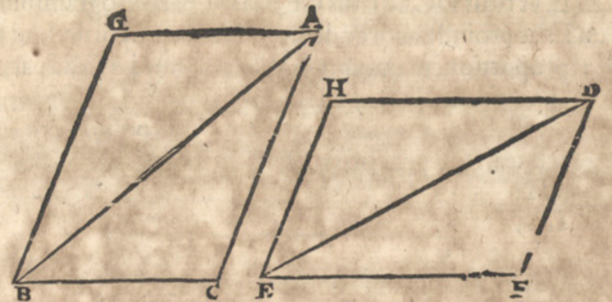
PERSPICVVM autem eſt, alteram proportionum componentium poſſe eſſe maiorem proportione compoſita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris BC, ad CG, eſt vt 11. ad 5. hoc eſt, cuius denominator eſt $2\frac{1}{5}$. quæ maior eſt proportione parallelogrammorum, cum huius denominator ſit $1\frac{22}{55}$. In poſteriori vero exemplo proportio lateris BC, ad CG, eſt dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam conſtare poſſit, hanc proportionum compoſitionem non eſſe additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis poſſe componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione, quod iidem interpretes negant. In exemplo namq; priori proportio lateris DC, ad CE, eſt minoris inæqualitatis, in poſteriori vero, æqualitatis. Sed hac de re plura ſcribemus ad finem libri 9.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compoſitionem proportionum pertinent, vel ex ea demonſtrantur, non inutilia, quæ nos quoq; afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonſtrationibus; Sunt autem ea, quæ ſequuntur.

I.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam.

SINT



SINT triangula ABC, DEF, angulum C, angulo F. habentia æqualem. Dico proportionem trianguli ABC, ad triangulum DEF, compoſitam eſſe ex lateribus, hoc eſt, ex proportione BC, ad EF, & ex proportione AC, ad DF; Vel ex proportione BC, ad DF, & ex proportione AC, ad EF. Completis enim parallelogrammis CG, FH, erunt ea æquiangula; [a] atq; adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula ABC, DEF, cum ipſis, [b] quorum ſunt dimidia, [c] eandem habeant proportionem, Erit quoq; proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF. compoſita ex proportionibus laterum BC, AC, ad latera EF, DF.

a 23. ſexti.
b 34. primi
c 15. quinti.

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

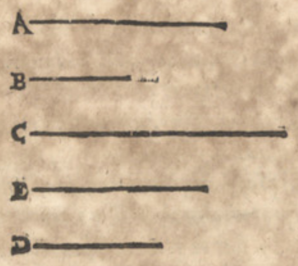


d 12. ſexti.

HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonſtratione huius propoſ. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitæ. Oportet iam ex ipſis vnam proportionem componere. [d] Fiat Vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compoſitam eſſe ex tribus datis proportionibus. Cum enim ea compoſita ſit ex proportionibus G, ad H: H, ad I: & I, ad K, per defi. 5. huius l. compoſita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F; quod his illæ ſumpta ſint æquales.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.



e 12. ſexti.

SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. [e] Fiat, vt A, ad B, ita, C, ad E; ſtatuaturq; E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam eſſe proportionem A, ad B, ex proportione C ad D, reliquamq; eſſe proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus, C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc eſt, A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.

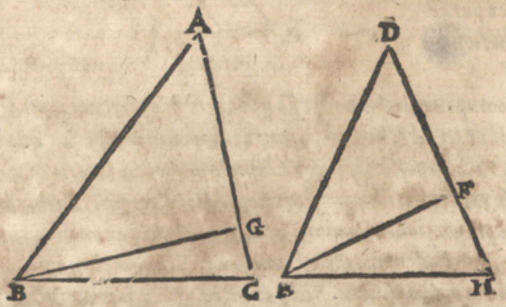
VERVM hæc compoſitio, & detractio proportionum non eſt additio, & ſubtractio proprie, quia alias totum eſſet æquale parti, & minus, & maior proportio poſſet detrahi ex minore, vt ad finem libr. 9. oſtendemus.

IV.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ ſub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula ABC, DEF, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF. Ductis enim ad AC, DF, perpendicularibus BG, EH; erunt triangula ABG, DEH, æquiangula, vt conſtat ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE, ſint æquales. [f] Igitur erit, vt GB ad BA, ita HE, ad ED: Vt autem GB, ad BA. [g] Ita eſt rectangulum ſub BG, AC, ad rectangulum ſub AB, AC. (Nam ſi baſes ponantur GB, BA, erit eorum eadem altitudo AC,) Et eadem ratione, vt HE, ad ED, ita eſt rectangulum ſub EH, DF, ad rectangulum ſub DE, DF, [h] Rectangulum igitur ſub BG, AC, ad rectangulum ſub AB, AC, eſt, vt rectangulum ſub EH, DF, ad rectangulum ſub DE, DF; & permutando, rectangulum ſub BG, AC, ad rectangulum ſub EH, DF, vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF. Sed vt rectangulum ſub BG, AC, ad rectangulum ſub EH, DF, [i] ita eſt triangulum ABC, ad triangulum DEF, [k] quod hæc triangula ſint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim eaſdem cum illis baſes AC, DF, altitudineſque eaſdem BG, EH; ac proinde inter eaſdem cum illis parallelas ſunt conſtituta.) Igitur erit quoq; triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF. Quod eſt propoſitum.

f 4. ſexti.
g 1. ſexti.
h 11. quinti
i 15. quinti.
k 41. primi



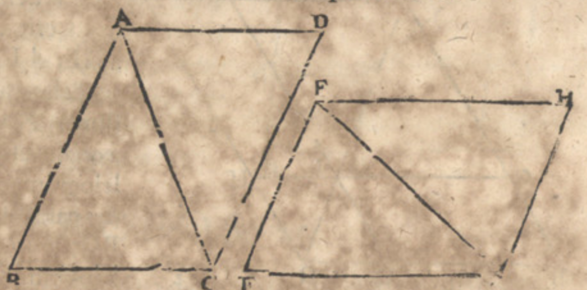
l 23. ſexti.

ALITER, & facilius. Ex theoremate 1. huius ſcholij, proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, compoſita eſt ex proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF: [l] Sed & proportio rectanguli ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF, ex eiſdem proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF, compoſita eſt. Igitur erit triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF, quod eſt propoſitum.

V. PA-

V. PARALLELOGRAMMA inter ſe æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula ſub lateribus ipſorum æqualem angulum continentibus comprehenſa.

SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter ſe, quorum anguli B, & F, ſint æquales. Dico eſſe, vt parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, ſubtendãt; habe[illegible]t triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonſtrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub EF, FG. m Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG: n quod hæc ipſorum ſint dimidia; o Erit quoq; vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub EF, FG. Quod eſt propoſitum.

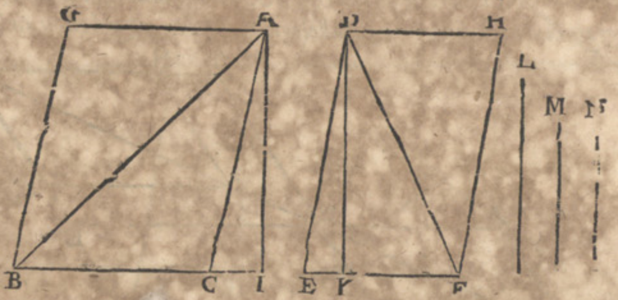


m 15. quin.
n 34. primi
o 11. quinti

VI.

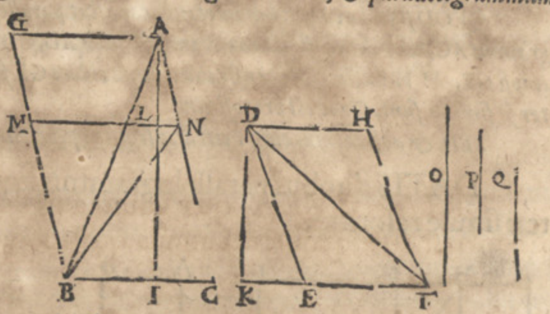
TRIANGVLA, & parallelogramma inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.

SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compoſitam eſſe ex proportione baſis BC, ad Baſin EF; & proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK. Sint enim primum altitudines æquales, baſes vero vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatq; vt BC, ad EF, ita L, ad M; Vt autem AI, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipſi N, æqualis, quod & AI, ipſi DK, æqualis ponatur: p Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc eſt, vt BC, ad EF. q At vero, vt BC, ad EF, ita eſt triangulum ABC, ad triangulum DEF, & pa[illegible]lelogrammum CG, ad parallelogrammum, EH. r Igitur quoq; erit, vt L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH: Sed proportio L, ad N, compoſita eſt ex proportione L, ad M, hoc eſt, ex proportione baſis BC, ad baſin EF, & ex proportione M, ad N, hoc eſt, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eiſdem proportionibus eſt compoſita. Quod eſt propoſitum.



p 7. quint.
q 1. ſexti.
r 11. quinti

SINT iam altitudines AI, DK, inæquales, & AI, maior; baſes vero BC, EF, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt AI, ad DK, ita O, ad P; & vt BC, ad EF, ita P, ad Q. Abſciſſa deinde IL, æquali ipſi DK; ducatur per L, ipſi BC, parallela LM, ſecans AC, in N, iungaturq; recta BN. Quoniam igitur eſt triangulum ABC, ad triangulum NBC; & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum CM, vt altitudo AI, ad altitudinem IL, vel ad DK, ipſi IL, æqualem, hoc eſt, vt O, ad P, per ea, quæ ad 1. propoſ. huius lib. ex Commandino oſtendimus; quod triangulorum, & parallelogrammorum eadem ſit baſis BC: Et vt triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum EH, s ita eſt baſis BC, ad baſin EF, (cum eadem ſit altitudo) hoc eſt, ita P, ad Q: t erit ex æquo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, vt O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q. componatur ex proportione O, ad P, hoc eſt, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK; & ex proportione P, ad Q, hoc eſt, ex proportione baſis BC, ad baſin EF: Ex eiſdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH. Quod eſt propoſitum.



s 1. ſexti.
t 22. quin.

EODEM pacto oſtendetur proportio trianguli DEF, cuius altitudo minor eſt, ad triangulum ABC, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum CG, compoſita eſſe ex proportione baſis EF, ad baſin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; u erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallel. CM, vt EF, ad BC, hoc eſt, vt Q. ad P. Item triangululum NBC, ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum CG, vt LI, ſeu DK, ad AI, hoc eſt, vt P, ad O; ex iis, quæ ad propoſ. 1. huius lib. ex Commandino demonſtrauimus. x Ex æquo igitur erit, vt DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ita Q, ad O. Quodcirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc eſt, ex proportione baſis EF, ad baſin CB; & ex proportione P, ad O, id eſt, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH ad CG, ex eiſdem proportionibus. Quod eſt propoſitum.

u 1. ſexti.
b 22. quin.

THEOR. 18. PROPOS. 24.

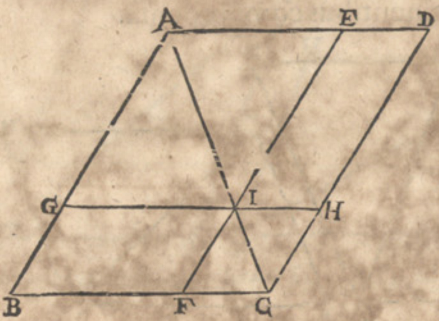
xxii.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

ESTO parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducatur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma FG, FH, circa diametrũ, ſimilia eſſe & toti parallelog. & inter ſeſe. Quod enim æquiangula ſint toti, facile oſtẽdetur. Nã angulus GAE, idẽ eſt, qui angulus BAD; a & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulũ eſt EG, parallelog. parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autẽ latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cũ triangulũ AGI, æquiangulũ ſit trian-

a 29. primi.

ſit triangulo ABC,& triangulum AEI,triangulo ADC, vt perſpicuum eſt ex 29. propoſ. lib. 1. vel etiam ex coroll. propoſ. 4. huius lib.



b 4. ſexti. [b] erit vt AB,ad BC,ita AG, ad GI,atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia ſunt. Rurſus

c 4. ſexti. [c] erit. vt BC,ad CA, ita GI,ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad IE.

d 22. quin. [d] Ex æquo igitur,vt BC,ad CD,ita eſt GI,ad IE,ac propterea & latera circa æquales angulos BCD,GIE, proportionalia exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reliquos angulos æquales eſſe proportionalia. Quare ꝑ definitionē, ſimile erit parallelogrammum EG,toti parallelogrammo BD. Eadem arte oſtendes parallelogrammum FH, ſimile eſſe eidem parallelogrammo BD;

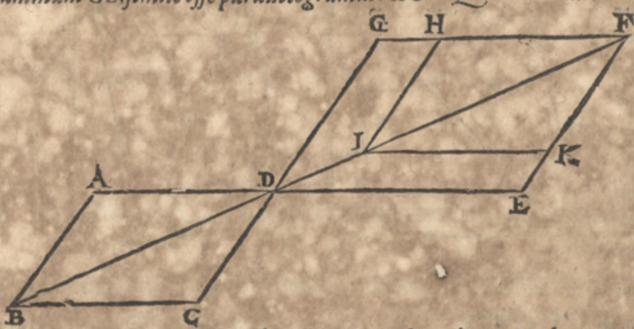
e 21. ſexti. [e] atque adeo & ipſa inter ſe ſimilia erunt. In omni ergo parallelogrammo,quæ circa diametrũ ſunt,&c. Quod erat oſtendendũ.

SCHOLIVM.

INTELLIGENDA *autem ſunt parallelogramma circa diametrum totius eſſe talia,quæ habeant vnum angulum cum tota parallelogrammo communem,vt manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis.*

QVOD *ſi circa diametrum alicuius parallelogrammi productam conſiſtat parallelogrammum aliud, ita vt duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his ſint parallela, iiſdem fere mediis oſtendetur,hoc illi eſſe ſimile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter BD,ſit producta ad F, circa quam conſiſtat parallelogrammum DEFG,cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrammi AC. Dico parallelo-*

f 29. primi. *grammum GE,ſimile eſſe parallelogrammo AC. Quod enim ambo inter ſe ſint æquiangula, facile oſtendetur.* [f] *Nam quia angulus A,æqualis eſt angulo alterno ADG, huic autem æqualis quoq; eſt alternus angulus G;erunt æquales anguli A, & G.*



g 34. pri. [g] *Quare his oppoſiti C, & E, æquales quoq; erunt.*

h 15. pri. [h] *Rurſus quia anguli ADC,GDE, ad verticem, ſunt æquales,*

i 34. pri. [i] *erunt his quoq; oppoſiti ABC,GFE, æquales. Igitur æquiangula ſunt,GE,AC, parallelogramma. Quod autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perſpicuum. Cum triangulum BAD,æquiangulum ſit triangulo DGF,& triangulum BCD,triangulo DEF,*

k 4. ſexti. *vt conſtat ex propoſ.29.lib.1.* [k] *Erit vt BA,ad AD,ita DG,ad GF. Rurſus vt AD,ad DB,ita GF, ad FD, & vt DB, ad DC,ita*

l 22. quin. *FD,ad FE,* [l] *ac propterea ex æquo vt AD,ad DC,ita GF,ad FE. Sunt igitur latera circa angulos A,ADC,proportionalia lateribus circa angulos,G,GFE,qui illis æquales ſunt. Non ſecus oſtendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia eſſe. Quare ſimilia ſunt parallelogramma AC,GE.*

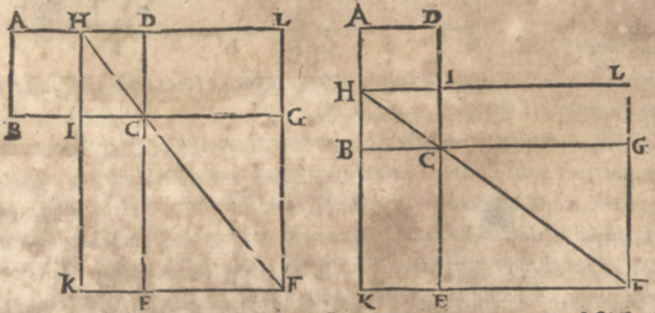
QVOD *ſi circa eandem diametrum conſiſtat parallelogrammum HIKF, habens latera parallela lateribus parallelogrammi AC,idem demonſtrabitur. Nam productis AD,CD,donec occurrant rectis FK,FH,productis in E,& G;erit HK,ſimi-*

m 24. ſexti *le ipſi GE,* [m] *vt Euclides demonſtrauit: Atqui eidem GE,ſimile eſt quoq; AC,vt nunc oſtendimus.* [n] *Igitur & HK, AC, in-*

d 21. ſexti. *ter ſe ſimilia ſunt. Quod eſt propoſitum.*

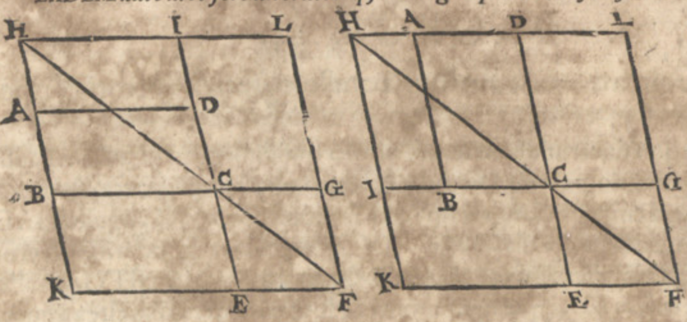
SED *& abſoluemus cum Peletario ſequens problema.*

DATIS duobus parallelogrammis æqui angulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare.



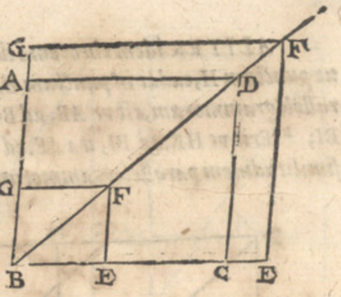
DVO *parallelogramma æquiangula,ſed non ſimilia,ſint ABCD, CEFG, & ex ABCD, abſcindendũ ſit parallelogrammum ipſi CEFG,ſimile. Coniungantur ambo ad angulos æquales BCD, ECG, ita vt ſit vna linea recta BCG, & propterea,vt ad propoſ. 15. lib. 1. demonſtratum eſt ECD,quoq; vna recta linea. Deinde ducta diameter FC, producatur, donec in H,ſecet vel latus AD, vel latus AB, (Neq; enim in punctũ A,cadet: quia AC, eſſet ſimile ipſi CF, vt demonſtratum eſt,quod eſt contra hypotheſim) & per H, ducatur HI,parallela ipſi AB,vel ipſi AD. Dico parallelogrammum abſciſſum HC,ſimile eſſe ipſi CF. Si enim totum parallelogrammũ KL,compleatur,erunt HC,CF,circa diametrũ. Quare inter ſe ſimilia erunt,vt Euclides demonſtrauit in hac propoſitione.*

EADEM *autē arte fere alterutrũ ipſorũ augeri poterit,vt fiat ſimile alteri. Sit enim augendũ ABCD, vt fiat ipſi CEFG, ſimile cōiungātur vti prius, & diameter FC,extēdatur, donec in H,ſecet vel latus BA, ꝓtractũ,vel latus DA,protractum. Neq; enim in punctum A, cadet: quia AC, eſſet ipſi CF, ſimile,vt demõſtratum eſt,quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI,parallela ipſi AD,vel ipſi AB, donec ſecet vel latus CD,protractum,vel CB,protractum in I. Dico parallelogrammum auctum HC, ſimile eſſe parallelogrammo CF. Nam ſi compleatur totum parallelogrammũ KL, conſiſtent HC,CF,*



o 24. ſexti. *circa diametrũ;* [o] *Quare ſimilia inter ſe erunt.*

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propoſiti in hoc ſcholio, parallelogramma circa eandem diametrum non ſolum eſſe ſimilia, verum etiam ſimiliter poſita. Vnde propoſito quouis parallelogrammo ABCD, ſi maius debeat deſcribi illi ſimile ſimiliterque poſitum, producendum erit latus vnum, nempe BC; Atq; ex E, quolibet puncto vltra C, ipſi CD, parallela EF, ducenda, ſecans diametrum BD, productam in F, & per F, ducenda FG, parallela ipſi AD, occurrens rectæ BA, productæ in G. [p] *erit enim parallelogrammũ GE, ſimile ſimiliterque poſitũ ipſi AC, & maius eodẽ. Quod ſi minus debeat deſcribi, [illegible]endũ erit punctũ E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.* p 24. *ſexti.*

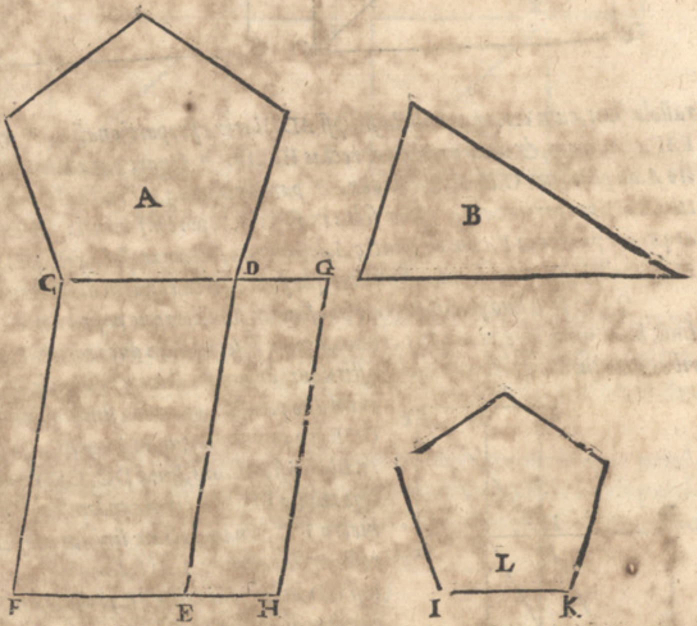


PROBL. 7. PROPOS. 25. XXV.

DATO rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituere.

SINT data duo rectilinea A, & B; ſitque conſtituendum aliud rectilineũ, quod ſimile quidem ſit ipſi A, æquale vero ipſi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui ſimile debet conſtitui, [a] conſtituatur parallel. CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et ſuper rectã DE, in angulo EDG, qui æqualis ſit angulo DCF, parallel. DH, æquale ipſi B, eritq; tam CDG, quã FEH, linea vna recta, vt demonſtratum eſt propoſ. 45. lib. 1. [b] Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK, [c] ſuper quam conſtituatur rectilineum L, ſimile ipſi A, ſimiliterq; poſitum. Dico L, æquale eſſe alteri rectilineo B. Cum enim ſint ꝓportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. vt CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum ſuper primam CD, ad rectilineum L, ſuper IK, ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum: [d] Vt autem CD, ad DG, ita eſt parallelogrammũ DH, eiuſdem altitudinis. [e] Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. [f] Vt autem CE, ad DH, ita eſt A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, conſtructum eſt æquale. [g] Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; [h] proptereaq; æqualia erunt rectilinea B, & L: Eſt autem & L, ſimile ipſi A, ſimiliterq; poſitum per conſtructionem. Dato igitur rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituimus. Quod erat faciendum.

a 44. *vel* 45. *primi.*
b 13. *ſexti.*
c 18. *ſexti.*
d 1. *ſexti.*
e 11. *quint.*
f 7. *quinti.*
g 11. *quint.*
h 9. *quinti.*

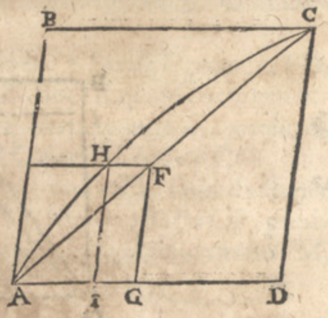


THEOR. 19. PROPOS. 26. XXIIII.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.

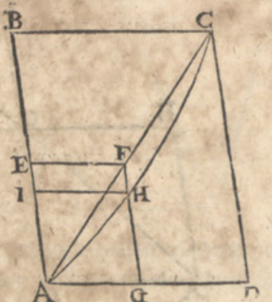
EX parallelogrammo BD, abſciſſum ſit parallelogrammum EG, ſimile ei ſimiliterque poſitum, habens cum ipſo angulum communem EAG. Dico EG, conſiſtere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ ſi fuerint vna linea recta, perſpicuum eſt, cum AF, ſit diameter ipſius EG, & AC, diameter ipſius BD, parallelogrammum EG, conſiſtere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod ſi AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter AC, ſecans latus EF, in H. puncto, per quod ipſi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, ſunt circa eandem diametrum AHC; [a] ipſa erunt ſimilia ſimiliterque poſita. [b] Quare erit vt BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed vt BA, ad AD, ita quoq; eſt EA, ad AG, quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam ſimila, ſimilterq; poſita. [c] Igitur erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG, [d] Ac propterea æquales erunt rectæ, AI AG, pars, & totum: quod eſt abſurdum.

a 24. *ſexti.*
b 1. *defi. ſexti.*
c 11. *quint.*
d 9. *quinti.*



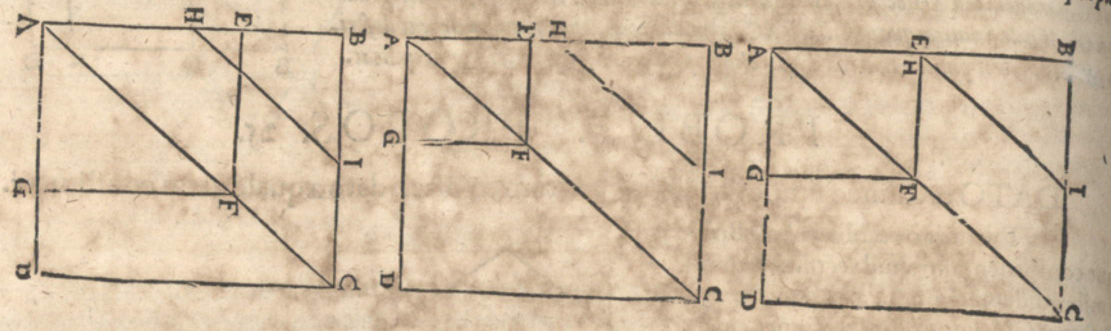
QVOD ſi dicatur recta AHC, ſecare alterum latus FG, Tunc ducta HI, parallela ipſi EF, [e] erunt rurſus ſimilia parallelogramma BD, IG, ſimiliterque poſita. [f] Quare erit vt DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed vt DA, ad AB, ita quoque eſt GA; ad AE, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BD, EG. [g] Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE, [h] ideoque æquales erunt rectæ AI, AE; pars & totum: Quod eſt abſurdum. Conſtituunt ergo rectæ AF, FC, vnam rectam lineam; hoc eſt, ducta diameter AC, tranſit per punctum F; & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaque ſi à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, &c. Quod erat demonſtradum.

e 24. *ſexti.*
f 1. *defi. ſexti.*
g 11. *quint.*
h 9. *quinti.*



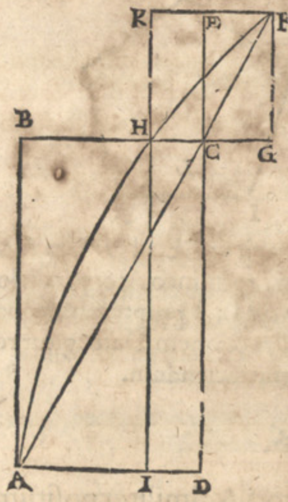
SCHOLIVM.

ALITER idem theorema demonſtrabimus oſtenſiue, hoc modo. Diuiſis lateribus AB,BC, bifariam in punctis H,I,ſi-
i 15.quinti ue punctum H,cadat in punctum E,ſiue ſupra ſiue infra, ducantur rectæ,HI,AE. Quoniam igitur, propter ſimilitudinem pa-
k 11.quinti rallelogrammorum,eſt vt AB, ad BC, ita AE, ad EF; Vt autem tota AB,ad totam BC, [i] ita eſt dimidia HB, ad dimidiam
BI; [k] Erit vt HB,ad BI, ita AE,ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, (qui æquales ſunt, ob
l 30. primi. ſimilitudinem parallelogrammorum BD, EG: Vel quia vnus eſt internus, & alter externus in parallelis BC,EF, [l] quæ pa-

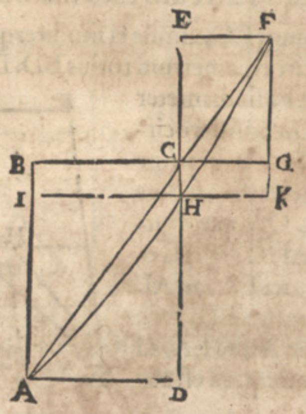


m 6.ſexti. rallelæ ſunt,cum vtraq; parallela ſit ipſi AD,) latera proportionalia, [m] erunt æquiangula,habebuntq; æquales angulos BHI,
n 28.primi. EAF,externum,& internum inter rectas HI, AF. [n] Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniam vero recta, quæ ex pun-
o 2. ſexti. cto A,ad punctum C,duci concipitur, [o] parallela quoq; eſt rectæ HI. propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc conſti-
tuti ABC,proportionaliter eſſent ſecta in H,& I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta AC, eadem fiat quæ AF, tranſe-
atque per punctum F,cum ex puncto A,ſolum vna linea parallela rectæ HI,poſſit duci,vt manifeſtum eſt.Conſiſtunt ergo BD,
EG,parallelogramma ſimilia,ſimiliter que poſita circa eandem diametrum AFC. Quod eſt propoſitum.

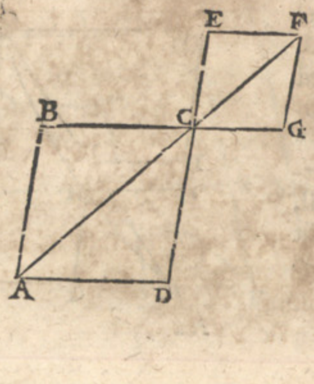
QVOD ſi duo parallelogramma ſimilia ſimiliterque poſita non habeant angulum communem, ſed vnum ſit extra a-
liud, hac tamen lege,vt ita ſint connexa inter ſe ſecundum duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cum duobus late-
ribus alterius duas rectas lineas conſtituant: demonſtrabimus iiſdem fere mediis,ea circa eandem conſiſtere diametru[m]. Sint



enim duo parallelogramma ſimilia ſimiliterq; poſita BD,EG,quæ ad angulos æquales BCD, GCE,ita coniungantur,vt lineæ BC,CG,in directum iaceant,& ob id,per ea,quæ ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus,lineæ DC, CE, vnam quoque lineam rectam componant. Dico parallelogramma BD,EG, circa eandem conſiſtere diametrum, hoc eſt, diametrum AC, cum diametro FC, vnam rectam lineam conficere. Si enim AC, FC, non faciunt vnam lineam rectam,ducatur ex A,ad F,linea recta ſecans BC,in H,puncto,per quod agatur HI parallela ipſi CD,occurrens rectæ FE,productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma BI, KG,circa eandem diametrum AHF,producta conſiſtunt;efficiuntq; duæ rectæ BH, HI,cum duabus re-
p 8. quinti. ctis HG,HK, duas lineas rectas, ipſa erunt ſimilia ſimiliterq; poſita, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus. Quare erit vt HB, ad BA,ita FK, ad KH. [p] Habet autem CB,maior ad BA,proportionem maiorem,quam HB, minor ad eandem BA; & eſt vt CB, ad BA,ita FE,ad EC, eo quod parallelogramma BD, EG, ponuntur ſimilia ſimiliterque de-
ſcripta. Igitur & FE, ad EC, hoc eſt, ad ſibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem quam HB,ad BA,hoc eſt, quam FK,ad KH. Quamobrem ſi FE, ad KH, maiorem habeat
q 10. quin. proportionem,quam FK,ad eandem KH; [q] erit EF,maior quam FK; pars quam totum. Quod eſt abſurdum.



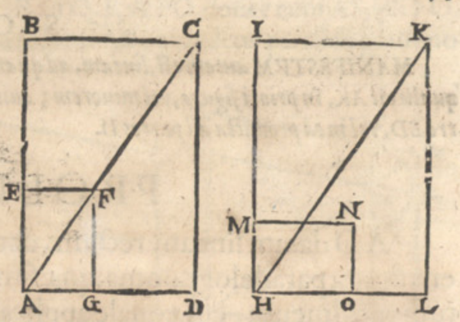
QVOD ſi quis dicat,rectam, AHF,ſecare latus CD, Tunc per H, ducta recta BC, parallela HI, quæ occurrat rectæ FG,protractæ in K; erunt rurſus ſimilia ſimiliterque poſita parallelogramma ID, EK, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. oſtendimus. Quare erit vt HD,ad DA, ita FK,
r 8. quinti. ad KH. [r] Habet autem CD, ad DA, maiorem proportionem, quam HD, ad DA; Et eſt vt CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, ſimilia ſimiliterque poſita ſunt conceſſa. Igitur & FG, ad GC, hoc eſt, ad
s 1. quarti. ſibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem,quam FK, ad KH, [s] ideoq; FG, maior erit, quam FK;pars quam totum: Quod eſt abſurdum.



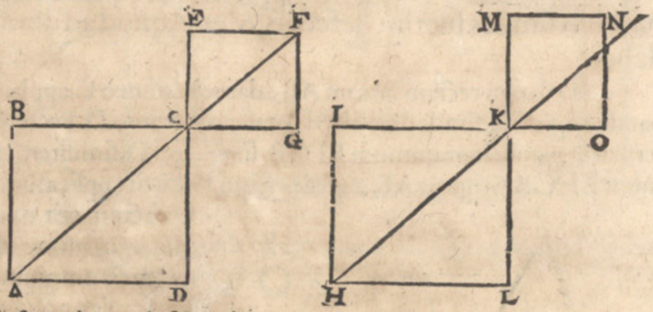
OSTENSIVE idem hoc ratione oſtendetur. Quoniam propter ſimilitudinem parallelogrammorum BD,EG,anguli,B,
t 6. ſexti. E,ſunt æquales, eſtque vt AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC,CEF, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; [t] atque idcirco æquiangula erunt, habebuntque angulos BCA,EFC,æquales. Addito ergo communi angulo BCF,
u 29. primi erunt duo anguli BCA,BCF,duobus angulis EFC,BCF,æquales:
x 14. primi. [u] Sed hi inter parallelas BC, EF, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & BCA,BCF,duobus erunt rectis æquales; [x] Ac propterea AC,FC, vnam component rectam lineam. Quod eſt propoſitum.

RECTE

RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum non ſolum eſſe toti ſimile, verum etiam ſimiliter poſitum, vt oſtendatur circa eandem eſſe cum toto diametrum. Nam ſi ex altera parte longiori BD, abſcindatur altera parte longius EG, circa eandem cum toto diametrum conſiſtens, [x] erit EG, ſimile ſimiliterq; poſitum. At vero ſi in rectangulo IL, quod ſit æquilaterum, & æquiangulum ipſi BD, ſumatur HM, æqualis ipſi EF, & MN, æqualis ipſi AE, &c. erit quidem rectangulum MO, æquale & ſimile rectangulo EG, propter æqualitatem laterum, & angulorum, qui ſunt recti; & ob id ſimile rectangulo IL; ſed tamen quia non eſt ſimiliter poſitum, non conſiſtet circa eandem cum toto IL, diametrum. x 24. ſexti.



IDEM quoq; hic perſpicitur in rectangulis ſimilibus, quorum vnum eſt extra alterum, ſecundum tamen angulos eorum ita inter ſe connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia ſunt parallelogramma rectangula BD, EG; & IL, MO; in quibus EG, quidem conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo BD, quoniam eſt ſimiliter poſitum: At vero MO, minime conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo IL, quia non eſt ſimiliter poſitum, quamuis ſimile ſit, cum prorſus ſit æquale ipſi EG. Nam KM, æqualis eſt ipſi EF, & MN, ipſi FC, &c.

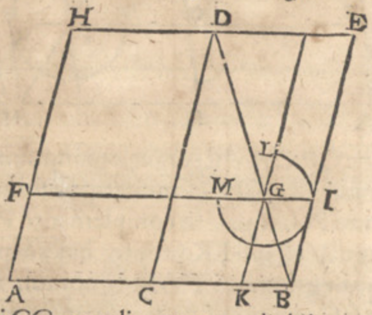


THEOR. 20. PROPOS. 27. xxvi.

OMNIVM parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterq; poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur maximum, id eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.

DETVR recta AB, diuiſa bifariam in C, ſuperque eius dimidiam BC, conſtituatur quodcunque parallelogrammum CDEB, cuius diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum ABEH, erit parallelogrammum AD, ſuper dimidiam AC, conſiſtens, applicatum ſecundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & exiſtens ſimile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam AC, applicatum deficienſq; parallelogrammo CE, maximum eſſe omnium, quæ ſecundum AB, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ipſi CE. Sumpto enim puncto G, vtcunq; in diametro BD, & ductis per G, rectis FGI, KG, quæ ſint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum FK, ſecundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo KI, [a] quod ipſi CE, ſimile eſt, ſimiliterq; poſitum, cum ſit circa eandem cum CE, diametrum. [b] Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia ſunt; ſi addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: [c] Eſt autem CI, æquale ipſi CF, propter baſes æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additaq; communi CG, æqualia erunt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare cum CE, manus ſit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, [d] æquale exiſtens ipſi CE, propter baſes æquales AC, CB, maius quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo DG. Eodemq; modo oſtendetur AD, maius eſſe omnibus parallelogrammis, quæ ita ſecundum rectam AB, applicantur, vt punctum G, ſit inter puncta B, & D, hoc eſt, quæ occupant maiorem lineam ſemiſſe AC, habentq; minorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus ſimiles ſint ipſi CE.

a 24. ſexti.
b 43. prim.
c 36. primi.
d 36. primi.

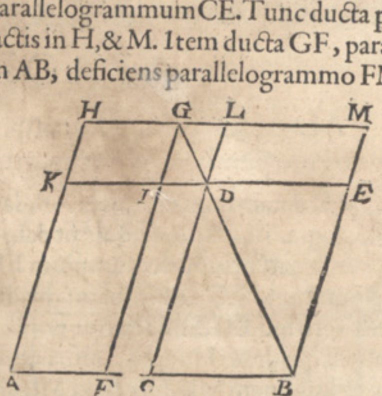


ALITER demonſtrabitur AD, maius eſſe parallelogrammo AG, hoc modo. [e] Parallelogramma FD, DI, ſunt æqualia, cum baſes HD, DE, ſint æquales: Eſt autem DI, maius quam GE, hoc eſt, quam complementum CG, ([f] quod ipſi GE, æquale eſt,) parallelogrammo DG. Igitur & FD, maius erit, quam CG, parallelogrammo eodem DG. Atq; idcirco addito communi CF; maius erit AD, quam AG, parallel. eodem DG.

e 36. prim.
f 43. primi

QVOD ſi punctum G, ſumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta HM, quæ ſit parallela ipſi AB, occurratq; rectis AK, BE, protractis in H, & M. Item ducta GF, parallela ipſi AH; erit parallelogrammum AG, applicatum ſecundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM, [g] quod ipſi CE, eſt ſimile ſimiliterq; poſitum, cum ſit circa eandem diametrum cum CE. Dico adhuc maius eſſe AD, ipſo AG. Protracta enim CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, [h] cum æquales ſint æqualibus AC, CB; [i] ideoq; æqualia parallelogrãma HD, DM. [k] Cũ igitur DM, ſit æquale complemento DF; erit & HD, æquale ipſi DF. Eſt autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iiſdem argumentis concludes AD, maius eſſe quocunq; parallelogrammo ita applicato ſecundum rectam AB, vt punctum G, ſit vltra D, in diametro BD, producta; hoc eſt, quod occupat minorem lineam ſemiſſe AC, habetq; maiorem altitudinem, quam AD: dummodo defectus ſimilis exiſtat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 4. ſexti.
h 34. pri.
i 36. primi.
k 43. pri.



SCHOLIVM.

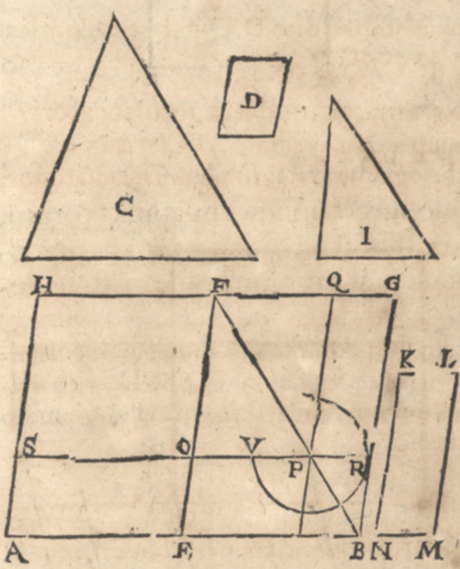
MANIFESTVM autem eſt, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, eſſe vel maiorem dimidiata AC; qualis eſt AK, in priori figura, vel minorem; cuiuſmodi eſt AF, in figura poſteriori: pro vt punctum G, ſumitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

xxvii.

PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, cum ſimiles fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui ſimile deeſſe debet.

a 18. ſexti. AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, deficiens parallel. quod ſit ſimile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB, bifariam in E, ſuper medietatem EB, [a] deſcribatur parallelogrammum EFGB, ſimile ipſi D, ſimiliterq; poſitum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale eſt ipſi C; cũ ſit applicatũ ad AB, deficiens parallelogrammo EG, ſimile ipſi D; factum erit, quod iubetur. Si autem AF, maius eſt quam C. (Neque enim minus eſſe debet. Nam cum per propoſ. præcedentem, ipſum ſit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus ſint ſimiles, non poſſet applicari vllum ad AB, quod eſſet ipſi C, æquale, ſed omnia eſſent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoq; ſibi æquale EG, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione exceſſus duorum rectilineorum ſit inquirendus, docuimus ad propoſ. 45. lib. 1.)

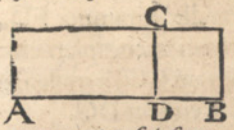


a 25. ſexti. [b] & conſtituatur parallelogrammum KLMN, ſimile quidem ſimiliterq; poſitum ipſi D, ſeu ipſi EG, æquale v[illegible] exceſſui inuento I; vt ſit EG, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, ſimul; & ob id maius quam KM. Cum igitur ob ſimilitudinem ſit vt EF, ad FG, ita NK, ad KL; erunt quoq; latera EF, FG, maiora lateribus NK, KL. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, eſſet etiam EG: æquale ipſi NL, vel minus, vt conſtat. Quare abſciſſis rectis FO, FQ, quæ ſint æquales ipſis KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO; erit hoc eſt ipſi LN, æquale, & eidem ſimile ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi EG: [c] atq; adeo circa eandem diametrum cum EG; conſiſtet, quæ ſit BF, productis iam rectis QP, OP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, [d] quod ſimile eſt ipſi EG, ſimiliterq; poſitum, & propterea ipſi D. Dico igitur AP, æquale eſſe ipſi C, rectilineo. [e] Nam cum PG, æquale ſit complemento PE; ſi addatur commune PE, erit & BQ, æquale ipſi ER, hoc eſt, ipſi ES, [f] q; æquale eſt ipſi EK, propter baſes æquales EA, EB. Quare ſi æqualib. AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, æqualis eſt rectilineo C, (Nam cum EG, parallelogrammum æquale ſit ipſi C, vna cum LN, ſi auferantur æqualia QO, LN remanebit gnomon TV, ipſi C, æqualis.) Igitur & AP, eidẽ C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum eſt parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod ſimile eſt dato parallelogrãmo D, & æquale exiſtens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

c 26. ſexti.
d 24. ſexti.
e 43. prim.
f 36. prim.

SCHOLIVM.

MOVENT hoc hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta noſtram conſtructionem locum non habet, cum ſuper EB, conſtituerimus EG, parallelogrammum non ſolum ſimile ipſi D, verum etiam ſimiliter poſitum; quod ipſi minime fecerunt. Qua de re, ſi placet, conſule eorum commentarios.



PERSPICVVM autem eſt, ſi ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipſum applicatum æquale eſſe rectangulo, quod ſub ſegmentis lineæ per applicationem factæ continetur. Vt ſi ad AB, applicetur AC, deficiens quadrato CB, erit AC, applicatum, rectangulum contentum ſub AD, & DC. Cum ergo DC, æqualis ſit ipſi DB, propter quadratum CB; continebitur quoq; AC, ſub ſegmentis AD, DB, per applicationem factis. Quod eſt propoſitum.

xxviii.

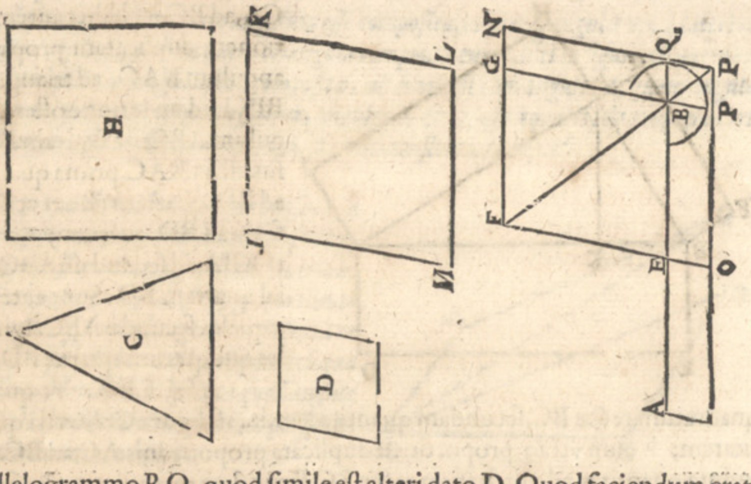
PROBL. 9. PROPOS. 29.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.

a 18. ſexti. AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum ſit Parallelogrammum æquale, excedens
c 14. ſecun. parallelogrammo, quod ſimile ſit dato alteri parallelogrammo D. Diuiſa AB, biſariam in E; [a] ſuper dimidiam EB, conſtruatur parallelogrammum EFGB, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum. [b] Deinde rectilineo C, & pa-
e 25. ſexti. rallelogrammo EG, conſtituatur quadratum H, æquale; [c] cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, ſimile vero ipſi EG, ſimiliterque poſitum; eritque propterea IKLM, maius quam EFGB, quandoquidem æquale eſt quadrato H, quod conſtructum eſt rectilineo C, vna cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob ſimilitudinem MK, EG, ſit vt MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, eſſet quoq; MK, vel æquale ipſi EG, vel minus, vt perſpicuum eſt. Productis igitur FE, FG, vt rectæ FO, FN, æquales ſint rectis IM, IK, & completo parallelogrammo ON; erit
d 26. ſexti. hoc ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi EG, cum ſit æquale ipſi MK, & ſimile, ſimiliterq; poſitum. [d] Quare ON, EG, circa

circa eandem diametrum conſiſtent, quæ ſit FP. Productis iam AB, GB, ad Q. R; & PO, donec cum AS, ipſi FO, parallela conueniat in S, erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedens parallelogrammo QR, [e] quod ſimile eſt ipſi EG, ac propterea ipſi D. Dico igitur AP, æquale eſſe rectilineo C. [f] Nam cum AO, ER, ſint æqualia, [g] & ER, æquale complemento BN, erit & AO, ipſi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis eſt rectilineo C. (Nam cum MK, hoc eſt, ON, æquale ſit rectilineo C, vna cum EG; ſi auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum eſt AP, excedens parallelogrammo RQ, quod ſimile eſt alteri dato D. Quod faciendum erat.

e 24. ſexti.
f 36. prim.
g 43. primi

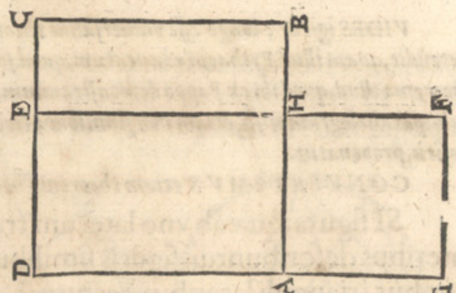


PROBL. 10. PROPOS. 30. xxix.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione ſecare.

SIT recta AB, ſecanda extrema ac media ratione. Deſcripto ſuper eam quadrato ABC; [a] ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, ſimile ipſi quadrato, ita vt ſit AF, quoque quadratum, cum quadrato ſolum quadratum ſit ſimile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, ſectam eſſe extrema ac media ratione. Cum enim æqualia ſint DF, & AC, ſi dematur commune AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE. vtpote rectos, [b] erunt latera circa illos reciproca, hoc eſt, erit vt EH, hoc eſt, vt AP, ipſi EH, æqualis, ad HF, hoc eſt, ad AH, ipſi HF, æqualem, vt AH, ad HB. Quare cum ſit, vt tota AB, ad ſegmentum AH, ita ſegmentum AH, ad ſegmentum HB, ſecta eſt AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propoſitam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

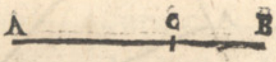
a 29. ſexti.
b 14. ſexti.



ALITER quoq; oſtendemus AB, eſſe ſectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, ſitq; rectangulum HC, comprehenſum ſub prima AB, & tertia HB; æquale quadrato mediæ AH; [c] erunt ipſæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, ſecundam, ita AH, ſecunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem ſecta eſt AB, in H, extrema ac media ratione.

c 17. ſexti.

ALITER totum problema conficiemus. [d] Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulũ ſub tota AB, & ſegmento CB, æquale ſit quadrato alterius ſegmenti AC. Dico AB, in C, eſſe ſectam extrema ac media ratione. [e] Erunt enim rurſus, v priùs, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Conſtat ergo propoſitum.



d 11. ſecun.
e 17. ſexti.

SCHOLIVM.

PRAXIS diuiſionis lineæ rectæ extremâ ac media ratione inſtituenda eſt, vt ad propoſ. 11. lib. 2. tradidimus.

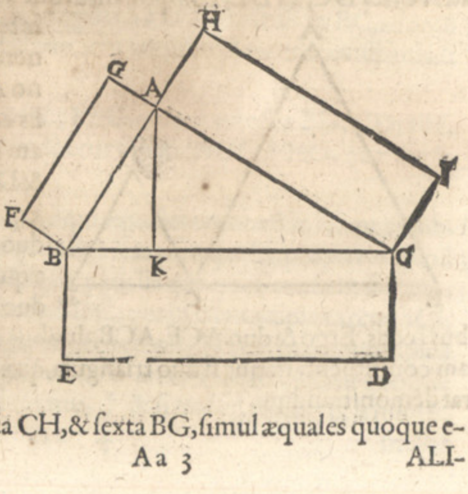
HABET autem admiranda hæc ſectio lineæ extrema ac media ratione inſignes vtilitates, proprietateſq; vt in libris Stereometriæ manifeſtum erit, vt non ſine cauſa à pleriſq; Mathematicis linea ita diuiſa diuinam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab aliis vero ſimpliciter vocetur diuiſa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

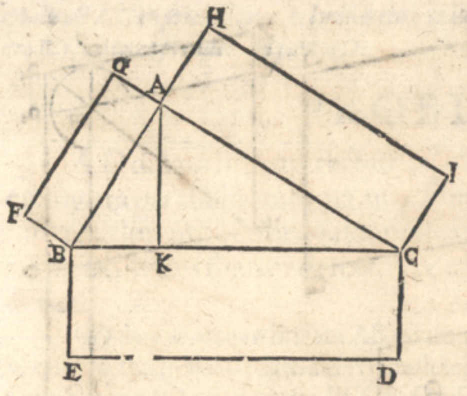
IN rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

TRIANGVLUM rectangulum ſit ABC, habens angulum BAC, rectum; deſcribaturq; ſuper BC, quæcunque figura rectilinea BCDE, [a] cui ſimiles ſimiliterq; poſitæ ſuper AB, AC, conſtituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem eſſe duabus figuris AF, AI. Demiſſa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK. erit per corall. propoſ. 8. huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, ſuper primam, ad figuram CH, ſuper ſecundam ſimilem ſimiliterq; poſitam, per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non ſecus oſtẽdetur, eſſe quoq; vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, ſint quoq; ꝓportionales, &c. Quoniã igitur eſt vt CK, prima quantitas ad BC, ſecundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, ſecundam, ita BG, ſexta ad BD, quartam; [b] erit vt prima CK, cum quinta BK, ad BC, ſecundam, ita tertia CH. cum ſexta BG, ad BD, quartam: Sunt autem prima CK, & quinta BK, ſimul æquales ſecũdæ BC. Igitur tertia CH, & ſexta BG, ſimul æquales quoque erunt quartæ BD. Quod eſt propoſitum.

a 18. ſexti.
b 24. quin.



c 8. ſexti. ALITER. [c] Cum triangulo ABC, ſimile ſit triangulum KAC, ſintq; homologa latera ipſorum, BC, CA;
d 19. ſexti. (Nam eſt vt BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC,) [d] habebit triangulum KAC, ad
e 19. vel 20. ſexti.
f 11. quinti



triangulum ABC, duplicatam proportionem eius, quam habet CA, ad BC. [e] habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam proportionis CA, ad BC. [f] Quare erit vt triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione oſtendetur eſſe, vt triangulum KBA, ad triangulum ABC: ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergo rurſus eſt, vt KAC, prima quantitas ad ABC, ſecundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt KBA, quinta ad ABC, ſecundam, ita BG, ſexta ad BD, quartam; [g] erit & prima KAC, compoſita cum quinta KBA, ad ſecundam ABC, vt compoſita tertia CH, cum ſexta BG, ad quartam BD: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta ſimul, æquales ſecundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & ſexta ſimul, æquales quoq; erunt quartæ BD. Quod eſt propoſitum.

g 24. quinti.

ALITER. Vt quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, ſecundam quantitatem, ita eſt figura CH, tertia quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem; [h] cum vtraq; proportio ſit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit vt quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, ſecundam quantitatem, ita figura BG, ſexta quantitas, ad figurã BD, quartam quantitatem. [i] Quocirca erit. vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad ſecundam, hoc eſt, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum ſexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet ad figuram BD: [k] Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, ſimul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod eſt propoſitum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis; &c. Quod erat oſtendendum.

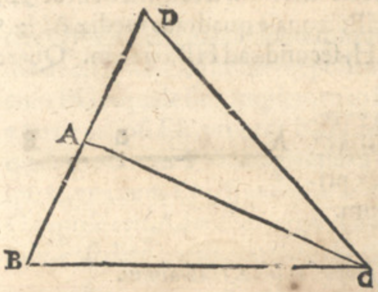
h 19. vel 20. ſexti.
i 24. quint.
k 47. primi

SCHOLIVM.

VIDES igitur, longe eſſe vniuerſalius theorema hoc Euclidis, quod ſeſe ad omnes figuras ſimiles ſimiliterq; deſcriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod ſola quadrata includit, vt propoſ. 47. primi lib. monuimus. Videtur ta... n & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonſtrauimus, aliqua ex parte adhuc eſſe vniuerſalius quam hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammiſq; etiam non ſimilibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figuriſq; ſimilibus, & ſimiliter poſitis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter quã 47. propoſitionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterq; poſitis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.



l 31. ſexti.

DETVR triangulum ABC, ſitq; figura quæuis ſuper latus BC, deſcripta æqualis duabus figuris ſibi ſimilibus ſimiliterq; deſcriptis ſuper reliqua latera AB, AC. Dico angulum BAC, eſſe rectum. Ducatur enim AD, ad AC, perpendicularis, quæ ſit ipſi AB, æqualis, & connectatur recta CD. Quoniam igitur angulus CAD, rectus eſt, [l] erit figura ſuper CD, (quæ ſimilis ſit ei, quæ ſuper BC, ſimiliterq; poſita) deſcripta æqualis figuris ſup AD, AC, deſcriptis, quæ ei ſimiles ſint, ſimiliterq; poſitæ. Eſt autẽ figura ſup AD, æqualis figuræ ſuper AB, ob æqualitatẽ laterũ. Igitur figura ſuper CD, æqualis erit figuris ſuper AB, AC. Cũ igitur figura ſuper BC, eiſdẽ figuris ſup AB, AC, æqualis ponatur, erunt figuræ ſuper CD, BC, inter ſe æquales, ac ppterea rectæ CD, BC, æquales erũt, vt conſtat ex lemmate propoſ. 22. huius l. Quoniã igitur latera AC, AD, triãguli ADC, æqualia ſunt laterib. AB, AC, triãguli ABC; & baſis DC, oſtẽſa eſt quoq; æqualis baſi BC; [m] erũt anguli DAC, BAC, æquales. Quare cũ DAC, rectus ſit, ex conſtructione, rectus quoq; erit BAC. Quod eſt propoſitũ.

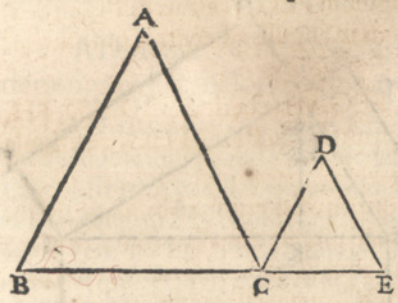
m 8. primi.

xxx. THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturque ad angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC; Item AC, DE, inter ſe ſint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cum enim parallelæ ſint AB, DC, [a] erit angulus A, alterno ACD, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter ſe quoq; exiſtent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipſa [b] erunt inter ſe æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc eſt, angulo ACE, æquales. Rurſus addito communi ACB, fiet tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: [c] Sed illi tres æquales ſunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: [d] Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam conſtituent. Itaque ſi duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 29. primi.
b 6. ſexti.

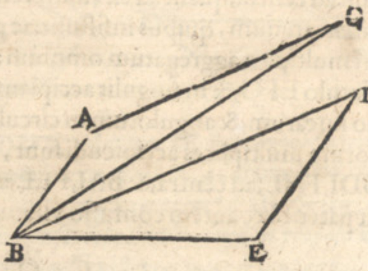


c 32. primi
d 14. primi.

SCHOLIVM.

DEBENT *autem prædicta duo triangula ita ſecundum vnum angulum eſſe compoſita, vt vterq; angulorum à lateribus proportionalibus comprehenſus, alternus ſit illi angulo, ſecundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum eſſe vides. Nam angulo ACD, ſecundum quem triangula ſunt compoſita, alternus eſt tam angulus A, quam angulus D, quorum vterq; lateribus proportionalibus, continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, eſſe æquales, & propterea triangula eſſe æquiangula; atq; adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonſtratione liquet.*

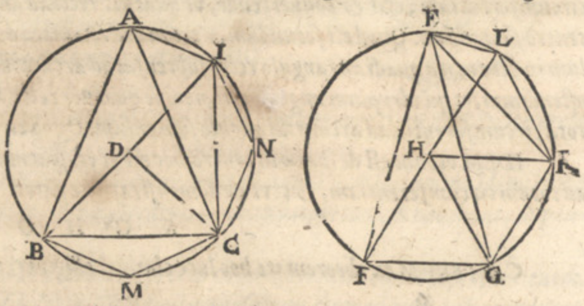
QVOD *ſi vterq; angulorum lateribus proportionalibus comprehenſus non fuerit alternus angulo, ſecundum quem triangula componuntur, licet reliquæ hypotheſes theorematis ſeruentur, non colligitur neceſſario concluſio. Nam duo triangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; compoſitaq; ſunt ad angulum CBD; ita vt tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, ſint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non conſtituunt, vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non ſit alternus vterq; angulorum A, & D, immo neuter eorum, vt perſpicuum eſt. Quamobrem demonſtratio theorematis locum non habet.*



THEOR. 23. PROPOS 33. xxxij.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſuper vero & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.

SINT duo circuli æquales ABC, EFG, quorum centra D, H; ſumanturq; ex circulis duo arcus quicunq; BC, FG quibus ad centra quidem inſiſtant anguli BDC, FHG; ad circumferẽtias vero anguli BAC, EFG. Dico eſſe ex ſententia defin. 6. lib. 5. vt arcum BC, ad arcum FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG, & angulum BAC, ad angulum FEG; & ſectorem inſuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad ſectorem FHG, quem comprehendunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, *a* applicentur ipſis in circulis æquales rectæ; CI, quidẽ ipſi BC, At vero GK, KL, ipſi FG: ducanturq; rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales ſunt rectæ BC, CI, *b* erunt quoque æquales arcus BC, CI, *c* ac propterea & anguli BDC, CDI, ęquales erũt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo eſt arcus BCI, ipſius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, ſeu aggregatum angulorum prope centrum D, inſiſtentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex eſt arcus FGKI, ipſius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, ſeu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, inſiſtentium, anguli FHG, quia in tot angulos æquales diuiſi ſunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales ſecti ſunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero ſi arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, *d* neceſſario angulus BDI, angulo FHL, æqualis eſt: Ac proinde ſi arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, neceſſario angulus BDI, maior eſt angulo FHL, & ſi minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. *e* Quare quæ proportio eſt arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG: ſecundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.



a 1. quarti.
b *28. tertij.*
c *27. tertij.*
d *27. tertij.*
e *6. defin. quinti.*

ATQVE hoc verum etiam eſt de ſpatiis circa centra, hoc eſt, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt ſpatiũ ad centrum D, inſiſtens arcui BAC, ad ſpatium ad centrum H, inſiſtens arcui FEG, vt ex demonſtratione patet. Nam & hæc ſpatia, ſi æqualia ſunt in ſiſtunt æqualibus arcubus, & ſi inæqualia, inæqualibus, &c.

QVONIAM vero vt angulus BDC, ad angulum FHG, *f* ita eſt angulus BAC, ad angulum FEG, *g* cum illi horum ſint dupli, perſpicuum eſt, *h* ita eſſe quoq; angulum, BAC, ad angulum FEG, vt eſt arcus BC, ad arcũ FG. Quod tamen eiſdem argumentis demonſtrari poteſt, quibus vſi ſumus in angulis ad centra conſtitutis, ſi prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

f *15. quin.*
g *20. tertij.*
h *11. quinti*

QVOD ſi ad circumferentias conſtituti ſint anguli eiuſmodi BAC, FEG, vt rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, non conſtituant angulos in centris verſus arcus BMC, FG; ſumenda erunt ſpatia BDC, FHG, quæ dupla etiam ſunt angulorum ad circumferentias, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 3.

CONSTITVANTVR iã in ſegmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, *i* qui æquales erunt, cũ inſiſtant arcub. æqualibus BAC, CBAI. Quare ſimilia erunt ſegmẽta BMC, CNI, *k* atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod ſunt ſuper rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, *l* quæ ęqualia quoque ſunt, fient ſectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit ſector BDI, ſectoris BDC, quam eſt multiplex arcus BCI, ipſius arcus BC. Similiter oſtendemus, ſectorem FHL, tam multiplicem eſſe ſectoris FHG, quam multiplex eſt arcus FGKL, ipſius arcus FG. Quoniam vero ſi arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, ſector quoque BDI, ſectori FHL, æqualis eſt; (vt in ſectoribus BDC, CDI oſtenſum fuit,) & ſi maior, maior; & ſi minor,

i *27. tertij.*
k *24. tertij.*
l *4. primi.*

 minor

minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & ſector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC,& tertiæ BDC,ab arcu FGKL,& ſectore FHL,æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis FG,& quartæ FHG, vel vna
i 6. defin. quinti. æqualia erunt:vel vna excedent;ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. *i* Quamobrem quæ proportio eſt arcus BC,primæ magnitudinis,ad arcum FG,ſecundam magnitudinem,ea erit ſectoris BDC,tertiæ magnitudinis,ad ſectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis,&c. Quod demonſtrandum erat.

COMMODIVS fortaſſe inſtituetur demonſtratio hoc modo. Sumantur (ſaltem cogitatione) quotuis circuli æquales circulo ABC,atque in ſingulis capiantur ſinguli arcus arcui BC,æquales,quibus inſiſtant anguli tam ad centra,quam ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus inſiſtunt:ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, vt eſt multiplex aggregatum omnium arcuum ipſius arcus BC. Deinde ſumantur etiam quotuis circuli æquales circulo EFG,& in ſingulis accipiantur ſinguli arcus arcui FG, æquales,&c. Hac enim ratione vitabitur confuſio linearum,& angulorum in circulis ABC, EFG, quæ neceſſario oritur,quando arcus BC,FG,ſunt magni,& eorum multiplices accipiendi ſunt, vt perſpicuum eſt. Nam ſi arcus eſſent BCI, FGL, quibus inſiſtunt anguli BDI,FHL,ad centra,& BAI,FEL,ad circumferentias;non poterunt eorum multiplices ſumi ſine confuſione, vt patet. Hæc autem confuſio vitatur, ſi plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.

COROLLARIVM I.

HINC manifeſtum eſt, ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, vt eſt angulus ad angulum. Vtraq; enim proportio
k 11. quinti eadem eſt proportioni arcus ad arcum. *k* Quare & inter ſe eædem erunt.

COROLLARIVM II.

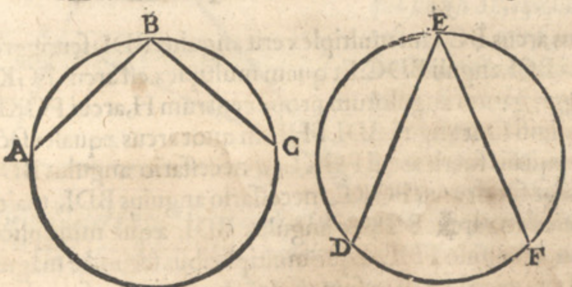
PERSPICVVM quoq; eſt, vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ita eſſe arcum ſubtenſum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, vt ſunt quatuor recti ad angulum in centro, ita eſſe totam circumferentiam ad arcum illi angulo ſubtenſum.

l 33. ſexti. *NAM vt eſt angulus in centro ad angulum rectum in centro,* [l] *ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad quadrantem angulo recto ſubtenſum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad quadruplum quadrantis,nimirum ad totam circumferentiam,per ea,quæ ad 22.propoſ.lib.5.demonſtrauimus.Quod eſt primum.Quoniam igitur eſt, vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in*
m 33. ſexti. *centro ſubtenſum. Quod eſt ſecundum. Verum hoc etiam ita demonſtrabitur.* [m] *Cum ſit, vt angulus rectus in centro, ad angulum in centro ita quadrans angulo recto ſubtenſus ad arcum illi angulo ſubtenſum;erit quoque,per ea,quæ ad propoſ.22. lib.5. oſtendimus,vt quadruplum anguli recti,nempe quatuor recti,ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia ad arcum illi angulo ſubtenſum. Quod eſt propoſitum.*

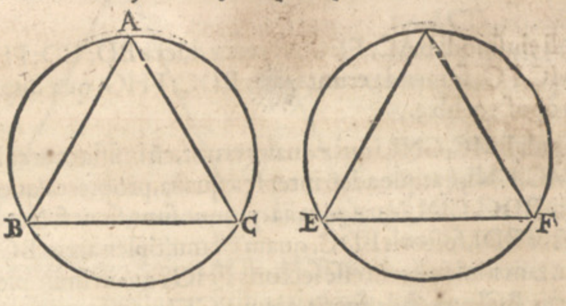
IDEM verum eſt de ſpatio in centro:hoc eſt vt eſt ſpatium in centro ad quatuor rectos, ita eſt arcus ſubtenſus illi ſpatio ad totam circumferentiam, &c vt ex demonſtratione patet.

SCHOLIVM.

CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum qui circumferentiæ alicui inſiſtit, referendum eſſe ad arcum, qui baſis eſt ipſius anguli, non autem ad arcum, in quo exiſtit. Non enim eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, ſi ſumantur arcus, in quibus anguli exiſtunt, vt vult Euclides in propoſito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam conſtituti ſint B, E, maior quidem B, minor autem E. Quo poſito, erit arcus AC, maior arcu DF, ex ſcholio propoſ. 26.lib.3.ac propterea reliquus arcus ABC,minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B,ad angulum E, eſt maioris inæqualitatis, proportio vero arcus ABC,ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod ſi ſumamus arcus, ſuper quos anguli aſcenderunt, quales ſunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcum DF, vt recte demonſtrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum eſſe in ſegmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum inſiſtere ſegmento, ſeu arcui. Id quod in expoſitione definitionis 8.lib.3. monuimus.



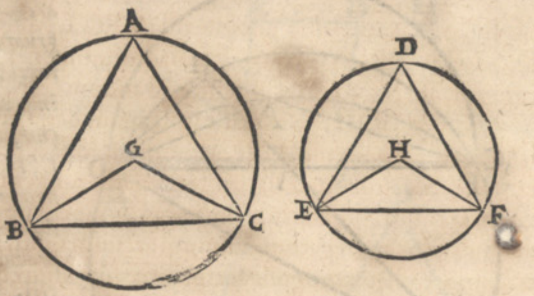
Non obſcure quoq; ex hoc theoremate demonſtrari poteſt, ſimilitudinem ſegmentorum in circulis ſimilium, quæ Euclides definitione, 10.lib.3.definiuit per angulos æquales in ipſis ſegmentis exiſtentes, conſiſtere in eo, quod ſegmenta, ſeu circumferentiæ ſimiles ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando ſegmenta totis circulis commenſurabilia ſunt, qualis pars eſt vna circumferentia totius ſuæ circumferentiæ, talis quoq; ſit alia circumferentia ſimilis totius ſuæ circumferentiæ; veluti in expoſitione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias conſtituantur æquales BAC, EDF. Quo poſito, ſegmenta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur ſimilia. Manifeſtum autem eſt, eorum circumferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circumferentias. Cum n. ob circulorum æqualitatem, [n] *arcus BC, EF, quibus anguli æquales inſiſtunt, ſint æquales; efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF eſſe*
n 26. tertij. *quoq; æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur,* [o] *eandem proportionem habebunt; Atq; idcirco,*
o 7. quinti. *quæ pars eſt arcu BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD.*



SINT

SINT deinde duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias conſtituantur æquales BAC, EDF: Quo poſito, dicentur ſegmenta BAC, EDF, ex Euclidis ſententia, ſimilia. Dico rurſus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras ſuas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoq; ad centra anguli G, & H, æquales, [p] *cum hi illorum dupli exiſtant: Vel erunt ſpatia ad centra æqualia, cum hæc quoq; ſint angulorum ad circumferentias dupla, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 3.* [q] *Quare quatuor recti ad angulum, vel ſpatium G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum, vel ſpatium H. Atqui vt quatuor recti ad angulum vel ſpatium G, ita eſt tota circumferentia ABCA, ad arcum BC: Et vt quatuor recti ad angulum, vel ſpatium H, ita eſt tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propoſ. 33.* [r] *Igitur vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conuerſionem ergo rationis erit quoque, vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circumferentia DEFD, ad arcum EDF. Et conuertendo, vt arcus BAC, ad totam circumferentiam ABCA, ita arcus EDF, ad totam circumferentiam DEFD. Quocirca quæ pars eſt arcus BAC, totius circũferentiæ ABCA, eadẽ pars erit arcus EDF, totius circumferẽtiæ DEFD. Quod eſt propoſitũ.*

p 20. tertij.
q 7. quint.
r 11. quinti

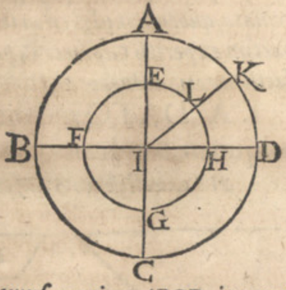


Conſtat igitur, recte Euclidem vocaſſe ea circulorum ſegmenta ſimilia, in quibus anguli exiſtentes inter ſe ſunt æquales quandoquidem huiuſmodi ſegmenta eandem habent proportionem ad circulos ſuos integros.

Facile ex his demonſtrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in ſphæram, & ad propoſ. 22. lib. 3. ſine proportionibus oſtendimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quaſcunq; duas lineas intercepti ſimiles.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, circa idem centrum I, deſcripti. Si igitur egrediantur è centro I, duæ rectæ IB, ID, efficientes vnã lineam rectã BD, manifeſtũ eſt, arcus BAD, FEH, ſimiles eſſe, cum ſint ſemicirculi. Rurſus ſi ex I, egrediantur duæ rectæ IA, ID, conſtituentes angulum rectũ AID, perſpicuum quoq; eſt, arcus AD, EH, ſimiles eſſe, cum ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. ſint Quadrantes ſuorum circulorum.



Emittantur iam ex I, duæ rectæ ID, IK, facientes quemcunq; angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, ſimiles eſſe, hoc eſt, ita eſſe arcum DK, ad totam circumferentiam ABCD, vt eſt arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH. Quoniam enim vt angulus DIK, ad quatuor rectos, ita eſt ex coroll. huius propoſ. tam arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quam arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH; [s] *erit vt arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH, ac proinde arcus DK, HL, ſimiles erunt. Quod eſt propoſitum.*

s 11. quinti

Breuius idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HI, inſiſtunt in centro I, anguli æquales, immo idem; erunt ex ſcholio propoſ. 22. lib. 3. arcus DK, HL, ſimiles: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulo ante oſtenſum eſt.

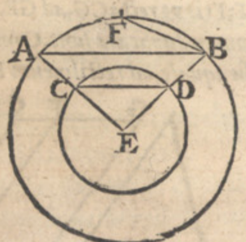
Eadem ratione oſtendemus: arcus BAK, FEL, ſimiles eſſe, id eſt, habere ad totas circumferentias eandem proportionem.

Sed placet etiam hic demonſtrare lemma, quod ad propoſ. 6. lib. 3. Theodoſij propoſuimus, cum ad multa alia conducat. Illud autem eſt eiuſmodi.

ÆQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorque eſt arcus minoris circuli, quam vt ſimilis ſit arcui circuli maioris.

SINT circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, deſcripti. Ducantur autem ex E, duæ rectæ vtcunq; EA, EB, ſecantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntq; arcus AB, CD, ſimiles, vt proxime demonſtrauimus. Et quoniam rectæ EA, EB, ſectæ ſunt in C, D, proportionaliter, quod tam EA, EB, quam EC, ED, inter ſe æquales ſint; [t] *erunt ductæ rectæ AB, CD, parallelæ; atq; ideo triangula EAB, ECD, ex coroll. propoſ. 4. huius lib. ſimilia erunt.* [u] *Erit igitur vt EA, ad AB, ita EC, ad CD. Eſt autem EA, maior quam EC.* [x] *Igitur & AB, maior erit quam CD. Accommodetur ergo ipſi CD, in circulo AB, æqualis EF; eritq; ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. arcus AB, maior arcu FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, ſimilis ſit; erit arcus CD, maior, quam vt ſimilis ſit ipſi FB. Æquales igitur rectæ CD, BF, ex circulis inæqualibus AB, CD, arcus inæquales auferunt, maiorq; eſt arcus CD, circuli minoris, quam vt ſimilis ſit arcui FB, circuli maioris. Quod eſt propoſitum.*

t 2. ſexti.
u 4. ſexti.
x 14. quin.



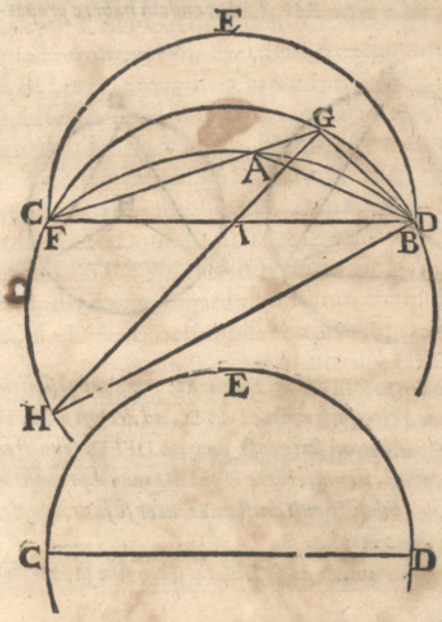
HINC perſpicuum eſt, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quam vt ſimilis ſit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta CD, æqualis ipſi BF, auferat arcum CD, maiorem, quam vt ſimilis ſit arcui FB; multo magis linea maior quam CD, auferet maiorem arcum, quam vt ſimilis ſit arcui FB, cum illa maiorem arcum abſcindat, quam CD, vt in ſcholio propoſ. 28. lib. 3. oſtendimus.

HÆC autem demonſtratio propoſitum tantum colligit, quando arcus abſciſſi ſunt ſemicirculo minores, quales ſunt BF, CD, vt ex ipſa demonſtratione conſtat. Nam alias non conſtitueretur angulus in E, centro communi: quod tamen ad demonſtrationem requiritur. Verum nihilominus erit, ſi arcus ſemicirculo minor circuli minoris maior eſt, quam vt ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli maioris, multo maiorem eſſe arcum ſemicirculo maiorem circuli minoris, quam vt ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli maioris. Quod ſi quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre ſemicirculum, vt quando eſt diameter circuli; liquido conſtat, ſemicirculum minoris circuli maiorem eſſe, quam vt ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli maioris; neq; opus tunc erit alia demonſtratione.

HINC etiam nullo negotio oſtendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus ſimpliciter, & abſolute inæquales, ita vt arcus minoris circuli ſimpliciter maior ſit arcu circuli maioris, & non ſolum maior, quam vt ſimilis ſit. Sint enim rectæ lineæ CD, BF, æquales, auferatque CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli maioris FGB. Dico ſimpliciter arcum CED, maiorem eſſe arcu FGB. Congruente enim recta CD, rectæ FB, cadet neceſſario arcus CED,

cus CED, extra arcum FGB; atq; idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cum ille hunc totum intra ſe contineat, ſintq; ambo arcus in eandem partem caui, atq; eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in ſuppoſitionibus ante lib. 1. de ſphæra & cylindro. Neque vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipſum cadet. Nā ſi dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atq; adeo æquales erunt circuli, quod eſt abſurdum, cum inæquales ponantur. Si vero arcus CED, dicatur cadere intra arcum FGB, cuiuſmodi eſt arcus CAD, quoniam, vt paulo ante oſtendimus, arcus CED, id eſt, CAD, maior eſt, quam vt ſimilis ſit arcui FGB; ſumatur arcus BFH, arcu CAD, ſimilis, atque ideo maior arcu FGB: Aſſumpto autem in arcus CAD, puncto A, vtcunque, ducantur rectæ AF, AB, productaque recta FA, donec arcum FGB, ſecet in G, ducantur rectæ GH, GB. Itaque quoniam arcus CAD, HFB, ſimiles ſunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis ſegmentis exiſtentes æquales.[y] Quia vero angulus CAD,

y 16. primi. *angulo CGB, maior eſt, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque totum parte; erit multo maior angulus CAD, angulo HGB, quod eſt abſurdum. Oſtenſus enim eſt æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcū FGB: ſed neq; ei congruit, vt demonſtratū eſt. Cadet ergo extra; atq; ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictū eſt. Quod eſt propoſitū.*

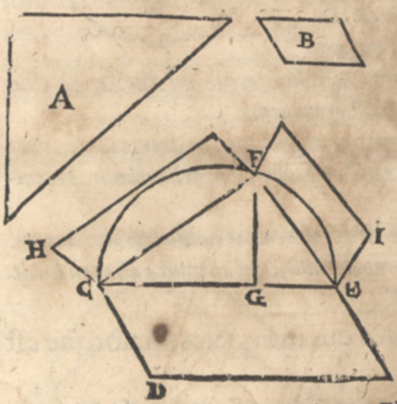


EX quo liquido conſtat, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem ſimpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abſcindit.

QVONIAM vero Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil vero de ſuperficierum, vel planorum proportionalium inueſtigatione nobis præſcripſit; non abs re me facturum exiſtimo, ſi nonnulla problemata, atque theoremata, quorum multa circa inuentionem ſuperficierum proportionalium verſantur, ſcitu non iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis propriis, huic ſexto libro annectam: quippe quæ ex demonſtratis ab Euclide facili negotio deducantur. Hinc autem exordium capiemus.

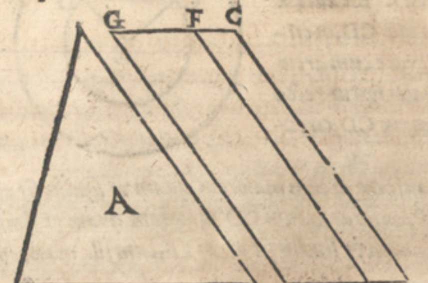
I. A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterq; poſitum.

SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars quæ ſimilis ſit, ſimiliterq; poſita rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem
a 25. ſexti. *B, ſimile, & ſimiliter poſitum.[a] Conſtituatur rectilineum CD, æquale quidem ipſi A, ſimile vero, & ſimiliter poſitum ipſi B; ſuperq; vnum eius latus CE, ſemicirculus*
b 6. ſexti. *deſcribatur CFE.[b] Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, agatur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturq; rectæ CF, EF,[c] ſuper quas conſtru-*
c 18. ſexti. *antur rectilinea FH, FI, ſimilia ſimiliterq; poſita ipſi CD. Dico igitur factum eſſe,*
d 31. tertij. *quod iubetur. [d] Cum enim angulus CFE, rectus ſit, quippe qui in ſemicirculo exi-*
e 31. ſexti. *ſtat;[e] erit rectilineum CD, æquale rectilineis HF, FI, atq; adeo, ſi auferatur rectilineum FI ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi B, ex rectilineo CD, hoc eſt, ex æquali A, relinquetur rectilineum HF ſimile quoq; ipſi B, ſimiliterq; poſitum. Quod autem rectilineum ablatum FI, ſit tertia pars rectilinei CD, ita oſtendetur. [f] Quoniam eſt,*
f 4. ſexti. *vt recta CG, ad GF, ita recta CF, ad FE;[g] quod triangula CGF, CFE, ſint ſimilia;*
g 8. ſexti. *Habet autem CG, ad GE, proportionem duplicatam proportionis CG, ad GF, propterea quod proportionales ſunt tres rectæ CG, GF, GE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib.*



[h] Item rectilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF,
h 19. vel 20. ſexti. *FE; Erit vt recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineum FI; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ ſunt. Componendo igitur erit, vt CE, ad GE, ita duo rectilinea HF, FI, ſimul, hoc eſt, rectilineū CD, quod eſt illis æquale, ad rectilineum FI: Eſt autem CE, ipſius GE, tripla, per conſtructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars exiſtet. Quod eſt propoſitum.*

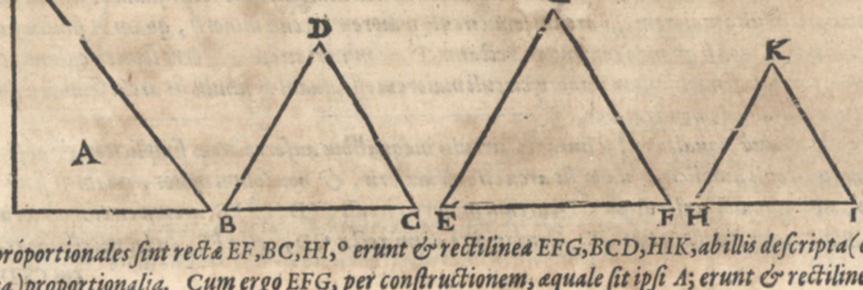
QVOD ſi pars imperata, nēpe tertia, ſimpliciter ſit auferenda, fiet id breuiſſime, hac arte.[i] Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammū GD,
i 45. primi. *æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata; & per E, agatur ipſi BG, parallela EF. Dico DF, tertiam eſſe partē ipſius DG, hoc eſt, rectilinei*
k 1. ſexti. *dati A. Cū n. ſit[k] vt DE, ad DB, ita DF, ad DG: Sit autē per conſtructionē DE, ipſius DB, pars tertia; erit & DF, ipſius DG, tertia pars. Quod eſt propoſitum.*



II.

Duobus datis rectilineis, tertiū proportionale inuenire.

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniendum ſit tertiū proportionale.[l] Conſtituatur ipſi
l 25. ſexti. *A, rectilineum æquale EFG, ſimile vero ſimiliterq; poſitū ipſi BCD. Deinde laterib. homologis*
m 11. ſexti. *EF, BC,[m] inueniatur tertia li-*
n 18. ſexti. *nea proportionalis HI;[n] ſuper quā conſtituatur rectilineum HIK, ſimile ſimiliterq; poſitum ipſis EFG, BCD. Dico HIK, eſſe tertiū proportionale. Cū enim*

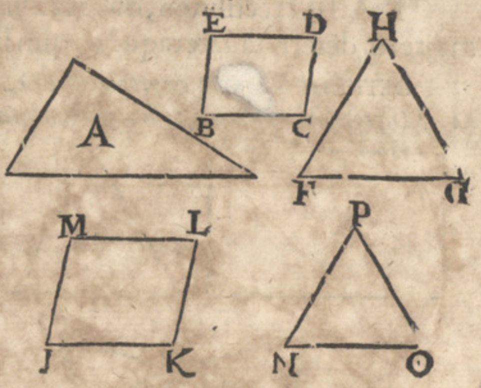


o 22. ſexti. *proportionales ſint rectæ EF, BC, HI,[o] erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis deſcripta (cum ſint ſimilia, ſimiliterq; poſita) proportionalia. Cum ergo EFG, per conſtructionem, æquale ſit ipſi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia. Quod eſt propoſitum.*

III. TRI-

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.

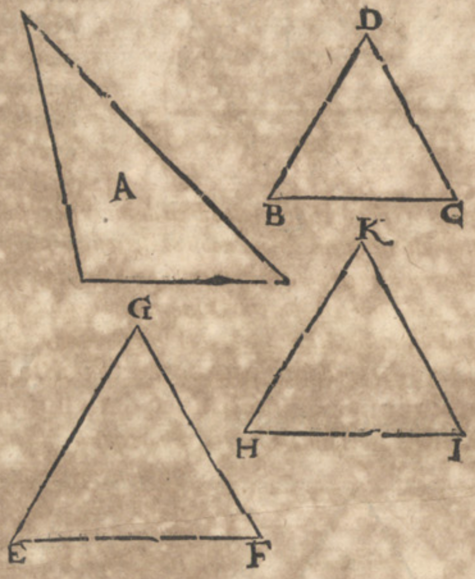


TRIA rectilinea data ſint A, BCDE, FGH, quibus quartum ſit inueniendum proportionale. [a] *Conſtruatur rectilineum IKLM, æquale quidem ipſi A, ſimile vero ſimiliterque poſitum ipſi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG,* [b] *inuenta quarta proportionali NO;* [c] *conſtituatur ſuper NO, rectilineum NOP, ipſi FGH, ſimile ſimiliterq; poſitum. Dico NOP, rectilineum eſſe quartũ proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, ſint proportionales;* [d] *erunt & rectilinea ſimilia ſimiliterq; poſita ab ipſis deſcripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cũ igitur IL, conſtructum ſit æquale ipſi A; erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod eſt propoſitum.*

a 25. ſexti.
b 12. ſexti.
c 18. ſexti.
d 22. ſexti.

IV.

IV. DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

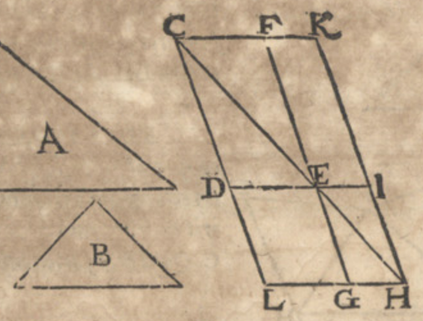


SINT duo rectilinea A, BCD, quib. medium inueniendum eſt proportionale. [a] *Conſtituatur rectilineum EFG, æquale ipſi A, & ſimile ſimiliterque poſitum ipſi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC,* [b] *inuenta media proportionali HI;* [c] *conſtruatur ſuper HI, rectilineum HIK, ſimile ſimiliterq; poſitum ipſis EFG, BCD. Dico HIK, medium eſſe proportionale quæſitum. Cum enim proportionales ſint tres rectæ EF, HI, BC,* [d] *erunt quoque rectilinea ab ipſis deſcripta EFG, HIK, BCD, proportionalia, cum ſint ſimilia ſimiliterque poſita. Cum ergo EFG, conſtructum ſit æquale ipſi A; erunt quoque rectilinea A, HIK, BCD, proportionalia; hoc eſt, erit vt A, ad HIK, ita HIK, ad BCD. [illegible] proinde HIK, medium proportionale erit inter A, & BCD. Quod eſt propoſitum.*

a 25. ſexti.
b 13. ſexti.
c 22. ſexti.
d 22. ſexti.

ALITER. Sit rurſus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. [e] *Conſtituatur ipſi A, æquale parallelogrammum quodcunq; CDEF,* [f] *ipſi vero B, æquale parallelogrammum EGHI, ſimile vero ſimiliterque poſitum ipſi CDEF. Connectanturq; hæc parallelogramma ad angulos æquales, vt DE, EI, efficiant vnam lineam rectam, ac propterea, per ea, quæ ad propoſ. 15. lib. 1. demonſtrauimus, vna quoque linea recta componatur ex FE, EG; perficiaturq; totum parallelogrammum KL. Dico vtrumlibet EK, vel EL, medium eſſe proportionale inter DF, GI, hoc eſt, inter A, & B. Cum enim ſimilia ſint ſimiliterque poſita DF, GI; erit vt DE, ad EF, ita GH, ad HI, hoc eſt, ita EI, ad EG,* [g] *quod rectæ EI, EG, rectis GH, HI, æquales ſint. Permutando ergo vt DE, ad EI, ita FE, ad EG.* [h] *Vt autem DE, ad EI, ita eſt DF, ad EK, & vt FE, ad EG, ita EK, ad GI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI; ac proinde EK, medium proportionale erit inter DF, GI, hoc eſt, inter A, & B. Quod eſt propoſitum.*

e 45. primi.
f 25. ſexti.
g 34. primi
h 1. ſexti.

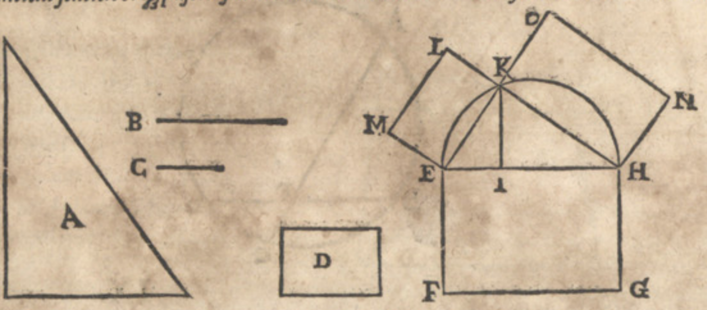


QVOD etiam in hunc modum confirmari poteſt. Cum DE, GI, ſimilia ſint, ſimiliterque poſita, [i] *conſiſtent ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK, EL, æqualia erunt. Vt autem DF, ad EK, ita eſt EL, ad GI,* [k] *quod vtraq; proportio eadem ſit proportioni DE, ad EI. Igitur erit, vt DF, ad EK, ita EK, ad GI. Quod eſt propoſitum.*

i 26. ſexti.
k 1. ſexti.

V. DATO rectilineo duo rectilinea æqualia conſtituere, quæ ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta cuicunq; rectilineo, habeantque inter ſe proportionem propoſitam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, dataque proportio rectæ B, ad C, oporteatq; conſtituere duo rectilinea, quæ ipſi A, æqualia ſint, habeantq; proportionem, quam B, ad C; ac ſimilia ſimiliterq; poſita ſint rectilineo cuiuis D. [a] *Conſtituatur rectilineum EFGH, æquale ipſi A, & ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi D. Diuiſo deinde latere eius EH, in I, ſecundam proportionem B, ad C, ex iis, quæ ad prop. 10. huius lib. demonſtrauimus: deſcribatur circa EH, ſemicirculus EKH, & ex I, ducatur ad EH, perpendicularis IK, connectanturque rectæ EK, HK.* [b] *Deſcribantur iam ſuper EK, KH, rectilinea EKLM, KHNO, ipſi EG, vel ipſi D, ſimilia, ſimiliterq; poſita; quæ dico æqualia etiam eſſe ipſi EG, ſeu ipſi A, habereq; proportionem datam B, ad C.* [c] *Cum n. angulus EKH, in ſemicirculo exiſtens rectus ſit;* [d] *erunt rectilinea EL, HO, æqualia rectilineo EG, cum ſint ſimilia inter ſe, ſimiliterq; deſcripta.* [e] *Quoniam vero eſt, vt EI, ad IK, ita EK, ad KH, cum triangula EIK, EKH, ſimilia ſint; Eſt autem EI, ad IH, in proportione duplicata proportionis EI, ad IK, quod tres EI, IK, IH, ſint, ex coroll. prop. 8. huius lib. proportionales.* [f] *Item EL, ad HO, in proportione duplicata eius, quam habet latus EK, ad latus homologum KH; erit vt EI, ad IH, hoc eſt, vt B, ad C, ita EL, ad HO. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo ſimul æqualia EL, HO, quæ ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita dato rectilineo D, habentq; proportionem inter ſe datam B, ad C. Quod eſt propoſitum.*



a 25. ſexti.
b 18. ſexti.
c 31. tertij.
d 31. ſexti.
e 4. ſexti.
f 19. vel 20. ſexti.

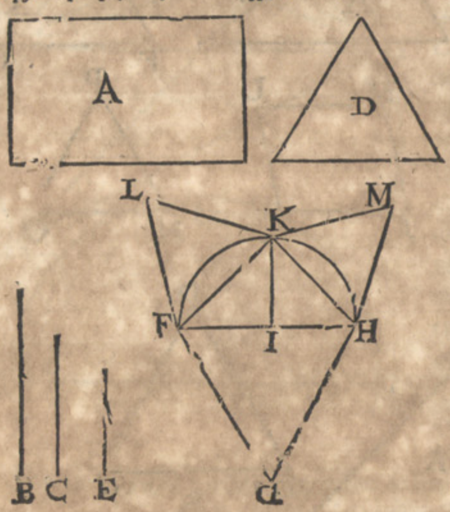
VI. DA-

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint ſimiliterq; deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe proportionem datam.

a 11. ſexti.
b 25. ſexti.
c 18. ſexti.
d 31. tertij.
e 31. ſexti.
f 4. ſexti.

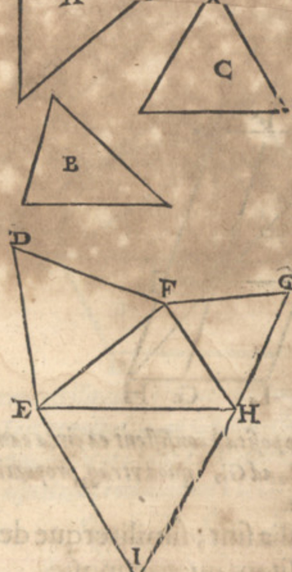
DETVR rectili[...] A, & proportio rectæ B, ad rectam C; oporteatq; conſtituere duo rectilinea ipſi A, æqualia, & ſimilia ipſi D, propoſito, ſimiliterq; poſita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B, ad C.[a] Inuenta ipſis B, C, tertia proportionali E, [b] fiat rectilineum FGH, æquale ipſi A, & ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi D. Diuiſoque latere FH, in I, ſecundum proportionem B, ad E, vt ad propoſ. 10. huius lib. oſtendimus; deſcribatur circa FH, ſemicirculus FKH; & ex I, ducatur ad FH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ FK, HK. [c] Deſcribantur iam ſuper FK, HK, rectilinea FKL, HKM, ipſi FGH, vel ipſi D, ſimilia ſimiliterq; poſita. Dico hæc rectilinea æqualia eſſe ipſi FGH, vel ipſi A, eorumq; latera homologa FK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C. [d] Cum enim angulus FKH, in ſemicirculo rectus ſit; [e] erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineo FGH, ideoq; & rectilineo A, æqualia. [f] Quoniã vero eſt, vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob ſimilitudinẽ triangulorũ FIK, FKH; Eſt autẽ FI, ad IH, in proportione duplicata duplicationis FI, ad IK; (quod tres FI, IK, IH, proportionales ſint, ex coroll. propoſ. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH. ex conſtructione) in duplicata eſt proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C, quando quidem ipſarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales ſunt. Conſtat ergo propoſitum.



VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum conſtituere, quod ſimile ſit, ſimiliterque poſitum cuiuis rectilineo dato.

a 25. ſexti.
b 18. ſexti.
c 31. ſexti.
d 25. ſexti.



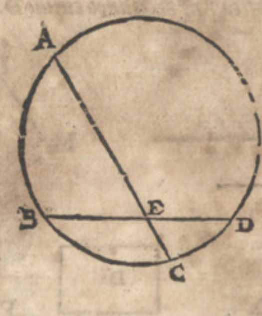
DVO rectilinea data ſint A, & B, quibus æquale ſit conſtruendum, ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi C. [a] Fiat ipſi A, æquale DEF, ſimile autem ſimiliterq; poſitum ipſi C. Item ipſi B, æquale conſtituatur GFH, ſimile vero eidem C, ſimiliterq; poſitum. Deinde rectilinea DEF, GFH, ita inter ſe connectantur, vt latera eorum homologa FF, FH, conſtituant angulum EFH, rectum, cui ſubtendatur recta EH, [b] ſuper quam deſcribatur rectilineum IHE, ſimile ſimiliterque poſitum ipſis DEF, GFH, hoc eſt ipſi C.[c] Perſpicuum autem eſt EHI, æquale eſſe duobus DEF, GFH, atq; idcirco duobus A, & B. Quod eſt propoſitum.

BREVIVS. Conſtituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propoſ. 45. lib. 1 docuimus. [d] Si enim huic parallelogrammo conſtruxerimus æquale rectilineum EHI, quod ſimile ſit ſimiliterq; poſitum alteri dato rectilineo C; Conſtitutum erit rectilineum EHI, æquale duobus rectilineis A, B, & ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineo C. Quod erat faciendum.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecuerint: erunt ſegmenta vnius ſegmentis alterius reciproca.

a 25. tertij.
b 14. ſexti.



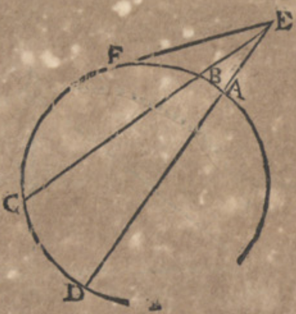
IN circulo ABCD, ſe mutuo ſecent rectæ AC, BD, in E. Dico ſegmenta AE, EC, eſſe reciproca ſegmentis BE, ED: Hoc eſt, eſſe vt AE, ad BE, ita ED, ad EC: Vel vt AE, ad ED, ita BE, ad EC. [a] Cum enim rectangulum ſub AE, EC, comprehenſum æquale ſit rectangulo ſub BE, ED, contento; [b] erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod eſt propoſitum.

IX.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum ſecantes: Erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, & eius ſegmentum exterius.

EXTRA

EXTRA circulum ABCD, ſumatur punctum E, à quo cadant rectæ EC, ED, ſecantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB, eſſe reciprocas rectis ED, EA: Hoc eſt, eſſe, vt EC, ad ED, ita EA, ad EB. Velvt EC, ad EA, ita ED, ad EB. Ducta enim EF, tangente circulum in F; [a] erit rectangulum ſub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum ſub ED, EA, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula ſub EC, EB, & ſub ED, EA, æqualia erunt. [b] Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca. [c] Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale eſt tam rectangulum ſub EC, EB, quam rectangulum ſub ED, EA, [d] erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quam tres ED, EF, EA, proportionales, atque adeo EF, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum ſecet, & ſegmentum eius exterius. Quod eſt propoſitum.

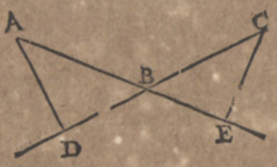


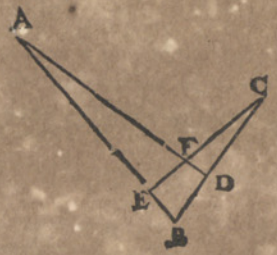
a 35. tertij.
b 15. ſex.
c 35. tertij.
d 17. ſex.

X.

SI duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & ſectionem, altera verò inter ſectionem, & prioris lineæ aſſumptæ perpendicularem interiicitur, alijs duabus eodem modo incluſis reciprocæ.

DVÆ rectæ AB, CB, ſe mutuo ſecent in B, & ex terminis A, C, ad ipſas demittantur perpendiculares; AD, quidem ad CB, at verò CE, ad AB; quæ perpendiculares cadent in AB, CB, protractas vltra B, ſi angulus ABC, fuerit obtuſus; in ipſas vero introrſum, ſi idem angulus acutus fuerit, vt figuræ indicant. Dico rectas AB, BE, (quarum prior interiicitur inter terminum A, & ſectionem B, poſterior verò inter ſectionem B, & perpendicularē CE, quæ nimirum ad ipſam AB, aſſumptam ducitur) reciprocas eſſe duabus CB, BD, (quæ inter ſimiles terminos includũtur) hoc eſt, eſſe vt AB, ad B, C ita BD, ad BE: Velvt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cum enim anguli ABD, ADB, trianguli ABD, æquales ſint angulis CBE, CEB, trianguli CBE. (Nam ADB, CEB, recti ſunt; [a] & ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in poſteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula. [b] Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea permutando quoque, vt AB, ad BC, ita BD, ad BE. Quod eſt propoſitum.





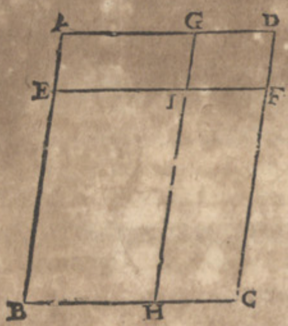
a 15. pri.
b 4. ſex.

PORRO eadem ratione ſegmenta perpendicularium AD, CE, in poſteriori figura ſe mutuo ſecantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, ſint æquiangula; [c] erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoq;, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod eſt propoſitum.

c 4. ſex.

XI.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus paralleſe ſe mutuo ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

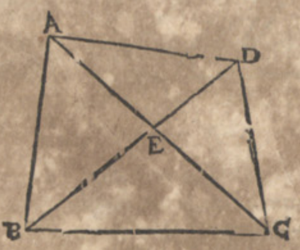


IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ ſe mutuo ſecent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, eſſe proportionalia. [a] Cum enim ſit vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC; [b] Erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod eſt propoſitum.

a 1. ſex.
b 11. quin.

XII.

OMNE quadrilaterum à duabus diametris ſe mutuo ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

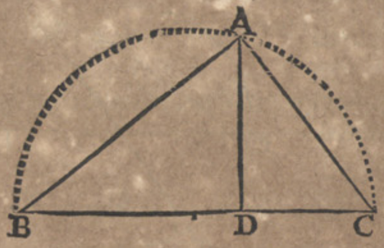


DIVIDANT diametri AC, BD, ſe mutuo ſecantes in E, quadrilaterum ABCD. Dico quatuor triangula AED, CED, AEB, CEB, eſſe proportionalia. [a] Erit enim vt AE, ad EC, ita triangulum AED, ad triangulum CED, & triangulum AEB, ad triangulum CEB. [b] Quare vt triangulum AED, ad triangulum CED, ita triangulum AEB, ad triangulum CEB. Eademque ratione oſtendes eſſe, vt BEA, ad DEA, ita BEC, ad DEC; [c] cum vtraque proportio eadem ſit proportioni BE, ad ED. Conſtat ergo propoſitum.

a 1. ſex.
b 11. quin.
c 1. ſex.

XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione, tria latera ſunt continue proportionalia. Et ſi tria latera trianguli rectanguli ſunt continue proportionalia, perpendicularis ad baſim ex angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione.



a 17. ſexti.
b 17. ſexti.

IN rectangulo triangulo ABC, *ex angulo recto A, demiſſa perpendicularis* AD, *ſecet baſim* BC, *in* D, *extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum* BD: *ac propterea ex theoremate 9. ad propoſ. 47. lib. 1. latus* AB, *latere* AC, *maius. Dico tria latera* BC, BA, AC, *eſſe continue proportionalia. Quoniam enim per hypotheſin eſt, vt* BC, *ad* BD, *ita* BD, *ad* DC: [a] *erit quadratum ex* BD, *rectangulo ſub* BC, CD, *æquale. Rurſus quia ex coroll. propoſ. 8. huius lib.* AC, *media proportionalis eſt inter* BC, CD; [b] *erit quoque quadratum ex* AC, *eidem rectangulo, ſub* BC, CD, *æquale. Quare quadrata ex* BD, AC, *æqualia inter ſe erunt, ac proinde & rectæ ipſæ æquales erunt. Eſt autem ex coroll. propoſ. 8. huius lib.* AB, *inter* BC, BD, *media proportionalis. Igitur eadem* AB, *media proportionalis erit inter* BC, AC: *hoc eſt, erit, vt* BC, *ad* AB, *ita* AB, *ad* AC. *Quod eſt propoſitum.*

c 11. quin.
d 9. quin.
e 7. quin.
f 11. quin.

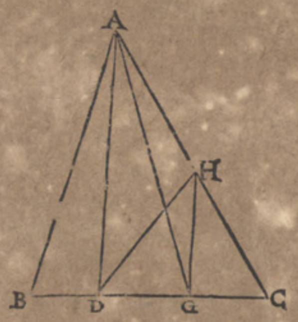
SINT deinde tria latera BC, AB, AC, *in triangulo rectangulo* ABC, *continue proportionalia, hoc eſt, ſit* BC, *ad* AB, *vt* AB, *ad* AC, *demittaturque perpendicularis* AD, *ad baſim* BC. *Dico* BC, *ſectam eſſe in* D, *extrema ac media ratione. Quoniam enim eſt, vt* BC, *ad* AB, *ita* AB, *ad* AC: *Eſt autem vt* BC, *ad* AB, *ita quoque* AB, *ad* BD: *quod* AB, *media proportionalis ſit inter* BC, BD, *ex coroll. propoſ. 8. huius lib.* [c] *erit vt* AB, *ad* AC, *ita* AB, *ad* BD: [d] *ac proinde æquales erunt* AC, & BD. [e] *Vt igitur* AC, *ad* CD, *ita erit* BD, *ad* CD. *Sed vt* AC, *ad* CD, *ita eſt* BC, *ad* AC, *quod ex coroll. propoſ. 8. huius lib.* AC, *ſit media proportionalis inter* BC, & CD. [f] *Igitur erit quoque* BC, *ad* AC, *hoc eſt, ad* BD, *vt* AC, *hoc eſt, vt* BD, *ad* CD: *ac propterea* BC, *in* D, *ſecta erit extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

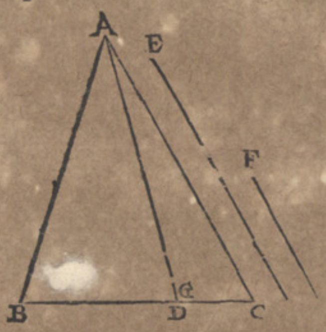
g 31. ter.

ITAQVE ſi ſuper datam rectam BC, *conſtruendum ſit triangulum rectangulum, cuius tria latera continue proportionalia ſint, ſecanda erit data recta* BC, *extrema, ac media ratione in* D. *Deſcripto deinde ſemicirculo* BAC, *circa eandem datam* BC, *erigenda erit ad* BC, *perpendicularis* DA, *iungendæque rectæ* BA, CA. *Triangulum enim* ABC, *rectangulum erit,* [g] *cum angulus* BAC, *in ſemicirculo rectus ſit; ac proinde cum perpendicularis* AD, *ſecet baſim extrema ac media ratione; tria latera continue proportionalia erunt, vt proximè demonſtratum eſt.*

XIV.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam.



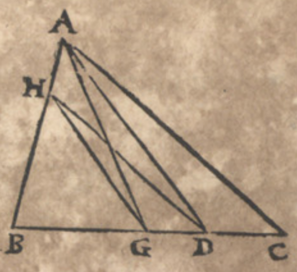


a 1. ſex.

SIT triangulum ABC, *oporteatque à dato puncto* D, *in eius latere* BC, *lineam rectam ducere, quæ triangulum ſecet in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam* E, *ad* F. *Diuidatur* BC, *in* G, *ſecundum proportionem* E, *ad* F, *cadatq; primò punctum* G, *in datum punctum* D, *vt in prima figura, ducaturque recta* DA. [a] *Quoniam igitur eſt, vt* BD, *ad* DC, *ita triangulum* BDA, *ad triangulum* CDA, *ſecabit recta* DA, *triangulum datum ſecundum proportionem datam* BG, *ad* GC, *hoc eſt,* E, *ad* F. *Quod erat faciendum.*

b 37. pri.
c 7. quin.
d 17. quin.
e 1. ſexti.

CADAT deinde punctum G, *inter* C, & D, *vt in ſecunda figura. Ducatur ergo recta* DA, *cui per* G, *parallela agatur* GH, *coniungaturque recta* DH. *Dico rectam* DH, *ſecare triangulum datum ſecundum proportionem datam, hoc eſt, eſſe trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH, *vt* E, *ad* F, *ſeu vt* BG, *ad* GC. *Ducta enim recta,* [b] *erunt triangula* HGA, GHD, *æqualia, cum ſint ſuper eandem baſin* GH, & *inter eaſdem parallelas* GH, DA. *Addito igitur communi triangulo* CGH, *fient æqualia triangula* CGA, CDH: [c] *Ac proinde triangulum* ABC, *eandem habebit proportionem ad* CGA, & *ad* CDH. [d] *Diuidendo igitur erit, vt triangulum* BGA, *ad triangulum* CGA, *ita trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH. [e] *Eſt autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad* GC. *Igitur erit & trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH, *vt* BG, *ad* GE, *hoc eſt, vt* E, *ad* F. *Quod eſt propoſitum.*



f 37. pri.
g 7. quin.
h 17. quin.
i 1. ſexti.

CADAT tertio punctum G, *inter* B, & D, *ducaturque recta* DA, *cui rurſus per* G, *agatur parallela* GH. *Dico igitur rurſus, rectam ductam* DH, *ſecare triangulum* ABC, *ſecundum proportionem datam* E, *ad* F, *hoc eſt, eſſe triangulum* BDH, *ad trapezium* CDHA, *vt* E, *ad* F. *Ducta enim recta* GA, [f] *erunt, vt prius, triangula* HGA, GHD, *æqualia; additoque communi* BGH, *æqualia fient* BGA, BDH. [g] *Quare erit* ABC, *ad* BGA, *vt ad* BDH. [h] *Diuidendo ergo erit vt* CGA, *ad* BGA, *ita trapezium* CDHA, *ad triangulum* BDH, & *conuertendo, vt* BGA, *ad* CGA, *ita* BDH, *ad trapezium* CDHA, [i] *Eſt autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad* GC. *Igitur &* BDH, *ad trapezium* CDHA, *erit vt* BG, *ad* GC, *hoc eſt, vt* E, *ad* F. *Quod eſt propoſitum.*

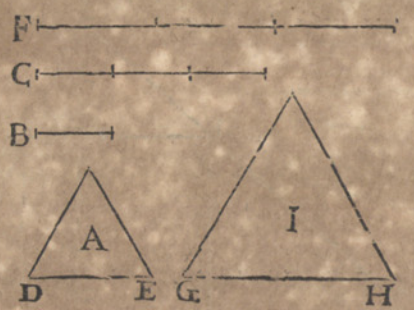
HINC perſpicuum eſt, quonam modo imperata pars ex triangulo ſit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum ſecundum proportionem multiplicem, cuius denominator vnitate minor ſit denominatore partis imperatæ, (vt ſecundum proportionem triplam, ſi quarta pars imperetur, &c. factam erit, quod iubetur, vt manifeſtum eſt. Habebit enim tunc totum triangulum ad ſegmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator eſt æqualis denominatori partis propoſitæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis aſſumptæ addatur vnitas, quæ ante deerat.

XV.

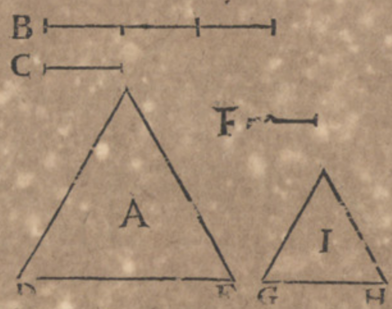
DATO rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, maius, vel minus, ſecundum proportionem datam.

SIT rectilineum datum A, cui ſimile ſimiliterque poſitum ſit deſcribendum maius, ſecundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (ſit autem DE, vnum latus rectilinei dati quodcunque) [a] inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, [b] inueniatur media proportionalis GH; [c] ſuper quam ipſi A, deſcribatur rectilineum I, ſimile, ſimiliterque poſitum. Dico I, maius eſſe, quàm A, ſecundum proportionem datam B, ad C. Cũ enim proportionales ſint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propoſ. 19. vel 20. libri huius, vt DE, prima ad F, tertiam, hoc eſt, per conſtructionem, vt B, ad C, ita rectilineum A, ſuper primam ad rectilineum I, ſuper ſecundam, illi ſimile ſimiliterque poſitum. Quod erat faciendum.

a 12. ſexti.
b 13. ſexti.
c 18. ſex.



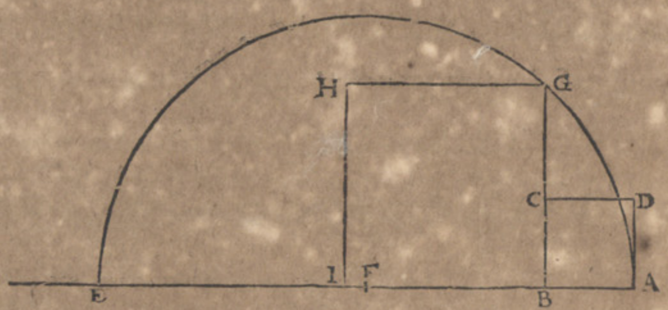
NON ſecus dato rectilineo A, minus rectilineum I, deſcribemus, illi ſimile ſimiliterq; poſitum, ſecundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum eſſe cernis. Eadem enim prorſus eſt conſtructio atque demonſtratio.



FACILE igitur ex his quadratum quodcunq;, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atq; aliud conſtituemus, quod ſit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. ſeruatâ nihilominus ſemper eadem rectilineorum ſimilitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet ſimilitudo. Si namq; proportio B, ad C. ſumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua verò perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum ſimile ſimiliterque deſcriptum, quod propoſiti rectilinei duplum exiſtet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipſe facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, ſeu parallelogrammum quodcunque oblatum. Ex hac enim conſtruemus quoque rectilineum ſimile ſimiliterque deſcriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, ſecundum datam proportionem quamcunque. Tametſi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, ſed eam ſimpliciter proponit; non multum tamen eius demonſtratio à præcedenti differt, vt mox oſtendemus.

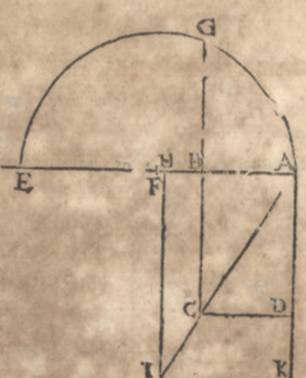
SIT igitur quadratum ABCD, quintuplicandum. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, ſumantur quinque partes ipſi AB, æquales, à puncto B, incipiendo, vſq; ad E, vt ſit BE, quintupla ipſius AB. Diuiſa deinde tota AE, bifariam in F, deſcribatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, ſemicirculus AGE, producaturq; latus BC, ad circumferentiam vſq; in G. Dico quadratum BGHI, ex BG, deſcriptum, quintuplum eſſe quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propoſ. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit vt EB, prima ad BA, tertiam, ita BH, quadratum ſecundæ, ad AC, quadratum tertiæ, ex coroll. propoſ. 20. huius lib. Eſt autem EB, per conſtructionem, ipſius AB, quintupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.



QVOD ſi recta BE: ſumatur ſextupla lateris AB, erit & quadratum rectæ BG, quadrati ABCD, ſextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipſius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione ſumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.

SIT rurſus rectangulum ABCD, cui inueniendum ſit ſimile ſimiliterq; poſitum, quod duplum ſit ipſius. Ex latere AB, producta ſumatur BE, dupla ipſius AB. Diuiſa deinde tota AE, bifariam in F; & ex F, deſcripto ſemicirculo, vt prius, & producta CB, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quæſiti. Quare ſi abſcindatur AH, æqualis ipſi BG, & per H, agatur ipſi BC, parallela HI, occurrens diametro AC, protractæ in I, perficiaturq; parallelogrammum H; [d] erit HK, ipſi BD, ſimile ſimiliterq; poſitum; quod etiam aio duplum eſſe ipſius BD. Cum enim proportionales ſint tres rectæ, EB, BG, BA, ex corollario propoſ. 13. huius lib. Erit vt prius, ſicut EB, prima ad BA, tertiã, ita rectangulũ HK, ſupra AH, ſecundam (ſumpta enim fuit AH, ipſi BG, ſecundæ æqualis) ad rectangulum BD, ſupra tertiam AB, quod eſt ſimile ſimiliterq; deſcriptum. Quod eſt propoſitum.

d 24. ſex.

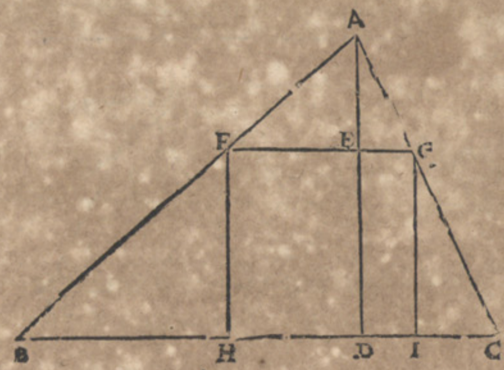


EODEM modo, ſi ſupra AB, conſtitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex BG, illi ſimile, ſimiliterq; poſitum deſcribitur, ipſius duplum. Atque in hunc modum ſemper eam proportionẽ habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum ſimile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex conſtructione.

PERSPICVVM autem eſt, hanc praxim vna cum eius demonſtratione à noſtra antea tradita non differre, niſi quod hæc ſimul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob cauſam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quæ proportionem habent datam, vt ſtatim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

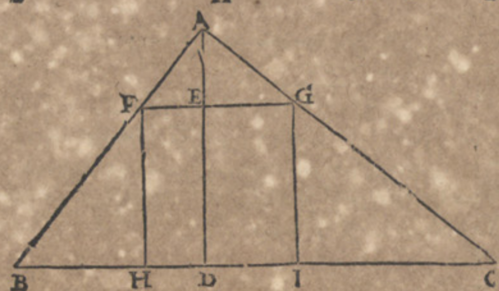
XVI.

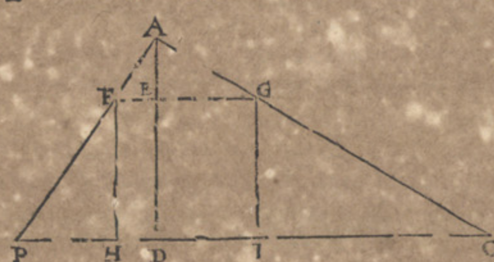
IN dato triangulo quocunque quadratum deſcribere.



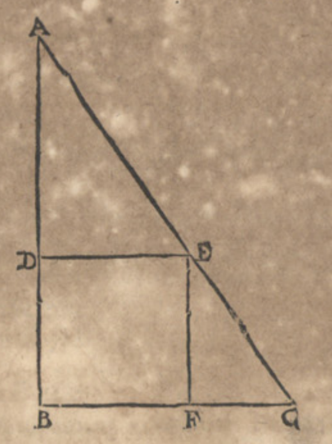
SIT datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo quocunque A, ad BC, perpendicularis demittatur AD, quæ intra triangulum cadet, ex ſcholio propoſ. 13. lib. 2. Hæc autem in E, ita ſecetur, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius libri docuimus, vt eadem ſit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipſi BC, parallela. Poſtremò ex F, & G, ipſi DE, parallelæ ducantur FH, GI. Dico FGIH, rectilineum triangulo ABC, inſcriptum eſſe quadratum. Cum enim FG, ipſi BC, ſit parallela; erit vt BD, ad DC, ita FE, ad EG, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. & componendo, vt BC, ad DC, ita FG, ad EG. [a] Sed vt DC, ad AD, ita eſt EG, ad AE, quod per coroll. propoſ. 4. huius lib. triangula ADC, AEG, ſint ſimilia. [b] Igitur erit ex æquo, vt BC, ad AD, ita FG, ad AE. Quia verò per conſtructionem eſt vt AD, ad BC, ita AE, ad ED, [c] erit rurſus ex æquo, vt BC, ad BC, ita FG, ad ED: Eſt autem BC, ipſi BC. æqualis, immo eadem. Æqualis igitur eſt & FG, ipſi ED. [d] Quare cum FG, ipſi HI; & ED, ipſis EH, GI, æqualis exiſtat; Erunt quatuor latera FG, GI, IH, HF, æqualia inter ſe. [e] Et quia anguli EDH, FHD, duobus rectis æquales ſunt: Eſt autem EDH, per conſtructionem, rectus; erit & FHD, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonſtrauimus, & reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti ſunt in parallelogrammo FGIH; Ac propterea FI, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.

a 4. ſex.
b 22. quin.
c 22. quin.
d 34. pri.
e 29. pri.





NON ſecus idem problema abſoluemus, ſi datu[illegible] triangulum fuerit rectangulum, vel obtuſangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuſo perpendicularem demittamus, vt in poſterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim ſemper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex ſcholio propoſ. 13. lib. 2.



QVOD ſi in triangulo rectangulo quadratum deſcribere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita vt eadem ſit proportio AD, ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipſi BC, parallelam ducemus DE; per E, verò ipſi AB, aliam parallelam EF. [f] Quoniam igitur eſt, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD, quod triangula ABC, ADE, ſimilia ſint, per coroll. propoſ. 4. huius lib. Eſt autem per conſtructionem, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB, [g] erit ex æquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB: Eſt autem BC, ſibi ipſi æqualis, immo eadem. Æqualis igitur eſt & DE, ipſi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.

f 4. ſex.
g 22. quin.

VERVM hoc problemate Commandini multo ingenioſius eſt id, quod ſequitur.

XVII.

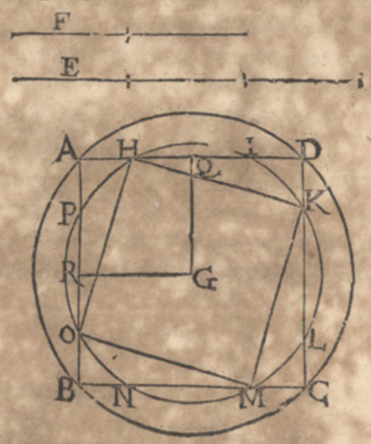
INTRA datum quadratum, aliud quadratum deſcribere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non eſſe maiorem.

SIT quadratum ABCD, intra quod deſcribendum ſit quadratum, ad quod habeat quadratum ABCD, proportionem eandem maioris inæqualitatis, quam recta E, ad rectam F, quæcunque ea ſit, dummodo maior non ſit, quam dupla. Nam ſi latera quadrati ſecentur bifariam, punctaque diuiſionum rectis iungantur lineis, inſcriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonſtrauimus, idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, deſcriptus eſt quadrato illi inſcripto circumſcriptus, vt in hac figura perſpicuum eſt, erit quadratum ABCD, illius quadrati inſcripti duplum, ex ſcholio propoſ. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum ABCD, deſcribi nequeat, quam illud, cuius circulus circumſcriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquido conſtat quadratum ABCD, ad nullum quadratum inſcriptum proportionem poſſe habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla, nimirum ſeſquialtera. Inueniatur ex propoſ. 15. huius ſcholij quadratum, ad quod habeat datum quadratum ABCD, proportionem datam E, ad F. Eritq; eius ſemidiameter maior quam ſemidiameter quadrati, cuius circulus circumſcriptus latera quadrati ABCD, tangit, quod nimirum quadrati ABCD, ſubduplum eſt, vt diximus, minor vero ſemidiametro quadrati ABCD. Igitur ſi ex centro G, quadrati dati deſcribatur circulus æqualis ei, qui circa inuentum quadratum deſcribitur, ſecabit is latera quadrati ABCD, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ HK, KM, MO, OH: relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico HKMO, eſſe quadratum in circulo HIKLMNOP, deſcriptum. atque adeo æquale ei, quod inuentum eſt, ita vt quadratum ABCD, ad quadratum HK, MO, habeat datam proportionem E, ad F. Deſcripto enim circulo circa datum quadratum ABCD, ex centro G, ductiſque ex G, ad latera AD, AB, perpendicularibus GQ, GR, [a] ſectæ erunt tam rectæ AD, AB, quam rectæ HI, OP, bifariam in Q, R. Et quia AD, AB, æquales ſunt, [b] æqualiter diſtabunt a centro G, propterea que & HI, OP, æqualiter ab eodem centro diſtabunt. [c] Quare æquales erunt HI, OP, ideoq; & earum



a 3. ter.
b 14. ter.
c 14. ter.

& earum ſemiſſes QH, QI, RO, RP, inter ſe erunt æquales. Sunt autem & ſemiſſes QA, QD, RA, RB, æqualium laterum æquales. Igitur ſi illæ ab his demantur, reliquæ erunt æquales HA, ID, PA, OB, Eademque ratione, ſi ducantur aliæ perpendiculares ad latera BC, CD, oſtendentur æquales NB, MC, LC, KD, & inter ſe, & illis quatuor HA, ID, PA, OB. Item quia æquales ſunt HI, OP, ſi addantur æquales ID, PA, fient totæ æquales HD, AO, Atque eadem de cauſa æquales erunt BM, KC, & inter ſe, & illis duabus HD, AO. Itaque quia duo latera AO, AH, duobus lateribus DH, DK, æqualia ſunt, angulosque continent æquales, nimirum rectos; [d] erunt & baſes HK, HO, æquales. Eodemque modo demonſtrabuntur KM, MO, æquales & inter ſe, & duabus HK, HO. Æquilatera ergo eſt figura HKMO. Dico & rectangulam eſſe. Cum enim latera HK, KM, MO, OH, æqualia ſint, [e] erunt & quatuor arcus, quos ſubtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo ſunt OHK HKM, KMO, MOH, [f] ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis ſemicirculis recti erunt. Igitur HKMO, quadratum eſt, atque adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus vtrumque circumſcribat. Circulus enim HKMO, deſcriptus eſt ad interuallum ſemidiametri circuli inuento quadrato circumſcripti. Quod eſt propoſitum.

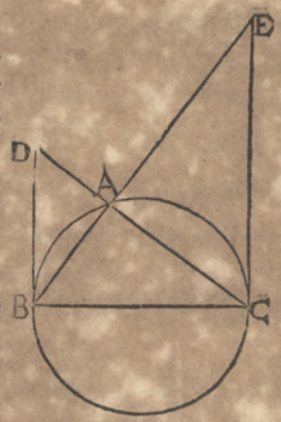


d 4. pri.
e 28. tertij.
f 31. ter.

XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eiſdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum ſecantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: erit rectangulum comprehenſum ſub vtralibet ſecantium, & eius ſegmento interiore, quadrato diametri æquale.

HÆC propoſitio eſt Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. ſicut & quæ ſequitur. Vtramque autem demonſtrauit Io. Baptiſta Benedictus. Sit ergo circulus ABC, cuius diameter BC, ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares BD, CE, ac per aſſumptum quoduis punctum A, in circumferentia ex eiſdem punctis B, C, eductæ rectæ BA, CA, ſecent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum ſub EB, BA, quam ſub DC, CA, quadrato diametri BC, æquale eſſe. Quoniam enim in triangulo rectangulo BCE, ex angulo recto C, demiſſa eſt CA, ad baſim BE, perpendicularis; [a] quod angulus BAC, in ſemicirculo rectus ſit: erit ex coroll. propoſ. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter EB, BA. Quare [b] rectangulum ſub extremis EB, BA, æquale erit quadrato mediæ BC. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum ſub DC, CA: propterea quod BC, media quoque proportionalis eſt inter DC, CA, ex eodem coroll. propoſ. 8. huius lib. Conſtat ergo id, quod proponitur.

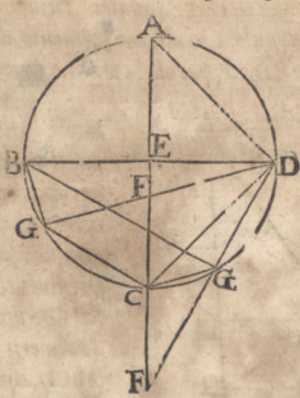


a 31. ter.
b 17. ſexti.

XIX.

SI in circulo duæ diametri ſeſe ad rectos angulos ſecent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque ſecans circumferentiam, & alteram diametrum ſiue productam, ſiue non productam: erit rectangulum comprehenſum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quarum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum deſcripto.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, ſecent ſe ad angulos rectos duæ diametri AC, BD, ducaturque ex puncto D, recta vtcunque DF, ſecans diametrum AC, in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum ſub FD, DG, quadrato intra circulum deſcripto eſſe æquale. Ductis enim rectis DC, CG, erunt triangula DCF, DCG, æquiangula inter ſe. Nam angulus CDF, communis eſt, & angulus DCF, angulo DGC, æqualis; [a] ac proinde & reliquus DFC, reliquo DCG, æqualis. Quod autem anguli DCF, DGC, æquales ſint, ita oſtendemus, Si punctum quidem F, eſt intra circulum; [b] erunt anguli DCF, DGC, inſiſtentes quadrantibus æqualibus AD, DC, æquales: Si vero punctum F, eſt extra circulum, ducta recta AD, [c] erunt anguli DAC, DCA, inſiſtentes quadrantibus æquales: [d] Sed tam DAC, DGC, [e] quam DCA, DCF, æquales ſunt duobus rectis, Igitur ablatis æqualibus DAC, DCA, reliqui DGC, DCF, æquales quoque erunt. Quam ob rem, cum triangula DCF, DCG, æquiangula ſint; [f] erit vt DF, ad DC, ita DC, ad DG: hoc eſt, tres lineæ DF, DC, DG, continue proportionales erunt. [g] Igitur rectangulum ſub extremis DF, DG, æquale eſt quadrato mediæ DC, hoc eſt, quadrato intra circulum deſcripto, cum DC, latus ſit quadrati circulo inſcripti, vt conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Quod eſt propoſitum.



a 32. pri.
b 27. ter.
c 27. ter.
d 22. ter.
e 13. pri.
f 4. ſexti.
g 17. ſexti.

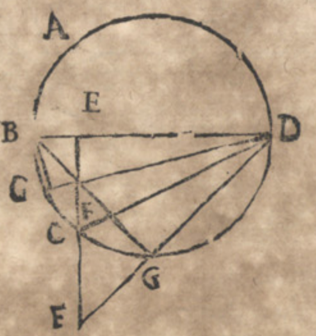
ALITER. Ducta recta BG, [h] erit angulus BGD, in ſemicirculo rectus; atque idcirco duo triangula BGD, DEF, cum habeant angulos rectos BGD, DEF, & angulum BDG, vel EDF, communem, [i] æquiangula erunt. [k] Igitur erit, vt DF, ad DE, ita DB, ad DG, [l] Rectangulum ergo ſub DF, DG, æquale erit rectangulo ſub DB, DE. [m] Sed rectangulo ſub DB, DE,

h 31. ter.
i 32. pri.
k 4. ſexti.
l 16. ſex.
m 17. ſex.

n 31. ter. *æquale eſt quadratum rectæ AD, hoc eſt, quadratum circulo inſcriptum; propterea quod ex coroll. propoſ. 8. huius lib. AD, media proportionalis eſt inter DB, DE, vt patet, ſi ducatur recta AB. [n] Fiet enim triangulum rectangulum BAD, & ex angulo recto perpendicularis demiſſa erit AE. Igitur & rectangulum ſub DF, DG, eidem quadrato rectæ AD, æquale erit. Quod eſt propoſitum.*

VNIVERSALIVS hoc ita proponetur.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur; ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius interſectionem in circumferentia, altera verò vt libet, ſecans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum ſub ſegmentis huius poſterioris lineæ, quorum vnum ſit inter prædictum terminum, & perpendicularem, alterum verò inter eundem terminũ, & circumferentiam, æquale quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, ſeu perpendicularem interceptæ.



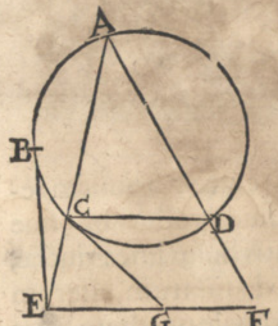
*IN circulo enim ABCD, ad diametrum BD, ſit perpendicularis
EF, ſecans circumferentiam in C, iunganturque rectæ DC, DF, qua-
rum poſterior perpendicularem EF, ſecet in F, & circumferentiam in
G. Dico rectangulum ſub DF, DG, æquale eſſe quadrato DC. Iuncta
enim recta BG, erunt triangula BGD, FDE, æquiangula, propter
o 4. ſex. angulos rectos G, E, & communem angulum FDE. [o] Igitur erit, vt FD,
p 16. ſex. ad DE, ita BD, ad DG. [p] Quare rectangulum ſub FD, DG, rectangulo
q 17. ſex. ſub DE, BD, æquale erit: [q] Sed hoc æquale eſt quadrato DC; quod ex
coroll. propoſ. 8. huius, DC, ſit media proportionalis inter BD, DE: quia
r 31. tertij. ducta recta BC, [r] angulus BCD, foret rectus in ſemicirculo: Igitur &
rectangulum ſub FD, DG, quadrato DC, æquale erit. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

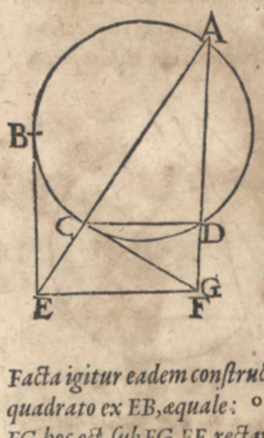
HINC fit, priorem lineam DC, eſſe mediam proportionalem inter poſterioris ſegmenta FD, DG, quorum vnum eſt inter terminum D, & perpendicularem, alterum verò inter eundem terminum, & circumferentiam.

XX.

DATO circulo, & duobus punctis ſiue extra circulum, ſiue intra, dummodo neutrum ſit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam ſecant, parallela ſit rectæ data duo puncta connectenti.



*HOC problema non minus acutum quam curioſum in tres propoſitiones Pappus diſtribuit: quod nos in vnam redigentes multo clarius demonſtrabimus. Sit ergo circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam EF, coniungantur. Si igitur ex EF, ducendæ ſint rectæ ad aliquot punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta EB, tangens circulum in B, & duabus EF, EB, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis ſit EG, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod ſit, quando EF, maior eſt, quam EB. Ducta igitur GC, recta circulum tangente in C, verſus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta ſecans concauam peripheriam in A, iungaturque recta AF. ſecans circumferentiam in D. Dico ductam rectam CD, ipſi EF, parallelam
a 17. ſex. eſſe. Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continue proportionales ſunt, [a] erit rectangulum
b 36. ter. ſub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: [b] Eſt autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum ſub EA, EC. igitur rectangulum ſub EF, EG, rectangulo ſub EA, EC, æquale erit: ac
c 22. ter. proinde ex ſcholio propoſ. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus deſcribi poterit. [c] Duo ergo anguli CAF, CGF, oppoſi-
d 13. pri. ti in quadrilatero ACGF, intra eum circulum deſcripto æquales ſunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G, [d] qui duobus
e 32. ter. etiam rectis æquales ſunt, æquales. Dempto igitur communi CGF, erit reliquus CGE, reliquo A, æqualis: [e] Eſt autem & angulus DCG, angulo A, in alterno ſegmento æqualis. Igitur anguli DCG, CGE, iuter ſe æquales erunt; atque ideo cum ſint al-
f 27. pri. terni, [f] rectæ CD, EF, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.*



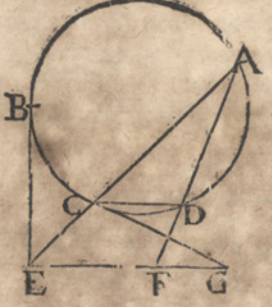
*CADAT deinde punctum G, in punctum F, quod accidit, quando EF, ipſi BE, æqualis, eſt. Ducta igitur rurſus recta GC, circulũ tangente in C, verſus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam ſecans in A, iungaturque recta AF, ſecans circumferentiam in D. Dico rurſus ductam rectam CD, ipſi EF, eſſe parallelam. Quoniam
g 36. ter. enim æquales ſunt EB, EF; [g] eſtque rectangulum ſub AE, EC, quadrato ex EB, æquale: erit
h 5. quar. quoque idem rectangulum quadrato ſub EF, æquale. Quare [h] ſi circa triangulum ACF,
i 37. ter. circulus deſcribatur, cum eum ſecet recta EA, recta autem EF, eidem applicetur, [i] tanget re-
k 32. ter. cta EF, eum circulum. [k] Angulus ergo EFC, angulo A, in alterno ſegmento illius circuli æ-
l 32. ter. qualis erit: [l] Eſt autem & angulus FCD, eidem angulo A, in alterno ſegmento circuli
m 27. pri. ABCD, æqualis, Igitur æqnales inter ſe erunt anguli EFC, FCD: qui cum ſint alterni, [m] erunt rectæ CD, EF. parallelæ. Quod eſt propoſitum.*

*CADAT tertio punctum G, vltra F, quod contingit, quando EF, minor eſt quam EB.
n 17. ſex. Facta igitur eadem conſtructione, quoniàm tres rectæ EF, EB, EG, continue proportionales ſunt, [n] erit rectangulum ſub EF, EG,
o 36. ter. quadrato ex EB, æquale: [o] Eſt autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum ſub AE, EC. Igitur rectangulum ſub EF, EG, hoc eſt, ſub EG, EF, rectangulo ſub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex ſcholio propoſ. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G,
p 21. ter. circulus deſcribi poterit. [p] Duo ergo anguli A, G, in eodem ſegmento CAGF, illius circuli, cuius chorda eſſet ducta recta CF,*

inter

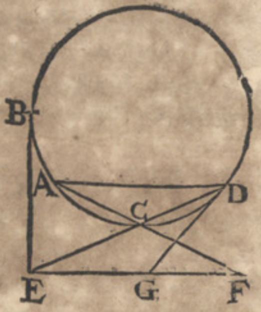
inter ſe æquales erunt : [q] Eſt autem angulus GCD, angulo A, in alterno ſegmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur idem angulus GCD, angulo G, æqualis erit : [r] ac proinde, cum duo hi anguli ſint alterni, parallelæ erunt CD, EF. Quod eſt propoſitum.

q 32. ter.
r 27. pri.



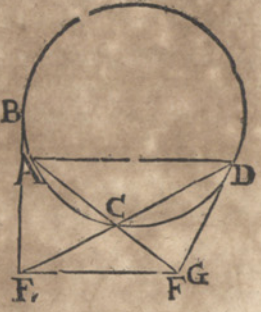
QVOD ſi à principio ex puncto F, ducta fuiſſet linea circulum tangens, & reliqua fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctū A: quia nullum aliud punctum abſoluere poteſt problema. Concipiatur enim mente quodcunque aliud punctum H, prope A, inter A, & D. (ſi illud punctum H, atramento ſignaueris, facilior erit demonſtratio. quod etiam de alijs punctis H, mente concipiendis intelligatur, nec non de puncto I, in vltima figura.) Igitur recta FH, ſecabit circulum ſupra D, at verò recta E H, eundem infra C, ſecabit, ac propterea recta coniungens puncta ſectionum rectam CD, ſecabit. Producta ergo ſecabit quoque illius parallelam E F. Non igitur ipſi E F, parallela erit. Contrarium accidet, ſi punctum H, ſumatur inter A, & C. Nam recta FH, cadet infra D, & EH, ſupra C, &c.

SI verò ex eiſdem punctis datis E, F, ducendæ ſint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexæ circumferentiæ, quæ productæ ſecent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per ea tranſiens ſit parallela rectæ puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta EB, circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis EF, EB, tertia proportionalis E G, cadatque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta GD, tangente circulum in D, non tamen verſus priorem tangentem EB, ducatur ED, ſecans circumferentiam in C, puncto, per quod recta eiiciatur ex F, ſecans circumferentiam in A. Dico rectam AD, ductam eſſe rectæ EF, parallelam: Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continue ſunt proportionales, [s] erit rectangulum ſub EF, EG quadrato ex EB, æquale: [t] Eſt autem & rectangulum ſub ED, EC, eidem quadrato ex EB, æquale. Igitur æqualia inter ſe erunt rectangula ſub EF, EG, & ſub ED, EC: ac proinde ex ſcholio propoſ. 36. lib. 3. quatuor puncta C, D, F, G, circulus deſcribi poteſt. [u] Duo ergo anguli CDG, & F, in eodem ſegmento CDFG, illius circuli, cuius chorda eſſet ducta recta G C, inter ſe erunt æquales. [x] Eſt autem angulus C D G, angulo A, in alterno ſegmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno æqualis erit, [y] ideoque parallelæ erūt AD, EF. Quod eſt propoſitum.



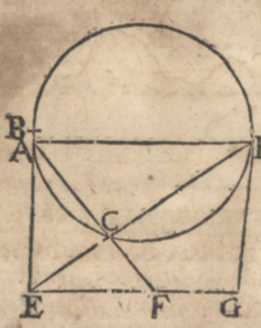
s 17. ſexti.
t 36. ter.
u 21. ter.
x 32. ter.
y 27. pri.

CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rurſus recta G D, tangente circulum in D, non tamen verſus priorem tangentem E B, ducatur recta E D, ſecans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F; ſecet circumferentiam in A. Dico ductam rectam A D, rectæ EF, parallelam eſſe. Cum enim æquales ſint EB, EF, (quod ſit EF, ad EB, vt EB, ad E F.) erunt earum quadrata æqualia. Eſt autem rectangulum ſub ED, EC, quadrato ex EB, æquale. Igitur & quadrato ex EF. Quia ergo, [z] ſi circa triangulum C D F, circulus deſcribatur, recta E D, eum ſecat, & E F, applicata eſt, [a] tanget EF, eum circulum. [b] Angulus ergo EFC, angulo FDE, in alterno ſegmento eius circuli æqualis erit: [c] Eſt autem angulus F D E, angulo A, in alterno ſegmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit. [d] Quare parallelæ erunt AD, EF. Quod eſt propoſitum.



z 5. quar.
a 37. ter.
b 32. ter.
c 32. ter.
d 27. pri.

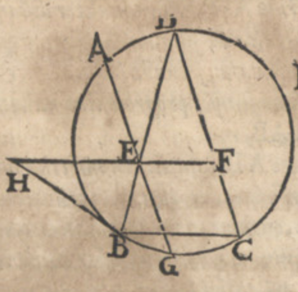
CADAT tertio punctum G, vltra F. Facta ergo eadem conſtructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, ſint continue proportionales, [e] erit rectangulum ſub EF, EG, ſiue ſub EG, EF, æquale quadrato ex EB: [f] Eſt autem eidem quadrato æquale rectangulum ſub ED, EC. Igitur rectangulum ſub EG, EF, rectangulo ſub ED, EC, æquale erit, proptereaque ex ſcholio propoſ. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus poteſt deſcribi. [g] Duo ergo anguli EDG, CFG, oppoſiti in quadrilatero CDGF, intra eum circulum deſcripto æquales erunt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F, [h] qui etiam duobus ſunt rectis æquales. Dempto ergo communi CFG, reliquus CDG, reliquo C F E, æqualis erit: [i] Eſt autem angulus GDC, angulo A, in alterno ſegmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus C F E, eidem angulo C A D, alterno æqualis erit [k]: atque idcirco parallelæ erunt AD, EF. Quod eſt propoſitum.

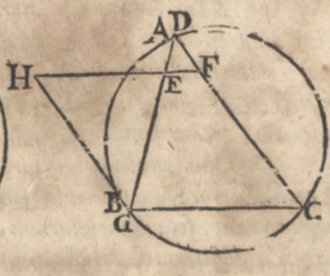


e 17. ſex.
f 36. ter.
g 22. ter.
h 13. pri.
i 32. ter.
k 27. pri.

QVOD ſi à principio ex F, duceretur linea circulum tangens, & alia fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum C. eo quod nullum aliud poſſit problema conficere. Nam ſit aliud punctum H, quodcunque iuxta C, mente conceptum inter A, & C. Cadet ergo recta FH, infra A, & recta E H, ſupra D. Recta igitur connectens puncta ſectionum ſecabit rectam AD; ac proinde, vt ſupra dictum eſt, ipſi EF, parallela eſſe non poteſt. Si punctum H, ſumptum foret inter D, & C, caderet FH, recta ſupra A, & recta EH, infra D, &c.

Sed ſint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Ducta recta AG, per E, vtcunque, inueniatur tribus rectis EF, EA, EG, quarta proportionalis, cui æqualis ſit EH, (cadetque neceſſario punctum H, extra circulū. [l] Quoniam enim rectangulum ſub AE, EG, ſecunda & tertia, æquale eſt rectāgulo ſub EF, EH, prima & quarta: deſcribi poterit circulus circa 4. puncta A, F, G, H, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 3. ſecans circulum, ABCD, in A, G. Cum ergo eius arcus per F, tranſiens ſit intra hunc circulum, erit alter arcus per H, tranſiēs, extra: [m] quandoquidem circulus circulum in duobus tantum punctis ſecat, ac proinde circulus per A, F, G, deſcriptus poſt puncta A, G, extra circulum cadet; ideoque punctum H, in eo circulo exiſtens extra circulum cadet.) ducaturque H B, circulum tangens in B.

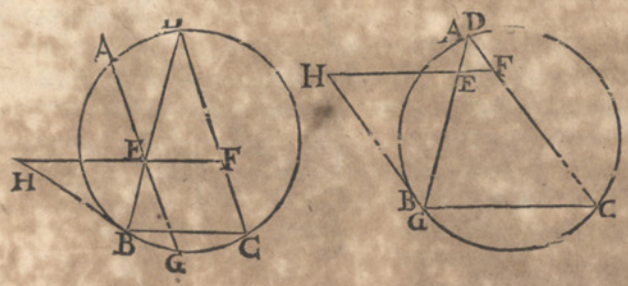




l 16. ſexti.
m 10. ter.

 Ducta

Ducta enim recta ex B, per E, ſecante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta ſecante circumferentiam in C; dico ductam
n 16. ſex. *rectam BC, parallelam eſſe rectæ EF. Quia enim ita eſt EF, ad EA, vt EG, ad EH,* [n] *erit rectangulum ſub EF, EH, æquale re-*
o 35. ter. *ctangulo ſub EA, EG:* [o] *Eſt autem rectangulũ ſub EA, EG, æquale rectangulo ſub ED, EB. Igitur & rectangulum ſub EF, EH, eidẽ rectangulo ſub ED, EB, æquale erit: ac propterea ex ſcholio propoſ. 35. lib. 3. circa quatuor puncta*
p 21. tertij. *B, H, D, F, circulus poterit deſcribi.* [p] *Quare duo anguli HBD, & DFH, in eodem ſegmento DFBH, illius circuli,*
q 32. tertij. *cuius chorda eſſet ducta recta DH, æquales erunt.* [q] *Eſt autem angulus HBD, angulo C, in alterno ſegmẽto dati*
r 28. pri. *circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno.* [r] *Parallelæ ergo ſunt rectæ BC, EF. Quod eſt propoſitum.*

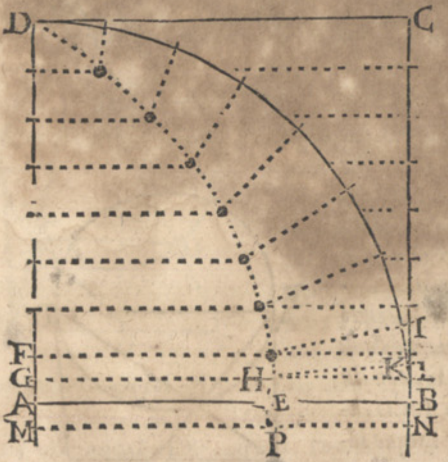


QVOD *ſi contingat, tangentem HB, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea BD, ſed AG, quæ in principio ducta eſt, propoſitum concludet, vt perſpicuum eſt in ſecunda figura.*

IAM *ſi ſolutio problematis inciperet à puncto F, non autem ab E, reperiretur idem omnino punctum D; quod nullo alio problema confici poſſit. Si enim ſumatur quodcunque aliud punctum I, prope D, inter D, & C, cadet recta FI, infra C, & EI, ſupra B. Recta ergo connectens ſectionum puncta rectam BC, ſecabit. Igitur vt ſupra dictum eſt, rectæ EF, parallela non erit. ſi punctum I, ſumeretur inter D, & B, caderet recta FI, ſupra C, & EI, infra B, &c.*

DE MIRABILI NATVRA LINEÆ CVIVSDAM INFLEXÆ, PER QVAM ET IN CIRCVLO FIGVRA QVOTLIBET laterum æqualium inſcribitur, & circulus quadratur, & plura alia ſcitu iucundiſſima perficiuntur.

FORTE *ſuperiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam vt ait Dioſtratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio* τετραγωνίζουσα *ab eiſdem appellata eſt, à nobis eadem de cauſa Quadratrix dicetur. Quanquam autem prædicti auctores huiuſmodi lineam conentur deſcribere per duos motus imaginarios duarum rectarum, qua in re principium petunt, vt propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ deſcribi non poſſit; nos tamen eam ſine illis motibus Geometricè deſcribemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in deſcriptionibus conicarum ſectionum fieri ſolet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic ſexto libro adiungendam eſſe cenſuimus; propterea quod beneficio huius lineæ problemata Geometrica ſcitu periucunda, & quæ ad hunc vſque diem deſiderata ſunt, ſumma facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus, reiiciendo tamen pleniorem Quadraturæ tractationem in noſtram Geometriam Practicam. Sic ergo deſcriptio lineæ Quadratricis fiet.*



IN *quadrato ABCD, deſcribatur quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam ſemidiameter AD, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus ſupremum CD, deorſum verſus æquabiliter quoque, ita vt quo tempore punctum D, circumferentiam DB, vniformi ſemper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu deſcendens ad latus AB, perueniat, ſic tamen, vt perpetuo lateri AB, ſit parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat; ſecabunt ſe continuè ſemidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorſum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem deſcribent, hoc eſt, per quæ linea Quadratrix tranſibit, cuiuſmodi eſt linea inflexa DE. Sed quia duo iſti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non poſſunt, niſi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, merito à Pappo deſcriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc ſit ea proportio, & quæ per hanc lineam inueſtiganda proponatur. Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem deſcribemus hoc modo. Arcus BD, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuiſio erit, ſi & arcus DB, & vtrumque latus AD, BC, ſecetur primum biſariam, deinde vtraque ſemiſſis iterum biſariam, & ſingulæ rurſum partes iterum biſariam, atque ita deinceps quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuiſiones, eo accuratius Quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem vitandam ſecuimus tam arcum DB, quàm duo latera AD, BC, in 8. partes æquales.*

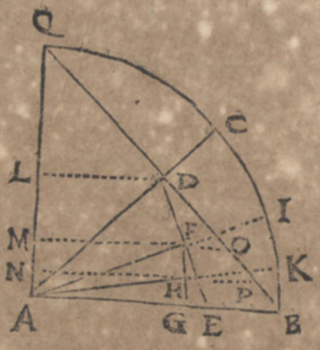
DEINDE *bina puncta laterum AD, BC, æqualiter diſtantia à latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad ſingula diuiſionum puncta Quadrantis DB, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas interſecabunt, prima primam, ſecunda ſecundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda eſt, ita vt non ſit ſinuoſa, ſed æquabiliter ſemper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis eſt linea inflexa DE, ſecans ſemidiametrum AB, in E.*

SED *quia punctum E, in latere AB, inueniri Geometricè non poteſt, cum ibi omnis ſectio rectarum ceſſet; vt illud ſine notabili errore, qui ſcilicet ſub ſenſum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem AF, lateris AD, ſi ſatis exigua non ſit, ſecabimus biſariam continue, donec infimã particula ſit perexigua: Eodemque modo infimam partem BI, arcus DB, biſariam continuè diuidemus, donec tot fiant ſubdiuiſiones, quot in parte AF, factæ ſunt, vt particula BK, talis pars ſit totius arcus DB, qualis pars eſt AG, totius lateris AD. Particulæ deinde AG, æquales abſcindemus BL, BN, AM, ducemusque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ ſecet GL, in H, puncto, quod accuratiſſimè notetur, ſumemus ipſi GH, æqualem MP. Si enim Quadratricem vſque ad H, deſcriptam continuabimus æquabili atque vniformi*

exten-

extenſione vſque ad P, ſecabit Quadratrix linea latus A B, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum GH, AE, MP, inter ſe diſtantiam, efficitur, vt ferme ſint æquales, licet Geometrice loquendo, recta AE, ſemper maior ſit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter ſe diſtent: ſed exceſſus ille circino deprehendi non poteſt. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectæ namque GL, AB, MN, ſi parum inter ſe diſtent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis vere AB, aliquanto maior ſit. Itaque ſi tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant diſtantiam inter ſe, dubitari non poteſt, punctum E, in quo Quadratrix linea ſemidiametrum AB, ſecat ab eo, quod vere in Quadratrice ibi exiſtit, non differre: dummodo puncta H, P, exquiſite, & ſumma adhibita diligentia inuenta ſint.

RECTAM porro AD, vocabimus latus Quadratricis, & rectam AE, eiuſdem, baſin, ac denique punctum A, centrum.



VERVM puncta Quadratricis prope baſem certius inueniemus, ſine interſectionibus linearum hoc modo. Ducta chorda B Q, in quadrante, ſecetur in D, bifariam. quod fiet ſi ex A, ad C, punctum medium Quadrantis recta ducatur A C. Hæc enim ex ſcholio propoſ. 26. lib. 3. rectam B Q, ſecabit bifariam. Deinde rectæ AD, ſumatur æqualis A E, iunctaque recta DE, ſecetur bifariam in F, quod etiam fiet, ſi ex A, ad I, punctum medium arcus B C, ducatur AI. Hæc enim chordam B C, (ſi duceretur) ſecaret bifariam, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. ac proinde & rectam D E, ex ſcholio propoſ. 4. huius, [a] cum chordæ B C, ſit parallela; propterea quod latera A B, AC, proportionaliter ſecantur in D, E, quippe cum tam AB, AC, quam AE, AD, æquales ſint. Rurſus rectæ AF, ſumatur æqualis AG; iunctaque F G, ſecetur bifariam in H. quod etiam fiet per rectam A K, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atque hoc modo ſi rectæ A H, æqualis ſumatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et ſic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipſi A B, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas ſectiones. [b] Eſt enim AD, ad QB, perpendicularis; & AF, ad DE; & AH, ad FG &c. Omnia verò hæc puncta inuenta D, F, H, &c. ſunt in Quadratrice; quod ita oſtendo. Ductis DL, FM, HN, ipſi AB, parallelis ſecantibus BD, in O, P; [c] erit vt BD, ad DQ, ita AL, ad LQ; ideoque & AQ, ſecta erit in L, bifariam. Sectus autem eſt & arcus BQ, in C, bifariam. Igitur, vt oſtenſum eſt, punctum D, eſt in Quadratrice. Rurſus quia DE, ſecta eſt bifariam in F; [d] erit quoque DB, ſecta bifariam in O; [e] ideoque erit vt FG, ad FD, ita BO, ad OD. Sed vt BO, ad OD, ita eſt AM, ad ML: Et vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC; quod vtrobique proportio ſit æqualitatis; erit igitur quoque, vt A M, ad M L, ita BI, ad IC. Ergo, vt oſtendimus, ſecabunt ſeſe AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio eſt de alijs punctis hac arte inuentis.

a 2. ſexti.
b 3. ter.
c 2. ſex.
d 2. ſex.
e 2. ſex.

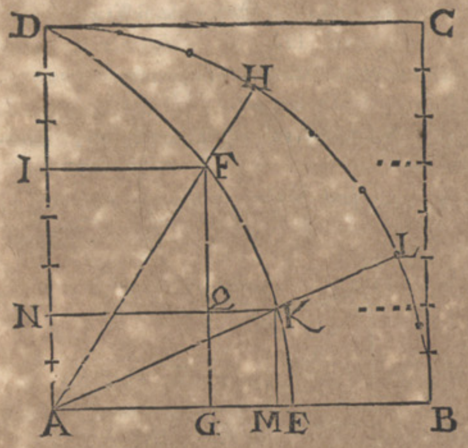
ESSE autem lineam hanc inflexam D E, à nobis per puncta deſcriptam Geometrice eandem, quam Dinoſtratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios deſcribi concipiebant, perſpicuum eſt. Nam ſi ſemidiameter A D, circa centrum A, per arcum D B, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus D C, deorſum fertur motu quoque vniformi; ſit vt, quando ſemidiameter A D, pertranſiuit quamcunque partem arcus D B, tunc latus D C, ſimilem partem laterum D A, CB, percurrerit: Alias aut duo illi motus non eſſent vniformes, aut non eodem tempore ad latus A B, tam ſemidiameter A D, quam latus DC, perueniret. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus D B, emiſſæ, & lineæ parallelæ per partes laterum D A, CB, ductæ, abſcindant ſemper ex arcu DB, & ex lateribus D A, CB, partes ſimiles, ex conſtructione, liquido conſtat, puncta lineæ inflexæ D E, à nobis Geometrice inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hæc igitur eſt deſcriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica quodammodo appellari poteſt, quemadmodum & conicarum ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen magis errori ſint obnoxiæ, quam noſtra deſcriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum deſcriptiones ſunt neceſſariæ, quibus in Quadratricis deſcriptione opus non eſt. Quare niſi quis totam ſectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus perſequutus eſt, vt propterea Magnus Geometra appellatus ſit. reiicere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum exiſtimo, cùm ſectiones conicas ad demonſtrationes adhibuerint præſtantiſſimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vſus eſt in duarum linearum mediarum proportionalium inter quaſuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipſe multa præclare de eiſdem ſectionibus conicis demonſtrauit: ac denique eiuſmodi ſectiones inſignem vſum habent in re Gnomonica, vt ex noſtra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur deſcriptionem hanc noſtram Quadratricis lineæ, eſſe quodammodò Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutiſſime inueſtigat, per puncta etiam deſcribitur, vt in libro de menſurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vſum nonnullis propoſitionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vſque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſim demittantur perpendiculares; & aliæ rectæ eidem baſi parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter ſemidiametros interiecti perpendicularibus, vel ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitis, proportionales.

EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturque ad baſim A E, perpendiculares F G, K M: & ducantur F I, K N, eidem A E, parallelæ. Dico, vt eſt totus arcus D B, ad arcum H B, ita eſſe totum latus D A, ad perpendicularem F G, vel ad ſegmentum I A, &c. Quia enim eadem pars eſt arcus D H, totius arcus D B, quæ pars eſt recta D I, totius lateris D A, vt ex deſcriptione lineæ Quadratricis manifeſtum eſt, ſiue ea cogitetur deſcripta duobus illis motibus proportionalibus Dinoſtrati, & Nicomedis, ſiue ea ratione, quam

nos præ-



nos præſcripſimus, cum in ea ſemper arcus DH, tot particulas totius arcus D B, complectatur, quot partes totius rectæ DA, recta DI, continet, propterea quod rectæ AH, IF, ſe interſecant in puncto F, Quadratricis: Neque hæc ſimilitudo impeditur, etiamſi tam arcus DH, toti arcui DB, quam recta D I, toti lateri D A, ſit incommenſurabilis, cum perpetuo Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si enim recta D I, non eſt talis pars ſiue commenſurabilis, ſiue incommenſurabilis, totius lateris D A, qualis pars eſt arcus DH, totius arcus DB, ſi cògitetur talis pars minor quam DI, vel maior, ſecabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectam AH, vel ſupra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt, ac proinde ea non tranſibit per F, quod eſt abſurdum & contra hypoteſim. Quia, inquam, eadem pars eſt arcus DH, totius arcus DB, quæ pars eſt recta DI, totius lateris D A; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius arcus D B, quæ pars eſt reliqua recta I A, totius lateris DA, Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus D A, ad rectam I A, hoc eſt, ad rectam

a34.pri. FG, [a] quæ ipſi I A, æqualis eſt, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam I A, vel FG, quam conuertendo, vt arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel I A, ad rectam D A, &c.

b34.pri. EADEM ratione erit, vt arcus DB, ad arcum LB, ita recta D A, ad rectam NA, ſiue ad K M, [b] quæ ipſi N A, æqualis eſt: Et vt arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectam NA, ſiue KM: Et vt arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur eſt, vt LB, ad DB, ita KM, ad DA: Et vt DB, ad HB, ita DA, ad FG, erit ex æquo, vt LB, ad HB, ita KM, ad FG. Et conuertendo, vt HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc eſt, ita I A, ad NA: Et diuidendo vt HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ, ad QG.

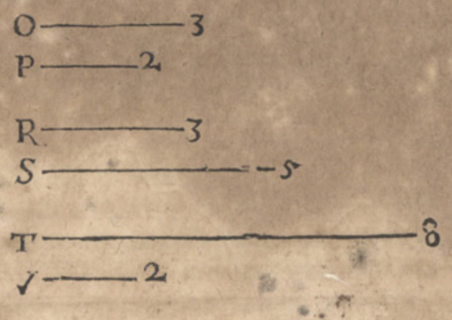
RVRSVS quia eſt vt DH, ad HB, ita DI, ad I A: Et vt HB, ad LB, ita I A, ad NA; erit ex æquo, vt DH, ad LB, ita DI, ad NA, ſiue ad KM. Semper ergo arcus inter ſemidiametros intercepti perpendicularibus, ſiue ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitis proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum.

I I.

DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.

SIT primum arcus H B, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta HA, ſecante Quadratricem in F, ducatur FI, baſi AE, parallela. Deinde recta I A, ita ſecetur in N, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt ſit IN, ad NA, quemadmodum O, ad P, ductaque NK, baſi AE, parallela ſecante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta ſecans arcum HB, in L. Dico arcum HB, in L, ſectum eſſe in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim, vt propoſ. 1. oſtendimus, vt HL, ad LB, ita eſt PN, ad NA. Eſt autem IN, ad NA, ex conſtructione,

a11. quin. vt O, ad P; [a] erit quoque HL, ad LB, vt O, ad P.



DEINDE totus Quadrans DB, ſecandus ſit in proportionem R, ad S. Diuiſa ſemidiametro DA, in I, vt ſit DI, ad I A, ſicuti R, ad S, ducatur IF, ipſi AE, parallela ſecans Quadratricem in F. Ducta igitur recta AFH, erit ex propoſ. 1. DH, ad HB, vt DI, ad I A, hoc eſt, vt R, ad S.

TERTIO ſit idem Quadrans DB, ſecandus in duos arcus, ita vt totus Quadrans ad vnum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, DA, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abſcindatur AN. Ducta autem NK, ipſi AE, parallela ſecante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L, ſectum eſſe, vt proponitur. Eſt enim ex propoſ. 1. DB, ad LB, vt DA, ad NA, hoc eſt, vt T, ad V.



QVARTO ſemicirculus ABC, diuidendus ſit in datam proportionem, videlicet in triplam. Secetur vterque Quadrans AB, BC, ſecundum datam proportionem triplam in E, F, & arcui AE, vel BF, æqualis abſcindatur arcus EG. Si igitur ex arcu communi ABC, æqualia demantur, nimirum duo arcus AE, BF, ſimul, & arcus AG; reliqua æqualia fient, nimirum duo arcus

b12.quin. EB, FC, ſimul, & arcus GC. Et quoniam eſt, vt AE, ad EB, ita BF, ad FC, [b] erunt AE, BF, ſimul ad EB, FC, ſimul, hoc eſt, arcus AG, ad arcum GC, vt AE, ad EB. Habet autem AE, ad EB, datam proportionem triplam. Igitur & arcus AG, ad arcum GC, eandem proportionem datam habebit.

QVINTO in eandem proportionẽ ſecandus ſit arcus ACD, tres Quadrantes continens. Diuiſis tribus Quadrantibus AB, BC, CD, in eam proportionẽ in E, F, H, ſumatur arcus EG, ipſi BF, & arcus GI, ipſi CH, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACD, demantur æqualia, nimirũ tres arcus AE, BF, CH, ſimul, & arcus ABI, reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus EB, FC, HD, ſimul. & arcus ID. Et

c12. quin. quia tres arcus AE, BF, CH, ad tres arcus EB, FC, HD, eandem habent proportionem; [c] habebunt omnes tres ſimul ad omnes tres ſimul, hoc eſt, arcus ABI, ad arcum ID, eandem proportionem, quam vnus arcus AE, ad vnum arcum EB, videlicet datam.

POSTREMO ſit eodem modo diuidendus arcus ACK. Diuiſis rurſus tribus quadrantibus, & arcu DK, vt proponitur, in E, F, H, L: ſumatur arcus EG, arcui BF, & arcus GI, arcui CH, & arcus IM, arcui DL, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACK, æqualia auferantur, videlicet quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ſimul, & arcus ABM, reliqua æqualia fient, quatuor ſcilicet arcus, EB, FC, HD, LK, ſimul, & arcus MK. Et quia quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ad quatuor arcus EB, FC, HD, LK,

eandem

eandem proportionem habent: [d] *habebunt omnes quatuor ſimul, ad omnes quatuor ſimul. id eſt, arcus ABM, ad arcum MK,* d 12. quin. *eandem proportionem, quam vnus AE, ad vnum EB, eam videlicet, quæ data eſt. Conſtat ergo id, quod proponitur.*

COROLLARIVM.

EX his facile quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRIPTO *namque arcu ex angulo dato, eoque arcu diuiſo, vt iubetur, ſi ex angulo ad punctum diuiſionis recta ducatur, erit angulus diuiſus, vt arcus:* [c] *cum ſit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro.* c 33. ſex.

QVOD *ſi arcus, vel angulus ſecandus ſit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui vna vnitate minor ſit numero partium propoſitarum. Vt ſi arcus BC, vel angulus BAC, diuidendus ſit in quinque partes æquales, ſecandus erit arcus BC, in G, in proportionem quadruplam. Nam GC, arcus erit quinta pars arcus BC, cui ſi quatuor æquales abſcindantur GF, FE, ED, DB, diuiſus erit arcus BC, in quinque partes æquales. Et ſi ex A, ducantur rectæ AG, AF, AE, AD, ſectus quoque erit angulus BAC, in quinque angulos æquales. Quod eſt propoſitum.*

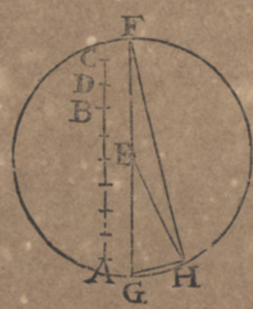


III.

ISOSCELES triangulum conſtituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT *data proportio rectæ AB, ad rectam BC. Diuiſa BC, in D, biſariam, & deſcripto ex centro E, circulo quantocunque FGH, ductaque in eo diametro FG; ſecetur ita ſemicircumferentia FHG, in H, vt eadem ſit proportio arcus FH, ad arcum HG, quæ rectæ AB; ad rectam BD, iunganturque rectæ HE, HG, HF. Dico Iſoſcelis trianguli EGH, vtrumque angulorum æqualium ad baſin GH, habere ad reliquum angulum GEH, proportionem datam AB, ad BC. Cum enim ſit vt AB, ad BD, ita arcus FH, ad arcum HG; Et vt arcus FH, ad arcum HG,* [a] *ita angulus FGH, ad angulum GFH;* [b] *erit vt AB, ad BD, ita angulus FGH, ad angulum GFH: Vt autem BD, ad BC, ipſius BD, duplam, ita eſt angulus GFH, ad angulum GEH,* [c] *qui duplus eſt anguli GEH. Igitur ex æquo erit, vt AB, ad BC, ita angulus EGH, ad angulum GEH. Quod eſt propoſitum.*

a 33. ſex.
b 11. quin.
c 10. tertij.



COROLLARIVM.

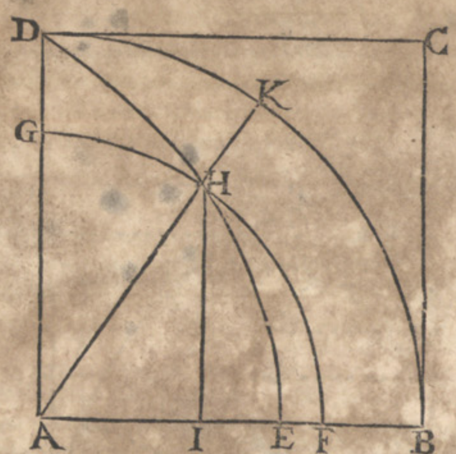
ITAQVE ſi conſtruantur triangula Iſoſcelia, in quibus anguli æquales ad baſim, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices ſeſquialteras, tum multiplices ordine, deſcribentur per priora omnes figuræ æquilateræ parium laterum, per poſteriora verò figuræ æquilateræ laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. oſtendimus.

IDEM efficiemus ſine huiuſmodi triangulis, ſi totam circumferentiam in tot æquales partes ſecemus, vt in coroll. proximè antecedente docuimus, quot latera anguloſue figura inſcribenda habere debet, &c.

IV.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum ſit, erunt arcus Quadrantis, ſemidiameter, & baſis Quadratricis continue proportionales.

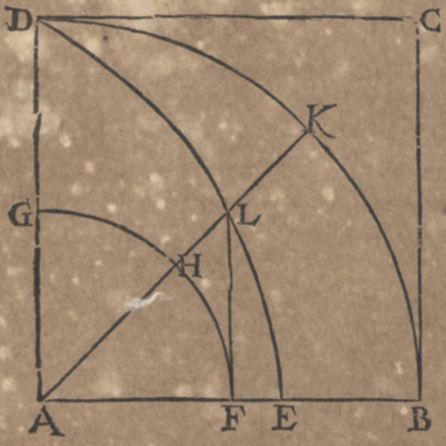
SIT *Quadrans, & Quadratrix ex eo deſcripta, vt ſupra. Dico arcum BD, ſemidiametrum DA, & Quadratricis baſin AE, continue eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe BD, ad DA, vt DA, ad AE. Sin minus, ſit vt BD, ad DA, ita DA, ad AF, maiorem ipſa AE, minoremue, ſitque primum AF, maior quàm AE. Deſcripto ex centro A, quadrante FG, per F, ſecante Quadratricem in H, ducatur per H, ſemidiameter AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam DA, vt DA, hoc eſt, vt AB, ad AF, eſtque vt AB: ſemidiameter ad ſemidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG, (Cum enim ſit ex Pappi demõſtrationibus, vt & nos in libro de menſurationibus oſtẽdemus, diameter ad diametrum, vt circumferentia circuli ad circumferentiam circuli;* [a] *erit quoque ſemidiameter AB, ad ſemidiametrũ AF, vt eadem circumferentia ad eandem circumferentiam;* [b] *ac proinde etiam vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc eſt, vt arcus BD, ad arcum FG.)* [c] *Erit quoque arcus BD, ad rectam DA, vt idem arcus BD, ad arcum FG.* [d] *ac propterea æquales erunt recta DA, & arcus FG. Quia verò ex theor. 1. eſt, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta DA, ad rectam HI; & vt arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG, ad arcum FH, quod arcus BD, BK, arcubus FG, FH, ſimiles ſunt, vt ſupra in hoc ſcholio oſtenſum eſt:* [e] *Erit quoque recta DA, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta DA, oſtenſa ſit arcui FG, æqualis;* [f] *erit quoque recta HI, arcui FH, æqualis. quod eſt abſurdum. Eſt enim recta HI, minor arcu FH, cum ea ſit ſemiſsis chordæ ſubtendentis arcum duplum arcus FH: (Nam recta AF,* [g] *ſecat eam chordam biſariam, ac proinde & arcum, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3.) chorda autem ſemper ſuo arcu minor ſit. Non ergo eſt arcus BD, ad ſemidiametrum DA, vt DA, ad rectam maiorem baſe AE, Quadratricis.*



a 15. quin.
b 15. quin.
c 11. quin.
d 9. quin.
e 11. quin.
f 14. quin.
g 3. ter.

SIT

SIT deinde, ſi fieri poteſt, AF, minor quàm AE. Deſcripto igitur ex centro A, per F, Quadrante FG, erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, ſecans Quadraticem in L, puncto, per quod ſemidiameter ducatur ALK, ſecans arcum FG in H. Oſtendemus ergo, vt prius, arcum FG, rectæ DA, æqualem eſſe: Item ita eſſe arcum BD, ad arcum BK, hoc eſt, arcum FG, ad arcum FH, vt eſt recta DA, ad rectam LF. Quare cum arcus FG, oſtenſus ſit æqualis rectæ DA, erit quoque arcus FH, æqualis rectæ LF. Quod eſt abſurdum. Eſt enim recta LF, maior arcu FH: Nam ſi ex L, duceretur verſus G, alia recta tangens circulum FG, ſicut LF, eundem tangit in F, eſſent hæ tangentes æquales, ex ſchol. propoſ. 36. lib. 3. arcusque inter eas interceptus ſecaretur bifariam in H, propterea quod ex ſchol. propoſ. 37. lib. 3. angulus ab eis comprehenſus bifariam diuideretur, [h] ac proinde & angulus in centro A, ſi ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: [i] ideoque & arcus quibus inſiſtunt, æquales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, duæ illæ tangentes ſimul maiores ſint arcu ab eis comprehenſo, erit & earum ſemiſſis LF, maior ſemiſſe FH, illius arcus. Non eſt ergo arcus BD, ad ſemidiametrum DA, vt DA, ad rectam minorem baſe AE, Quadratricis: Sed neq; vt DA, ad maiorem, vt oſtenſum eſt. Igitur vt DA, ad ipſam baſin AE. Quod eſt propoſitum.



h 4. vel 8. prim.
i 26. ter.

COROLLARIVM I.

HINC facile reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius quadrans eſt BD, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, æqualem.

QVONIAM enim eſt arcus BD, ad DA, vt DA ad AE: erit conuertendo quoque AE, ad DA, vt DA, ad arcum Quadrantis BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; [k] erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraque proportio ſit eadem, quæ AE, ad AD. [l] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et ſi duplicetur, fiet recta æqualis ſemicircumferentiæ eiuſdem circuli; ſi vero quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod ſi arcui BK, qui minor eſt quadrante, inuenienda ſit recta æqualis; fiat vt DA, ad perpendicularem LF, ex L, ad AB, demiſſam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentaq; erit quarta hæc recta æqualis arcui BK. Nam cum ſit ex theor. 1. vt DA, ad perpendicularem LF, ita arcus DB, ad arcum BK; [m] erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineã inuentam, vt arcus DB, ad arcum BK: Eſt autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis DB. [n] Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui BK. Si vero arcui, qui maior ſit quadrante, inuenienda ſit recta æqualis, reperienda primum erit recta æqualis Quadranti, vel ſemicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante eſt. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui propoſito æquales.

k 11. quin.
l 9. quinti.
m 11. quinti.
n 14. quin.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, ſi baſis Quadratricis AE, ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli, eius latus AD, Quadranti eiuſdem circuli eſſe æquale, & lineam lateris duplam eſſe æqualem circumferentiæ eiuſdem circuli; & lineam quadruplam toti circumferentiæ eſſe æqualem.

CVM enim vt ſupra ex Pappo diximus, ſemidiametri circumferentijs circulorum, atque adeo & quadrantibus ſint proportionales; erit vt DA, ad AE, hoc eſt, vt tertia illa proportionalis ad DA, ita Quadrans BD, ad Quadrantem ſemidiametri AE. Eſt autẽ tertia illa proportionalis æqualis Quadranti BD, vt oſtenſum eſt: [o] Igitur & recta DA, Quadranti ſemidiametri AE, æqualis erit. Dupla linea ergo ipſius DA, ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter AE; & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.

o 14. quin.

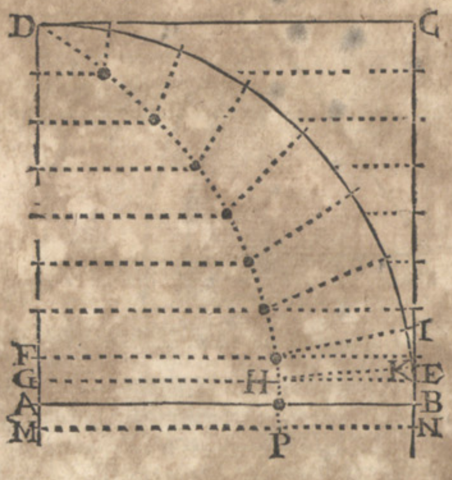
EADEM ratione, ſi duæ rectæ eandem proportionem habeant, quam DA, AE, & minor ponatur ſemidiameter alicuius circuli, oſtendetur maior æqualis quadranti illius circuli, &c. Sit enim vt DA, ad AE, ita recta aliqua B, ad rectam C. Eritque permutando, vt DA, ad B, ita AE, ad C. Vt autem AE, ad C, ita eſt quadrans ſemidiametri AE, ad quadrantem ſemidiametri C, vt ſupra ex Pappo dictum eſt. Igitur erit quoque vt DA, ad B, ita quadrans ſemidiametri B, ad quadrantem ſemidiametri C. Cum ergo DA, æqualis ſit, vt oſtenſum eſt, quadranti ſemidiametri AE, [p] Erit quoque B, æqualis quadranti ſemidiametri C. Quod eſt propoſitum.



p 14. quin.

SED ſi lubeat per numeros explorare, quam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem eſt) ſemicircumferentia ad ſemidiametrum, [q] cum ſit vt circumferentia ad diametrum, ita ſemicircumferentia ad ſemidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem DB, in figura, in qua Quadratricem deſcripſimus, diuiſum eſſe in grad. 90. & ſingulos gradus in Min. 60. vt totus arcus DB, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem æquales particulas diuiſum eſſe, erit parallela ex vltima particula vſque ad Quadratricem educta ferme æqualis baſi AE, ob exiguam diſtantiam illius parallelæ, & baſis AE, cum in ea figura parallela quoque GH, auferens AG, particulam ſextamdecimam, quæ $\frac{1}{16}$ multò maior eſt quàm $\frac{1}{5400}$ vix à baſe AE, ſuperetur: ita vt ſine errore notabili eam parallelam pro baſe accipere poſſimus. Quia verò vltima illa particula lateris DA, eſt ſinus arcus Min. 1. & parallela illa ſinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt conſtat, ſi ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturque recta AH. Nam GH, erit ſinus anguli GAH, grad. 89 Min. 59. ac proinde AG, ſinus anguli AHG, Min. 1. poſito ſinu toto AH, vt in tractatione Sinuum oſtendimus. Si igitur ſinus totus AH, ſtatuatur 10000000. (Ita enim exquiſitius proportio optata inuenietur, quam ſi ſinus totus ponatur tantum 100000. cum in hoc ſinus grad. 89. Min. 59. à

q 15. quin.



99;à ſinu toto non differat) erit AG, 2909 & GH, 9999999 .at totum latus DA, earundem partium erit 15708600. vt conſtat ſi 5400. particulæ lateris DA, ducantur in vnam AG, quam diximus eſſe 2909. Duplum ergo lateris DA, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propoſ. 4. duplum lateris DA, æquale eſt ſemicircumferentiæ, cuius ſemidiameter AE; erit proportio ſemicircumferentiæ illius ad ſemidiametrum AE, eadem fere, quæ numeri 31417200. ad 9999999. denominata à $3\frac{1417703}{9999999}$. hoc eſt, in minimis terminis, à $3\frac{157467}{1111111}$. quæ proportio minor eſt, quam tripla ſeſquiſeptima, ſiue tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas, maior autem, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferentiæ ad diametrum conſiſtit, vt ab Archimede demonſtratum eſt.

Itaq; vt recta linea circumferentiæ circuli inueniatur æqualis, ſatis eſt punctum E, inuenire, etiamſi tota linea Quadratrix non ſit deſcripta. Vt autem arcus, vel angulus in datã proportionem ſecetur, non indigemus puncto E, vt perſpicuũ eſt.

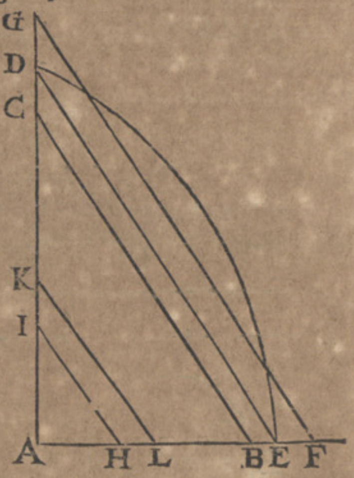
V.

DATO circulo quadratum æquale conſtituere.

QVONIAM Archimedes demonſtrauit circulum quemcunque æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum ſemidiametro circuli, alterum vero circumferentiæ eiuſdem æquale eſt; atque hinc nos propoſ. 4. figurarum Iſoperimetrarum in commentariis in ſphæram oſtendimus, eundem circulum rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & ſemicircumferentia, æqualem eſſe: ſi ex coroll. præcedentis propoſ. inueniatur linea recta æqualis ſemicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento ſub illa recta, & ſemidiametro [a] conſtruatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale. a 14. ſecun.

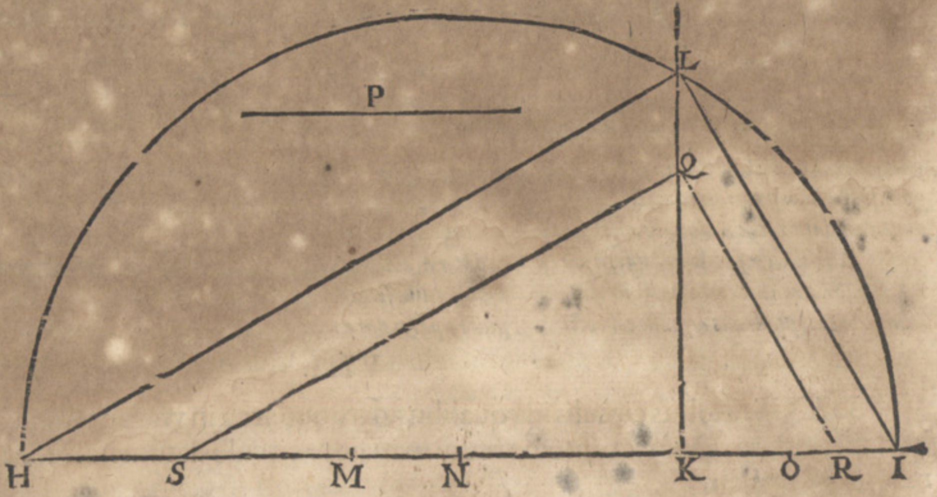
INVENIETVR autem recta æqualis ſemicircumferentiæ, vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, [b] ſi fiat vt baſis Quadratricis deſcriptæ ad eiuſdem latus, ita ſemidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præcedentis propoſ. diximus, atque adeo duplicata efficiet lineam ſemicircumferentiæ æqualem, quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit. b 12. ſexti.

VERVM vt expeditius quilibet circulus poſſit quadrari, conſtruendæ erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptiſſimæ hoc modo. Conſtituatur angulus rectus DAE, ſitq; AD, æqualis ſemidiametro Quadrantis ex quo Quadratrix deſcripta eſt, & AE, baſi eiuſdem Quadratricis æqualis; Vel ex centro A, noua Quadratrix deſcribatur DE, cuius latus AD, & baſis AE. Ducta autem recta DE, conſtructum erit vnum inſtrumentum circulis quadrandis aptiſſimum. Si enim circuli quadrandi ſemidiameter æqualis ſit rectæ AE, erit recta AD, circumferentiæ Quadrantis eiuſdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propoſ. liquet. Si autem ſemidiameter minor ſit, quam AE, abſcindemus ei æqualem AB, parallelamque ipſi DE, agemus BC. Si deniq; ſemidiameter ſit maior, quam AE, abſcindemus ei æqualem AF, ex AE, producta, & per F, ipſi DE, parallelam agemus FG. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propoſ. recta AC, æqualis circumferentiæ Quadrantis, cuius ſemidiameter AB: Recta vero AG, circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius ſemidiameter AF: [c] propterea quod eſt, vt AE, ad AD, ita tam AB, ad AC, quam AF, ad AG.

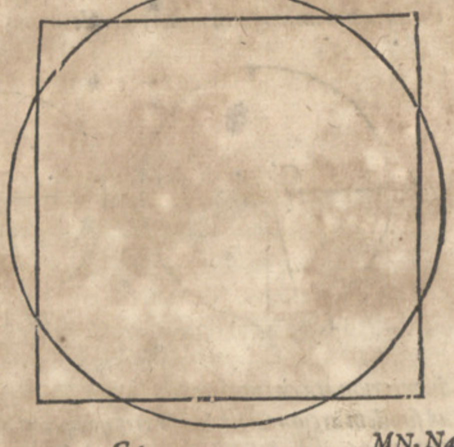


c 2. vel 4. ſexti.

DEINDE ducta recta HI, cuiuſcunq; longitudinis, excitetur ad eam perpendicularis quantacunq; KL; paratumque erit alterum inſtrumentum quadrandis circulis accommodatum.



PER duo hæc inſtrumenta nullo negotio quemcunque circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrãdus circulus, cuius ſemidiametro in priori inſtrumẽto æqualis ſit recta AB, & per B, ipſi DE, parallela agatur BC. In poſteriori vero inſtrumento ſumantur duæ KM, MH, ipſi AC, æquales, & recta KI, ſemidiametro AB, æqualis. Diuiſa autem tota recta HI, bifariam in N, deſcribatur ex N, ad interuallum NH, vel NI, ſemicirculus ſecans perpendicularem KL, in L. Dico quadratum ex KL, circulo dato, cuius ſemidiameter AB, in priori inſtrumento, vel KI, in poſteriori, æquale eſſe. Quoniam enim KL, media proportionalis eſt inter KH, KI, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. [d] erit quadratum ex KL, rectangulo ſub KH, KI, æquale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato ſit æquale, vt ad initium huius propoſ. diximus, quod KH, ſit æqualis ſemicircumferentiæ, & KI, ſemidiametro; erit quoq; idem quadratum ex KL, dato circulo, cuius ſemidiameter AB, vel KI, æquale. Si igitur quadratum rectæ KL, deſcribatur, & ex eius centro ad interuallum AB, in priori inſtrumento, vel KI, in poſteriori circulus deſcribatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in appoſita figura apparet.



d 17. ſeptimi.

Cæterum diuiſio rectæ HI, in poſteriori inſtrumento in duas partes æquales facile ſic fiet. Diuiſa ſemidiametro KI, bifariã in O, (hæc enim quia minor eſt, quam HI, facile bifariam ſecabitur) accipiatur recta KO, æqualis

MN. Nam N, punctum erit medium rectæ HI. Cum enim æquales ſint MN, OI; addita communi NO, erit NI, ipſi MO, æqualis: Eſt autem MO, ipſi HN, æqualis (quia enim æquales ſunt HM, MK; additis æqualibus MN, KO, totæ æquales fient HN, MO. Igitur & NI, ipſi HN, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem deſcribere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in poſteriori inſtrumento antecedentis propoſ. ex perpendiculari KL, abſcindatur æqualis KQ. Propoſito autem quouis circulo, cuius ſemidiameter KI, inueniatur per antecedentem propoſ. ei quadratum æquale, cuius latus KL. Deinde ducta recta LI, agatur ei parallela QR. Dico circulum, cuius ſemidiameter KR, æqualem eſſe quadrato, cuius latus KQ, vel P. Inuenta namq; per propoſ. antecedentem recta KH, quæ ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter KI, ſit æqualis, ductaq; recta LH, agatur ei parallela QS. Quoniam igitur, ob triangulorum ſimilitudinem, eſt vt HK, ad KL, ita SK, ad KQ: & vt KL, ad KI, ita KQ, ad KR: erit ex æquo, vt HK, ad KI, ita SK, ad KR. Cum ergo HK, æqualis ſit ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter KI. erit quoque ex coroll. 2. propoſ. 4. SK, æqualis ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter KR. Quia vero KQ. ex coroll. propoſ. 8. huius lib. media proportionalis eſt inter SK, KR, quod angulus RQS,
a 29. primi. rectus ſit [a] quippe cum eius partes RQK, SQK, partibus ILK, HLK, recti anguli HLI, æquales ſint: (Nam [b] angulus HLI, rectus
b 31. tertij. eſt, cum ſit in ſemicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propoſ. qua KL, media proportionalis inter HK, KI, reperitur) [c] erit
c 17. ſexti. quadratum ex KQ, æquale rectangulo ſub SK, KR, hoc eſt, circulo, cuius ſemidiameter KR, hoc eſt, circulus ſemidiametri KR, æqualis eſt quadrato lateris KQ vel P. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonſtrata ſunt, conſtruemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contra cuicunq; circulo figuram rectilineam æqualem conſtituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque ſi-
d 14. ſecun. milis ſit. Nam ſi datæ figuræ rectilineæ d deſcribamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem conſtituamus, ex propoſ. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.
e 25. ſexti. RVRSVS ſi per propoſ. 5. dato circulo quadratum æquale conſtruamus, huic autem quadrato e conſtituamus figuram rectilineam æqualem, & ſemilem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea conſtituta, dato circulo æqualis. Quod eſt propoſitum.

VII.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circumferentiæ dati circuli æqualis, docuimus propoſ. 5. nunc autem, vt viciſſim rectæ datæ lineæ circumferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia æqualis inuenienda eſt. Deſcripto quouis circulo BC, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E, quod facile ita fiet. In priori inſtrumento propoſ. 5. ſumatur AH, æqualis ſemidiametro BD, deſcripti circuli, & per H, agatur ipſi DE, parallela HI. Nam AI, quadruplicata dabit rectam E, circumferentiæ circuli BC, æqualem, vt propoſ. 5. diximus. Deinde trib rectis E, A, BD, inueniatur quarta proportionalis FG, atq; ex G, ad interuallum GF, circulus deſcribatur FH. Dico eius circumferentiam datæ rectæ A, æqualem eſſe. Cum enim ſit, vt E, ad A, ita BD, ad FG; hoc eſt, [a] ita tota



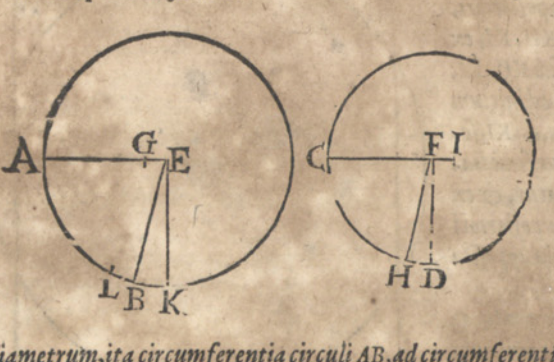
a 15. quint. diameter circuli BC, ad totam diametrum circuli FH: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circumferentia BC, ad cir-
b 11. quint. cumferentiam FH, vt Pappus demonſtrauit: [b] erit quoq; vt E, ad A, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH. Cum er-
c 14. quint. go E, facta ſit æqualis circumferentiæ BC; [c] erit & recta A, circumferentiæ FH, æqualis, hoc eſt, circumferentia circuli FH, inuenta eſt datæ rectæ A, æqualis. Quod eſt propoſitum.

ALITER, & facilius. Quartæ parti rectæ datæ A, accipiatur æqualis AK, in priori inſtrumento propoſ. 5. & per K, agatur KL, ipſi DE, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius ſemidiameter AL, æqualis erit datæ rectæ A; propterea quod eius circumferentiæ quadrans æqualis eſt rectæ AK, quartæ parti datæ rectæ A, vt propoſ. 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abſcindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non eſſe maiorem circumferentia minoris circuli.

SINT duo circuli inæquales AB, CD, quorum centra E, F, & ſemidiametri AE, CF, ſitque AB, maior & CD, minor. Datus autem primum ſit in minori circulo arcus CD, cui æqualis abſcindendus ſit ex maiore. Quoniam circulus AB, circulo CD, maior eſt, erit & ſemidiameter AE, ſemidiametro CF, maior. Abſcindatur ergo AG, ipſi CF, æqualis, ſeceturq; arcus CD, ita in H, ex propoſ. 2. vt eadem ſit proportio arcus CH, ad arcum HD, quæ rectæ AG, ad rectam GE, arcuiq; CH, ſimilis auferatur arcus AB, quod facile fiet, ſi ducta recta FH, angulo CFH, æqualis fiat angulus AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, æqualem eſſe. Quoniam enim eſt, vt AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et conuertendo, vt EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoq; AE, ad AG, hoc eſt, ad CF, ipſi AG, æqualem, vt arcus CD, ad arcum CH. Eſt autem, vt AE, ſemidiameter ad ſemidiametrum CF, [a] hoc eſt, vt tota diameter ad totam



a 15. quint. diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, vt Pappus demonſtrauit, hoc eſt, ita arcus AB, ad
b 11. quint. ad ſimilem arcum CH. [b] Igitur erit quoque vt arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcum CH; ac proinde arcus
c 9. quinti. CD, AB, [c] æquales inter ſe erunt. Quod eſt propoſitum.

DATIS

DATVS deinde ſit in maiore circulo arcus AB, non maior, quam circumferentia circuli CD, minoris, ex quo arcui AB, æqualis arcus abſcindendus eſt. Quoniam circulus AB, maior eſt circulo CD, erit & ſemidiameter AE, ſemidiametro CF, maior. Producta ergo CF, ad I, vt CI, ipſi AE, ſit æqualis; ſecetur per propoſ. 2. arcus AB, in L, vt eadem ſit proportio AB, ad BL, quæ CF, ad FI; arcuique BL, ſumatur æqualis arcus BK, ac toti arcui AK, ſimilis auferatur CD, quod facile fiet, ſi ducta recta EK, angulo AEK, angulus CFD, æqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, æqualem eſſe. Quoniam enim eſt, vt CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcum BL, id eſt, ad arcum BK, ipſi BL, æqualem; erit componendo quoque, vt CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcū BK: Et per conuerſionem rationis, vt CI, ad CF, hoc eſt, vt AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB: Eſt autem, vt ſemidiameter AE, ad ſemidiametrum CF, [d] *hoc eſt, vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonſtratis à Pappo, circumferentia circuli* d 15. quin.
AB, ad circumferentiam circuli CD, id eſt, ita arcus AK, ad arcum ſimilem CD. [e] *Igitur erit etiam, vt arcus AK, ad arcum* e 11. quinti
AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, proptereaq; arcus AB, CD, [f] *æquales erunt inter ſeſe. Quod eſt propoſitum.* f 9. quinti.

BREVIVS. Arcui CD, reperiatur æqualis recta, per coroll. 1. prop. 4. Quadratricis; & huic rectæ æqualis arcus AB, vt in ſequenti coroll. 1. dicetur. Eodem pacto arcui AB, reperiatur recta æqualis, vt huic rectæ æqualis arcus CD: factumque erit quod iubetur.

COROLLARIVM I.

EX his, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, cuiuis datæ rectæ abſcindi poſſe ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non ſit, quam recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum ſupra oſtenſum eſt in coroll. 1. propoſ. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri poſſe rectam æqualem, hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulo ante in coroll. 1. propoſ. 4. oſtendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & ſi quidem hęc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectę lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quam data recta linea; ſecetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propoſ. 2. ita vt quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quā inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cum ſit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abſciſſum; ſit autem recta inuenta quadranti æqualis, *g* erit quoque data linea recta arcui abſciſſo æqualis. g 14. quin.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quam recta linea data; ſumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentiæ ſemicirculi ſit æqualis. Nam ſi hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia ſemicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quam data linea recta, ſecetur ſemicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt ſemicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quā dupla illa recta linea ad datam rectam. Quod quidem facile fiet, ſi datæ rectæ ex dupla illa linea recta abſcindatur æqualis, & ſemicircumferentia ſecetur, per propoſit. 2. vt ſecta eſt recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abſciſſam, hoc eſt, ad datam rectam, ita tota ſemicircumferentia ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cum enim ſit, vt dupla illa recta ad rectam datam, ita ſemicircumferentia ad eum arcum; ſit autem recta illa dupla æqualis ſemicircumferentiæ; *b* erit quoque data recta illi h 14. quin.
arcui æqualis.

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quam data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli eſt æqualis, vt tota recta compoſita æqualis ſit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam ſi hæc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

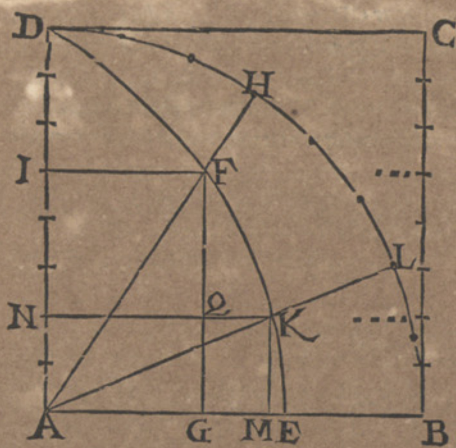
SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quam recta linea data, ſecetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propoſ. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam, quod facile etiam fiet, ſi datæ rectæ ex tripla illa linea recta abſcindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum ſecetur, per propoſ. 2. vt recta illa tripla ſecta eſt. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim eſt, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum; eſtque tripla illa recta circumferentiæ trium quadrandum æqualis; *i* erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abſciſſo. i 14. quint.

DENIQVE ſi tripla illa linea recta fuerit minor, quam data recta linea, addatur ei rurſus prior linea inuenta quadranti æqualis vt tota recta compoſita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

AT vero ſi illa linea quadrupla maior fuerit, quam data recta linea, (minor eſſe non poteſt: alioquin data recta eſſet maior, quam circumferentia dati circuli, quod eſt contra hypotheſin) ſecetur tota circumferentia in duos arcus, ex propoſ. 2. vt ad vnum eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam, quod facile etiam fiet, ſi ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli ſecetur, vt quadrupla illa recta eſt ſecta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ erit ęqualis. Cum enim ſit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abſciſſum; ſit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; *k* erit quoque data recta linea arcui k 14. quin.
abſciſſo æqualis.

ALITER, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. propoſ. 4. Quadratricis, vel ex propoſ. 5. eiuſdem, recta æquali circumferentiæ dati circuli, abſcindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propoſ. 2. ſecetur, vt ſecta eſt inuenta illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abſciſſum. Cum ergo tota illa recta ſit æqualis toti circumferentiæ, *l* erit quoque data recta arcui abſciſſo æqualis. Quod eſt propoſitum. l 14. quint.

COROLLARIVM. II.



EX iis quoque, quæ dicta ſunt, inferri poteſt, tam arcus, quam angulos rectilineos reperiri incommenſurabiles inter ſe. Sit enim arcus HB, & angulus rectilineus HAB. Dico tam arcum HB, ſecari poſſe in duos arcus inter ſe incommenſurabiles, quam angulum HAB, in duos angulos incommenſurabiles inter ſe. Deſcripta enim Quadratrice DE, quæ rectam HA, ſecet in F, ducatur per F, baſi AE, parallela FI. Deinde inuentis duabus rectis inter ſe incommenſurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. ita vt IN, ad NA, eandem proportionem habeat, quam duæ rectæ inuentæ; atque adeo IN, NA, incommenſurabiles quoque ſint. Ducta autem recta NK, ipſi AE, parallela, quæ Quadratricem ſecet in K, ducatur ex centro A, per K, recta ſecans arcum HB. in L. Dico tam arcus HL, LB, quam angulos HAL, LAB, inter ſe eſſe incommenſurabiles. Quoniam enim per propoſ. 1. eſt vt IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: ſunt autem IN, NA, incommenſurabiles; erunt & arcus HL, LB,
d 33. *ſexti.* incommenſurabiles. Dum ergo ſit quoque, *d* vt arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL, ad angulum LAB, erunt etiam anguli HAL, LAB, incommenſurabiles inter ſe. Quod eſt propoſitum.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS eſt, ſecundum quam vnumquodq; eorum, quæ ſunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana verſatur; reſtabat altera ſolidorum. Verum ante ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus diſſerere, quod ad propietates corporum plurimorum, eorumq; maxime, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atq; vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, vt abſque eis ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neq; ſuis numeris abſoluta, Huc accedit, quod abſque eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quam ſolidorum, ſi Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vſum, neque exprimi queant, neque intelligi. Nam non raro pleraque laterum ſunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι à Latinis Irrationales appellantur: Vel, ſi non ſunt Irrationales, longitudine certe inter ſe ſunt incommenſurabiles, atque adeo ſub menſuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atque intelligentia cum numeris eſt implicata, & coniuncta, vt abſque his nullo modo cognoſcantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ ſuus ordo, ratioque conſtaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectioneſque, quantum eæ rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exæquatur.

INCIPIENS igitur more ſuo à principiis, definit initio vnitatem, docetque eam eſſe, ſecundum quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum eſſe dicitur. Nam ſecundum vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere ſolemus. Cæterum vnitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus compoſita multitudo.

CVM numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus compoſita, manifeſtum eſt, numerum quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes: Ita vt vnitas ſit pars cuiuſuis numeri denominata ab ipſo numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur, quarum qualibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

EX his ſequitur, omnes numeros, quotcunq; ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cum eos vna eademque menſura, nimirum vnitas, vt dictum eſt, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cum plurimæ earum menſuram communem non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, vt clariſſime lib. 10. oſtendetur.

III.

PARS eſt numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON eſt diſſimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ expoſuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc ſolum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille ſingulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8, cum illum ſinguli hi metiantur, vt perſpicuum eſt.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen ſibi ſumit, per quem ipſa numerum, cuius pars eſt, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit ſeptima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IV.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, ſed partes appellari: cuiuſmodi eſt numerus 5. ſi conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum non metiatur, niſi per ſuas vnitates, pars ipſius dici non debeat; aptæ tamen congruenterq; partes poterit appellari, quod quinq; contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars eſt numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido conſtat, Euclidem nomine partis intellexiſſe partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin ſuperuacanea eſſet hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quæcunq; nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum menſura vtrumq; eorum metitur, & eum ſcilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt ſi communis duorum numerorum menſura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes ſunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum menſura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus ſex decimas eiuſdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis menſura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto, & de reliquis.

QVOD ſi roges, cur Euclides hoc loco non ſolum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars eſt, verum etiam illum, qui partes: non autem idipſum quinto lib. in magnitudinibus præſtiterit; Neq; enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorē non metitur, partes appellauit; ſed tantum eam, quæ maiorem metitur partē. Reſpondemus, huius rei cauſam eſſe, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars eſt, aut partes, vt propoſ. 4. huius lib. oſtendetur; pars quidem, cum ipſum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter ſe res habet. Non enim propoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus, neceſſario minor aut pars, aut partes eſt maioris, cum eæ perſæpe ſint incommenſurabiles, vt aperte liber decimus demonſtrabit, atq; adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam ſolum in magnitudinibus commenſurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, ſi illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille ſolum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoq; ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor eſt pars, ſit viciſſim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars eſt numeri 30. & hic illius multiplex eſt, &c. Si vero maiorem minor non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex eſſet, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et viciſſim, ſi maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur. Nam ſi metiretur minor maiorem, eſſet per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus eſt, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, ſiue in duas partes æquales, cum eorum dimidia ſint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

OMNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perſpicue colligi poteſt, vnitatem in numeris prorſus eſſe indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atq; adeo bifariam diuidi poſſet. Nam huius imparis 11. dimidia pars eſſent quinque vnitates & ſemis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par eſt, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiuſmodi eſt numerus hic par 32. metitur enim ipſum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD ſi numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis eſt par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CÆTERVM ſi recte duæ proximæ definitiones expendantur, perſpicuum erit fieri poſſe, vt vnus idemq; numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoq; impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdum, vt excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderunt vtriq; definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, ſecundum eos, ſit, quem par

numerus

numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propoſitus numerus par 24. neq; pariter par ſit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparem 3. Neq; puriter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturã vtriuſq; vt conſtat. Itaque tria conſtituentur genera numeri paris inter ſe maxime diuerſa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui à quibuſdam, pariter par & impariter appellatur. Verum tamen hæc omnia vera quidem ſunt, & ex ſententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis inſtituto, vt perſpicuum eſt & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio iſta, tantum, quam illi apponunt, & ex propoſ. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeſte omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum deniq;, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonſtratque omnes numeros à binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantum, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros deniq;, qui nec à binario dupli ſunt, nec dimidios habent impares, pariter pares eſſe, & pariter impares, vt ſunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaq; vult Euclides in demonſtrationibus illarum propoſitionum, hos poſtremos numeros, alioſq; ſimiles, vere eſſe ſecundum traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi ſint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus eſt, quam impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar, dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neq; pariter impar, neque impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus primus; quales ſunt omnes iſti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur, Primus dicitur; ita quoq; duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15. 8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. poſteriorem vero iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum vtrumque metitur, ſed ſola vnitas vtriuſque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter ſe dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quamquam poſtremi duo habeant communem menſuram hunc num. 5. Deniq; vnitas, & quiuis numerus, dici poſſunt, licet improprie; numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quem numerus quiſpiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compoſitum, cuiuſmodi eſt hic 15. Nam eum vterq; horum numerorum 3. 5. metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam menſura communis, metitur, dicuntur inter ſe compoſiti, licet non quilibet ſit compoſitus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quiſpiam metitur, compoſitus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compoſiti inter ſe ſunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis menſura, metitur. Ita etiam inter ſe compoſiti erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & ſeipſum, & reliquos duos metitur, licet per ſe ſumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. ſexties fuerit compoſitus, toties nimirum, quot ſunt in multiplante 6. vnitates, procreatuſq; fuerit numerus 48. Ita quoq; viciſſim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. ſi numerum 6. octies ſumpſerimus, toties ſcilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimuſque eundem numerum 48. Eadem deniq; ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic ſumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaq; numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione num. 7. in num. 9. vel è contrario. Et ſic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet, ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus ſit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium eſt vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaq; multiplicatio ſiue ductus vnius numeri in alium ita quoq; deſcribi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, eſt inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, ſiue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita ſe habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda eſt hæc alia docens quid ſit numerum diuidere numerum: quippe quæ neceſſaria omnino ſit ad ea, quæ nos in iis, quæ ſequuntur, ſumus demonſtraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui ſuis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiſo continetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum ſumptus fuerit numerus 8. qui octo ſuis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoq; viciſſim num. 8. diuidere dicetur eundem num. 48. ſi acceptus fuerit num. 6 qui ſex ſuis vnitatibus indicat diuidentem num. 8. in diuiſo 48. contineri ſexies.

HINC fit, numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus ſuis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiſo contineatur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad vnitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque Diuiſio vnius numeri per alium ita quoq; poterit deſcribi.

DIVISIO numeri per numerum, eſt inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuiſus ad diuidentem.

ITA vides ex diuiſione num. 48. per 6. procreari num. 8. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48. per 8. produci num. 6. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoq; efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A, per B. procreetur numerus C, Dico numerum A, gigni, ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim

A, 48. B, 8. C, 6. D, 1.

ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad B, vt C, ad vnitatem D; Ex definitione autem diuiſionis, ita quoq; ſe habet A, ad B, vt C, ad vnitatem D; perſpicuum eſt, numerum ex C, in B, genitum eſſe numerum A; cum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.

HÆC omnia conueniunt quoq; numeris fractis, & integris cum fractis: Id eſt, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (ſiue fracti adhæreant integris, ſiue non) multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiſo continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuiſione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuiſus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compoſitus, quot ſunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatuſq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per ſui ſemiſſem duntaxat eſt in $\frac{1}{2}$. ſumendus eſt numerus 20. per ſemiſſem quoque ſui, quæ eſt 10. Ita quoque viciſſim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. ſi $\frac{1}{2}$. ſumptus fuerit vicies, toties ſcilicet, quoties vnitas eſt in 20. productuſq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem eſſe proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita eſſe 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. ſe mutuo multiplicare dicentur quando $\frac{1}{2}$. ſumptus fuerit per tertiam ſui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantũ continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. ſumptus fuerit per ſui ſemiſſem, quia & $\frac{1}{2}$. ſemiſſem tantum continet vnitatis. Vtroq; autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars eſt numeri $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{3}{6}$. & ſemiſſis numeri $\frac{1}{3}$. ſiue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda ſit, in Arithmetica docuimus, demonſtrabimuſq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum ſumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiſo numero 10. ita vt eadem proportio ſit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuiſi 10. ad diuidentem

dentem $\frac{1}{2}$. Sic quoq; $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{6}$. quando ſumptus fuerit num. $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem num. $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiſo $\frac{1}{6}$. ſed tertiam eius partem. Nam cum num. $\frac{1}{2}$. idem ſit qui $\frac{3}{6}$. liquido conſtat tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterum quo pacto fiat diuiſio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuiſioneq; fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia ſecundum ſuas vnitates in longum, & latum diſpoſitas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera ſunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipſum contineant, non ſecus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt num. 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraq; eius ſunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum diſpoſitæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus ſex vnitates, alterum vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur eiuſque latera 8. & 8.



CÆTERVM cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras. Euclides ſolum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorum diſputat, quod omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ altera parte longiori, ſimiles ſint, & æquales, ſiue ambitum, ſiue aream, capacitatemue ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum ſpectat: tamen ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemq; numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus. Ita quoq; numerus planus 100. latera habet 5. & 20. 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quod quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt in altero vnitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planum numerum eſſe compoſitum: Quod etiam de numero ſolido, qui iamiam definitur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem aliquando dici poſſe numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4, mutuo ſeſe multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel deniq; ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. ſolidus numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atq; profundum diſpoſitæ referunt figuram quandam ſolidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt libr. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimenſiones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam ſi primus multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. baſis ſolidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas; Et ſi hæc baſis in 3. multiplicetur, hoc eſt, ſi accipiatur ter, exurget totus numerus ſolidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At ſi numerus 2. in 3. multiplicetur, habebunt baſis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum ſolidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si deniq; numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro baſe, quæ bis ſumpta faciet numerum eundem ſolidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit BCGF, octo vnitatum, cuius longitudo BC, quatuor vnitates, & BF, latitudo duas complectitur; ſuperponentur ei duæ aliæ baſes ſimiles, & æquales, vt totus numerus ſolidus contineat 24 vnitates, eiuſq; altitudo BA, vnitates tres. Similiter ſi baſis ſit ABFE, ſex vnitatum, cuius longitudo AB, tres, & latitudo BF, duas continet vnitates; ſuperponentur ei aliæ tres baſes ſimiles, & æquales, fietq; totus ſolidus numerus rurſum 24. altitudinem BC, habens quatuor vnitatum. Si deniq; baſis ſit ABCD, 12. vnitatum, cuius longitudo BC, quatuor continet, & latitudo AB, tres, ſuperponetur illi alia baſis ſimilis, & æqualis EFGH, conſtabitque totus numerus ſolidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt AE, vel BF. Idem hic numerus ſolidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de aliis numeris ſolidis iudicandum erit.



DENI-

DENIQVE & vnitas interdum ſolidus appellabitur numerus, etſi non proprie, quia eius latera ſunt tres vnitates, ipſam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedenti definitione datam; quia ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XXVIII.

QVADRATVS numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

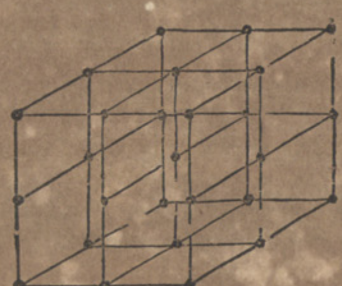


PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum vnitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogr. rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atq; adeo ſub illis continetur, vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinq; vnitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero quadrata ab Arithmeticis pleriſq; appellatur.

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoq; illum numerum vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius vnitates in longum, latum, atq; profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntq; tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipſe num. 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſq; autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex, eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quã puto eſſe corruptã, cum manca ſit, atq; imperfecta, cõprehẽdit ſolũ proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultipliciue, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi. & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neque æque multiplex eſt, neque eadem pars, neq; eædem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes, vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicauimus. Itaq; hi num. 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nimirum triplex. Itẽ hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi nu. 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eædem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo denique primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti,*

quarti, non ſit æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; vel deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quod primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, quod primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et è contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eædem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad æquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales eſſe. Cum enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe eundem æqualiter contineant, eandemq; inſuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium ſit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemq; inſuper eorum partem, vel partes; perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eandem habentes eandem proportionem, ſunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; inſuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandē proportionem, ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemq; inſuper illorum partem, vel partes, ſecundum hanc eandem definitionem, manifeſtum eſt numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem eſſe, quam minoris. Et contra, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe proportionem, quam ad maiorem. Item numerorū illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem eſſe: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem eſſe. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi recte hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, ſiue integri numeri ſimul adſint, ſiue non. Nam quatuor hi numeri ſunt proportionales; $\frac{3}{4}.\frac{3}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$. quia primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt, nimirum duplus, vt patet, ſi priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}.\frac{3}{8}$. & poſteriores quoq; ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica; & ad finem libr. 9. demonſtrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales ſunt $2\frac{3}{8}.4\frac{9}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$. cum primus ſecundi, & tertius quarti ſit eadem pars, nimirum ſemiſſis, vt conſtat, ſi priores duo ad hos eiuſdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}.\frac{38}{8}$. & poſteriores duo ad hos $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$. atq; ita de cæteris.

XXI.

SIMILES plani, & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero ſit ſimilis, non neceſſe eſt quælibet duo illus latera quibuſuis duobus lateribus huius eſſe proportionalia; ſed ſatis eſt, illum habere aliqua latera, quæ ſint proportionalia quibuſdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, ſi ſecundum ſuas vnitates in formam planam redigantur, prout latera aſſumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. ſimiles ſunt, quoniam illius latera 6.4. proportionalia ſunt lateribus huius 3.2. quamuis his eiſdem non ſint proportionalia alia illius latera nempe 8.3. vel 12.2.

EODEM modo vt duo numeri ſolidi ſimiles ſint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia ſint tribus quibuslibet lateribus alterius; ſed ſufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, ſi ſecundum vnitates in formam ſolidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri ſolidi 192. & 24. ſunt ſimiles, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. ſunt proportionalia, licet his eiſdem nequaquam proportionalia ſint alia latera illius, nimirum 12.8.2. vel 16. 4.3.

ITAQVE poſſunt duo numeri plani, vel ſolidi, eſſe ſimiles, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. ſimiles vt dictum eſt; & tamen ſi latera prioris ſumantur 3. & 8. nulla reperientur in poſteriori illis proportionalia. Sic etiam ſolidi ſimiles ſunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris aſſumptis 3.4.16. nulla reperiantur proportionalia in poſteriori.

HÆC porro ſimilitudo planorum, & ſolidorum reperitur quoq; in fractis numeris, ſiue in integris cum fractis. Nam ſi ſumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tam duo priores, quam duo poſteriores inter ſe multiplicentur, procreabuntur plerunq; duo plani non integri ſimiles, &c. Dixi, plerunq;, quia fieri poteſt, vt interdum integri numeri gignantur. Nam ſi duo latera ſint $\frac{2}{3}$. 6. & alia duo $1\frac{1}{3}$. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. poſteriora vero num. 16.

XXII.

PERFECTVS numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes ſuæ partes ſimul ſumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius lib.) æquales ſunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiuſmodi ſunt hi nu. 6.28.496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1.2.3. quæ ſimul ſumptæ conficiunt numer 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ ſunt hæ 1. 2. 4.7.14. quarum ſumma conſtituit ipſum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124.248.

124. 248. quas omnes in vnum ſummam collectas componere num. 496. perſpicuum eſt. Qui autem numeri perfecti ſint, & qua via, ac ratione procreentur, (ſunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonſtrabitur ab Euclide propoſ. vltima lib. 9.

QVOD ſi partes omnes aliquotæ alicuius numeri ſimul acceptæ maiores ſint ipſo numero, dici ſolet numerus ille, Abundans: ſi vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide ſumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus eſſet perfectus, cum ſuis ipſius partibus ſit æqualis, ſi quilibet numerus minor numeri maioris pars dici poteſt, ſiue eum metiatur, ſiue non mediatur.

HIS definitionibus ab Euclide propoſitis adiungendæ mihi videntur ex Campano aliisq; ſcriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime ſuccedent poſtulata, & communes animi notiones, præſertim eæ, quibus in demonſtrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

NVMRVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademq; ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita eſſe hac ratione fiet perſpicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipſum 12. toties compoſitus, quoties eſt vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet. 12. Quia vero, vt propoſ. 16. huius lib. oſtendemus; idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifeſtum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, ſi numerus 4. multiplicet num. 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerum $13\frac{5}{12}$, per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIV.

PROPORTIO numerorum eſt habitudo quædam vnius numeri ad alterum, ſecundum quod illius eſt multiplex, vel pars, parteſue; vel certe illum continet ſemel, aut aliquoties, & aliquam inſuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum num. 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex eſt, nimirum quintuplus, dicetur hæc comparatio habitudine, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem num. 20. cum num. 60. confertur, ſecundum quod illius tertia pars eſt; & ſic de reliquis.

QVÆ cum ita ſint, perſpicuum eſt, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes, vt ſupra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, ſiue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores ſumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum: Et ſemper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copioſe explicata eſt defin. 10. libr. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi ſcripſimus, ad numeros huc transferri facile poſſint, non eſt, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertium, & tertii ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

QVOD ita ſe habere, pluribus verbis à nobis demonſtratum eſt ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuerſaque; de compoſitione, diuiſione, & conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata, Omnes enim huiuſmodi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur, demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTV-

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero ſumi poſſe maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri poteſt infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero propoſito maior exhiberi poteſt, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione conſurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem æque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æque multiplex eſt, vel æque multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IV.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum metitur.

NAM vnitas ſumpta toties, quot ſunt in numero propoſito vnitates, ipſum conſtituit. Quamobrem ipſum metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum ex ſuis vnitatibus conſtitutum.

VI.

OMNIS numerus ſeipſum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus ſemel ſumptus ſibi ipſi ſit æqualis, manifeſtum eſt, omnem numerum ſeipſum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compoſitus conſtituat ipſum C, quot ſunt in A, vnitates; perſpicuum eſt B, metiri ipſum C, per A, & eadem ratione A, ipſum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipſum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonſtrabitur propoſit. 16. huius lib.

A . . . . B . . .
C . . . .

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente ſunt, vnitates, hoc eſt, per ipſum numerum metientem.

Vt quia numerus 6. metitur num. 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem num. 18. per 6. hoc eſt, per vnitates, quæ in metiente num. 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam num. 6. metitur 18. per 3. fiet num. 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens num. 3. num. 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

A . . . . B . . .
C . . . .

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, vel multiplicatum à B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipſum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel av eo multiplicatum, producere ipſum C.

X.

NVMERVS quotcunq; numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

A . . . .
B. . . . E . . . . C . . . . F . . . . G C

METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipſis compoſitum BD. Cum enim A, metiatur ipſos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo BC, in partes BE, EG, ipſi A, æquales, & ipſo CD, in partes CF, FG, GD, eidem A, æquales; erit numerus BD, compoſitus ex omnibus partibus BE, EC, CF, FG, GD, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum BD, metitur. Quod eſt propoſitum.

XI.

NVMERVS quemcunque numerum metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

A . . .
B . . . .
C . . . . E . . . . D

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum CD. Dico eundem A, metiri quoq; numerum CD, quem B, meti[illegible]. Cum enim B, metiatur ipſum CD, erit CD, ipſius B, multiplex. Diuiſo ergo CD, in partes CE, ED, ipſi B, æquales; metietur A, ipſos numeros CE, ED, quandoquidem numerum B, tam numero CE, quam numero ED, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum CD, ex CE, ED, compoſitum. Quod eſt propoſitum.

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

A . . .
B . . . . D . . . C
B . . . . D C
B . . . D C

METIATVR numerus A, totum BC, & ablatum BD. Dico eundem A, metiri quoque reliquum DC. Cum enim A, metiatur & BC, & BD; erit tam BC, quam BD, ipſius A, multiplex, aut certe ED, ipſi A, æqualis erit. Diuiſo ergo tam BC, quam BD, in partes ipſi A, æquales: erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipſi A, æqualis, vel plures, atq; adeo DC, æqualis erit, ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum DC. Quod eſt propoſitum.

i.

THEOR. I. PROPOS. I.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

SINT duo numeri propoſiti inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolum vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H. communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars ſit ipſius A E, vel certe ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit

A . . . . E . . G . B
C . . . F . . D
H ———

a 11. *pron.* numerum EB,) [a] metietur quoque H, ipſum AE: At H, metitur quoq; totum AB. [b] Igitur & reliquum EB,
b 12. *pron.* metietur. Metitur autem EB, ipſum CF. [c] Igitur & H, ipſum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD,
c 11. *pro.* metiatur, [d] metietur quoq; reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipſum EG; [e] metietur etiam H, ipſum
d 12. *pron.* FG: Metiebatur autem & H, totum EB. [f] Reliquam igitur vnitatem quoq; GB, numerus H, metietur, partem
e 11. *pron.*
f 12. *pron.* totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metietur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrē, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandū.

SCHOLIVM

CONVERTEMVS cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas.

SINT

SINT duo numeri inter ſe primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB, reliquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipſum EG, [g] *metietur quoq; GB, ipſum EG. Cum ergo GB, & ſeipſum metiatur,* [h] *metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum CF.* [i] *igitur GB, eundem CF, metietur: Atq; adeo cum & ipſum FD, poſitus ſit metiri: metietur* [k] *quoque ipſum CD, ex CF, FD, compoſitum. At vero CD, metitur ipſum AE.* [l] *Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipſum EB, metiatur, vt oſtenſum eſt;* [m] *metietur & ipſum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec aſſumpta ſit vnitas. Quod eſt propoſitum.*

g 11. pron.
h 10. pron.
i 11. pron.
k 10. pro.
l 11. pron.
m 10. pron.

A .... E .. G—B
C ...... F .. D

EODEM modo & hoc verum eſt.

SI propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vſq; non ad perueniet, ſed non numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM ſi detractio huiuſmodi ad vnitatem vſq; perueniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi, [n] *vt Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.* n 1. ſepti.

EX his facile dignoſcemus, an duo quicunq; numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Nam detracto ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione; ſi nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad aſſumpta ſit vnitas; ipſi erunt inter ſe primi, [o] *vt Euclides demonſtrauit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti, cum ille idem reliquus numerus vtrumq; numerum propoſitum metiatur, vt perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperioris huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, oſtenſum fuit, eundem reliqu[illegible] GB, vtrumq; AB, & CD, metiri.* o 1. ſepti.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ii.

DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatq; EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatē deuēiretur, [a] numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB, & EB, ipſum CF; [b] metietur quoq; FD, ipſum CF, atque adeo cum & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitū. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoq; ipſum EB; [e] metietur etiam totū AB, ex vtroq; AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumq; numerum AB, CD.

a 1. ſepti.
b 11. pro.
c 10. pro.
d 11. pron.
e 10. pron.

A .... E ...... B
C .... F .. D
G ——

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quam FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumq; AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, [f] metietur quoq; G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum EB: At vero EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum FD; maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum AB, CD.

f 11. pron.
g 12. pron.
h 11. pron.
i 12. pron.

QDOD ſi minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

A .... B
C ...... D

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoq; maximam eorundem communem menſuram.

HOC elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoq; numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademq; ratio eſt de ceteris.

SCHOLIVM.

EX iis quæ dicta ſunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C, Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

A . . . .
B . . . .
C . . . . . .

a 2. septi.

A ....

B ....

C ....

D . . .

SI vero A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, [a] *ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos, cum habeant numerum D, communem menſuram.*

A ....

B ......

C . . . . .

D . . .

QVOD ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D, vel inter ſe primi, vel non: Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita vt habeant numerum communem menſuram; metietur eiuſmodi communis menſura numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, per coroll. huius propoſ. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoq; numerum C. non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſim. Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti. [b] *Inuenta enim numerorum C, & D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A, & B,* [c] *metietur quoq; E, eoſdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.*

b 2. septi.
c 11. pron.

A ....

B ....

C ......

D .... E ..

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe compoſiti. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; ſi quinq;, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

iii.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem porteat reperire. Sit D, maxima menſura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipſum C, perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C, Nam ſi maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si vero D, non metiatur ipſum C; erunt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cum enim ſint A, B, C, inter ſe cōpoſiti, metietur quæcunq; illorum menſura communis, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe compoſiti. [a] Sit eorum maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim ſit eorum menſura communis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipſos A, & B, [b] metietur quoque E, ipſos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A ....

B .... D ....

C ...... E .. F——

a 2. septi.
b 11. pro.

QVOD autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quam E, eorum menſura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communem: Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoq; E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atq; adeo E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem menſuram.

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoq; numerum E, maximam illorum menſuram communem: Eademq; in cæteris eſt ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter ſe, maxima eorum commmunis menſura inuenitur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium numerorum: ſi quinq;, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis menſura, &c. Reliqua vero omnia paragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

iiii.

THEOR. 2. PROPOS. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.

SINT duo numeri A, minor & B, maior. Dico A, eſſe aut partem, aut partes ipſius B. Sint enim primum A, & B, inter ſe primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars eſt numeri B; perſpicuum eſt, numerum A, eſſe partes numeri B, tot nimirum, quot ſunt in A, vnitates.

A . . . .

B . . . .

SINT deinde A, & B, non primi inter ſe, ſed inter ſe compoſiti, & metiatur A, ipſum B. Quo poſito, manifeſtum eſt A, partem eſſe numeri B, ex defin. 3. huius lib.

A . . . . .

B . . . .

SED iam A, non metiatur ipſum B, [a] inuenta autem maxima eorum menſura communis ſit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum ſingulæ ipſi C, ſint æquales. [b] Quia igitur C, pars eſt ipſius B, cum ipſum metiatur; erit quoque AD, pars eiuſdem B: ſimiliter & DE, & EF; ac propterea totus numerus A, eſt partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in AF, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

a 2. *ſepti.*
b 3. *defin.*

A..D..E..F
B.........
C..

THEOR. 3. PROPOS. 5. v.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſq; ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri BC, quæ eſt numerus D, numeri EF. Dico vtrumque numerum A, & D, ſimul vtriuſque numeri BC, & EF, ſimul eandem eſſe partem, quæ eſt vel A, ipſius BC, vel D, ipſius EF. Diuiſis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, propterea quod eadem pars eſt A, ipſius BC. quæ D, ipſius EF. Quia igitur A, & BG, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D, & EH; erunt A, & D, ſimul æquales ipſis BG, & EH, ſimul: Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis GC, & HF, ſimul æquales. Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in BC, EF; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum BC, & EF, æquale erit, quoties A, in BC, vel D, in EF, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, ſimul vtriuſque BC, & EF, ſimul, quæ eſt A, ipſius BC, vel D, ipſius EF. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat oſtendendum.

A...... | D....
B...... G...... C | E.... H.... F

S C H O L I V M.

IDEM hoc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, numeri BC, & numerus D, numeri EF, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A, D, vtriuſq; BC, EF, ſimul eadem pars oſtendetur, quæ A, ipſius BC: ſi nimirum BC, EF, diuidantur in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, D, æquales, &c.

A, $\frac{2}{9}$ D, $\frac{3}{7}$
B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C E, $\frac{3}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

QVOD ſi quando contingat, numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quod numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tã numerator, quã denominator per numerũ partiũ. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. ſecunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adſunt integra, reuocanda prius erunt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quam denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$. ſecandus ſit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumq; eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales ſunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atq; hæc in ſequentibus quoq; propoſitionibus obſeruanda ſunt, quando fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoque ſunt numeri integri cum fractu: Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.

EODEM modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars: Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perſpicue in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A. | D. | | A. | D...
B. G. C | E. H. F | | B. G. C | E... H... F

POSSVMVS etiam hanc propoſitionem ad quotcunq; numeros transferre, hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, ſinguli ſingulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, ſimul omnium numerorum DE, FG, HI, ſimul eandem eſſe partem, quæ eſt A, ipſius DE. Diuiſis enim numeris DE, FG, HI, in partes

A.... | B... | C..
D.... K.... E | F... L... G | H.. M.. I

ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tam numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, ſimul æquales ipſis DK, FL, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales C, & HM; erunt quoq; A, B, C, ſimul æquales ipſis DK, FL, HM, ſimul. Simili ratione erunt A, B, C, ſimul æquales ipſis KE, LG, MI, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, ſimul ipſorum DE, FG, HI, ſimul, quæ A, ipſius DE.

IDEM ſequitur, ſi loco vnius numerorum A, B, C, ſumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.

A.	B..	C...		A.	B.	C.
D.K.E.	F..L..G	H...M...I		D.K.E	F.L.G	H.M.I

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam ſi quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonſtrabitur; etiamſi aliqui numerorum ſint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.	B, $\frac{1}{2}$	C, $\frac{1}{4}$
D 1 K 1 E	F $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ G	H $\frac{1}{4}$ M $\frac{1}{4}$ I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. ſimile proponemus, in hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æque multiplices: quam multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic eſt, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonſtrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, ſinguli ſingulorum. Dico & omnes A, B, C, ſimul omnium D, E, F, ſimul tam multiplices eſſe, quam eſt A, multiplex ipſius D. Cum enim tam ſit multiplex A, ipſius D, quam eſt B, ipſius E, & C, ipſius F; erit è contrario D, eadem pars ipſius A, quæ E, ipſius B, & F, ipſius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonſtrata ſunt, erunt D, E, F, ſimul eadem pars ipſorum A, B, C, ſimul, quæ D, ipſius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, ſimul, omnium D, E, F, ſimul, quam eſt multiplex, A, ipſius D.

A .... B ...... C ....
D .... E ... F ..

SI numeri A, B, C, fracti ſint, & ipſorum D, E, F, fractorum æquemultiplices; quia multiplex eſt vnius vnum, iam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonſtratione liquet.

QVOD ſi loco vnius numerorum D, E, F, aſſumatur vnitas, vel etiam loco plurium vel omnium, plures vnitates, theoremate eodem modo demonſtrabitur, vt ex ſequentibus figuris apparet.

A .. B .... C	A .. B .. C ..
D . E .. F ...	D . E . F .

vi.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterq; vtriuſq; ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, ſimul vtriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ eſt AB, ipſius C, vel DE, ipſius F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE, propterea quod eædem partes eſt numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars eſt AG, numeri C, eadem eſt DH, numeri F; [a] erit vterque AG, DH, ſimul eadem pars vtriuſq; C, F, ſimul, quæ AG, ipſius C, vel DH, ipſius F. Eadem ratione erit vterq; GB, HE, ſimul eadem pars vtriuſque C, F, ſimul, quæ GB, ipſius C, vel HE, ipſius F: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars eſt numerorum C, F, ſimul, quæ pars eſt AG, ipſius C; quot partes eædem eſt numerus AB, ipſius C, vel DE, ipſius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, ſimul, vtriuſq; numeri C, F, ſimul, quæ AB, ipſius C, vel DE, ipſius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

A ... G ... B	D .... H .... E
C.........	F............

a 5. ſepti.

SCHOLIVM.

EADEM hæc propoſitio locum habet in numeris fractis, vna cum demonſtratione: vt hoc exemplum demonſtrat.

A, $\frac{1}{4}$ G, $\frac{2}{15}$ B   C, $\frac{3}{15}$

D, $\frac{2}{7}$ H $\frac{2}{7}$ E   F, $\frac{6}{7}$

SED & hanc propoſitionem ad quotcunque numeros ſiue integros, ſiue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI ſint quotcunq; numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim eſt demonſtratio, ſi modo pro quinta propoſ. aſſumatur id, quod ſecundo loco demonſtrauimus in ſcholio præcedenti; vt hic perſpicuum eſt.

A .. K .. B	C ... L ... D	E .... M .... F
G	G	I ....

vii.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem eſſe partem reliqui FD, quæ eſt totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ eſt AE, ipſius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem eſt pars ipſius CF, quæ EB, ipſius GC: *a* erit vterque AE, EB, ſimul eadem pars vtriuſque ſimul CF, GC, quæ AE, ipſius CF, hoc eſt, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem ſit pars vtriuſque numeri FG, CD. erunt ipſi numeri FG, CD, inter ſe æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipſius FD, quæ ipſius GC, hoc eſt, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat oſtendendum. *a 15. ſept.*

A.... E.. B
G.... C........ F....

S C H O L I V M.

LOCVM etiam habet hæc propoſitio, vna cum eius demonſtratione in numeris fractis, vt hic apparet.

A, $\frac{2}{8}$. E, $\frac{2}{5}$. B,
G, $\frac{4}{5}$. C, $\frac{6}{8}$. E, ^{4}. D,

IDEM hoc theorema verum eſt, tam in numeris integris, quam in fractis, etiamſi ablata ſit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB, vel deniq; in integris & ablata, & reliqua ſit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A. E... B G...... C.. F...... D	A... E. B G.. C...... F.. D	A. F. B. G.. C.. F.. D

CÆTERVM & ex his theorematì quinto lib. 5. ſimile hoc demonſtrabimus, tam in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æque multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita eſſe multiplicem, vt eſt totus AB, totius CD. Cum enim AB, AE, ipſius CF, erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. b Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB. Ac proinde è Contrario EB, ita multiplex erit ipſius FD, vt AB, ipſius CD, eſt multiplex. *b 7. ſepti.*

A...... E.... B
C... F.. D

QVOD ſi ex CD, ablata fuerit vnitas CF, vel reliqua ſit vnitas FD, vel deniq; in integris & ablata ſit vnitas CF, & alia reliqua FD, idem demonſtrabitur, vt hæc exempla commonſtrant.

A... E...... C. F.. D	A.... E.. B C.. F. D	A.... E.... B C. F. D

THEOR. 6. PROPOS. 8. viiij.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati; Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eaſdem eſſe partes reliqui FD, quæ totus AB, eſt totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipſi AB, erit GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, hoc eſt, quæ AE, ipſius CF. Diuiſo ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF, erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis eademque pars tam GI, quam IH, ipſius CD, quæ tam AK, quam KE, ipſius CF. Cum ergo CD, numerus maior ſit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipſius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipſius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipſis AK, KE, erit GL, eadem pars ipſius CF, quæ AK, eiuſdem CF, hoc eſt, quæ GI, ipſius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, ſit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, *a* erit & reliquus LI, reliqui FD eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento oſtendemus MH, eandem eſſe partem ipſius FD, quæ eſt totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem eſt pars ipſius CD, quæ eſt tam LI, quam MH, ipſius FD; erit vterque GI, IH, ſimul eædem partes ipſius CD, quæ vterque LI, MH, ipſius FD. Eſt autem GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, ſimul eædem partes erit ipſius FD, quæ AB, ipſius CD. Quia vero ſi ab æqualibns AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, ſimul æquales ſunt; Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem quæ vterque LI, MH, ſimul erat eiuſdem FD, Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat oſtendendum. *a 7. ſept.*

A...... K...... E.... B
C.................. F...... D
G...... L.. I...... M.. H

S C H O L I V M.

IN numeris fractis eadem hæc propoſitio eodem prorſus modo demonſtrabitur, vt hic manifeſtum eſt.

A, $\frac{2}{15}$. K, $\frac{2}{15}$. E, $\frac{6}{15}$. B
C, $\frac{6}{15}$. F, $\frac{9}{15}$. D
F, $\frac{2}{15}$. L, $\frac{3}{15}$. I, $\frac{2}{15}$. M, $\frac{3}{15}$. H

NON demonſtrauit Euclides hanc propoſitionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non conſtabat hic reliquum numerum EB, alicuius numeri eaſdẽ eſſe partes, quæ eſt numerus AE, nnmeri CF, ibi vero perſpicuum

ſpicuum erat reliquum EB, alicuius numeri eandem eſſe partem, quæ eſt AE, ipſius CF. Licet enim ipſius EB, duplum aſſumere, triplum, quadruplum, &c, donec EB. ſit ita ſubmultiplex numeri aſſumpti GC, vt AE, eſt ſubmultiplex ipſius CF.

ix.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

A....
B.... G.... C
D......
E...... H...... F

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, ſintque A, BC, minores ipſis D, EF, ſinguli ſingulis. De his enim propoſitio intelligenda eſt. Dico & viciſſim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A, ipſius D, qualis eſt, aut quales BC, ipſius EF. Diuiſis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter ſe ſunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipſius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipſius HF, *a* ac propterea & vterque BG, GC, ſimul, nimirum BC, ſecundus vtriuſq; EH, HF, ſimul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipſius EH, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 5. vel 6. ſeptimi.

S C H O L I V M.

A, $\frac{3}{11}$.
B, $\frac{3}{11}$. G, $\frac{3}{11}$. C
D, $\frac{14}{22}$.
E, $\frac{14}{22}$. H, $\frac{14}{22}$. F

In numeris fractis propoſitio hæc, vna cum eius demonſtratione locum etiam habet, vt hic perſpicuum eſt.

A.
B. G. C
D......
E...... H...... F

QVOD ſi loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars ſit, quæ alter numerus alterius: Erit viciſſim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ ſecundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, ſi loco partium aſſumamus partem in demonſtratione, vt ex hoc exemplo apparet.

x.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

A.. G.. B
C......
D..... H..... E
F................

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, ſintque AB, C, ipſis DE, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiam intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim numerum AB, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri DE, quæ numerus C, eſt numeri F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipſius C, quæ tam DH, quam HE, ipſius F. *a* Viciſſim ergo eadem pars erit aut partes AG, ipſius DH, & GB, ipſius HE, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipſius DH, quæ GB, ipſius HE. *b* Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriuſq; DH, HE, ſimul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipſius DH, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 9. ſeptim.
b 5. vel 6. ſeptimi.

S C H O L I V M.

A, $\frac{2}{15}$. G, $\frac{2}{15}$. B
C, $\frac{6}{15}$.
D, $\frac{3}{10}$. H, $\frac{3}{10}$. E
F, $\frac{9}{10}$.

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

xii.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum; Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

A............ E...... B
C...... F... D

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum, CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB, ad totum CD. Cum enim ſit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; *a* erit AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, æque multiplex. Quo poſito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipſorum CD, CF. *b* Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipſius CD, & EB, ipſius FD, æque multiplex erit. *c* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

a 20. deſin.
b 7. ſeptimi.
c 20. deſi.

SIT

SIT deinde AB, ipſius CD, & AE, ipſins CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo poſito *d* erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; *e* Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A . . . . E . . B
C. . . . . . F. . . . D
A. . . . E . . B
C. . . . . . F . . . D

d 7. vel 8. ſeptimi.
e 20. defin.

CONTINEAT tertio AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter eandemq; inſuper illius partem, vel partes. Quo poſito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonſtrabimus. *f* Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac pro- f 8. ſept.

A . . . . E . . . B | A . . . . E . . . . B
C . . . F . . D | C . . . . . F . . . . D

pterea è contrario AB, ipſum CD, & EB, ipſum FD, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes vt mox oſtendemus. *g* Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. g 8. ſepti.

QVOD ſi AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perſpicuum eſt reliquum EB, quo-

A . . . . . E . . . B | C . . . . . F . . . D

que eſſe æqualem reliquo FD. Nam ſi ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, ſunt æqualia. Itaque ſi fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

EODEM modo demonſtrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquido conſtat in his exemplis, quæ exemplis tertij caſus demonſtrationis reſpondent.

A, $\frac{6}{9}$. E, $\frac{7}{10}$. B | A, $\frac{14}{21}$. E, $\frac{28}{29}$. B
C, $\frac{4}{9}$. F, $\frac{2}{10}$. C | C, $\frac{7}{21}$. F, $\frac{10}{29}$. D

L E M M A.

QVOD autem, ſi AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter contineat, eandemque inſuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, ſit eædem partes: Et ſi CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, ſit eædem partes; è contrario AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quam in integris: hoc modo demonſtrabimus. Contineat primum AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, nimirum ſemel, vel bis, vel ter, &c. eandemque inſuper partem; GB, quidem ipſius CD, & HE, ipſius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, ſint vel æquales ipſis CD, CF, vel eorum æque multiplices.

A . . N . . O . . G . . B
C . . I . . K . . D
A . . . P . . . Q . . . H . . . E
C . . . L . . . M . . . F

Diuiſis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipſis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partiũ numeri CF, æqualis, quod GB, ipſius CD, ſit eadẽ pars, quæ HE, ipſius CF. Similiter diuiſis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG, & AP, PQ, QH, eiſdẽ GB, HE, æquales; erit quoq; multitudo partiũ numeri AG, multitudini partiũ numeri AH, æqualis. Cũ n. AG, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorũ æque multiplices, erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partiũ numeri CD, toties cũtinebitur in AG, quoties numerus partiũ numeri CF, in AH; proptereaq; multitudo partium numeri AG, multitudini partiũ numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipſis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF, erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipſius AE.

CONTINEAT deinde AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, videlicet ſemel, bis, ter, quaterue, &c. eaſdemque inſuper partes illius, numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, ſint rurſum vel æquales ipſis CD, CF, vel eorum æquemultiplices. Diuiſis igitur numeris GB, HE in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipſius GB, multitudini partium ipſius HE, æqualis. Simili modo, diuiſis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus, GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partium ipſius CD, multitudini partium ipſius CF, æqualis, propterea quod quælibet partium numeri GB, eadem pars eſt numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, eſt numeri CF. Denique diuiſis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eiſdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorum æquemultiplices: erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipſius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipſius CF, in AH, proptereaque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus ſi addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo

A . . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . D
A . . . R . . . S . . . H . . . K . . . E
C . . . N . . . O . . . F

titudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF, erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipſius AE. Quod eſt primo propoſitum.

IAM vero ſit CD, ipſius AB, & CF, ipſius, AE, eædem partes. Dico è contrario AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continere, eandemq; inſuper illius partem, vel partes. Diuiſis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter ſe æquales. Item diuiſis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter ſe æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, ſupereritq; eadē pars, vel partes ipſius CD, quoties omnes partes numeri CF, continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipſius CF, ſuperſunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & inſuper in duobus illis numeris ſuperſint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quam ob rem AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemq; inſuper illius partem vel partes. Quod ſecundo eſt propoſitum.

xiij.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI ſint quotcunque nnmeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E. F; hoc eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico eſſe quoque omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, vt eſt A, ad B. Sint enim

A.... C.. E...

a 20. defin. B........ D.... F......

primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, *a* eadem pars eſt, aut partes, A, ipſius B, quæ C, ipſius D, & E, ipſius F, *b* erit

b 5. vel 6. ſeptimi. quoque vterque A, C, ſimul vtriuſque B, D, ſimul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipſius B, vel E, ipſius F. Rurſus quia vterque A, C, ſimul, tanquam vnus, vtriuſque B, D, ſimul, tanquam vnius,

c 5. ſeptim. eadem pars eſt, aut partes, quæ E, ipſius F; *c* erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, ſimul, amborum B, D, tan-

d 20. defin. quam vnius, & F, ſimul eadem pars, vel partes, quæ A, ipſius B. *d* Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo poſito, erit è contrario B,

e 5. ſeptm. ipſius A, eadem pars, quæ D, ipſius C, & F, ipſius E; Atque adeo vt prius, *e* erunt o-

A........ C.... E.......

B.... D.. F...

mnes B, D, F, ſimul, omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æque multi-

f 20. defin. plices *f* Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hic apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius lib.

A... C...... E.........	A... C... E......	A... C... E...
B. D.. F....	D. D. F..	B. D. F.

g 20. defi. SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at nō multiplices. *g* Quia igitur, propter eandem proportionem A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eādemque inſuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis prop. B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes.

h 6. ſeptim. A........ C.... E...........

B...... D... F.......

Igitur vt prius, *h* erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ ipſius A; atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimul omnes numeros B, D, F, ſimul & A, ipſum B, æ-

i 20. defi. qualiter, eandemque inſuper partem, vel partes *i* Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æqua-

• A.... C... E.....

B.... D... E.....

les E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cum vtrobique ſit proportio æqualitatis Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

IN numeris quoq; fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

xiv.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

SIT enim A, ad, B vt C, ad D. Dico viciſſim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nam ſint primum

a 9. vel 10. ſeptimi. A.... C......

B.... D.........

b 20. defin.

A, & C, minores quā B, & D, & A, quoque minor, quā C. Quo poſito, erit propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, vel partes. *a* Viciſſim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: *b* Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

SINT

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, vel partes.[c] Viciſſim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit, vel partes: Atque adeo è contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æque multiplex erit vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes.[d] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

B . . . . D . . . .
A . . . . . . C . . .

c 9. vel 10. ſeptimi.
d 20. defin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C, quo poſito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex; vel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo è contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes.[e] Viciſſim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, vel partes.[f] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . . .
B . . . D . . . .

e 9. vel 10. ſeptimi.
f 20. defin.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo, è contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes.[g] Viciſſim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes.[h] Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . . .
B . . . . . . D . . .

g 9. vel 10. ſeptimi.
h 20. defin.

SINT quinto A, & C, ipſis B, & D, æquales & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt;[i] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . C . . . .
B . . . D . . . .

i 20. defin.

SINT ſexto A, & C, ipſis B, & D, æquales: at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & E, æqualium numerorum C, & D, vel æque multiplices ſunt, vel certe illi hos æqualiter cõtinent, eandemq; inſuper partem, vel partes;[k] erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . .
B . . . . D . . .

k 20. defin.

SINT ſeptimo ac vltimo A, & C, inter ſe æquales, ſiue ii maiores ſint quam B, & D, ſiue minores, ſiue æquales.[l] Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, ſi quatuor numeri proportionales ſint, & viciſſim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . . C . . . . .
B . . . D . . .

l 20. defin.

SCHOLIVM.

QVOD ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas, demonſtrabis eodem modo propoſitionem hanc veram eſſe in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque eſt, propoſitionem hanc non variari, etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI vero ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eoſq; demonſtrationibus certiſſimis confirmare, vna cum lemmate propoſ. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium, vt perſpicue ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum, & ab Euclidis inſtituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius conſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eædem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſuperuacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

XV.

SI ſint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, ſitque vt A, ad B; ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoq; eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniam enim eſt vt, A, ad B, ita D, ad E;[a] erit viciſſim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob cauſam, cum ſit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit viciſſim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cum enim vtraq; proportio A, ad D, & C, ad F, eadem ſit proportioni B, ad E, vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, vt mox oſtendetur.)[b] Ac proinde viciſſim, vt A, ad C, ita D, ad F.

A. . . . . D. . . . .
B. . . . . E. . . . . .
C . . . . F . . .
G. . . . . .H. . . . .

a 13. ſeptimi.
b 13. ſeptimi.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaq; ſi ſint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

A . D . . .
B . . E . . . . . .
C . . . F . . . .
G . G . . .

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt inter ſe quoque ſint eædem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſiue numeri ſint integri ſiue fracti, ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem,

A . . . . B . . . . C . . . .
D . . . . E . . . . F . . .

erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes, vel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem vel partes. c 20. defin. *c Quari numeri A, D, C, F, proportionales ſunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt propoſitum.*

HOC idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propoſ. 11.

xvi.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico viciſſim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiſo enim numero BC, in vnitates BG, GH, HC, & numero EF, in partes EI, IK, KF, ipſi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturque æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipſum EI, atque vnitas GH, ipſum IK, & vnitas HC, ipſum KF; atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, ſimul numerorum EI, IK, KF, ſimul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compoſitus numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compoſitum æque metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A. D . .
B. G. H. C. E . . I . . K . . F

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, æque metitur, atque numerus D, numerum EF, erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, æque metietur.

HÆC propoſitio fractis numeris conuenire non poteſt. Nam ſi vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur viciſſim æque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & ſecundus integer quartum fractum; a 13. septi. *a ſed ſolum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam ſecundus ad quartum.*

xvij.

PROBL. 14. BROPOS. 16.

SI duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipſum B, faciat C. at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim vnitate E; a 15. def. cum A, ipſum B, multiplicans faciat C; a erit C, ex B, toties compoſitus, quot ſunt in A, vnitates; atque adeo vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. b 15. septi. b Viciſſim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rurſus eodem modo, quia B, multiplicans ipſum A, facit D: c 15. def. c erit D, ex A, toties compoſitus, quot ſunt in B, vnitates; atq; adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Æque igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter ſe æquales erunt, Si duo igitur numeri mutuo ſeſe multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonſtrandum erat.

E.
A . . . B . . . .
D . . . . C . . . .

SCHO-

SCHOLIVM.

IN *numeris fractis hæc propoſitio ita demonſtranda eſt. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque eſt, D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propoſ. 14. ac proinde æquales inter ſe erunt C, & D. Quod erat demonſtrandum,*

E.
A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{5}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST *hæc eadem propoſitio cum Campano in hunc modum proponi.*

SI duo numeri ſe mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET *enim A, ipſum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, ſi B, ipſum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipſum B, faciat C, oſtendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, ſi numerus B, ipſum A, multiplicet,* [a] *etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipſum numerus A, æque metitur, atque vnitas E, ipſum B.* a 15. defin.

E.
A . . . B . . . .
C . . . .

QVOD *ſi numeri A, & E, ſint fracti ambo, vel vnus eorum, demonſtrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At ſi B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita D, ad E. Aſſumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compoſitus toties quoties vnitas F, eſt in A: ſimiliterque toties E, compoſitus erit ex C, quoties eadem vnitas F, eſt in eodem A: Atque adeo B, ipſum D, & C, ipſum E, æque metietur. Quare B, ipſius D, & C, ipſius E, eadem pars erit, [b] Ac proinde erit, vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod oſtendendum erat. a 15. defin. b 20. defin. c 13. ſept.

F.
A . . .
B . . . C . . . .
D . . . . . . E . . . .

SCHOLIVM.

SI *numeri A, B, C, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem oſtendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propoſ. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 16. PROPOS. 18. xix.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico eſſe, vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; [a] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipſos A, & B, facit D, & E; [b] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonſtrandum. a 16. ſept. b 17. ſept.

A . . . . B . . . . .
C . . .
D . . . . E . . . .

SCHOLIVM.

LIQVIDO *conſtat, eandem hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari, ſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo.*

HANC *autem propoſitionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, ſiue numeri omnes ſint integri, ſiue non, hac ratione.*

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT *enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico eoſdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc eſt, eſſe, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nam cum ex A, in BC, vel ex BC, in A, fiant EF,* [a] *erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.* a 17. vel 18 ſept.

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E . . . . . . F . . . . G . . . .

xix.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & quarto fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A,B,C,D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, ſecundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D, hoc eſt, vt A, ad B, ita G, ad E. Rurſus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare per lemma propoſ. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. ſcripſimus.

a 17. ſept.
b 18. ſept.

A . . .
B . .
C . . . . . .
D . . . .
E . . . .
F . . . .
G . . . .

SED iam ſit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipſi F, producto ex B, ſecundo, in C, tertium. Dico quatuor numeros A,B,C,D, proportionales eſſe, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipſi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem vt ad defin. 20. docuimus. Rurſus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem ſint proportioni G, ad F, eædem inter ſe erunt, per lemma propoſ. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

c 17. ſept.
d 18. ſept.

SCHOLIVM.

LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem huius propoſ. locum habere in numeris fractis, ſiue omnes fracti ſint, ſiue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

ITA enim oſtenſum eſt numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, conſequentem æqualem eſſe numero F, qui procreatur ex B, conſequente in C, antecedentem.

SED & ſequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facilè ex hac propoſ. 16. demonſtrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

SIT paimum maior proportio primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D; quartum Dico numerum ex A, in D, procreatum, eſſe maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, vt C, ad D; (ſiue E, numerus integer ſit, ſiue fractus; ſiue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propoſ. 19. lib. 9. oſtendemus, ſi numerus ex B, in C, procreatus diuidatnr per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quam E, ad B: ac proinde A, maior erit, quam E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quam ex E, in eundem D: [a] At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quam numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . . E . . . . . .
B . . . .
C . . . . , . . .
D . . . . . .

a 19. ſept.

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum, quam C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (ſiue E, numerus ſit integer, ſiue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quam ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quam E. Quare maior erit proportio A, ad B quam E, ad B: [b] At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod eſt propoſitum.

b 19. ſept.

QVOD ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio ſit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio ſit, numero; minor erit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam oſtendi poteſt. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quam C, ad D: hoc eſt, maior eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, ſiue ex B, in C, quam ex D, ſecundo in A, tertium, ſiue ex A, in D, vt demonſtratum iam eſt: hoc eſt, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C, quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B, in C; hoc eſt, maior ex B, in C, ſiue ex C, in B, quam ex A, in D, ſiue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, ſecundum, quam A, tertij ad B, quartum, vt iam eſt demonſtratum, hoc eſt, minor proportio erit A ad B, quam C, ad D. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . E . . . . . .
B . . . .
C . . .
D . .

xx.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio deſcribitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur: ipſi tres numeri proportionales erunt.

SINT

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita D, ad C, numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur. a 19. ſept.

A . . . .
B . . . . . . D . . . . . .
C . . . .

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in C. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat. b 16. ſept.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO *hæc non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.*

QVOD *ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: maior erit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium. Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium;*

A	*A . . . .*
B . . . . . . D	*B . . . . . . D . . . . . .*
C	*C . . . .*

minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſ. liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appoſitis exemplis apparet, etiamſi numeri ſint fracti, vel partim fracti, partim integri.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xxj.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor verò minorem,

SINT numeri AB, CD, minimi in proportione ead, ẽquam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt ſit, quemadmodum AB, ad CD, ita E, ad F. Dico AB, CD, æquè metiri ipſos EF, maiorem quidem AB, ipſum maiorem E, at minorem CD, ipſum minorem F: hoc eſt antecedentem, ipſum antecedentem, & conſequentem, ipſum conſequentem. Cum enim ſit, vt AB, ad CD, ita E, ad F; [a] erit viciſſim, vt AB, ad E, ita CD, ad F, Atq; adeo cum AB, CD, minores ſint, quam E, F; [b] erit A B, ipſius E, & CD, ipſius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuiſis namque, ſi fieri poteſt, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH, HD; Ac propterea AG, ipſius E, & CH, ipſius F, eadem pars. [c] Erit ergo, vt AG, ad E, ita CH, ad F; [d] & viciſſim, vt AG, ad CH, ita E, ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quam AB, CD, eandem habebunt proportionem, quam AB:CD. Quod eſt abſurdum; cum AB, CD, in ſua proportione ponantur minimi. Non ergo AB, ipſius E, & CD, ipſius F, eædem partes ſunt. Quare eadem pars; Ac propterea AB, ipſum E, & CD, ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat. a 13. ſept. b 20. defin. c 20. def. b 13. ſept.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . .
F . . . . . .

SCHOLIVM.

IDEM *hoc verum eſt, ſi quis dicat, tres numeros eſſe continue proportionales, primosque duos eſſe in ſua proportione minimos. Hoc enim poſito, oſtendetur eodem modo, primum metiri ſecundum, & ſecundum, tertium, vt in hoc appoſito exemplo apparet, vbi tertius numerus ſecundo æqualis eſt. Quamuis autem dari non poßint tres numeri continue proportionales, quorum duo primi in ſua proportione ſint minimi, niſi primus ſit vnitas; idem tamen demonſtratur in tribus, etiamſi primus ab aduerſario non dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poßit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continue proportionales, primosque duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.*

A . . G . . B
C . . . H . . . D
E . . . . .
F . . . .

PARI *ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.*

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT *enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit proportio AB, ad CD, quæ CD, ad EF, ſiue non; ita vt non poßint reperiri alij numeri ipſis AB, CD, EF, minores, quorum primus*

A . . . K . . . B   C . . L. D   E . . . . M . . . . F
G . . . .   H . . . . . .   I . . . .

ad ſecundum ſit, vt AB, ad CD, & ſecundus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum i minoribus numeris non continuatis; nimirũ proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis AB, CD, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris nõ poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidẽ 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25, in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi continuatim eiſdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt AB, ad CD, & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF,
a 13. ſept. *ipſum I, metiri æque. Cum enim ſit vt AB, ad CD, ita G, ad H, [a] erit viciſſim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum ſit*
b 13. ſept. *vt CD, ad EF. ita H, ad I, [b] erit quoque viciſſim, vt CD, ad H, ita EF, ad I. [c] Quare AB, ipſius G, & CD, ipſius H, & EF, ipſi*
c 20. def. *I, erit vel eadem pars, vel eædem partes. Partes quidem nequaquam. Diuiſis enim ſi fieri poteſt, AB, CD, EF, in AK, KB; CL, LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF, atque adeo AK, ipſius G, & CL, ipſius H,*
d 20. def. *eadem pars. [d] Erit ergo vt AK, ad G, ad CL, ad H; [e] & viciſſim vt AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit,*
e 13. ſept. *vt CL. ad FN, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod eſt abſurdum, cum hi ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eædem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, æque metietur. Quod eſt propoſitum.*

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipſos D, E, F, æque metiri. Nam per hanc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipſos D, E; eademque ratione B, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, æque metiatur, ac B, ipſum E, metientur æque omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

D .... E.......... F......
A .. B..... C...

CÆTERVM hæc propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo conuenire poteſt numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus alijs propoſitionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Eæ enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligendæ. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint inter ſe eſſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio tanquam menſura co[illegible]unis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt, eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Aliæ autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis, quod ſatis eſt, ſemel hoc loco commonuiſſe.

xix.]

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri: & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, vt quidẽ A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico ex æqualitate quoq; eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim ſit vt A, ad B, ita E, ad F; [a] erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum ſit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D, Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, ſecundo in D, tertium, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

a 19. ſept.
b 19. ſept.
c 19. ſept.

A .... H ...
B ... D....
C ...... E........
G .... F ..

QVOD ſi fuerint plures unmeri, quam tres, ita vt ſit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc eſſe, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe, vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione ſumuntur, eſtque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, erit rurſus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor, ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres. & ſic de pluribus. Itaque ſi fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur propoſitio in numeris fractis, vt conſtat.

QVONIAM vero Euclides ex illis ſex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonſtrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris oſtendit, nimirum eum, qui a permutata proportione ſumitur, propoſ. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propoſ. 14. & 22. huius lib. non alienum à noſtro inſtituto erit, breuiter reliquos quatuor modos oſtendere in numeris, & alia quædam quinti libri ſequentibus theoren.atibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris quàm integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et inuerſa ratione, ſiue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, ſiue inuerſa ratione, eſſe vt B, ad A,
a 13. ſept. *ita D, ad C. Cum enim ſit A; ad B, vt C, ad D, [a] erit viciſſim A, ad C, vt B, ad D. Rurſus quia eſt*
b 13. ſept. *B, ad D, vt A, ad C. [b] erit viciſſim B, ad A, vt D, ad C. Quod eſt propoſitum.*

A ...... C ...
B .... D ..

I I.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque diuiſi proportionales erunt.

SIT

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico diuidendo eſſe, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim ſit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] *erit viciſſim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE,* [b] *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc eſt, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* [c] *Viciſſim ergo erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.*

A...... C... B
D.... F.. E

a 13. ſept.
b 11. ſept.
c 13. ſept.

EADEM ratione demonſtrabimus Diuiſionem rationis conuerſam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuiſionem rationis conuerſam eſſe quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad EF; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC: ita FE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuiſionem rationis contrariam, eſſe quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim eſt, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF; Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.

III.

SI diuiſi numeri proportionales ſint: Hi quoque compoſiti proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo eſſe, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim ſit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF: [a] *erit viciſſim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF;* [b] *Ac proinde AB, BC, ſimul ad DE, EF, ſimul, vt BC, ad EF:* [c] *Et viciſſim AB, BC, ſimul, hoc eſt totus AC, ad BC, vt DE, EF, ſimul, hoc eſt, totus DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.*

A...... B... C
D.... E.. F

a 13. ſept.
b 12. ſept.
c 13. ſept.

SIMILITER Compoſitio rationis conuerſa, & contraria oſtendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis conuerſam eſſe quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit rurſus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis contrariam eſſe quoque, vt AB, ad [illegible], ita DE, ad DF. Cum enim ſit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

IV.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuerſionem rationis eſſe quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] *erit viciſſim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* [b] *Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF.* [c] *Viciſſim igitur vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.*

A...... C... B
D.... F.. E

a 13. ſept.
b 11. ſept.
c 13. ſept.

RVRSVS ex his facile demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, ſecundum, ita DE, tertius ad F, quartum; Item vt BG, quintus ad C, ſecundum, ita EH, ſextus ad F, quartum. Dico ita eſſe AG, compoſitum ex primo & quinto, ad C, ſecundum, vt eſt DH, compoſitus ex tertio & ſexto, ad F, quartum. Cum enim ſit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur eſt, vt AB, ad C, ita DE, ad F: & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex æqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cum rurſus ſit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH, & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex æqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod eſt propoſitum.

A..... B.. G | D......... E... H
C.... | F.....

EODEM modo & hoc Theorema oſtendemus, quod ad propoſ. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonſtrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, eſſe ad C, vt eſt reliquus HE, ad F. Cum enim ſit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur eſt, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH: erit ex æqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rurſus ſit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex æqualitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod eſt propoſitum.

A...... G., B D......... H... E
C.... F......

ITEM & hoc demonſtrabimus.

VII.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto.

SIT vt primus A, ad ſecundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad ſextum FH. Dico ita eſſe A, primum ad BG, compoſitum ex ſecundo & quinto, vt eſt D, tertius ad EH, compoſitum ex quarto & ſexto. Cum enim ſit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur eſt vt BC, ad A, ita EF, ad D: & vt A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo eſt, vt A, ad CG, ita D, ad FH: vt vt CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex æqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod eſt rpopoſitum.

A...... D.........
B.... C.. E...... F.... H

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoque illi omnes ſimul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.

HABEANT quotcunque numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K; Hoc eſt, ſit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe FI, habet ad K. Cum enim ſit, vt AB, primus ad E, ſecundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, ſecundum, ita GH, ſextus ad K, quartum; erit quoque vt AC, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FH, tertius cum ſexto, ad K, quartum.

A.... B...... C........ D | F.. G... H.... I
E......... | K.....

Rurſus quia eſt, vt AC, primus ad E, ſecundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item, vt CD, quintus ad E, ſecundum, ita HI, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FI, tertius cum ſexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, ſi plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc eſt, ſit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad AD, ita K, ad omnes illos ſimul, vtpote ad FI. Cum enim ſit, vt E, primus ad AB, ſecundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, ſextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad AC, ſecundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum ſexto. Atque ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM vero his demonſtratis, oſtendentur nouem vltimæ propoſitiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuere: ſi pro magnitudinibus, intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur iidem modi hoc lib. demonſtrati: vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eædemque prorſus demonſtrationes adhibeantur.

xxj. THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri AB, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minoreſque idcirco ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æque; atque adeo ſecundum eundem numerum, qui ſit E, ita vt C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties vnitas eſt in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; [b] metietur & viciſſim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur: [c] metietur quoque viciſſim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B: Atque adeo cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

A........ B....
C—— D—
E——

a 21. ſept.
b 15. ſept.
c 15. ſept.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxiij.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi menſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem menſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D: At verò ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties compoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B: [a] fit, vt D, & E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [b] Quare eadem erit proportio A, & B, quæ D, ad E: Atque adeo, cum D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quam A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

A........ B.....
C——
D—— E——

a 9. pron.
b 18. ſept.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunque numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non poßint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æque per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus: atque adeo ſecundum vnum eundem numerum, qui ſit G: ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æque metitur: [a] metietur quoque viciſsim æque vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æque atque vnitas ipſos E, F: Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.

A..... B....... C....
D—— E—— F——
G——

a 15. ſept.

IAM verò ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D: & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E: & ipſum C, toties quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F: ſit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus Atque adeo, cum D, E, F, minores ſint quàm A, B, C: non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 23. PROPOS. 25. xxiv.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter ſe primi A, & B: & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C: metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipſum A: [a] metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cum habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

A....... B....
C..., D——

a 11. pron.

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxv.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundẽ primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi: ſit eorum communis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot vnitates ſunt in F; [a] fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D. [b] & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idem D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium: [c] erit, vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; [d] erit E, ad A, primus; Atque adeo E, ad A, cum

A....... B...
C........
D.....................
E—— F——

a 9. pron.
b 16. ſept.
c 19. ſept.
d 25. ſept.

e 23.ſept. f 21.ſep. ſint inter ſe primi, [d] in ſua proportione minimi erunt. [e] Æque igitur metientur ipſos B,& F,eandem proportionem habentes,nimirum E,ipſum B, ad A,ipſum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B,& C,inter ſe primi, Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus ergo erit D,ad ipſum C; Ac proinde,ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxvj.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

A.... B......
C................
D....

a 26.ſep. SINT inter ſe primi A, & B, gignaturque C, ex A, in ſe ipſum. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Sumpto enim D,æquali ipſi A, erit & D,ad B,primus. Quoniam igitur A,& D,ad B,primi ſunt, [a] erit numerus ex A, in D, hoc eſt, ex A, in ſe genitus, nimirum C,ad eundem B, primus. Eademque arte oſtendemus, numerum ex B, in ſe genitum, ad A, primum eſſe. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

xxvij.

THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.

A..... B...
E...............
C... D..
F........

a 26.ſept. b 26.ſept. SIT vterque A,& B,ad vtrumque C,& D,primus,gignaturque E ex A, in B; & F,ex C,in D. Dico E,& F, inter ſe primos eſſe. Cum enim vterque A, & B,primus ſit ad C; [a] erit quoque E, ex ipſis genitus, ad eundem C, primus. Rurſus cum vterque A,& B, ad D,ſit primus, erit eodem modo E, ex [illegible]is genitus ad eundem D,primus. Quia igitur vterque C, & D,primus eſt ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, Ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros,vterque ad vtrumque,&c. Quod erat oſtendendum.

xxviij.

THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſe ipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt: Et ſi, qui in principio,genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter ſe A,& B; & ex A,in ſe fiat C; at ex B,in ſe fiat D. Dico & C,D,primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſum fiat E, ex A, in C; & F,ex B,in D; Dico E, F, quoque eſſe inter ſe primos. Cum enim A, B, ſint inter ſe primi, [a] erit C,factus ex A, in ſe,ad reliquum B,primus: Atq; eodem modo cum B,& C,primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B,in ſe,ad C,primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter ſe erunt.

A...	B..
C.........	D....
E...........................	F........
G, 81.	H, 16.
I, 243.	K, 32.

a 27.ſept. b 27.ſept. c 28.ſept. d 26.ſept. e 28.ſept. f 26.ſept. g 28.ſept.

RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, [b] erit & C, factus ex A,in ſe,ad B: & D,genitus ex B, in ſe,ad A, primus: Eſt autem & C, oſtenſus ad D,primus. Vterq; igitur A,C,ad vtrumque B, D, primus erit; [c] Ac proinde E, factus ex A, in C. primus erit ad F, factum ex B,in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B,in F,fiat H,cum A,& C, primi ſint ad B, [d] erit quoque E,ex ipſis genitus,ad B,primus: Eademque ratione & F,ad A,primus erit. Quia igitur vterque A,E,ad vtrumque BF,primus eſt; [e] erit & G,factus ex A,in E,ad H,factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A,& E, primi ſint ad B, [f] erit & G,ex ipſis factus,ad B,primus: nec non & H,ad A. [g] Quare & I,genitus ex A,in G,ad K,genitum ex B,in H,primus erit,cum vterque A,G, ad vtrumque B,H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint,&c. Quod oſtendendum erat.

xxix.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit: Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.

SINT inter ſe primi AB, BC. Dico & vtrumque ſimul AC, primum eſſe & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non ſunt inter ſe primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D. Quia igitur D, metitur totum AC,& ablatum AB: [a] metietur quoque reliquum BC. Non igitur primi inter ſe ſunt AB, BC, cum eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum,& contra hypotheſim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, oſtendemus eundem eſſe primum.

A........ B..... C
D----

a 12.pro. b 10.pro.

SED iam vterque AB,BC, ſimul primus ſit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad AB. Dico & AB,BC, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC; [b] metietur quoque D, numerum AC, ex AB, BC, compoſitum; Ac proinde AC, AB, non ſunt inter ſe primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Sunt igitur AB, BC, inter

BC,inter ſe primi. Eodemque argumento oſtendemus AB,BC, inter ſe primos eſſe,ſi AC,ad BC,primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim AC, ad AB, primus eſt,erunt AB, BC, inter ſe primi, per ſecundã partem huius propoſ. Igitur & AC,ad BC,primus erit: per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

OMNIS primus numerus,ad omnem numerum,quem non metitur,primus eſt.

PRIMVS numerus A,non metiatur numerum B. Dico A,ad B,primum eſſe; hoc eſt,A,& B,eſſe inter ſe primos,licet B,compoſitus ſit. Si enim A,& B, non ſunt inter ſe primi,metiatur eos præter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerum A,alius numerus C,metitur,non erit A,primus. Quod eſt abſurdum,& contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A..... B........
C---

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus. is etiam vnum eorum, qui in principio,metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, m[e]tiri ſaltem vnum ipſorum A,& B, ſi non vtrumque metitur. Non metiatur enim D,ipſum A; metiatur vero ipſum C,toties,quot ſunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A,in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A,ſecundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A,ſecundum,ita B,tertius ad E,quartum. [b] Quia verò primus D,ad A, primus eſt,cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A,in ſua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D,non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemque modo ſi D,non metiatur ipſum B,metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... B......
C........................
D... E.......

a 19. ſept.
b 31. ſept.
c 23. ſept.
d 21. ſept.

SCHOLIVM.

EODEM *modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.*

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantẽs fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad vnum eorum,qui in principio, compoſitus erit.

NAM *ex A, in B,fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, ad C,compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoque ad vnum ipſorum AB, compoſitum eſſe: id eſt,vel D,& A; vel D, & B, eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D,ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterque A,& B,ad D,primus.* [a] *Quare & C,ex illis genitus,ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum,cum D,ponatur vel metiri ipſum G,vel certe ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D,compoſitus ad A, vel ad B, cum non ſit primus ad vtrumque.*

A... B....
C............
D........

a 26. ſept.

PROBL. 31. PROPOS. 33. xxx.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B,qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si verò compoſitus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit,vel compoſitus: Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; [a] metietur quoque C,primus ipſum A. Si autem C, compoſitus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinite, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum,qui cum metiatur omnes præcedentes, [b] metietur quoque compoſitum A. Quod eſt propoſitum.

A.................
B...... C...

a 11. pron.
b 11. pron.

ALITER. Quia numerus A, compoſitus eſt, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B,quem dico eſſe primum. Si enim B,non eſt primus, metiatur eum,ſi fieri poteſt, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipſum B,& B,ipſum A, [c] metietur quoque C,minor ipſo B,ipſum A. Quod eſt abſurdum,cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus eſt ergo numerus B. Omnem igitur compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonſtrandum.

A..............
B... C---

c 11. pron.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxj.

OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

SIT

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel eſſe primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus ſit, vel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur

a 33. ſept. A .... propoſitum: Si verò compoſitus; [a] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat oſtendendum.

xxxiiij. ## PROBL. 3. PROPOS. 35.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non, oporteatque totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam A, B, C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti: Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus. Si verò non ſunt inter ſe primi, [a] inuenta ſit maxima eorum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A, B, C. Quod enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A, B, C, metitur per E, F, G, [b] fit, vt D, ipſos E, F, G, multiplicās faciat A, B, C. Quare per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt EFG, quas numeri, A, B, C.

D . .
A ...... B .... C ....
E ... F . . G ....
H — I — K —
L —.

a 3. ſept. · b 9. pron.

QVOD verò E, F, G, ſunt minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K, qui quoniam ipſos A, B, C, metiuntur æquè, vt ad propoſ. 21. huius lib. oſtendimus;

c 9. pron. metiantur eos per numerum L. Quo poſito, [c] fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C;

d 8. pron. [d] & viciſſim L, ipſos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [e] erit vt E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D,

e 19. ſept. quartum: Eſt autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo cum L, ipſos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima menſura communis numerorum A, B, C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, ſed ipſi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam menſuram quotlibet numerorum, metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E, F, G, per quos D, maxima menſura numerorum A, B, C, ipſos A, B, C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque eſt in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continuè proportionales. Vt ſi proponantur continuè proportionales A, B, C, D, E, ſiue illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſiue non, reperiemus duos in eadē proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis menſura eos metitur.

A, 16. B, 24, C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum E, F, G, per hanc propoſ. inuentorum eſſe vnitatem; quando

A ... B .. ... C ....
D ...
E. F .. G ...

A .... B .. C ......
D . .
E .. F. G ...

ſcilicet D, maxima menſura vni ipſorum A, B, C, æqualis eſt, vt ex his exemplis apparet. Manifeſtum [e]ſt autem, tunc inuentos E, F, G, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quam vnitas.

xxxvj. ## PROBL. 4. PROPOS. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſeſeque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [a] metietur A, ipſum C, per B, & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quod autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito, [b] tam ex A, in E, quam ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo, in F, tertium, [c] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius, ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter ſe, [d] & ob id, in ſua proportione minimi) [e] æque metientur ipſos F, & E;

A .... B .....
C ....
D ——————.
E —— F ——

a 7. pron. · b 9. pron. · c 19. ſept. · d 23. ſept. · e 21. ſept.

& E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [f] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C, atque adeo C, minimus eſt omnium, quos metiuntur. f 17. ſept.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. [g] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, [h] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quã B, multiplicatus à C, ipſum E, producat; [i] metietur tam A, quam B, ipſum E. Quod vero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito [k] fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium, [l] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G, [m] metientur ipſos H, & G, æque nimirum C, ipſum H, & D, ipſum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F, [n] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt, metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipſo E, minorem, atque adeo E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

A .... B ......
C .. D ...
E ....
F ——— .--
G —— H ----

g 35. ſept. h 19. ſept. i 7. prom. k 9. prom. l 19. ſept. m 21. ſept. n 17. ſept.

COROLLARIVM.

HINC fit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propoſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum eſt propoſitio 35. huius libri ſeptimi. Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. xxxv.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur,

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD. ſitque alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum CD, metiri. Si enim E, ipſum CD, non metitur, ablato E, ex CD, quoties poteſt auferri, relinquetur numerus quidam minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties poteſt, numerum, ſi fieri poteſt, FD, minorem ſe, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quam B, ipſum E, metitur, & E, ipſum CF, [a] metietur quoque tam A, quam B, ipſum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; [b] metientur & reliquũ FD. Eſt autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare E, ipſum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A .. B ...
C .... F —— D
E .....

a 11. pron. b 12. pron.

PROBL. 5. PROPOS. 38. xxxvj.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [a] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipſum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipſum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque eſſe, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, B, C, alium numerum E, ipſo D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo, cum A, & B, metiantur ipſum E, & D, ſit minimus, quem iidem A, & B, metiuntur, [b] metietur quoq; D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum.

A ... B .... C ......
D ....
E ————

a 36. ſept. b 32. ſept.

SED iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. [c] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita oſtendetur. Cum A, & B, metiantur ipſum D, & D, ipſum E; [d] metientur quoq; A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quod autem E, ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipſum F, metiuntur; [e] metietur quoq; eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipſum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo cũ C, & D, metiantur ipſum F; [f] metietur quoq; eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur iidem C, & D, maior minorem. Quod eſt abſur-

A .. B ... C ....
D .....
E ....
F ——

c 36. ſept. d 11. prom. e 37. ſept. f 37. ſept.

abſurdum. Non ergo A,B,C,alium numerum ipſo E,minorem metientur; ſed ipſe E,erit minimus. Quapropter tribus numeris datis,reperimus,quem illi minimum metiantur,numerum. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his,ſi tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur,eundem metiri. Nam in extrema huius demonſtrationis parte, ex eo,quod A,B,C,ponebantur metiri ipſum F,oſtenſum eſt,& E,minimum, quem A,B, C,metiuntur,eundem F,metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ.37. huius lib.oſtendere poterimus. Metiantur enim A,B,C, quemcunque numerum DE,ſitque F,minimus, quem iidem A,B, C, metiantur. Dico & F,ipſum DE,metiri. Si enim non metitur, metiantur eius partem DG,relinquatque numerum GE,ſe minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur; & F, ipſum DG, [g] *metientur quoque A, B, C, eundem DG; Ac proinde, cum & totum DE, ponantur metiri;* [h] *metientur & reliquum GE, ipſo F,minorem. Quare F,non erit minimus,quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Metitur igitur F, ipſum DE.*

g 11. pron.
h 12. pron.

A . . B . . . C . . . .
D . . . . G — E
F . . . .

PARI ratione; Pluribus numeris datis,quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

xxxvij.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur partem habebit à metiente denominatam.

METIATVR numerum A,numerus B. Dico A,habere partem aliquam à B,denominatam. Metiatur enim B,ipſum A,toties, quot vnitates ſunt in numero C. Quia igitur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æquè metitur; [a] atque adeo eadem pars erit vnitas ipſius B,quæ C,ipſius A: Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin.2. huius lib. docuimus. Igitur & C,pars erit ipſius A,ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

a 15. ſept.

A . . . .
B . . . . C . . .

xxxviij.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C,metiri ipſum A.Nam cum B,pars denominetur à C,ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipſum C, & B, ipſum A,æquè. [a] Viciſſim ergo & vnitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet,&c. Quod demonſtrandum erat.

a 15. ſept.

A . . . .
B . . . C . . . . .

xxxix.

PROBL. 6. PROPOS. 41.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B,C. Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A,B,C, numeri denominati, ſiue qui ipſas denominēt, D, E, F; [a] minimuſq; quem D,E,F,metiuntur, numerus G. Dico G,eſſe minimum,qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat,ita oſtendetur. Cum D,E,F, ipſum G; metiantur. [b] habebit G, partes à D,E,F,denominatas, hoc eſt,partes A,B,C,cum hæ denominentur à D,E,F. Quod verò G,ſit minimus illas partes habens, perſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat, ſi fieri poteſt, H, ipſo G, minor eaſdem parrtes A, B,C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [c] metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor ſit quàm G,non erit G,minimus,quem metiuntur D,E,F. Quod eſt abſurdum,& contra hypotheſim. Non igitur minor numerus, quam G,datas partes A,B,C, habebit,ſed ipſe G,minimus erit. Quare numerum reperimus,qui minimus cum ſit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

a 38. ſept.
b 39. ſept.
c 40. ſept.

D . .   A, *Secunda*
E . . .   B, *Tertia*
F . . . .   C, *Quarta*
G . . . .
H ————————

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumantur numeri I,K,L, per quos numeri D,E,F, ipſum G, metiuntur; erunt numeri I,K,L, datæ partes A,B,C, ipſius G, denominatæ ſcilicet à D,E,F. Cum enim D,E,F, ipſum G, metiantur per I, K, L; metietur æque vnitas ipſos I,K, L, & numeri D.E,F, ipſum G. d Viciſsim ergo metietur quoq; vnitas ipſos D,E,F, & numeri I,K,L, ipſum G, æque, atque adeo vnitas ipſorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I,K,L, ipſius G. Cum ergo vnitas ſit pars ipſorum D,E,F, ab ipſis denominata; erunt & I,K,L, ipſius G, partes denominatæ à D, E, F. d 15. ſepti.

A, Secunda D.. I......
B, Tertia E... K....
C, Quarta F.... L...
G............

EX his autem ſequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, eſſe minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Oſtenſum enim eſt, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum eſſe, qui habeat partes A,B,C, cuiuſmodi ſunt I,K,L, à metientibus numeris D,E,F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, ſi inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur ſecundus numerus poſt minimum, tertius, quartus, &c. eaſdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A,B,C, denominatas à D,E,F, ſit illius duplus, numerus H; triplus vero I, &c. Dico H, eſſe ſecundum numerũ, qui eaſdem partes A, B, C, à numeris D,E,F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens eaſdem partes, ſed ipſi ſoli H, I, & cæteri multiplices ipſius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A,B,C, habeant, denominatas ſcilicet à D,E,F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipſum G, per conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos multiplices ipſius G;[c] metientur quoque D,E,F, eoſdem H,I, & reliquos multiplices ipſius G.[f] Quare H, I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D, E,F, [de]nominatas, quales ponuntur partes A, B, C. c 11. pron. f 39. ſepti.

A, D..
B, E...
C, F....
G............
H.........................
I.....................................
K--------------- M------ L
N------------------------------- P------ O

QVOD autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus eas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit, ſi fieri poteſt, alius KL, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex KL, relinquatur ML, ipſo G, minor. Quoniam igitur KL, partes habet A,B,C;[g] metientur ipſum numeri D, E,F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D,E,F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. huius lib. eundem KL: Metitur autem & G, ablatum KM; ſibi æqualem.[h] Igitur & reliquum ML, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H; cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, ſecundus eſt huiuſmodi partes habens. g 40. ſepti. h 12. pron.

NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet NO, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex NO, relinquatur PO, minor ipſo G. Quia igitur NO, partes habet A,B,C,[i] metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D,E,F, metiuntur, eundem NO, per coroll. propoſ. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum NP, ablatum ipſi H, duplo æqualem.[k] Igitur & reliquum PO, idem G, metietur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A,B,C, datas; Ac propterea I, tertius eſt illas partes habens. Eademq; ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c. i 40. ſepti. k 12. pron.

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datæ partes A,B,C; inueniendusq; ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A,B,C, numeri denominati D,E,F; Fiatq; G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atq; adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G, erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E: Atq; adeo A, pars ipſius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Deniq; cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partis nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem [h]abet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione [o]ſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdem partes eodem ordine, ita vt K, ſit ipſius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipſius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars eſt ipſius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D;[l] Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipſos G, & K, multiplicans faciat H, & I;[m] erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L; ita vnitas ad M: Erit per l 15. defi. m 17. ſepti.

A, Secunda B, Tertia C, Quarta.
D.. E... F....
G............
H.......................

. Vnitas

I-----------------------
K------------
L-------
M---

H.	G.	F.	Vnitas.
I.	K.	L.	M.

lemma propoſ. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M. Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

SI vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam; & hæc aliam à 4. & hæc aliam à 5. & hæc denique partem à 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

QVOD ſi numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas, tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTA-VVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. i.

SI fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B, C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunque numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, *a* erit, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: *b* Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur. *c* Igitur tam A, ipſum E, quam D, ipſum H, æque metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A........ E---
B............ F----
C.................. G------
D............................ H---------

a *14. ſeptimi.*
b *23. ſepti.*
c *21. ſepti.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, ſi extremi A, & D, inter ſe primi ſint, ſiue A, B, C, D, ſint continue proportionales, vt vult Euclides, ſiue non. Vt hoc exemplum oſtendit, in quo proportiones omnes diuerſæ ſunt, quemadmodum in ſuperiori eadem ſemper proportio reperitur.

A.... E---
B....... F-----
C......... G------
D........... H--------

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunq; iuſſerit quiſpiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, ſe ipſum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans ſeipſum faciat E. Dico C, D, E, eſſe tres minimos in proportione A, & B. Quod enim proportionales ſint in data proportione A, ad B, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, ſic oſtendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; *a* erit vt A, ad B, ita C, ad

A.. B...
C.... D...... E.........
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

a *17. ſepti.*

A.. B...
C.... D...... E.........
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

b 17. ſept. D. Rurſus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; *b* erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales ſunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione ſint minimi, ita demonſtrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati ſunt ex A, & B, in
c 24. ſepti. ſe ipſos: *c* ſunt autem A, & B, inter ſe primi, quod minimi ſint in ſua proportione; *d* Erunt & C, E, extremi, inter
d 29. ſepti. ſe primi. *e* Quare C, D, E, minimi ſunt in ratione A, ad B.
e 1. Octa-

IAM vero ex A, in tres iuuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, H, I, minimos eſſe in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales ſint in ratione A, ad B, ita demonſtrabimus. Quoniam A, multiplicans ipſos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, e x iis, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, numeri F, G, H, eaſdem proportiones, quas C, D, E, hoc eſt, quam habet A, ad B. Rurſus quia A, &
f 18. ſept. B, ipſum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, *f* erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue
g 24. ſept. proportionales in data proportione A, ad B, Quod autem in data ratione minimi ſint, ita perſpicuũ fiet. *g* Quoniam A, & B, minimi in ſua proportione, ſunt inter ſe primi; factique ſunt C, & E, ex A, & B, in ſe ipſos; Item
h 29. ſept. procreati ſunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E, *h* erunt & F, I, extremi, inter ſe primi.
i 1. octau. *i* Quare F, G, H, I, in ſua proportione, quæ eſt A, ad B, minimi ſunt.

NON aliter, ſi ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, &
k 18. ſepti. *ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto,* [k] *numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod A, B, multiplicantes C, ipſos F, G fecerint: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propoſ. 18. huius lib. demonſtrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc eſt, in qua A, B; quod B, multiplicans C, D, E, ipſos GHI, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi ſint, oſtendetur, vt prius.*

NON aliter ſi ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Itaque ſiue A, multiplicetur in omnes inuẽtos, & B, in vltimum; ſiue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonſtrauit enim Euclides, quatuor FGHI, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A.. B...
C... D...... E.........
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, ſi tres numeri minimi ſint cõtinue proportionales, extremos quadratos eſſe: ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſe ipſos ideoque æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorum A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub aliis denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari: Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continue proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuorve numeris minimis cõtinue proportionalibus vtcunq; propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continue proportionales æquales prorſus ſunt iis, qui per hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, nõ eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hanc propoſ. Si vero dati maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi, quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſime ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continue proportionales: ſumptiſque duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atque ita, cum ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eademq; ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erunt. Eademq; ratio eſt de quatuor, aut pluribus. Quod ſi A, dicatur minor quam F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt. quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si vero A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quam G, H: atque idcirco A, B, C, minimi non ſunt. quod eſt contra hypotheſim. Cum ergo A, minor non ſit, aut maior, quam F; æqualis omnino erit, ideoque vt oſtenſum eſt, & B, C, ipſis G, H, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

A--- B----- C------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem iuuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medii ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H, vt ex demonſtratione Euclidis, & ea quam in ſcholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum vero B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continue proportionalium ſint vltimi tot cõtinue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continue proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunq; integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum, qui ſi per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rurſum, per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur à 2. hoc modo 1.2.4.8.16.32.64.128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi ſint in proportione 3. ad 2. vt hic patet 128.192.288.432.648.972.1458.2187. ſi maiores numeri ad minores referantur. Eademq; de reliquis eſt ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderantur octo numeri minimi in proportoine ſeſquialtera, ſumendi ſunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui nimirum denominantur à denominatore partis ſecundæ, ſeu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione ſeſquialtera, hoc eſt, à 2. Quod ſi optentur quinque numeri minimi in proportione ſeſquiquinta, ſumendi erunt quinq; numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1.5.25.125.625. Nam 625. eſt primus quinque numerorum in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet 625.750.900.1080.1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non poſſunt inueniri (quod mirũ videri poſſit) plures numeri continue proportionales, quam propoſiti ſunt. Neq; enim poſt 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neq; in priori exemplo poſt 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialteram habeat. Ratio autem huius rei eſt, quod extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, vt ex demonſtratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non poßit eſſe ad alium quempiam numerum, vt primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

THEOR. 2. PROPOS 3. iij.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter ſe primos eſſe. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis ſit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Id quod nos Geometrice demonſtrauimus ad finem coroll. 1. ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll. 2. propoſ. præcedentis K, & N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt A, & D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.

A,	8,	B,	12.	C,	18.	D,	27.
		E,	2.	F,	3.		
		G,	4.	H,	6.	I,	9.
K,	8.	L,	12.	M,	18.	N,	17.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & verbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, inueniri non poſſent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo ſi diuerſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, continuati in ſuis proportionibus diuerſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri 6.10.13.18. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compoſiti ſint inter ſe. Itaque hoc theorema primi eſt conuerſum, quo ad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter ſe ſunt primi, minimi ſunt in ſua proportione, vt conſtat ex 1. theor. Et viciſsim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, velut hic demonſtratum eſt. At vero primum theorema, prout ſpectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunq; non continne propor-

proportionales, quorum extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, vt ex ſcholio propoſ 1.huius lib.liquet; Tamen non ſemper è contrario, numeri extremi quotcunq; minimorum non continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, vt manifeſtum eſt in exemplo nuper prolato 6.10.13.18.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

IV.

RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres
a 36. ſepti. numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. *a* Inuento numero E, minimo, quem
metiantur B,& C,ſecundus & tertius; quoties B,ipſum E,metitur,toties A,metiatur ipſum F;& quoties C,eundem E,toties ipſum G,metiatur D.Dico F,E,G,minimos in proportio-

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I—— K—— L——

nibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita oſtendemus. Quoniam A,& B,æque metiuntur ipſos F, & E, hoc eſt,per eundem numerum; metiantur per H. Quo poſito, *b* A, & B, multiplicantes
b 9. pron. ipſum H,producent F,& E. *c* Quare erit vt A,ad B,ita F,ad E. Eadem ra-
c 18. ſepti. tione,cum C,& D,æque metiantur ipſos E,& G; erit vt C,ad D,ita E,ad G.Igitur F,E,G, deinceps proportionales ſunt in rationibus A,ad B,& C,ad D.Quod autem minimi ſint,ſic manifeſtum erit.Si non ſunt minimi,erunt aliqui illis minores,ſinguli ſinguli,in eiſdem rationibus:ſint,ſi fieri poteſt,I,K,L. Quia igitur A,& B,minimi ſunt in ſua proportione: *d* ipſi æque metientur I,& K,in eadem proportione exiſtentes, nimirum B,ipſum
d 21. ſepti. K,conſequens conſequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L,nimirum C,ipſum K,antecedens antecedentem. Quare cum B,& C, ipſum K, metiantur; *e* metietur eundem K, numerus E, minimus,
e 37. ſept. quem B,& C,metiuntur,minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis F,E, G,in rationibus A, ad B,& C,ad D; Ac propterea ipſi F,E,G,minimi ſunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A,ad B;C,ad D;& E,ad F; inueniendique ſint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. *f* Inuento rurſum numero G, minimo, quem meti-
f 36. ſept. antur B,ſecundus, & C,tertius; quoties B,ipſum G,metitur,toties metiatur A,ipſum H;& quoties C,ipſum G, toties D,ipſum I,metiatur. Quibus peractis,aut E,ipſum I,metitur,aut non. Metiatur primũ; Et quoties E,ipſ I, metitur,toties F, metiatur ipſũ K. Dico H,G,I, K,minimos

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L—— M—— N—— O——

eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales,conſtat. Cũ n. A & B,ipſos H,&G,æque metiantur;erit vt prius,quemadmodũ A,ad B,ita H,ad G.Eadẽ ratione erit,vt C,ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F,ita I,ad K;quod tam C,& D,ipſos G,& I,quã E,& F,ipſos I,&K, metiantur æque. Igitur H,G,I,K,deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi,ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi,ſint in eiſdem rationibus minores ipſis,ſinguli ſingulis,ſi fieri poteſt,L,M,N, O. Quia igitur A,& B,minimi ſunt in ſua proportione; *g* ipſi metientur æque L, & M, eandem habentes ratio-
g 21. ſept. nem,nimirum B,conſequens conſequentẽ M. Eodem modo C,& D, æque metientur M,& N,nimirum C,antecedens antecedentem M. Quocirca cum B,& C,ipſum M,metiantur; *h* metietur eundem M,& numerus G,
h 37. ſept. minimus,quem B,& C,metiuntur,minorem maior. Quod eſt abſurduum. Non ergo erunt alii numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis G,H,I,K; Ac proinde H,G,I, K,in datis rationibus minimi ſunt.

SED iam E, non metiatur ipſum I. *i* Inuento ergo numero K, minimo,quem E, & I, metiantur; quoties
i 36. ſept. I,ipſum K,metitur,toties quoque G,ipſum L, & H,ipſum M,metiatur: & quoties E, metitur K,toties metiatur F,ipſum N. Dico M,L,K,N,eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipſos M,L,K,æque metiantur;erit vt ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L;& vt G,ad I,ita L,ad K: Eſt autem eadem ratione,vt

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O—— P—— Q—— R——

H,ad G,ita A,ad B;& vt G,ad I,ita C,ad D, quod & A,B,ipſos H, G:& C, D, ipſos G, I, metiantur æque. Igitur vt A,ad B, ita M,ad L,& vt C,ad D, ita L, ad K. Atqui vt E,ad F,ita quoque eſt K,ad N,cum E,F,æque ipſos K,N.metiantur. Sunt ergo M,L,K,N,deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si namque non ſunt minimi,dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt, *k* ipſi æque metientur O, P, in eadem ratione exiſtentes,nimirum B, conſequens conſequentem P. Eodem argumento C,D,ipſos P,Q, metientur æque,videlicet antecedens C,antecedentem P: At-
k 21. ſepti. que adeo cum B,& C,ipſum P,metiantur, *l* metietur quoque G,minimus,quem metiuntur B,& C,eundem P. Quia vero oſtenſum eſt,eſſe vt G,ad I,ita L,ad K,hoc eſt,ita P,ad Q; erit permutando, vt G,ad P,ita I,ad Q: At-
l 37. ſept. que idcirco,cum metiatur G, ipſum P,metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q. *m* quod E,F,in
m 21. ſepti. ſua proportione minimi æque metiantur Q,R,eiuſdem rationis,nimirum antecedens E,antecedentem Q. Ergo cum metiantur I,E,ipſum Q; *n* metietur etiam K, quem minimum metiuntur IE,eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alii numeri denceps proportionales in datis rationibus minores quam M,L,K,N,propptereaque ipſi M,L,K,N, minimi ſunt,

n 37. ſept. QVOD ſi quatuor rationes datæ fuerint;inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendũ, vt nuper

A,6.B,5.C,4.D,3.E,2.F,7 S,3.T,2.
M,48.L,50.K,30. N,105.O,70

cũ tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit in numeris minimis S,ad T,inueniemus primum M,L,K,N,minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E,ad F. Deinde ſi S.ipſum N, metiatur,accipiemus O,quem T, toties metiatur,quoties S, ipſum N, metitur ; Nam M, L, K, N,O, erunt deinceps propor-
tiona-

tionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipſum N, non metiatur, [c] ſumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipſum O, metitur, toties metiatur K, ipſum P, & L, ipſum Q; & M, ipſum R; quoties c 36. ſepti.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

vero S, eundem O, metitur, toties T, ipſum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinq; vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaq; rationibus datis quotcunq; in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, abſoluemus nihilo minus problema propoſitum; ſed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propoſitione 35. libr. 7. demonſtratum eſt, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius ſit & antecedens, & conſequens, licet proportiones ſint diuerſæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, ſi ij multiplicentur per quemcunq; numerum eundem, procreabuntur alij in eiſdem rationibus deinceps, proportionales, vt conſtat ex iis, quæ ad propoſ. 18. libr. 7. demonſtrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5. V.

PLANI numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D, poſterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius ſint antecedentia, & alterius conſequentia, quemadmodum propoſ. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, ſe mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, ſunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. [b] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur. a 17. ſepti. b 27. defin.

A, 24. B, 48.
G, 18.
C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

EODEM argumento oſtendemus, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, ſi latera E, & F, loca inter ſe permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G, [c] erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B, erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rurſum A, G, B, deinceps proportionales ſunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. [d] Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. Quod demonſtrandum erat. c 17. ſepti. d 27. defin.

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

THEOR. 4. PROPOS. 6. VI.

SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neq; alius quiſpiam vllum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non metiatur B, ſecundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proxime inſequentem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cum ſit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D, & D, ad E: A, vero ipsũ B, nõ metiatur, neq; B, ipsũ C, neq; C, ipſum D, neq; D, ipſum E, metietur. Quod vero nec alius quiſpiam illorum vllum metiatur, ſic demonſtrabimus. [a] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero eſt vt A, ad B, ita F, ad G, non metitur autem A, ipſum B; neque F, ipſum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipſum G, metiretur, cum vnitas omnem numerum metiatur. [b] Quare cum F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit vnitas; nõ metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quod nec B, tertium à ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtrabimus, neq; A, quartum D, neq; B, quartum E, metiri. Atq; ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum. a 2. octaui. b 3. octaui.

A, 16. B, 24. C, 36. D; 54. E, 81.
F, 4. G, 6. G, 9.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neq; alius quiſquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neq; alium quenquam illorum vllius eſſe multiplicem. Quod enim nullus proxime inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neq; B, ipſius C; neq; C, ipſius D; neq; D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

Quoniam D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur è contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunq; E; D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C, & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus ſecundum D, non metitur; c 6. oct. *c neq; alius quiſquam illorum vllum metietur. Quare è contrario, ſi maiores ad minores referantur, neq; quiſquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. lib. 7. ſcripſimus.*

SED & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecundum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunq; alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunq; numeri A, B, C, D, E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quolibet proxime inſequentem metiatur, perſpicuum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C, C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipſum B; & B, ipſum C: & C, ipſum D: & D, ipſum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet ſequentium metiatur, nempe B, ipſos D, & E, hoc modo oſtendetur.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

d 11. pro. e 11. pro. *Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D, d metietur quoq; B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur, e metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis.*

SED iam primus A, multiplex ſit B, ſecundi. Dico & quemq; illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cum enim ſit vt A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E, ſit autem A, ipſius B, multiplex: erit & B, ipſius C, & C, ipſius D, & D, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime inſequentis multiplex eſt. Rurſus quia D, ipſius E, eſt multiplex, metietur è contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, vt demonſtratum eſt; Ac propterea è contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſq; ſequentium multiplex erit.

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

CONVERTEMVS etiam hanc propoſitionem ſextam, & theorema, quod primo loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam nullum à ſecundo metiatur; neque primus ſecundum metietur. Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo ſit multiplex; neq; primus ſecundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quiſque nullum à ſecundo B, metiatur. Dico neq; A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, primus ſecundum B, dicatur metiri; metietur quoq;, per ea, quæ ſecundo loco in hoc ſcholio oſtendimus, quicunq; alius quemlibet ſequentium. Quod eſt abſurdum, cum neque primus, neq; alius quiſquam vllum à ſecundo metiri ponatur. Non ergo A, ipſum B, metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo B, ſit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem eſſe B, ſecundi. Si namq; A, primus multiplex eſſe dicatur B, ſecundi, multiplex quoq; erit quicunq; alius cuiuslibet ſequentium, ex iis, quæ ſecundo theoremate huius ſcholij demonſtrauimus. Quod eſt abſurdum. Neque enim primus, neque alius quiſquam vllius à ſecundo multiplex eſſe ponitur. Non igitur A, ipſius B, multiplex erit.

A, 81. B, 45. C, 36. D, 24. E, 16.

vii.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur ſecundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremum E, metiatur. Dico & A, primũ metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri: a neq; alius quiſquam vllum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundun metietur; Atque idcirco ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

a 6. oct.

SCHO-

SCHOLIVM.

VT theorema, quod ſecundo loco in ſcholio præcedentis propoſit. demonſtrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propoſ. hoc modo:

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet à ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſpiam cuiuslibet à ſecundo ſit multiplex; primus quoq; ſecundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex; neq; alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propoſit. 9. & 1. theoremate ſcholij præcedentis. Quod eſt contra hypotheſim.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viii.

SI inter duos numeros medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medii continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A, B, medii proportionales continue C, D; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico vt tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot ſunt numeri. A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad

A,	24.	C,	36.	D,	54.	B,	81.
G,	8.	H,	12.	I,	18.	K,	27.
E,	32.	L,	48.	M,	72.	F,	108.
A,	40.	C,	20.	D,	10.	B,	5.
G,	8.	H,	4.	I,	2.	K,	1.
E,	8.	L,	4.	M,	2.	F,	1.
A,	27.	C,	9.	D,	3.	B,	1.
G,	27.	H,	9.	I,	3.	K.	1.
E,	108.	L,	36.	M,	12.	F,	4.

B, atque adeo vt E, ad E, ita G, ad K. [a] Quare cum G, & K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorum numerorum; [b] ac propterea in ſua proportione minimi; [c] æque metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos. [d] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerũ, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F, producunt; in eiſdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales ſunt; Atq; idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B, tot cadent medii proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medii continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 3. oct. b 23. ſepti. c 21. ſepti. d 9. pro.

SCHOLIVM.

NON ſolum ex demonſtratione conſtat totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L; M, F, quæ eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadem eſſe proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hæc propoſitio vera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit vnitas exiſtentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum medium proportionalem: Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatnr inter binarium, & vnitatem; ſuperparticularis vero inter numeros ſola vnitate differentes; ſuperbipartientes deniq; inter numeros, quorum differentia eſt binarius: ſi inter duos numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoq;, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eaſdẽ cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neq; inter binarium & vnitatẽ, neq; inter duos numeros ſola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionaleus ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes interijcitur ſolum numerus, qui ab vtroq; vnitate differt: Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri AB, CD, (ſiue CD, vnitas ſit, & AB, ternarius, ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quam A B, maior vero quã CD, vnitate quoq;. Dico EF, non eſſe medium proportionalem inter AB, CD. Si enim dicatur eſſe AB, ad FE, vt FE, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipſi EF, æquali, vt reliqua ſit vnitas GB; &

A . . G . B	A . . . . . . G . B
E . H . F	E . . . . . H . F
C . D	C . . . . . D

A . . G . B | A . . . . . . G . B
E . H . F | E . . . . , H . F
C . D | C . . . . . D

GB; & ex EF, numero EH, ipſi CD, æquali, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoq; vt AB, totus ad EF, totum ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipſis EF, CD, æquales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoq; reliquus GB, ad reliquum HF, hoc eſt, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo EF, medius proportionalis eſt inter AB, & CD.

ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter ſe differunt, quod fieri non poſſe, proxime demonſtrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoq;, ex hoc theoremate, medius proprotionalis inter 5, & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non poſſe, ita demonſtrabimus. Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt ſit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipſum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque ſenarium AE. Igitur D, metitur totum AE, & ablatum AB:

A . . . . . B . E
D . . D . . .
C .

a 11. pro. *tur totum AE, & ablatum AB: [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem BE. Quod eſt abſurdum.*

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE: [b] ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem EB, metietur. Quod eſt abſurdum.

A . . . . E . B
D . . . .
C .

b 11. pro.

EX quibus fit, neque illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, octaua; neq; illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt Tonus, ſeu vulgo, ſecunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet) ſecari dicitur, int[illegible] terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuiſa eſſe dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo oſtenſum ſit, inter numeros duplæ proportionis, & ſuperparticularis, qualis eſt ſeſquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perſpicuum eſt, Diapaſon, & Tonum, bifariam ſecari non poſſe. Vnde Diapaſon prima ſui diuiſione in Diapenten, & Diateſſaron, quorum interuallorum illud in proportione ſeſquialtera, hoc vero in ſeſquitertia conſiſtit, apud Muſicos ſecatur, vt hic apparet, 2.3.4. Eſt enim hic proportio dupla diuiſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam, tanquam in maximas ſui partes inter ſe inæquales. Ita quoq; Tonus in duo ſemitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, ſecari ſolet. Sed de his plura apud Muſicos reperies.

RVRSVM ex his demonſtrari poteſt, proportionem diametri cuiuſuis quadrati ad latus eiuſdem, numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea quæ ad propoſ. 47. libr. 1. demonſtrauimus, quadratum diametri duplum ſit quadrati ex latere deſcripti, quadratorum vero proportio ſit duplicata proportionis laterum; ſit, vt proportio quadrati ex diametro deſcripti, ad quadratum lateris duplicata ſit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam ſecet, vt oſtendimus, manifeſtum eſt, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe, ſed eſſe irrationalem, ſeu, quod idem eſt diametrum eſſe lateri incommenſurabilem, qua de re plura ad 9. & vltimam propoſ. libr. 10. ſcribemus.

ix.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medii continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter ſe primos medii continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quod inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, [a] ſumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo aſſumptorum ęqualis ſit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter ſe primi ſunt; [b] erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex conſtructione, in eadem proportione minimi.

a 2. oct.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

b 1. oct.

Igitur K, L, M, N, ipſis A, C, D, B, æquales ſunt ſinguli ſingulis, vt K, ipſi A, & N, ipſi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib.
c 1. pron. E, ſeipſum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipſum G, fecit K, [c] metietur E, ipſum G, per
d 5. pro. E, & G, ipſum K, per eundem E: [d] Metitur autem & vnitas ipſum E, per E. Æque igitur metietur vnitas ipſum E, & E, ipſum G, & G, ipſum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius E, & E, ipſius G, & G, ipſius
e 20. defi. K. [e] Proportionales ergo ſunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifeſtum ſi ex eadem demonſtratione propoſ. 2. huius lib. quod F, ſe ipſum multiplicans producat I, multiplicans vero ipſum I, fa-
f 7. pron. ciat N; [f] metietur F, ipſum I, per F, & I, ipſum N, per eundem F:
g 5. pron. [g] Metitur autem & vnitas ipſum F, per F.

Æque

Æque igitur metietur vnitas ipſum F, & F, ipſum I, & I, ipſum N; ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius F, & F, ipſius I, & I, ipſius N. [c] Proportionales ergo ſunt continue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vna cum vnitate, æqualis ſit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perſpicuum eſt ex propoſ. 2. huius lib. Nam duo E, F, ſunt ſecundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertii; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medii continue proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, ſeu A, ſibi æqualem, & inter vnitatem, & numerum N, ſiue B, ſibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medii, &c. Quod oſtendendum erat. c 20. defin.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. M, 27.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt; numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atq; vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc eſt, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem, id quod in ſcholio propoſ. 2. huius lib. quoq; aſſeruimus.

CONSTAT etiam ex demonſtratione hac, ſi numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit, & rurſum multiplicet productum, & ſic deinceps: omnes productos eſſe continue proportionales ab vnitate. Oſtenſum enim eſt & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione ſunt procreati, ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. continue eſſe proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. x.

SI inter duos numeros, & vnitatem continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medii continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medii continue proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At vero inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumq; A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & F, faciat I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciant K, & L. Rurſus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot ſunt inter vtrumque A, B,

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3 F, 6.
1.
vnitas.

& vnitatem. Quoniam igitur eſt, vt vnitas ad C, ita C, ad D. D, ad E; & E, ad A, æque metietur vnitas ipſum C, & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A: [a] Metitur autem vnitas ipſum C, per C. Igitur & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A, per C, metietur. [b] Quare C, ſeipſum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, ſeipſum multiplicans fecit G; & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [c] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [d] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rurſus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc eſt, quam C, ad F. Eodem modo quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F. Poſtremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex iis, quæ à nobis ſunt demonſtrata ad propoſ. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc eſt, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [f] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinq; igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medii proportionales cadunt inter A, & B, quot inter H, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta ſit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca ſi inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 5. pro.
b 9. pro.
c 17. ſepti.
d 17. ſexti.
e 18. ſepti.
f 18. ſepti.

SCHOLIVM.

EX his conſtat, numeros qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales ſunt C, & F, habent.

PATET etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtatum enim eſt, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales, ſunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium ſumentes.

I. SI

I.

SI ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertii ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam enim inter vtrumq; numerorum B, F; & vnitatem cadit medius vnus proportionalis, inter B, quidem & vnitatem, numerus A: &

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.

C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.

B, 9. I, 12. F, 16.

A, 3 E, 4.

1.

vnitas.

a 10. oct. *inter F, & vnitatem numerus E: [a] cadet quoq; inter B, & F, vnus medius proportionalis: atque adeo, per ſcholium huius propoſ. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & ſit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui ſint K, L; quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui ſint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Eſt autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoq; B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata eſt proportionis C, ad K; & eſt vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & ſic de cæteris.*

HOC idem demonſtrabimus, ſi fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertii ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rurſum, proportionem B, ad F, eſſe duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in ſe fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in ſe fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Poſtremo ex F, quoque in ſe fiat Q; & ex F, in Q, fiat R, & ex F, in R, fiat C. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab vnitate, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eademque ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata eſt rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius ſcholij: Eſt autem, ex defin. eiuſdem rationis B, ad A, duplicata quoq; ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate eſt ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F, & eiuſdem, ex defin. duplicata eſt ratio A, ad G. Quare cum ſit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata eſt rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius ſcholij; quod tam B, N, quam F, Q, ſint ab vnitate continue proportionales ex ſcholio propoſ. 9. huius libr. Igitur & ratio C, ad G, duplicata eſt rationis B, ad F. Eiſdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata eſt rationis B, ad A; quod tam B, N, O, quam A, K, L, ſint ab vnitate continue proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius libr. & eiuſdem triplicata eſt ratio D, ad A, ex defin. Igitur eſt D, ad A, vt O, ad L. Eodemq; modo eſt A, ad H, vt L, ad R: quod vtraq; proportio triplicata ſit proportionis A, ad F: Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius ſcholij, propterea quod tam A, K, L, quam F, Q, R, continue proportionales ſunt ab vnitate, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eſt ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata eſt rationis B, ad F, ex 1. theor. eo quod tam B, N, O, quam F, Q, R, ſunt continue proportionales ab vnitate ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata eſt eiuſdem rationis B, ad F. Non ſecus demonſtrabimus rationem E, ad I, eſſe quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

E, 162. I, 512.

D, 54. Vnitas. H, 128.

C, 18. 1. G, 32.

B, 6. F, 8.

A, 2.

N, 36. K, 4. Q, 64.

O, 216. L, 8. R, 512.

P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. I, 1.

D, 54. Vnitas. H, 2.

C, 36. 1. G, 4.

B, 24. F, 8.

A, 16.

N, 576. K, 256. Q, 64.

O, 13824. L, 4096. R, 512.

P, 331776. M, 65536. S, 4096.

IDEM omnino demonſtrabitur, ſi numeri vnius ordinis deſinant in vnitatem, vt ex ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua I, eſt vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonſtrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propoſ. 28. licet non in quotcunq; lineis. Vnde multo generalius eſt hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonſtratis efficiemus propoſitionem hanc 10. Euclidis magis vniuerſalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptum deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medii continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A, B, & aſſumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G: erit ex def.

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6 G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc eſt, D, ad G: Sed per theor. 2. huius ſcholij, ratio quoq; E, ad H, duplicata eſt eiuſdem rationis D, ad G. Igitur eſt vt K, ad M, ita E, ad H: Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportianalis L: [a] *cadet quoq; vnus medius, nimirum N, inter E, & H, quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Similimodo, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quatuor minimi numeri, oſtendemus, inter F. & I, duos medios cadere, ſicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quinq; numeri minimi.* a 8. oct.

HOC etiam verum eſt, ſi loco alterius numeri, nimirum B, vnitas aſſumatur, veluti perſpicuum eſt in hac ſecunda figura, in qua numerus B, vnitas eſt, caduntque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot ſcilicet inter A, & B, cadunt, &c.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

EX his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero aſſumpto C, propinquiores.

THEOR. 9. PROPOS. 11. xj.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, eſſe duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans ſeipſum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati: & ipſum D, multiplicans fecit E, ex conſtructione: [a] erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rurſus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex conſtructione: & multiplicans ſeipſum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum [b] erit quoq;, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales ſunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D: cum hæc proportio eadem ſit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 17. ſepti.
b 17. ſepti.

A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonſtratum eſt.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A,E,B, proportionales ſint oſtenſi in ratione C,ad D, hoc eſt, eſſe A; ad E, & E,ad B,vt C, ad D; metiatur autem latus D,quadratum ſuum B,conſequens conſequentem,ſi de proportionibus E, ad B,& C,ad D,loquamur: metietur & C, ipſum E,antecedens antecedentem; quandoquidem eſt E,ad B,vt C,ad D.Metitur autem & latus C,quadratum ſuum A. Igitur E, & A,menſuram communem habent C; atque adeo inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cum ſit A,ad E,vt C,ad D; & metiatur latus C,ſuum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoq; D, ipſum E,conſequens conſequentem. Quare cum & latus D,metiatur ſuum quadratum B: habebunt E,& B,communem menſuram D: Ideoq; compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum A, E, communem menſuram eſſe C, latus prioris quadrati A; poſteriorum vero E,B, menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.

xj.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medii proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A,& B, quorum latera C,& D. Dico inter A,& B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionem A,ad B,cubi ad cubum,triplicatam eſſe proportionis C, ad D,lateris ad latus. Multiplicans enim C, ſeipſum faciat E: & D, ſeipſum multiplicans faciat F: At C, & D, ſe mutuo multiplicantes faciant G: Multiplicantes vero G, faciant H,&I. Quoniam igitur C, ſeipſum,& D,multiplicans fecit E,& G: [a] erit,vt C,ad D,ita E,ad G. Eadem ratione, cum D,multiplicans C,& ſeipſum,fecerit G, & F: [b] erit quoque vt C, ad D,ita G, ad F,proptereaque E,G,F,continue proportionales ſunt in ratione C,ad D. Rurſus,quia ex defi. cubi,C, ipſum E, multiplicans fecit A,& ex conſtructione multiplicans ipſum G,fecit H: [c] erit vt E,ad G, hoc eſt,vt C,ad D,ita A,ad H. Similiter cum D, ipſum G, multiplicans fecerit,ex conſtructione,numerum I: multiplicans vero ipſum F,ex defin. cubi fecerit cubum B; [d] erit quoque, vt G,ad F,hoc eſt,vt C,ad D,ita I,ad B: [e] Eſt autem & H,ad I,vt C,ad D: quod C,& D,ipſum G,multiplicantes fecerint ex conſtructione,H,&I. Igitur A,H,I,B,continue ſunt proportionales in ratione C,ad D: Atque adeo inter cubos A,& B,duo medii H,& I, cadunt continue proportionales. Quoniam vero,ex eo quod A, H, I, B, continue ſunt proportionales, numerus A,ad B,triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H: triplicatam quoq; rationem habebit A,ad B,cubus ad cubum,eius,quam habet C,ad D,latus ad latus,cum ſit C, ad D,vt A,ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medii proportionales ſunt numeri, &c. Quod erat oſtendendum.

a 17. ſepti.
b 17. ſepti.
c 17. ſepti.
d 17. ſepti.
e 18. ſepti.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

S C H O L I V M.

HIC quoq; manifeſtum eſt, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe A,ad H,& H,ad I,& I,ad B,vt C, ad D.

EODEM modo conſtat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A,B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A,H,I,B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C,ad D: hoc eſt, eſſe A,ad H,& I,ad B,vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B,conſequens conſequentem, ſi de proportionibus I,ad B,& C,ad D,loquamur, metietur quoq; C,ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B,vt C, ad D: Metitur autem & latus, C,cubum ſuum A; immo & ipſum H; quod H, factus ſit ex multiplicatione C,in G,ex conſtructione. Igitur A,H,I,communem habent menſuram C, atque adeo inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A, ad H, vt C; ad D: metiatur autem latus: C,cubum ſuum A,antecedens antecedentem, metietur quoq; D, ipſum H, conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D, cubum ſuum B: immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D: Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt, priorum trium numerorum A,H,I, communem menſuram eſſe C,latus cubi prioris A, poſteriorum vero trium H, I,B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi E.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

xij.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A,B,C, qui ſeipſos multiplicantes facient D,E,F, multiplicantes autem ipſos D,E,F, faciant G,H,I; & rurſum multiplicantes ipſos G,H,I, faciant K,L,M, & ita deinceps. Dico quoq; D, E,F,& G,H,I,& K,L,M, continue eſſe proportionales. Multiplicantes.n.A,& B, ſe mutuo faciant N; & B,C, ſe mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N,E, faciat P,Q. Item B, multiplicans O,F, faciat R,S. Simili modo A, multiplicans P,Q,H, faciat T,V,X; & B, multiplicans R,S,I, faciat Y,Z, à Quoniã igitur A, multiplicans ſeipſum,& B, fecit D,N, [a] erit vt A,ad B,ita D,ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A,& ſeipſum fecit

a 17. ſept.

fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rurſus quia B, ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; [b] erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademque b 17. ſept.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

ratione cum C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; proptereaq; & E, O, F, continue proportionales ſunt in ratione B, ad C, ſeu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione ſint continue proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeo D, E, F, continue proportionales ſunt.

DEINDE, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex iis, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadē ratione, in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; [c] erit quoque vt A, ad B, ita, Q ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt, B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; [d] erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; proptereaque & H, R, S, I, proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales. c 18. ſepti. d 18. ſept.

NON diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum nuerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

IAM quoq; numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionem totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdem numeri G, H, I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continue proportionales. Nam ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continue ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theor. ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad F, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G, H, I, eſſe proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atq; ita de cæteris.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. E, 16. F, 64.
G, 8. H, 64. I, 512.
K, 16. L, 256. M, 4096.

EX qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione duorum numerorum; ſecundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholij propoſ. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraq; demonſtratione huius propoſ. 13. dati ſint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propoſitionem demonſtrabimus, etiam ſi plures fuerint, quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui ſe ipſos multiplicantes faciant E, F, G, H; poſtea vero multiplicantes ipſos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, [e] ex demonſtratis, proportionales ſunt: Item F, G, H, cum illi producti ſint ex A, B, C, proportionalibus in ſe ipſos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoq; in ſe ipſos. Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non ſecus proportionales erunt, I, K, L, M, & alij deinceps eodem modo producti. e 13. octaui.

A, 2. B, 4. C, 8. D 16.
E, 4. F, 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

THEOR. 12. PROPOS. 14. xiii.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonſtratione propoſ. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B, [a] metietur quoq; A, primus ſecundum E. Quare cum ſit vt A, ad E, ita C, ad D, & C, latus latus D, metietur. a 7. oct.

A, 4. E, 12. B, 36. C, 2. D, 6.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C vt demonſtratum eſt propoſ. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, ſecundum, ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. ſcholii propoſ. 6. huius lib. Si quadratus ergo numeris quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

 THEOR.

xiv. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, ſe ipſum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem ſe mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonſtratione propoſ. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, [a] metietur quoq; idem A, primus H, ſecundum. Cum ergo ſit, vt A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36,
C, 2. D, 6.

a 7. oct.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D, vt oſtenſum eſt propoſ. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipſum H; atq; idcirco & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propoſ. 6. huius lib. demonſtrauimus. Itaq; ſi cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

xv. ## THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neq; quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt metiatur C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B, [a] metietur & quadratus A, quadratum B. Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81. C, 4. D, 9.

a 14. octa.

b 14. octa. SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipſum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D, Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

xv. ## THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neq; cubus cubum metietur.

a 15. oct. SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C; dicatur metiri D; [a] metietur quoq; A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

b 15. oct. SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam ſi metiri dicatur; [b] metietur etiam C, latus latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neq; latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neq; quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex.

c 14. & 15. oct. *NAM ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus cubum A. [c] Igitur & latus D, latus metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

d 14. & 15. oct. *QVOD ſi latus C, lateris D, multiplex ſit: metietur latus D, latus C. [d] Igitur & B, ipſum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur, Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.*

A, 36. B, 9. C, 6. D, 3.

AT vero ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non ſit multiplex, non metietur B, ipſum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. [g] *Igitur neq; latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.* g 16. & 17. oct.

A,	64.	B,	S.
C,	4.	D,	2.

A,	49.	B,	9.
C,	7.	D,	3.

SIMILITER ſi C, latus lateris D, non ſit multiplex, non metietur D, latus latus C. [h] *Igitur, nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.* h 16. & 17. oct.

A,	125.	B,	8.
C,	5.	D,	2.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvi.

DVORVM ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri ſimiles A,B, & latera illius ſint C, D, huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, ſe mutuo multiplicantes faciant A, & E, F, mutuo ſe multiplicantes faciant B, ſitq; vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim ſe mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G, [a] erit A, ad G, vt C, ad E, hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; [b] erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

a 17. ſepti.
b 17. ſepti.

A, 12.		G, 18.		B, 27.	
C, 6.	D, 2.	E, 9.	F, 3.		

QVIA vero, cum A, G, B, ſint continue proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E, vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVIA oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E. vel DF, aſſumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoq; C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quod ſit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cum ſit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F; ideoq; erunt inter ſe compoſiti.

EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

THEOR. 17. PROPOS. 19. xviii.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medii proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B & latera illius ſint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G, & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H. Multiplicatntes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, ſe mutuo multiplicantes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H.

A, 30.		M, 60.		N, 120.		B, 240.	
		I, 6.		L, 12.		K, 24.	
C, 2.	D, 3.	E, 5.	F, 4.	G, 6.	H, 10.		

Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L: [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; [b] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K, Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodẽ modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M. [c] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [d] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [e] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atq; idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medii M, N, continue proportionales cadunt.

a 17. ſepti.
b 17. ſepti.
c 17. ſepti.
d 17. ſepti.
e 18. ſept.

QVONIAM vero cum A, M, N, B, ſunt proportionales continue; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A,ad M; Eſt autem A,ad M,vt C, ad F, vel D,ad G,vel E,ad H: Habebit quoq; A, ad B, ſolidus ad ſolidum,proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F,vel D,ad G,vel E, ad H,latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medii,&c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit A,M,N,B,proportionales eſſe in ratione C,ad F,vel D,ad G,vel E,ad H,liquet inter duos ſimiles ſolidos A,& B,cadere duos medios proportionales M,& N,in ratione laterum homologorum C,F,vel D,G,vel E,H,aſſumptorum.

EX iis,quæ dicta ſunt,perſpicuum etiam eſt,duos medios proportionales M,N,& vtrumlibet ſolidorum A,B,inter ſe eſſe compoſitos. Cum enim A,M,N,B,oſtenſi ſint proportionales in ratione C,ad F,vel D,ad G,vel E,ad H; hoc eſt, eſſe A,ad M, & M,ad N,& N,ad B,vt C,ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N,ad B,& C,ad F,vel D,ad G,vel E,ad H,loquamur: metientur quoque C,D,E, ipſum N,antecedentes antecedentem: quod ſit N,ad B,vt C,ad F,vel D, ad G,vel E, ad H. Atqui & C,D,E,ipſum M, metiuntur: (Cum enim M,factus ſit,per conſtructionem,ex E,in L,metietur E,ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I,L,K,metitur autem K, ipſum B,quod B,factus ſit ex K,in H; metietur quoque I, ipſum M: Metiuntur autem &

e 11. pro. *C,D, latera planum ſuum I. [e] Igitur & C, D,metientur ipſum M; Atq; adeo C,D,E ipſum M,metientur.) Nec non & ipſum A,nimirum latera ſuum ſolidum.Ergo A,M,N,habent communem menſuram tam C,quam D,& quam E; Ideoq; compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A,ad M,vt C,ad F,vel D,ad G,vel E,ad H; metiuntur autem C,D, E, latera ſolidum ſuum A,antecedentes antecedentem; metientur quoq; F, G, H, ipſum M,conſequentes conſequentem. Metiuntur vero & F,G,H,ipſum N; (cum enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionem; metietur H,ipſum N.Deinde quia A,M, N,ipſis I,L,K,proportionales ſunt: metitur autem I,ipſum A,quod A,factus ſit ex I, in E; metietur etiam K,ipſum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoq; F,G,ipſum N; atq; adeo F,G,H,ipſum N, metientur.) Necnon & ipſum B,nimirum latera ſuum ſolidum. Ig[...] M, N,B,communem habent menſuram tam F,quam G,& quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A,M,N,communes eſſe menſuras C,D,E,latera prioris ſolidi A; At vero F,G,H,latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.*

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

QVIA vero ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco eundem numerum ſolidum procreari,ſiue primum latus ducatur in ſecundum, & numerus procreatus in tertium; ſiue primum in tertium,& numerus genitus in ſecundum; ſiue deniq; ſecundum in tertium,& productus numerus in primum: Quin etiam,propoſitis quotuis numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua quomodocunq; ordinem inter ſe permutent. Quæquidem res magnum vſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus,quomodocunq; ordinem inter ſe permutent.

SINT primum tres numeri dati A,B,C,& ex A,in B,fiat D,ex D,in C,fiat E. Dico eundem E,procreari,ſi ex A,in C,fiat F,& F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C,fiat G, & G,in A,multiplicetur. Quoniam enim C,multiplicans D,facit E, [f] erit vt E,ad D,ita C,ad vnitatem: Sed vt C,ad vnitatem, [g] ita quoq; eſt F,ad A; quod A,multiplicans C,faciat F. Igitur erit vt E,ad D,ita F,ad A: Vt autem D,ad B, [h] ita eſt A, ad vnitatem; propterea quod A, multiplicans,B,facit D. Igitur ex æqualitate erit,vt E, ad B,ita F, ad vnitatem: [i] atq; idcirco numerus ex E,in vnitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E,æqualis erit numero facto ex B,in F, productum ex A,in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A,in B, & ex producto in C; ita idem E,fit ex A,in C,& ex producto in B. Quod eſt primum.

A, *3.* B, *5.* C, *8.*
D, *15.* E, *120.* F, *24.* G, *40.*

f 15. def.
g 15. def.
h 15. def.
i 19. septi.

E, F,
D, A,
B, vnitas

RVRSVS quia ex C,in D, fit E; [k] erit vt E,ad D, ita C,ad vnitatem: Sed vt C,ad vnitatem, [l] ita etiam eſt G, ad B, eo quod G,factus eſt ex B,in C.Igitur erit,vt E, ad D,ita G,ad B: Vt autem D,ad A, [m] ita eſt B,ad vnitatem propterea quod D,factus eſt ex A,in B. Igitur ex æquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: [n] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem,id eſt,ipſemet numerus E,æqualis erit numero genito ex A,in G,productum ex B,in C. Quemadmodum igitur E,gignitur ex A,in B,& ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod eſt ſecundum.

k 15. def.
l 15. def.
m 25. def.
n 19. sept.

E, G,
D, B,
A, vnitas.

SINT deinde quatuor numeri A,B,C,D: atq; ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D,fiat E. Dico eundem E,gigni ex A, in B,& ex producto in D,& ex producto in C: Item ex A,in C,& ex producto in B,& ex producto in D: Item ex A, in C,& ex producto in D,& ex producto in B: Item ex A,in D,& ex producto in B,& ex producto in C: Item ex A,in D,& ex producto in C,ex producto in B: Item ex B,in C,& ex producto in A,& ex producto in D: Item ex B,in C,& ex producto in D,& ex producto in A: Item ex B, in D,& ex producto in A,& ex producto in C: Item ex B,in D,& ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita vt præter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter ſe fiant 11. multiplicationes diuerſæ producentes eundem ſemper numerum. Quoniam enim vt in tribus oſtenſum eſt,idem numerus fit,ſiue genitus numerus ex A,in B,ducatur prius in C, deinde hic productus in D,ſiue prius in D,deinde hic productus in C,conſtat id quod primo loco proponitur.

A, *2.* B, *3.* C, *4.* D, *5.* E, *120.*

DEINDE quia vt in tribus eſt oſtenſum,idem numerus ſit ex A,in B,& ex producto in C,qui fit ex A,in C,& ex producto in B,perſpicuum eſt eundem numerum gigni tum ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D,tum ex A,in C,& ex producto in B,& ex producto in D,quod eſt ſecundum.

TERTIO quoniam, vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus procreatur, ſiue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; ſiue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cum ergo ille ſit æqualis proxime oſtenſus primo producto, erit & hic æqualis eidem, quod eſt tertium.

QVARTO, quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

Quinto quoniam, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille ſit oſtenſus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonſtrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod eſt ſextum.

SEPTIMO quia, vt in tribus oſtendimus, idem numerus gignitur, ſiue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic productus in D, ſiue prius in D, deinde hic productus in A; conſtat eundem numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui fit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proxime oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & ille, quod eſt ſeptimum.

OCTAVO quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt octauum.

NONO quia, vt demonſtratum eſt in tribus idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

DECIMO quoniam, vt in tribus eſt demonſtratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A, producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco eſt oſtenſum, æqualis eſt ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

POSTREMO quoniam, vt oſtenſum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod eſt vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum eſt in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque aſſumatur id, quod iam in quatuor demonſtratum eſt, & in ſex, quod in quinque, &c. Vt in quinq; numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemq; ſemper numerus ex continua eorum multiplicatione inter ſe procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, conſtituit quatuor numeros. Ergo quomodocunq; inter ſe ordinem permutent, eundem ſemper gignent numerum: ac proinde tam ſecundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorſus numerum procreet, quem primus, & ſic de cæteris.

A.	B.	C.	D.	E.
A.	B.	C.	E.	D.
A.	B.	E.	D.	C.
B.	C.	A.	D.	E.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xvij.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis D. Dico A, & B, eſſe planos ſimiles. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi ſunt in ratione A, ad C, *a* metientur D, & E, ipſos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipſos C, & B: metiantur per G. *b* Itaq; F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: *c* Item G, eoſdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B, *d* erit vt C, ad B, ita F: ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G, & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E, fecit B, erit & B, planus cuius, latera E, G. Cum ergo hæc latera oſtenſa ſint eſſe proportionalia, hoc eſt, D, ad F, vt E, ad G, erunt ex defin. A, B, plani ſimiles. Quare ſi inter duos numeros vnus &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

a *21. ſepti.*
b *9. pro.*
c *9. pro.*
d *17. ſepti.*

THEOR. 19. PROPOS. 21. xix,

SI inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri; Similes ſolidi ſunt illi numeri.

CADANT inter A,& B,duo medij proportionales C,D. Dico A,& B,eſſe ſimiles ſolidos. Sumantur tres a 20. octa. E,F,G,minimi in ratione A,B,C,D. Quoniam igitur inter E,& G, medius cadit proportionalis F; [a] erunt E,& G,plani ſimiles:ſint ipſius E,latera H,I,ipſius vero G,latera illis proportionalia K,L. Et quia E,F,G,cum minimi ſint in ratione A,C,D, [b] æque metiuntur ipſos A,C,D,eiuſdem rationis cum illis metiantur per M. Eodemque modo, [c] quia E,F,G,minimi æque metiuntur C,D,B,eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N, [d] ita vt M,multiplicans E,F,G,faciat A,C, D; & N, multiplicans eoſdem E,F,G,faciat C,D,B. Factus eſt autem E,ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H,& I;nec non G,ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & L. Igitur A,producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K,L,N;atque adeo A, ſolidus eſt numerus,ex defin.latera habens H,I,M;& B,ſolidus etiam latera habens K, L, N, Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt C,& D,vt oſtendimus; [e] erit C, ad D, vt M, ad N : [f] Sunt autem C,& D,in eadem ratione,in qua E, & F;quod N, multiplicans E,& F, fecerit ipſos C,& D;Nec non & E,F,eandem habent rationem, quam HK, vel I, L. Etenim inter planos ſimiles E,G,cadit F,medius proportionalis,per coroll.propoſ.19.huius lib.in ratione laterum homologorum H,K,vel I,L.Igitur erit quoque H,ad K,& I,ad L,vt M,ad N,& permutando H,ad I,vt K,ad L;& I,ad M,vt L,ad N. Proportionalia ergo ſunt latera,H,I,M,lateribus K,L,N; ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A, & B. Quam ob rem ſi inter duos numeros duos medii proportionales cadant numeri,&c. Quod erat demonſtrandum.

a 20. octa. b 21. ſepti. c 21. ſepti. d 9. pron. e 18. ſepti. f 17. ſepti.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

A, 8. D, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 3. M, 2. K, 3. L, 3. N,3.

SCHOLIVM.

DVO exempla appoſuimus, in quorum priori liquido conſtat, vnitatem E, eſſe planum numerum, & vnitates H,I,eius latera,licet improprie,vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare,numeros A,& B,qui includunt duos medios proportionales C,& D,eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in alijs omnibus numeris,qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici,cuiuſmodi ſunt etiam A,B,in eodem priori exemplo. Hoc autem eſt abſurdum,cum Euclides propoſitionem generaliter proponat,e[illegible]que ſine vlla exceptione demonſtret.

xx.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A,B,C,continue proportionales,ſitque primus eorum A,quadratus. Dico & tertium C,quadratum eſſe. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; [a] erunt A, & C,plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato,erit & C,ei ſimilis,quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales,&c, Quod demonſtrandum erat.

a 20. octa.

A, 9. B, 54. C, 324.

xxi.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A,B,C,D, proportionales continue,& A,primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A, & D, cadant duo medii proportionales B, C; [a] erunt A,& D,ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D,illi ſimilis,cubus. Quam ob rem, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 21. oct.

A,27. B,45. C,75. D,125.

SCHOLIVM.

HÆC eſt apud omnes interpretes Euclidis,quos ego vidi, vulgata demonſtratio præcedentium duarum propoſitionum, quam qui diligenter examinare velit, inueniet ſane mancam eſſe, & imperfectam. Cum enim ad defin.21.lib.7.tradiderimus, duos numeros planos,vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamuis non quibuſcunque lateribus vnius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia,dummodo quibuſdam lateribus vnius proportionalia ſint quædam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit,ſi duorum planorum ſimilium vnus fuerit quadratus,alterum quoque quadratum eſſe, & ſi duorum ſimilium ſolidorũ vnus cubus fuerit,alterum etiam eſſe cubum:quod tamen in demonſtratione pro conceſſo,atq; omnibus perſpicuo aſſumebatur. Nam poſitis duobus numeris planis 36.& 64.ſimilibus, ſatis eſt, vt duobus lateribus prioris qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris,nimirum 4.& 16.proportionalia. Vnde etiamſi prior ſit quadratus,habens duo latera æqualia 6.& 6.merito dubitare quis poſſit,immo omnino negare, poſteriorem habere alia duo latera his proportionalia,hoc eſt,inter ſe quoque æqualia,atque adeo eſſe quadratum:quemadmodum etiam manifeſtum eſt,hiſce lateribus prioris 4.& 9.vel 2.& 18.respondere alia latera in poſteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia,quanquam ipſi numeri ſint ſimiles,cur ſine demonſtratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6.& 6.aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia,videlicet & inter ſe æqualia? Item dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter vtramq; propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus,ad hunc, qui ſequitur, modum.

SINT tres numeri A,B,C,continue proportionales,& primus A,quadratus:Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D.latere quadrati A,cum D,ex defin.in ſe faciat A;erunt D,& A, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. ab vnitate continue propor-

proportionales,eritq́ conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atq; adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales,nimirum vnus;cadent quoq; totidem, ex theor. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. inter vnitatem, atq; C,numerum,nimirum, vnus qui ſit E.Quoniam igitur vnitas & E,C,numeri ſunt continue proportionales ; producetur C, ex E, in ſe ipſum , ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. Ac proinde C,quadratus erit ex defin.cuius latus E.

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
vni- tas.

ALITER. *Sumptis tribus numeris D,E,F,minimis in ratione A,ad B,& B,ad C;metietur D,ipſum A,& F,ipſum C, æque,ex ijs,quæ oſtendimus ad propoſ.21.lib.7. Et quoniam extremi D,F,minimorum trium numerorum,per coroll.1.propoſ. 2.huius lib.ſunt quadrati:Eſt autem & A,quadratus,ex hypotheſi;*[b] *cadet inter A,&D,quadratos medius vnus proportionalis,vt G.Quia vero eſt ex æquo,vt A, ad C,ita D,ad F; & permutando,vt A,ad D,ita C;ad F;*[c] *cadet quoque inter C,& F,vnus proportionalis medius,nimirum H.Cum ergo F,primus metiatur C,vltimum;*[d] *metietur idem & ſecundum H. Sumpto autem I,latere quadrati F;metiatur I,toties numerum K,quoties F,ipſum H,metitur;ita vt H,ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L,quadratus ipſius K.*[e] *Itaque quia ratio L,ad F,quadrati ad quadratum,duplicata eſt rationis K,ad I,lateris ad latus, hoc eſt, H, ad F:Eſt autem & ratio C,ad F,eiuſdem rationis H,ad F,ex defin.duplicata,quod conuertendo ſint proportionales etiam C,H, F; erit L,ad F,vt C,ad F;Ac proinde L,& C,æquales ſunt.Exiſtente ergo L,quadrato,ex conſtructione,& C,quadratus erit.*

A, 36 B, 48. C, 64.
G, 18. H, 32.
D, 9. E, 12. F,16
L, 64. K, 8. I, 4

b 11. oct. — c 8. oct. — d 7. oct. — e 11. oct.

ALITER.[f] *Quoniam A, & C, ſimiles plani ſunt;ſint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipſius A;at F,G,ipſius C; ita vt ſit D,ad E ſicut F,ad G,aſſumaturque H,latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D,in E,& ex H,in ſe,*[g] *erunt D H,E,continue proportionales. Cum ergo ſit F,ad G,vt D ad E;cadatq; inter D,& E, medius proportionalis H,*[h] *cadet quoque inter F,& G,vnus medius proportionalis,qui ſit I. Quare cum F,I,G, ſint continue proportionales;*[i] *idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I,in ſe ipſum. Fit autem C,ex F, in G.Igitur & idem C,fiet ex I,in ſeipſum: Atque adeo C, quadratus erit,ex definitione,cuius latus I.*

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
D, 3. E, 12. F, 4. G, 16.

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
D, 6. E, 6. F, 8. G, 8.

f 20. oct. — g 20. ſept. — h 8. oct. — i 20. ſept.

SINT *rurſum quatuor numeri A,B, C, D, continue proportionales,& A,primus,ſit cubus.Dico & D,quartum cubum eſſe.Sumpto enim E,latere cubi A,fiat ex E,in ſeipſum numerus F,ac proinde,ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E,in ſe facit F,& in F, facit A; erunt,ex ſcholio propoſ.9.huius lib.E,F,A,continue proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoq; erunt numeri A,F,E, & vnitas. Itaque cum tam inter numerum D, quam vnitatem , ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales,videlicet duo;cadent,ex theorem. 3. ſcholij propoſ.10. huius lib.totidem medij inter vnitatem,& numerum D,qui ſint G,H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue ſunt proportionales:fiet H,ex G,in ſe,& D,ex G.in productum H,vt ad propoſ.10.huius lib.à nobis eſt demonſtratum.Quare D,cubus eſt,ex definitione,cuius latus G.*

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. G, 10.
vni-tas.

ALITER.*Inuentis quatuor numeris minimis E,F,G,H,in ratione A,ad B,& B,ad C,& C,ad D,metietur E,ipſum A, & H,ipſum D,æque, per ea, quæ ad propos.21.lib.7.demonſtrauimus. Et quia E,H, extremi quatuor minimorum,cubi ſunt,ex 1.coroll.propoſ. 2. huius lib. Eſt autem & A,cubus,ex hypotheſi;*[k] *cadent inter E,& A cubos duo medij proportionales,qui ſint I,K.Quoniam autem,ex æquo,eſt vt A ad D,ita E, ad H; & permutando, vt A: ad E;ita D,ad H;*[l] *cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui ſint L, M.Cum ergo H,primus metiatur D, extremum,*[m] *metietur idem & L,ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H,ipſum L,ita vt L,ad H,& O,ad N,eandem habeant proportionem multiplicem:ſit quoq; P, cubus ipſius O.*[n] *Itaq; cum ratio P,ad H, cubi ad cubum,triplicata ſit rationis O,ad N,lateris ad latus,hoc eſt,L, ad H:Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H,ex defin.triplicata,quod conuertendo proportionales etiam ſint D,M,L,H;erit P,ad H,vt D,ad H; Ac propterea P,& D, æquales erunt.Quare cum P,cubus ſit,ex conſtructione, cubus quoq; erit D.*

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
K, 32. M, 500.
I, 16 L, 250.
E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.
P, 1000. O, 10. N, 5.

k 12. oct. — l 8. oct. — m 7. oct. — n 12. oct.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxij.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum,primus autem ſit quadratus,& ſecundus quadratus erit.

SIT enim A,ad B,vt C,quadratus ad quadratum D,ſitque A,quadratus.Dico & B,eſſe quadratum. Cum enim ſit A,ad B, vt C, ad D; *a* cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis,videlicet E; *b* cadet quoque inter A, & B,medius vnus, qui ſit F. Quia igitur tres numeri ſunt continue proportionales A,F,B;& A,primus eſt quadratus; erit & B, tertius quadratus. *c* Quare ſi duo numeri rationem habeãt inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendum.

A,36. F,48. B,64.
C,9. E,12. D,16.

a 11. oct. — b 8. oct. — c 22. oct.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his,proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo poſſe in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, *d* eſſent ambo priores numeri habentes proportionem,quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus,non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionẽ non ha-

d 24. oct.

non habent,quam quadratus ad quadratum.Si enim haberent,eſſent omnes hi dupli numeri 4.8.16.32.64.128.
f 24. octa. &c.quadrati.Primo enim 4.exiſtente quadrato, *f* eſſet & 8.quadratus.Igitur & 16.& 32.&c.quod eſt abſurdum.
g 11.oct. *g* Nam inter 4.& 8.& inter 8.& 16.& inter 16.& 32.&c.caderet medius proportionalis,ſi eſſent quadrati:cum tamen in ſcholio prop.8.huius lib.demonſtratum ſit,inter numeros duplæ proportionis quoſuis non poſſe cadere medium proportionalem.

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.Si enim haberent, *h* caderet inter eos medius proportionalis. *i* Igitur & inter 5.
h 11.octau.
i 8. oct.
& 1.minimos numeros quintuplæ proportionis,quod fieri non poſſe,demonſtratum à nobis eſt in ſcholio propoſ.8.huius lib.

xxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus,& ſecundus cubus erit.

SIT enim A,ad B,vt C,cubus ad D,cubum,ſitque A cubus. Dico & B,cubum eſſe. Cum enim ſit A,ad B, vt C, ad D: *a* cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales,qui ſint E,F: *b* cadent quoque inter A, & B, duo medii, qui ſint G,H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H,B, ſunt continue proportionales,& A,primus eſt cubus: *c* erit & B,quartus cubus. Quocirca,ſi duo numeri rationem inter ſe habeant,quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 12. octa.
b 8. oct.
c 23.oct.

A, 8.	G, 12.	H, 18.	B, 27.
C, 64.	E, 96.	F, 144.	D, 216

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non
d 25.oct. poſſe reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, *d* eſſent ambo priores numeri habentes proportionem,quam cubi proportionis repertæ,etiam cubi,cum primus ponatur cubus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non cubus.

xxiv.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

SIMILES plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani ſimiles A,& B. Dico eſſe vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, ſint plani ſimiles; *a* cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D,& F, quadrati, ex coroll.1.propoſ.2.huius lib. Quare cum ſit, ex æquo A,ad B, vt D,ad F, manifeſtum eſt, ita eſſe A, ad B, vt eſt quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo ſimiles plani numeri rationem inter ſe habent,&c. Quod erat oſtendendum.

a 18. oct.

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonſtrabimus conuerſum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter ſe, quam quadrati C, D. Dico A, B, eſſe planos ſimiles.[b] *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis: Et eſt, vt C, ad D, ita A, ad B;* [c] *cadet quoque medius proportionalis inter A, & B,* [d] *Quare A, & B, plani ſimiles ſunt.*

b 11. octa.
c 8. oct.
d 20. oct.

A, 8.	*B, 18.*
C, 16.	*D, 36.*

EX hoc perſpicuum eſt, planos numeros, qui ſimiles non ſunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; eſſent, vt modo demonſtratum eſt, plani ſimiles, quod eſt abſurdum, ponuntur enim non ſimiles.

xxv.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus numerus ad cubum numerum.

a 19.oct. SINT ſimiles ſolidi A, B. Dico eſſe, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, ſunt ſolidi ſimiles; *a* cadent inter eos duo medij proportionales, qui ſint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E,F,G,H, minimis in continua proportione A,C,D,B; erunt extremi E, H, ex coroll.1. prop.2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo ſit A, ad B, vt E, ad H; conſtat ita eſſe A, ad B, vt eſt cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo ſolidi numeri rationem habent inter ſe, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonſtrabimus; ſcilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter ſe, quam cubi C, D. Dico A, B, ſolidos eſſe ſimiles. Nam cum ſit A, ad B, vt C, ad D;[b] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales;[c] cadent quoq; inter A, B, duo medij.[d] Sunt ergo A, & B, ſolidi ſimiles.

A, 16. B, 54.
C, 64. D, 216.

[b 12. octa. c 8. oct. d 21. oct.]

EX his omnibus perſpicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem, eſſe ſimiles planos, vel ſolidos. Si enim eſſent ſimiles plani,[e] caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non poſſe, iam dudum oſtenſum eſt in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt ſimiles ſolidi, cum inter eos cadere non poßint duo medij proportionales. Nam alias[f] caderent quoque duo medij inter minimos earũdem proportionum numeros. Quod fieri non poteſt, quod hi vel ſola vnitate, vel certe binario tantum inter ſe diſtent, vt in ſcholio prædicto traditum eſt; inter quos certum eſt, non poſſe intercipi duos numeros, ne dum duos medios poportionales.

[e 18. oct. f 8. oct.]

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi eſſe poſſunt plani ſimiles, vel ſolidi, cum non poßint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui ſit numerus primus latera habet ſolummodo vnitatem, & ſeipſum quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ conſtat non eſſe proportionalia. Quiuis vero numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit, latera tantum habet duas vnitates, & ſeipſum. Vt hi numeri ſolidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perſpicuum autem eſt, ea non poſſe eſſe proportionalia.

RVRSVS neq; duo quicunq; numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles, vel ſolidi ſimiles eſſe poſſunt. Si enim duo huiuſmodi numeri inter ſe primi, dicantur eſſe plani, vel ſolidi ſimiles;[g] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter ſe primi erunt omnes tres, vel quatuor inter ſe primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis menſura metiri poßit, propter duos extremos inter ſe primos. Quare minimi erunt continue proportionales, vt in ſcholio propoſ. 24. lib. 7. demonſtrauimus. Ac propterea ex coroll. propoſ. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi, quod abſurdum eſt. Ponuntur enim neq; quadrati, neq; cubi.

[g 18. & 19. oct.]

EX his ſequitur, ſi duo numeri ſint plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit primus, minorem numerare maiorem. Nam ſi eum non numeraret;[h] eſſent duo propoſiti numeri inter ſe primi: ac proinde, vt proxime oſtendimus, non poſſent eſſe plani, vel ſolidi ſimiles, quod abſurdum eſt, & contra hypotheſim. Verum hoc oſtenſiue quoque ita demonſtrabimus. Sint primum duo numeri plani ſimiles A B, ſitq; A, minor, primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint C, vnitas, & numerus D, ipſi A, æqualis, quod nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipſi A, æqualem, metiatur primum numerum A: ſint E, F, latera numeri B, laterib. C, D, proportionalia, ita vt ſit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F.[i] Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum æqualis erit ei, qui ſit ex D, ſecundo in E, tertium: Fit autem ex C, vnitate in F, ipſemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E.[k] Quare D, ipſum F, metietur.[l] Metitur autem F, ipſum B, quod B, gignatur ex E, in F.[m] Igitur & D, id eſt, A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitum.

A, 3. B, 48.
C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

[h 31. sept. i 19. septi. k 4. pro. l 4. pron. m 11. pron.]

HINC perſpicuum eſt, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed compoſiti, quod eſt contra hypotheſim.

SINT deinde duo ſolidi ſimiles A, B, ſitq; A, minor primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum A, & B, ſint ſolidi ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint B, C, vnitates, & numerus D, ipſi A, æqualis, quod nullus alius numerus, præter vnitatem, & numerum D, ipſi A, æqualem, metiatur numerum primum A: ſint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt ſit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G. Quia igitur eſt C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G.[n] Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui ſit ex D, ſecundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipſemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F.[o] Quare D, ipſum G, metietur.[p] Metitur autem G, ipſum B, quod G, latus ſit ipſius B.[q] Igitur & D, hoc eſt, A, illi æqualis, eundem B, metietur. Quod eſt propoſitum.

A, 3. B, 24.
B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2. G. 6.

[n 19. septi. o 4. pro. p 4. pron. q 11. pron.]

ATQVE ex hoc etiam conſtat, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe ſolidos ſimiles. Nã ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proxime oſtendimus. Cum ergo & ſe ipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed inter ſe compoſiti, quod eſt contra hypotheſim.

ITAQVE facilis admodum eſt inuentio duorum planorum, vel ſolidorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter ſe primi, quorum neuter quadratus ſit, aut cubus; erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani ſeu ſolidi non ſimiles.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter vero non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles,[r] haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato,[s] eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non quadratus.

[r 28. oct. s 24. oct.]

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter vero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, vt 27. & 40. Si enim eſſent ſolidi ſimiles,[t] haberent proportionem. quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit,[u] eſſet & 40. cubus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non cubus.

[t 27. octa. u 25. oct.]

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

i. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani ſimiles A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum ſint plani ſimiles, [b] vnus medius cadit proportionalis [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt ſint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue ſint proportionales, ſitque primus D, quadratus, ex conſtructione; [d] erit quoque C, tertius; quadratus. Si duo ergo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324

a 17. ſepti.
b 18. octa.
c 8. oct.
d 22. oct.

ii. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; ſimiles plani erunt.

DVO numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, eſſe ſimiles planos. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A & B fecit D, & C; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; [d] Ac propterea A, & B, ſimiles plani ſunt. Quare ſi duo numeri ſe mutuo multiplicantes, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

a 17. ſept.
b 11. octau.
c 8. oct.
d 20. octa.

SCHOLIVM.

EX his demonſtrabimus quatuor inſequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

A, 4. B, 25.
C, 100.

DVO quadrati A, B ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe quadratum. Cum enim A, & B, ſint ſimiles plani, nimirum quadrati; [a] erit C, ex eis productus, quadratus.

a 1. noni.

II.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

A, 9. D, 12. B, 16.
C, 144.

DVO numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; ſitq; A, quadratus. Dico & B, quadratum eſſe. Cum enim A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum: [a] erunt A, & B, ſimiles plani: [b] atque adeo inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D. [c] Quare A, exiſtente quadrato, erit & B, quadratus.

a 2. noni.
b 18. oct.
c 22. oct.

III.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus; Reliquus non quadratus erit,

A, 4. B, 20.
C, 80.

DVO numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum: ſitq; A, qnadratus. Dico B, non quadratum eſſe. Si enim B, ditatur eſſe quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius ſcholij; Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur quadratus eſt B, numerus.

IV.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant aliquem: Productus non quadratus erit.

DV

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non eſſe quadratum. Nam ſi C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, ſitque A, quadratus, eſſet & B, ex theor. 1. huius ſcholij, quadratus: Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20.
C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B. Dico B, eſſe cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in ſe fiat D, & idcirco ex C, in D, ipſe cubus A, gignatur. Quia igitur C, ſeipſum multiplicans fecit D: [a] metietur C, ipſum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipſum C, per C. Igitur eadem pars eſt vnitas ipſius C, quæ C, ipſius D, nimirum denominata à C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rurſus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipſum A, per C. Metiebatur autem & C, ipſum D, per C. Eadem ergo pars, eſt C, ipſius D, quæ D, ipſius A; [e] ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: ſed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipſum B, metitur per A, quod A, ſeipſum multiplicans fecerit B; [g] metitur vero & vnitas ipſum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipſius A, quæ A, ipſius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cũ inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, ſint continue proportionales, & A, primus ſit cubus, [k] erit quoque E, quartus cubus. Si cubus igitur numerus ſe ipſum multiplicans, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 8.
E, 16. D, 4.
F, 32. C, 2.
B, 64. Vnitas.

a 7. *pron.* b 5. *pron.* c 20. *def.* d 7. *pron.* e 20. *def.* f 7. *pron.* g 5. *pron.* h 10. *def.* i 8. *octa.* k 23. *oct.*

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum eſſe. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D. [a] eritque D, cubus. Quoniam vero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [b] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [c] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [d] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent. [e] Ac propterea D, exiſtente cubo, & C, cubus erit. Quocirca ſi cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

a 3. *noni.* b 17. *ſept.* c 12. *oct.* d 8. *oct.* e 23. *oct.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit,

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D; [a] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [b] erit vt A, ad B, ita D, ad C; [c] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [d] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [e] Ac proinde exiſtente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem ſi cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat.

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

a 3. *noni.* b 17. *ſept.* c 12. *oct.* d 8. *oct.* e 22. *oct.*

S C H O L I V M.

EX his & hæc, quæ ſequuntur, facile demonſtrabuntur, videlicet.

I.

SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non eſſe cubum. Si enim C, ſit cubus; [a] & multiplicatus B, cubus erit, quod non ponitur.

A, 8. B, 20.
C, 160.

a 5. *noni.*

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non eſſe cubum. Si namque B, ſit cubus, [a] & factus C, cubus erit. Quod eſt contra hypotheſim.

A, 8, B, 17.
C, 136.

a 4. *noni.*

THEOR. 6. PROPOS. 6. vj.

SI numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat: Et ipſe cubus erit.

MVLTIPLICANS ſeipſum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum eſſe. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in ſe faciat B, & ipſe C, ex A, in B, gignatur atque adeo æqualis æqualiter æqualis ſit, vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ ad definitionem cubi ſcripſimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; [a] erit & A, cubus. Quare ſi numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 8. B, 64. C, 512.

a 5. *noni.*

S C H O L I V M.

ALIAM demonſtrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Poſtquam enim demonſtrarunt C, factum ex A, in B, eſſe cubum, inferunt; [b] *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* [c] *Quoniam vero eſt vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipſos B, & C, fecit;* [d] *cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales.* [e] *Atque adeo exiſtente B, cubo, & A, cubus erit. Verum noſtra demonſtratio breuior eſt, & planior, vt perſpicuum eſt.*

b 12. oct. c 17. ſept. d 8. oct. e 23. oct.

A, 8, B, 64. C, 512.

vij.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus ſolidus erit.

a 13. def. b 9. pron.

NVMERVS compoſitus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, eſſe ſolidum. Cum enim A, ſit compoſitus, [a] metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipſum A, per E. Quo poſito, [b] multiplicante D, ipſum E, producetur A. Cum ergo B, ipſum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea ſolidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter ſi compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 6. B, 11. C, 66.
D, 2. E, 3.

viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem eſt cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate eſſe quadratum, & vnum intermittentes omnes, quales ſunt D, F, H, K, M:

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.
H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiuſmodi ſunt F, I, M: ſeptimum vero F, cubum ſimul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam enim eſt vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: [a] Metitur autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipſum B, per A, metietur; [b] Atque adeo A, multiplicans A, ipſum B, producet. Quare B, quadratus eſt. Quia vero tres deinceps proportionales ſunt B, C, D, & eſt B, quadratus; [c] erit & D, quadratus. Eadem ratione aſſumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, ſit quadratus, [d] & F, quadratus erit, Nec non & omnes vnum intermittentes.

a 5. pron. b 9. pron. c 82. oct. d 22. oct.

RVRSVS quia eſt vnitas ad A, vt B, ad C, æque metietur vnitas numerum A, & numerus B, numerum C. [e] Metitur autem vnitas ipſum A, per A. Igitur & B, ipſum C, per A, metietur, [f] atque adeo B, ipſum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, ſeipſum multiplicans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt eſt oſtenſum, erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales ſunt C, D, E, F, & eſt C, cubus, [g] erit & F, cubus. Eodem argumento, aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cum F, ſit cubus, [h] & I, cubus erit, atque omnes ſemper duos intermittentes.

e 5. pron. f 9. pron. g 23. oct. h 23. oct.

POSTREMO quia F, ſeptimus ab vnitate oſtenſus eſt & quadratus, & cubus: ipſe erit cubus ſimul & quadratus: Atque eodem modo M, ſeptimus ab F, intermiſſis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit ſimul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

HOC theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

SI ſint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono, vndecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime numeros poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes vero qui proxime ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimooctauo, vigeſimooctauo, vigeſimoquarto & alijs, quæ metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiusdecimus decimusnonus, vigeſimusquintus, &c. ſunt cubi ſimul & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper vnum intermittunt poſt tertium ab vnitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab vnitate: Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem ſit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A,B,C,D,E,F, ſitque primum A, proximus vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint, [a] iam demonſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedij C, a 8. noni.
& E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres continue proportionales ſint A, B, C; ſitque A, quadratus;
[b] erit & C, quadratus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue proportionalibus C,D,E, cum C, ſit quadratus; b 22. oct.
[c] & E, quadratus erit. Omnes igitur A,B,C,D,E,F, quadrati ſunt. Idem oſtendemus, ſi plures numeri c 22. oct.
ſint continue proportionales.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi, [d] iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui d 8. noni.

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

B,D,E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: [e] Metitur autem vnitas numerum A, per ipſummet A. Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum me- e 5. pron.
titur; [f] Atq; adeo cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit. [g] Quare B, cubus eſt. Quoniam vero f 9. pron.
quatuor continue proportionales ſunt A,B,C,D, eſtque A, cubus, [h] & D, cubus erit. Eademque ratione aſſum- g 3. noni.
ptis quatuor deinceps proportionalibus B,C,D,E, cum B, cubus ſit: [i] & E, cubus erit: Omnes igitur A,B,C,D, h 23. oct.
E, [illegible] bi ſunt. Non ſecus demonſtrabimus, omnes cubos eſſe, ſi plures continue proportionales fuerint. Quo- i 23. oct.
circa, ſi ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

NON demonſtrauit Geometra, ſi numerus, qui poſt vnitatem, ſit cubus ſimul & quadratus, & reliquos omnes eſſe cubos ſimul, & quadratos; quia perſpicue hoc ipſum ex demonſtratis colligitur. Nam ſi proximus vnitati ſit cubus ſimul, & quadratus: qua parte eſt cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte eſt quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonſtratum eſt. Omnes igitur erunt cubi ſimul, & quadrati.

VERVM tota propoſitio facilius ita poterit demonſtrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos eſſe. Quoniam enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, ſeipſum multiplicans facit B; erit ex deſin. B, quadratus. Item

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans B, facit C, ſuntque A, B, quadrati; erit & C, quadratus ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. Rurſus quia ex eodem ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, ſuntque A, C, quadrati; erit ex eodem ſcholio propoſ. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes eſſe cubos. Quia enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. cubus A, ſeipſum

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

multiplicans facit B; [k] erit & B, cubus. Item, quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans B, facit C, ſuntque A, B, cubi; [l] erit & C, k 3. noni
cubus. Rurſus quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans C, facit D, ſuntque A, C, cubi; [m] erit quoque D, cubus. Atque ita de cæte- l 4. noni.
ris, cum ex eo ſcholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c. m 4. noni.

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem, non ſit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatem, non ſit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I, &c. & primum A, proximus vnitati non ſit quadratus. Dico nec alium vllum eſſe quadratum, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, hoc eſt, præter B, D, F, H, &c. Si enim præter hos alius eſt quadratus, ſit quadratus

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256.
I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

E. [a] Cum ergo & D, ſit quadratus; ſitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F, ad a 8. noni.
E, ita B, ad A, habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: [b] ſed B, tertius eſt ab vnitate quadratus. [c] Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. b 8. noni.
Quod eſt abſurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus eſt. Eadem ratione oſtendemus, c 24. oct.
nullum alium, præter dictos quadratum eſſe.

SED iam A, proximus vnitati non ſit cubus. Dico nec alium vllum eſſe cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam ſi præter hos alius poteſt eſſe cubus,

 ſit D,

d 8. noni. ſit D, cubus. [d] Cum ergo & F, cubus ſit, ſitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam
e 8. noni. cubus F, ad cubum D: [e] Sed C, eſt cubus, cum ſit quartus ab vnitate. [f] Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit.
f 25. oct. Quod eſt contra hypotheſim. Non igitur D, cubus eſt. Quod ſi E, credatur eſſe cubus; [g] cum & C, cubus ſit,
g 8. noni. ſitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; exi-
h 25. oct. ſtente C, cubo, [h] erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus eſt. Quemadmodum autem oſtenſum eſt duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non eſſe, ita quoque eadem ratione oſtendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, eſſe cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonſtrandum erat.

S C H O L I V M.

NON eſt autem neceſſe, ſi numerus, qui poſt vnitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul, & quadratum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus poſſit eſſe cubus ſimul, & quadratus, non exiſtente primo ab vnitate cubo ſimul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui poſt vnitatem, cubus quidem, non autem ſimul & quadratus. Dico B, tertium eſſe cubum ſimul & quadratum; cubum quidem, [i] quod primo exiſtente cubo, omnes cubi ſint, [k] quadratum vero, quod tertius ſit ab vnitate.

i 9. noni. k 8. noni. *Vnitas. B, 8. B, 64.*

SIT deinde A, poſt vnitatem quadratus quidem, non autem ſimul & cubus. Dico quartum C, eſſe cubum ſimul & quadratum; [l] Cubum quidem, quod quartus ſit ab vnitate; quadratum vero, [m] quod primo exiſtente quadrato, omnes ſint quadrati.

l 8. noni. m 9. noni. *Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.*

SIT poſtremo A, poſt vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium eſſe cubum ſimul & quadratum,
n 10. noni. *præter ſeptimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum enim primo non exiſtente quadrato, [n] nullus alius quadratus*

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

ſit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiuſmodi ſunt, vt in ſcholio propoſ. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, ſeptimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusſeptimus, decimusnonus, &c. Primo autem
o 10. noni. *non exiſtente cubo, [o] nullus alius ſit cubus, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales ſunt, vt ex eodem ſcholio apparet, quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decinonus, &c. perſpicuum eſt, tantummodo ſeptimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos eſſe ſimul, & cubos, & ſic de cæteris. Nam in hæc loca ſola incidunt quadratus, & cubus ſimul, vt liquido conſtat ei, qui recte propoſitionem hanc & octauam huius libri expenderit.*

xj.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim ſit ex

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729, G, 2187.

æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam
a 20. def. quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) [a] æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C numerum
b 5. pron. G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod ſit, vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

S C H O L I V M.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus à maiore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, quæ v-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

nitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonſtratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per ſeipſum, &c. quia tam inter B, & F, quam inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quam inter vnitatem & C, duo interiecti ſunt numeri.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſeipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab vnitate: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à maiore diſtat, quantum minor ab vnitate, propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet
c 9. pron. *eum, per quem metitur, [c] producitur ille, quem metitur. Ergo C, ſeipſum multiplicans gignet F, cum F, tantum abſit à C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem, quod D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.*

xj.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B, C,D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoq; A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namque non metitur ipſum A: [a] erit E, cum primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, A, & E, inter ſe primi erunt. Metiatur E, ipſum D, per F, [b] atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipſum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in ſcholio præcedentis propoſ. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, ſint inter ſe primi; [d] ac proinde in ſua proportione minimi; [e] metietur æque A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G, [f] atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B, [g] atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, ſecundum,

a 31. ſept. b 9. pron. c 19. ſept. d 23. ſept. e 21. ſept. f 9. pron. g 9. pron. h 19. ſept.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000.
E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cum A, & E, ſint inter ſe primi; [i] ac propterea in ſua proportione minimi; [k] metietur æque A, ipſum G, & E, ipſum B. Metiatur E, ipſum B, per H: [l] ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipſum B, per A, atque idcirco A, ſe ipſum multiplicans facit B, vt ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in ſeipſum. [m] Quare erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter ſe primi ſint; [n] ac proinde in ſua proportione minimi; [o] æque metietur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt contra hypotheſim, ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo, quod E, non dicatur metiri ipſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri; Quod eſt abſurdum. Metietur ergo E, ipſum A. Eodem argumento oſtendemus quoſcunque alios numeros primos ipſum D, metientes metiri quoque ipſum A; Eademque erit ratio ſi C, vel B, vltimus numerus ſtatuatur.

i 23. ſept. k 21. ſept. l 6. pron. m 20. def. n 23. ſept. o 21. ſept. p 31. ſept.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipſum A, metiri. Si enim non metiatur, [p] erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicans facit B, vt ex ſcholio prropoſitionis præcedentis conſtat. [q] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi ſunt; ſit autem C, ex A, in B, per idem ſcholium præcedentis propoſ. [r] erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi ſunt, & ſit D, ex A, in C, ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. [s] erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod eſt contra hypotheſim. Metitur ergo E, ipſum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296.
E, 3.

q 27. ſept. r 26. ſept. s 26. ſept.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens metiri poteſt vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonſtratum eſt. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST *autem admirabilis prima huius propoſitionis demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demonſtratione affirmatiua E, ipſum A, metiri: quod videtur fieri non poſſe. Nam ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album, ex eo, quod non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non abſimile quid factum hic eſt in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propoſitionibus, quæ ſequuntur. Cardanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 201. gloriaturque ſe primum omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum non dicturum fuiſſe, ſi diligentius vim huius demonſtrationis expendiſſet, vel certe, ſi expendit, eam in memoriam reuocaſſet, quandoquidem ipſo longe prior Euclides vſus eſt hoc etiam demonſtrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demonſtrandi vſus eſt Theodoſius lib. 1. ſphæricorum propoſ. 12. vt ibidem monuimus.*

CÆTERVM *ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipſum.* [t] *Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes ſubſequentes;* [u] *quod ſemper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris;* [x] *manifeſtum eſt, quod & ille omnes metiatur.*

t 12. no. u 11. noni. x 11. pron.

THEOR. 13. PROPOS. 13. xiij.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continue proportionales quotcunque numeri A,B,C,D, quorum A, proximus vnitati ſit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipſos A,B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D. Manifeſtum autem eſt E, non eſſe numerum primum. Si enim primus ſit, & metiatur extremũ D; [a] metietur quoque ipſum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur E, primus eſt, ſed compoſitus; [b] atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium eſſe, non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 624.
E--- H--- G--- F---

a 12. no. b 33. ſept.

c 11. pron. quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; [c] metietur quoq; ille alius primus eundẽ D; [d] atq, adeo
d 12. no. & ipſum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipſum
E, metitur. Metiatur iam E. ipſum D, per F. Dico F, diuerſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis
e 8. pron. ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipſum D, per aliquem ipſorum A, B, C; [e] & viciſ-
f 11. noni. ſim aliquis ipſorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipſum D, metitur,) metietur D, per E. [f] Cum ergo qui-
libet ipſorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipſorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipſorum A, B, C, quod
eſt contra hypotheſim, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C. Non igitur F, idem eſt, qui ali-
g 8. pron. quis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quoniam vero E, metitur D, per F, [g] metietur viciſſim F, ipſum D, per E.
h 12. non. Non erit autem F, primus: ſi enim ſit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui
i 33. ſept. primus eſt, quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus; [i] atque adeo cum aliquis nume-
rus primus metietur. quem rurſus dico nullum alium eſſe poſſe præter primum A. Si namque alius primus quàm A, metiatur F, cum F, metiatur D, extremum; [k] metietur quoque ille alius primus

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E--- H--- G--- F---

k 11. pron.
l 12. noni. eundem D, [l] atque adeo & ipſum A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius pri-
m 9. pron. mus quam A, ipſum F, metitur. Iam vero quoniam E, metitur D, per F; [m] fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex
A, in C, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex
n 19. ſept. E, ſecundo in F, tertium; [n] Ac proinde erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur
autem A, ipſum E, vt oſtenſum eſt. Ergo & F, ipſum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuerſus
ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; oſtendemus ſimiliter, G, diuerſum
eſſe ab A, B, & non primum, ſed compoſitum, quem ſolus A, primus metiatur; quemadmodum id oſtenſum eſt
de numero F, per quem E, diuerſus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B; metiaturque F, ipſum C, per G; metietur vtique F, ipſum
o 8. pron. C, per aliquem ipſorum A, B; [o] & viciſſim aliquis ipſorũ A, B, (videlicet is, per quem F, ipſum C, metitur) me-
tietur C, per F, K. Cum ergo quilibet ipſorum A, B, metiatur C, per aliquem ipſorum A, B; erit F, idem qui ali-
p 11. noni. quis ipſorum A, B, quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim F, non eſſe eundem, quem aliquem ipſoru[illegible] B.
q 8. pron. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſorum A, B, ſed diuerſus. Quoniam autem F, metitur C, per G; [q] metietur
r 12. noni. viciſſim G, ipſum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus ſit, metiaturque vltimum C, [r] metietur
quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod eſt abſurdum. Non ergo G, primus eſt, ſed compoſi-
s 33. ſept. tus, [s] ac proinde cum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius pri-
t 11. pron. mus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, vltimum, [t] metietur quoque ille alius primus eundem C, [u] atque
u 12. noni. adeo & ipſum A, vnitati proximum, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A, ipſum
x 9. pron. G, metietur. [x] Iam vero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt do-
cuimus in ſcholio propoſ. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, ſecundo in G,
y 19. ſept. tertium. [y] Quare erit vt A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipſum F, vt
demonſtratum eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diuerſus ab A, metitur B, vlti-
mum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H, oſtendemus ſimiliter H, diuerſum eſſe ab A, quemad-
modum id oſtenſum eſt de numeris F, & G.

z 9. pron. NAM ſi H, idem ſit qui A, metiaturque G, ipſum B, per H; metietur vtique G, ipſum B, per A; [z] Et vi-
ciſſim A, ipſum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipſum B, per A, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 11.
huius lib. erit G, idem qui A, quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem, quem A. Non ergo
a 9. pron. H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus. [a] Iam vero quia B, fit ex G, in H. quod G. ipſum B, metiatur per H: Fit autem
& idem B, ex A, in ſe, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, ter-
b 20. ſept. tium, & ex A, medio in ſeipſum. [b] Quare erit vt H, primus ad A, ſecundũ, ita A, ſecundus ad G, tertium: At A,
metitur ipſum G, vt eſt demonſtratum. Igitur & H, ipſum A, metietur, numerum primum. Quod eſt abſur-
dum. Quare ſi A, primus eſt, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab
vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

xiv. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim ſi fieri poteſt, primus numerus E, diuerſus à B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F, [a] multiplicans E, ipſum F, faciet A. [b] Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorum E, F, metientur: non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt quam A: Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.

A ....
B .. C ... D .....
E--- F---

a 9. pron.
b 32. ſept.

S C H O L I V M.

ADDIT hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoq; alterũ duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compoſitus.

SINT

SINT quotcunq; numeri continue proportionales A,B,C,D,E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiã duo minimi F,G; Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit enim H, non primus, ſed compoſitus: [c] Et ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I,K,L, c 2. oct. & quatuor M, N, O, P, & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A,B,C,D, E. Quoniam igitur, vt conſtat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2 propoſ. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M, metitur autem H, ipſum A, erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum, ſi vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib 8. erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. 32. lib. 7. rurſus H, compoſitus vel ad F, vel ad I, Si ad F, habetur propoſitum: ſi vero ad I, cum I. gignatur ex F, in ſeipſum, erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. lib. 7. Quod ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.

A, 16. B. 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H—— F, 2. G, 3.

DEINDE metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit vt prius H, compoſitus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit H, eodem modo compoſitus vel ad F, vel ad K, Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compoſitus vel ad F, vel ad G. Quod ſi H, ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propoſ. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex F, in O, erit H, compoſitus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compoſitus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad L, cum L, gignatur ex G, in ſe compoſitus quoque erit H, ad G. Quod ſi H, ſit primus, probabimus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7. eum metiri ipſum G.

PRÆTEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad P, Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad P, qui quidem fit ex G, in L, erit etiam H, compoſitus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propoſitum; ſi vero ad L, cum producatur ex G, in ſe; erit quoque H, ad G, compoſitus. Quod ſi H, primus ſit, oſtendemus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7. eum metiri ipſum G.

EODEM modo ſi H, non primus metiatur vltimum E, oſtendemus H, compoſitum eſſe ad G; Si vero H, primus ſit, cum metiri ipſum G; atque ita in cæteris eadem ſemper erit demonſtratio.

ITAQVE ſi H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipſum F, vel ad eum compoſitus erit: Si vero H, metiatur vltimum E, metietur idem ipſum G, vel ad eum compoſitus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipſum F, vel ipſum G, aut ad alterutrum erit compoſitus. Id quod perſpicuum eſt ex ipſa demonſtratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS EORVM, QVÆ IN LIneis ſecundo libro Euclides demonſtrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema ſequens demonſtrandum Theon quædam aſſumit in numeris, quæ demonſtrata ſunt de lineis libro ſecundo, perinde ac ſi eadem de numeris eſſent oſtenſa; non alienum inſtituto noſtro duximus, nonnulla ex iis, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonſtrata ſunt de lineis, hoc loco de numeris demonſtrare, Quod idem & Barlaam monachum feciſſe à nonnullis eſt traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in ſecundo libro tenuiſſe conſpicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, ſeceturque ipſorum alter in quotcunque partes; Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris, æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiuiſo, & & qualibet parte numeri diuiſi continentur.

SINT duo numeri AB, & C, quorum AB, diuidatur in AD, DE, EB; Fiatque F, ex C, in AB; Item GH, ex C, in AD; & HI, ex C, in DE; & IK, ex C, in EB. Dico F, æqualem eſſe numeris GH, HI, IK, hoc eſt, toti numero GK, ex GH, HI, IK, compoſito. Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F; [a] metietur AB, ipſum F, per C, hoc eſt, AB, pars erit ipſius F, denominata à C. a 2. pron. Eadem ratione AD, ipſius GH; & DE, ipſius HI; & EB, ipſius IK, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ AB, ipſius F. Quia vero per ea, quæ ad propoſ. 5. lib. 7. demonſtrauimus, totus AB, totius GK, eadem pars eſt, quæ AD, ipſius GH; erit quoque AB, totus totius GK, pars eadem, quæ AB, ipſius F: [b] Ac proinde inter ſe æquales erunt F, & GK. Quod eſt propoſitum. b 4. pron.

A . . . D . . E . B C . .
F . . . .
G . . . . . . H . . . . I . . K

I I.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani ſub toto, & ſingulis partibus comprehenſi æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

NVMERVS enim AB, diuidatur in AC, CB. Dico numeros, qui fiunt ex AB, toto in partes AC, CB, ſimul æquales eſſe numero quadrato, qui ex toto AB, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis ſit ipſi AB; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc eſt, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipſius AB, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc eſt, ex AB, in AC, & in CB. Quod eſt propoſitum.

D . . . . . .
A . . . . C . . B

IDEM demonſtrabitur, ſi AB, in plures partes, quam in duas ſecetur, vt ex appoſita ſecunda figura apparere poteſt. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc eſt, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipſius AB, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc eſt, ex AB, in ſingulas partes AC, CD, DB.

E . . . . . .
A . . . C . . D . B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & vna parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui ſub partibus continetur, numero & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

D . . . .
A . . . . C . . . . . . B

SIT *numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum, qui ſit ex toto AB, in partem AC, æqualem eſſet ei, qui ſub partibus AC, BC, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC, æqualis ſit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc eſt, ex AC, in AB; vel (quod idem eſt) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc eſt, ex AC, in CB, & ex D, hoc eſt, ex AC, in AC, quadrato ſcilicet ipſius AC. Quod eſt propoſitum.*

IV.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui à partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

A . . . . . . C . . . . B

SIT *numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem eſſe quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui ſit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipſius AB, æqualis eſt numeris, qui ſiunt ex AB, in AC, & in CB. Eſt autem numerus qui ſit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius AC: Item numerus, qui ſit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis eſt quoque numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui ſit ex AC, in CB. Quod eſt propoſitum.*

V.

SI numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub [illegible]rtibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

A . . . . . C . . . D . . B

NVMERVS *enim AB, ſecetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum ſub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipſius CB, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium CD, DB, vna cum plano numero bis comprehenſo ſub CD, DB; numero vero comprehenſo ſemel ſub CD, DB, vna cum quadrato ipſius DB, æqualis ſit, per 3. theorema, numerus factus ex CB, in DB; ſit, vt ſi hic numerus factus ex CB, in DB, ſumatur pro quadrato ipſius DB, vna cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipſius CB, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius CD, vna cum reliquo numero facto ex CD, in DB, ſemel, & numero ex CB, hoc eſt, ex AC, in DB, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui ſiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, æqualis eſt numerus, qui ſit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipſius CB, æqualis erit quadrato ipſius CD, vna cum numero qui ſit ex AD, in DB; hoc eſt, numerus factus ex AD, in DB, vna cum quadrato ipſius CD, æqualis erit quadrato ipſius CB. Quod eſt propoſitum.*

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui ſit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

A . . . . . C . . . . B . . D

NVMERVS *enim AB, ſecetur in partes æquales AC, CB, eique adiiciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vna cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem eſſe quadrato, qui ſit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno, hoc eſt, quadrato ipſius CD, cum enim quadratus ipſius CD, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium CB, BD, vna cum numero bis comprehenſo ſub CB, BD, hoc eſt, quadratis partium CB, BD, vna cum numeris ſub CB, BD, & ſub AC, BD, comprehenſis; numeris autem contentis ſub CB, BD, & ſub AC, BD, & ſub BD, BD, hoc eſt, quadrato ipſius BD, æqualis ſit ex 1. theorem. numerus factus ex AD, in BD; ſit, vt ſi hic numerus factus ex AD, in BD, ſumatur pro quadrato partis BD, vna cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipſius CD, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius CB, vna cum numero facto ex AD, in BD; hoc eſt, numerus factus ex AD, in BD, vna cum quadrato ipſius CB, æqualis ſit quadrato ipſius CD. Quod eſt propoſitum.*

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis eſt numero, qui ſit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.

A . . . . . C . . . . B

DIVIDATVR *numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB, æqualem eſſe numero bis, qui ſit ex toto AB, in dictam partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis ſit quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui ſit bis ex AC, in CB; ſi quadratus ipſius CB, addatur communis, erunt quadrati numerorum AB, CB, ſimul, æquales quadratis numerorum AC, CB, CB, vna cum numero qui ſit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui ſit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB, æqualis eſt, per 3. theorema, numerus qui ſit ex AB, in CB;*

Ac proin-

Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB, bis, æqualis eſt, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur ſi pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius CB, bis, ſumatur numerus factus bis ex AB, in CB, erunt quadrati numerorum AB, CB, ſimul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod eſt propoſitum.

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis, æqualis eſt quadrato numeri compoſiti ex toto & priori parte.

SECETVR *numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem eſſe quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis ſit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compoſiti ex AB, & BD, ſiue dicta parte CB, ſit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum AB, BD, vna cum numero qui fit bis ex AB, in BD, hoc eſt, quadratis numerorum AB, CB, vna cum eo, qui fit bis ex AB, in CB; Sint autem ex 7. theorem. quadrati numerorum AB, CB, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub AB, CB, vna cum quadrato numeri AC; ſit, vt ſi pro quadratis numerorum AB, CB, ſumatur numerus factus bis ex AB, in CB, vna cum quadrato ipſius AC, quadratus factus ex AD, æqualis ſit numero, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod eſt propoſitum.*

A .... C ... B ... D

IX.

SI numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS *ſit numerus AB, in partes æquales AC, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium AD, DB, duplos eſſe quadratorum, qui ex AC, dimidio, & ex CD, numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri AD, æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis numerorum AC, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CD: Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, DB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc eſt, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipſius DB, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales ſunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc eſt, ex AC, & CD. Igitur, ſi pro quadrato ipſius DB, vnà cum eo, qui fit bis ex CB, in CD, ſumantur quadrati ipſorum AC, CD, erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod eſt propoſitum.*

A ..... C ... D .. B

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adiiciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero compoſito ex dimidio, & adiecto.

SIT *numerus AB, diuiſus in partes duas æquales AC, DB, eique adiiciatur numerus BD. Dico quadratum numerū AD, compoſiti ex toto AB, & adiecto BD, & quadratum adiecti numeri BD, vtroſque ſimul, duplos eſſo quadratorum, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, compoſito ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipſius AD, æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc eſt, ex CB, in CD; ſi communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, vna cum numero bis, qui fit bis ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipſius BD, vna cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales ſunt quadrati numerorum CB, CD; & quadrato ipſius CB, æqualis eſt quadratus ipſius AC. Igitur ſi pro quadrato ipſius BD, vna cum numero, qui fit bis ex CB, in CD, ſumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc eſt, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadrati numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.*

A .... C .... B .. D

IAM *vero theorema 11. lib. 2. non poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonſtrabimus.*

DIVIDATVR, *ſi fieri poteſt, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis ſit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur numerus contentus ſub extremis AB, CB, æqualis eſt quadrato numeri medij AC;* [a] *erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Eſt autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior eſt quam CB. Ablato iam CD, qui ipſi CB, ſit æqualis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, eſt vt AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, detractum;* [b] *erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, reſiduus, hoc eſt, CD, ipſi CB, æqualis, ad AD, ex AC, reſiduum. Quia igitur eſt vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & eſt AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipſi AD, ſit æqualis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia eſt, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum;* [c] *erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, reſiduus, hoc eſt, DE, ipſi AD, æqualis, ad EC, ex CD, reſiduum. Quare cum ſit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC; ſit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipſi EC, æqualis; & ſic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis.*

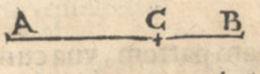
A D EC B

[a] *20. ſept.*
[b] *11. ſept.*
[c] *11. ſept.*

Quod

Quod eſt abſurdum: cum numerus non poſſit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, Quod eſt propoſitum.

ALITER *Quoniam numerus AB, in C, ita diuiſus eſt, vt is qui fit ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipſius AC; Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato ipſius A C, quintuplus erit quadrati partis AC. Eſt autem numerus contentus quater ſub AB, CB, vna cum quadrato ipſius A C, quadratus; quippe cum æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex AB, & CB, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is qui quater continetur ſub A B, C B, vna cum quadrato ex AC; & quadratus ex AC,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5 Quod eſt abſurdum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.*



VERVM *hoc idem clarius demonſtrabimus ad propoſ. 29. huius lib.*

xvj.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoſlibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe, nimirum A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipſum E, facere B; atque E, ſeipſum multiplicantem facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt;

A, 9. B, 12.
C, 16.
D, 3. E, 4.

a 24. ſept.
b 30. ſept. [b] erit & vterque D, E, ſimul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compoſitus ex D, E, quam [illegible] D,
c 26. ſept. ad E, primus ſit; [c] erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam vno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno in D, æqualis eſt per 3. theorema ſcholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B. facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſiti, primi ſunt ad E; [d] Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E,
d 27. ſept. in ſe primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

e 30. ſept. DEINDE quia, vt prius, [e] vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorum D, E, efficitur, (cum
f 26. ſept. tam compoſitus ex D, E, quam ipſe E, primus ſit ad D,) [f] numerum factum ex D, E, tanquam vno in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno in E, æqualis eſt per 3. theorema ſcholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in
g 27. ſept. E. Igitur & B, C, ſimul compoſiti, ad D, primi ſunt, [g] atque adeo & ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

B, 12. C, 16.
A, 9.
D, 3. E, 4.

h 30. ſept. POSTREMO quia, vt prius, [h] vterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt: atque adeo è
i 26. ſept. contrario, quilibet ipſorum D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E, [i] erit quoque qui fit ex D, in E, ad com-
k 27. ſept. poſitum ex D, E, primus; [k] Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E, tanquam vno, in ſe primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theorem. antecedentis ſcholij, eis qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, & ex ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi ſunt ad aliquem ipſorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, vt oſten-
l 20. ſept. ſum eſt, [l] Erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex ijs, qui fiunr ex D, & E, in ſeipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atq; is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, atq; is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipſorum, nimirum ad eum qui fit ex D, in E, primi ſunt,
m 30. ſept. vt oſtenſum eſt, [m] erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Cũ igitur ex D & E, in ſeipſos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quam ob rem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 9. C, 16.
B, 12.
D, 3. E, 4.

SCHOLIVM.

CAMPANVS *hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipſum proponens.*

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi, omnium eandem cum ipſis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi.

SINT *continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes ſimul compoſitos, eſſe primos; Videlicet A, B, C, ſimul ad D; & A, B, D, ſimul ad C; & & A, C, D, ſimul ad B; & B, C, D, ſimul ad A. Si enim A, B, C, ſimul non ſunt primi ad D, erunt A, B, C, ſimul, atque D, compoſiti inter ſe; atque adeo eos aliquis numerus communis menſura metietur. Metiatur eos numerus E, ſi fieri poteſt; ſumanturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales ſunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipſorum FG, vel certe compoſitus erit ad alterum ipſorum F, G, ex ſcholio propoſ. 14. huius libri. Atque idcirco ipſum E, & alterum ipſorum F G; aliquis numerus metietur*

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E— F, 2. G, 3. H—

Metia

Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur metiri compoſitum ex A,B,C, & ipſum D; [n] metietur quoque H, n 11. pron.
eundem compoſitum ex A, B, C, & ipſum D. Quia vero H, metitur quo-
que alterum ipſorum F,G: & tam F, quam G, medios numeros B,C, meti-
tur ex coroll.3. propoſ.2.lib.8. [o] metietur quoque H, medios B,C: [p] ac pro- o 11. pron.
pterea & compoſitum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totum compoſi- p 10. pron.
tum ex A,B,C, & detractum compoſitum ex B, C, vt demonſtrauimus: [q] metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur q 12. pron.
autem & ipſum D. Sunt ergo A,D, extremi minimorum A,B,C,D, inter ſe compoſiti. [r] Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri r 3. oct.
non poteſt, Non igitur compoſiti inter ſe ſunt compoſitus ex A,B,C, & numerus D. Ergo inter ſe primi.

A, 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.
E —	F, 2.	G, 3.	H, —

RVRSVS, *ſi A,B,D, ſimul compoſiti non ſunt primi ad C, metietur eos, vt prius aliquis numerus. Metiatur eos E, qui*
rurſum ex ſcholio propoſ.14 huius lib. vel metietur alterũ ipſorum F,G, vel compoſitus erit ad alterum ipſorum F,G. Metiatur
ergo H, ipſum E, & alterum ipſorum F,G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compoſitum ex A,B,D: [s] metietur etiam H, eun- s 11. pron.
dem compoſitum ex A,B,D. Quia vero H, metitur alterum ipſorum F,G, qui metiuntur, per coroll.3. propoſ.2.lib.8. medios B,C,
[t] metietur quoq; H, ipſos B,C. Itaque cum H, metiatur totũ compoſitum ex A,B,D, & detractum B; [u] metietur quoq; H, compo- t 11. pron.
ſitum ex A,D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipſorum F, G, quorum F, ipſum A, & G, ipſum D, metitur, vt conſtat ex u 12. pron.
demonſtratione propoſ.2.lib.8. [x] metietur etiam H, alterum ipſorum A,D. [y] Igitur & reliquum. Sunt ergo A,D, extremi in- x 11. pron.
ter ſe compoſiti. [z] Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur A,B,D, ſimul compoſiti, ad C, compoſiti ſunt. y 12. pron. z 3. oct.
Ergo primi. Quod eſt propoſitum.

NON *aliter oſtendemus & A,C, D, compoſitos, eſſe ad B, primos: nec non, & B,C,D, ſimul ad A. Eademque ratio eſt de quotlibet numeris continue proportionalibus.*

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvij.

SI duo numeri, primi inter ſe fuerint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

SINT primi inter ſe A, & B. Dico non eſſe vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit
vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi
ſunt inter ſe, [a] atque adeo in ſua proportione minimi: [b] ipſi æque metien- a 23. ſept.
tur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes, nimirum A, ipſum B, & b 21. ſept.
B, ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, B,
primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita B, ad a-
lium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare ſi duo numeri primi inter ſe
fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . . .
B . . . . . .
C ————

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi
ſint. Dico non eſſe, vt A, ad B, ita D, ad alium nume-
rum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita D, ad a-
lium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad
D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint inter ſe primi, [a] minimi in ſua proportione. [b] Igitur æque metientur a 23. ſept.
ipſos B, & E; nimirum A, ipſum B, & D, ipſum E. Atqui eſt vt A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipſum b 21. ſept.
B; & B, ipſum C, metietur; [c] atque ob id & A, ipſum C, metietur. Et quia eſt vt B, ad C, ita C, ad D, metitur au- c 11. pron.
tem B, ipſum C; metietur & C, ipſum D. Quare A, metiens ipſum C, [d] metietur quoque ipſum D. Metitur d 11. pron.
vero & ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, D, inter ſe primos. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita
D, ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca ſi fuerint
quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 8. B, 12, C, 18. D, 27. E—

PROBL. 1. PROPOS. 18. xix.

DVOBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri ſint A, & B, oporteatque conſiderare, an inueniri poſſit tertius ipſis proportionalis,
hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B, primi in-
ter ſe ſunt, aut non. Si ſunt inter ſe primi, [a] perſpicuum eſt ex demonſtratis, non a 16. noni.
poſſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si vero non ſunt A, & B, inter ſe primi;
multiplicans B, ſe ipſum faciat C. Aut igitur A, metitur ipſum C, aut non. Metiatur primum A, ipſum C, per
D. Dico ipſis A, B, inueniri poſſe tertium proportionalem, im-
mo ipſum D, eſſe tertium proportionalem. Cum enim A, me-
tiatur C, per D, [b] fiet C, ex A, in D: Fit autem ex conſtructione, b 9. pron.
idem C, ex B, in ſeipſum. Igitur, qui continetur ſub extremis A, D, æqualis eſt ei, qui ex medio B, deſcribitur: [c] Ac c 20. ſept.
proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus eſt tertius proportionalis ipſis A, B.

A, 4. B, 7.

A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.

SED non metiatur A, ipſum C. Dico ipſis A, B, non poſſe reperiri tertium proportionalem. Si enim in-
ueniri poteſt, inuentus ſit D, ita vt ſit A, ad B, quemadmodum B, ad D.
Quoniam igitur eſt, vt A, ad B, ita B, ad D; [d] erit numerus contentus ſub d 20. ſept.
extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſeipſum, hoc eſt, ipſi C.
Quare cũ C, fiat ex A, in D; [e] metietur A, ipſum C, per D: ſed & nõ metiri ponitur. Quod eſt abſurdũ. Non igitur e 7. pron.
inueni-

A, 6. B, 4. D — C, 16.

inueniri poteſt ipſis A,B,tertius proportionalis, quando A,primus non metitur C, productum ex B,ſecundo in ſe ipſum. Eadem via conſiderabimus,an ipſis B,& A,inueniri poſſit alius tertius numerus,ad quem ita ſit A,vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis conſiderauimus, &c. Quod faciendum erat.

xx. PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A,B,C,ſiue deinceps proportionales, ſiue non; oporteatque conſiderare,an poſſit reperiri quartus ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B, Multiplicans B,ipſum C,faciat D. Aut igitur A,ipſum D, metitur,aut non. Metiatur primum A, ipſum D, per E. Dico ipſis A,B,C, inueniri poſſe quartum proportionalem, immo ipſum E, eſſe quartum proportionalem.

A, 8. B, 12, C, 18. E, 27. D, 216.
A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

a 9. pron. b 19. ſept. Cum enim A, metiatur D, per E, [a] fiet D,ex A,in E: Fit autem idem D,ex B,in C,per conſtructionem.Igitur qui ſub extremis A,E,continetur,æqualis eſt ei,qui ſub B,C,ſecundo, & tertio continetur; [b] Ac propterea erit vt A,ad B,ita C,ad E. Quare inuentus eſt E, ipſis A, B,C, quartus proportionalis.

SED iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalem. Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus proportionalis E; ita vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C,ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales ſunt, [c] erit numerus contentus ſub extremis A,E, æqualis ei, qui ex B,ſecundo fit in C,tertium,hoc eſt,ipſi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; [d] metietur A, ipſum D, per E: ſed & ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D,productũ ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus,an ipſis C,B,A, inueniri poſſit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A,vt C,ad B. Quocirca tribus numeris datis conſiderauimus, an poſſit, &c. Quod erat faciendum.

c 19. ſept.
A, 4. B, 6. C, 9. E---- D, 54.
A, 3. B, 4. C, 10. E---- D, 40.
d 7. pron.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. ſi quadratus numerus ſecundi 8 nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis $21\frac{1}{3}$*. hoc modo. 3. 8.* $21\frac{1}{3}$*. Quia enim diuiſis 64. per 3. fit numerus* $21\frac{1}{3}$*. producetur numerus diuiſus 64. ex multiplicatione Quotientis* $21\frac{1}{3}$*. per diuiſorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8.*

e 20. ſept. *in ſe, [e] erunt 3. 8.* $21\frac{1}{3}$*. continue proportionales.*

DATIS autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertium genitus diuidatur in primum 9. reperietur quartus proportionalis $13\frac{1}{3}$*. hoc modo 9. 6. 20.* $13\frac{1}{3}$*. Cum enim diuiſis 120. per 9. fiat* $13\frac{1}{3}$*. producetur numerus diuiſus 120. ex multiplicatione Quotientis* $13\frac{1}{3}$*. per diuiſorem 9. ex ijs, quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autem idem numerus diuiſus ex*

f 19. ſept. *ſecundo in tertium. [f] Igitur quatuor numeri 9. 6. 20.* $13\frac{1}{3}$*. proportionales ſunt.*

EX his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poßit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, ſi ipſis alius poteſt inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus Commãdinus, quatuor membris hoc problema abſoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi, Aut non deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi primi inter ſe; Aut deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi non primi inter ſe; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorum extremi inter ſe primi. Vbi mirari ſatis non poſſum, quonam modo diligentißimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonſtrationibus vigilantißimi, in ſecundo membro huius problematis demonſtrando dormitarint, & quaſi ſui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, ſi tres numeri dati non ſint deinceps proportionales, ſed eorum extremi inter ſe primi, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falſum eſt, & demonſtratio, qua id ipſum comprobare nituntur, vitioſa. Nam falſitas huius rei perſpicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4 9. ſunt inter ſe primi, & nihilominus eis adiungi poteſt quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, eſſe vt 4. ad 8. ita 9. ad 18 cum vtrobiq; proportio ſit ſubdupla? Idem videri poteſt in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium ſunt inter ſe primi, cum tamen ipſis adiungatur poſterior quartus proportionalis. Falſum ergo eſt, illis dari non poſſe quartum proportionalem. Quod autem vitioſa ſit eorum demonſtratio, qua hoc probare contendunt, perſpicuum fiet, ſi demonſtrationem ipſam in mediam proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A,C, inter ſe primi. Dico ipſis inueniri nullo modo poſſe quartum proportionalem. Si enim poteſt inueniri, ſit ille D, ita vt quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & vt B, ad C, ita fiat D, ad E.

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E----

g 23. ſept. h 21. ſept. *Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed ſunt A,C, inter ſe primi, [g] & ob id minimi. [h] Igitur metientur æque ipſos C,E, nimirum A, ipſum C, & C, ipſum E. At vero & A, ſeipſum metitur. Ergo A, metitur duos A,C, primos inter ſe. Quod fieri non poteſt. Ipſis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.*

HÆC eſt eorum demonſtratio, in qua aſſumunt eſſe, vt B, ad C, ita D, ad alium quendã numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri poſſe, nuſquã demonſtrarunt: Immo hoc ipſum vertitur in dubium in hoc problemate Non enim minus inquiritur, an tri-

in tribus numeris B,C,D, quartus proportionalis poſſit inueniri, quam tribus A,B,C, cum non magis hoc conſtet in illis, quam in his; Quapropter cum ibi id pro conceſſo aſſumant, vt hic idem fieri non poſſe, oſtendant; liquido conſtat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonſtrando. Quin etiam, quotieſcunq; quatuor numeri dantur proportionales, ſed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter ſe ſunt, quales ponuntur eſſe A,B,C,D; nulla ratione fieri poteſt, vt detur alius, ad quem ita ſe habeat quartus, ſicut ſecundus ad tertium: quod tamen ipſi tanquam conceſſum, atque probatum aſſumunt quandoquidem ſine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita ſe habeat quartus D, vt B, ſecundus ad C, tertium. Hoc vero non poſſe fieri, facile demonſtrabimus eodem argumento, quo ipſi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A,B,C,D, proportionales, non tamen deinceps. ſintque A, & C, primus, & tertius inter ſe primi. Dico fieri non poſſe, vt ſit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C.

Sit enim, ſi poteſt fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Eſt ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo vt ipſi oſtenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo fieri poteſt, vt D, ad E, ſit, quemadmodum B, ad C. Quare apertiſsime falſum in demonſtratione ſecundi membri aſſumpſerunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem ſequuntur.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E----

PRIMVM vero membrum perſpicue & aperte oſtendunt. Nam ſi tres numeri deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi [d] manifeſtum eſt, ex demonſtratis, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Poſtrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema abſoluimus. d 17. noni.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxi.

PRIMI numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum.

SINT propoſiti primi numeri quotcunque A,B,C. Dico ipſis A, B, C, plures eſſe primos numeros. *a* Sumpto enim numero DE, minimo, quem A,B,C, metiuntur; apponatur ei vnitas EF. Aut ergo totus DF, primus eſt, aut non primus, ſit primũ primus. Sunt ergo primi numeri A,B,C,& D,F, plures propoſita multitudine A,B,C. a 38. ſept.

A, 2. B, 3. C, 5.
30.
D———— E. F

SED iam non ſit primus DF. *b* Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipſorum A, B, C, eundem eſſe. Si namque G, ſit idem, qui vnus ipſorum A, B, C; metiantur autem A,B,C, ipſum DE, & G, eundem DE, metietur. Quare G, metiens totum DF, & detractum DE, *c* metietur quoque EF, reliquum, numerus vnitatem. Quod eſt abſurdum. Ergo G, primus non eſt idem, qui vnus ipſorum A, B, C; Ac proinde inuenti ſunt primi numeri A, B, C,G, plures propoſita multitudine primorum numerorum A,B,C. Eademque via plures inuenientur quam A, B, C, G, ſi ſumatur minimus, quem ipſi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat. b 33. ſepti. c 11. pron.

A, 3. B, 5. C, 7.
105.
D———— E. F
53.
G———

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema inſtar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propoſitis, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum.

NAM ſi primi quotcunq; propoſiti ſint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuerſum, videlicet DF, ſi primus eſt, vel certe G, qui ipſum DF, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium ſextum inueniemus, & ſic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xxii.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri AB,BC, CD. Dico & totum compoſitum AD, parem eſſe. Cum enim AB,BC,CD, ſint pares, habebunt ſinguli ſingulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipſius AB, & F, ipſius BC; & G, ipſius CD. Quoniam igitur eſt vt AB, ad E, ita BC, ad F; & CD, ad G; (quod ſemper ſit proportio dupla) *a* erit quoque vt AB, ad E, ita AD, ad E,F,G, ſimul. Eſt autem AB, ipſius E, duplus. Igitur & totus AD, compoſiti ex E,F,G, duplus erit; Ac propterea AD, dimidiam partem habens numerum ex E, F,G, compoſitum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonſtrandum. a 12. ſepti.

A . . . . . . B . . . . C . . . . D
E . . . F . . G . . . .

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxiij.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par. Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB,BC,CD,DE. Dico & totum compoſitum AE, parem eſſe. Cum enim AB, BC, CD, DE, ſint impares; differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. *a* Quare, & compoſitus ex ipſis par erit. Eſt autem & multitudo vnitatum detractarum par. *b* Igitur & totus AE, compoſitus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat oſtendendum. a 21. noni. b 21. noni.

A . . . B . . . . . C . . . . D. . . . . .E

xxiv.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar eſt, AB, BC, CD, componantur. Dico & totum AD, compoſitum, imparem eſſe. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata vnitate ED, ab impari CD; erit reliquus CE, par. [a] Eſt autem & AC, compoſitus ex imparibus AB, BC, multitudine paribus, par [b] Igitur & AE, compoſitus ex paribus AC, CE, par erit. Quare addita vnitate ED, totus AD, impar erit, cum impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c Quod oſtendendum erat.

A . . . . . B . . . C . . . . E . D

a 12. noni.
b 21. noni.

S C H O L I V M.

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate. [c] *Quare reliquus ille par cum alio pari dato, vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rurſus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari ſola vnitate differat. Quod eſt propoſitum.*

c 21. noni.

xxv.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero AB, detrahatur par CB. Dico & reliquum AC, parem eſſe. Aut enim CB, par detractus dimidia pars eſt ipſius AB, aut maior quam dimidia pars, vel minor. Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipſi CB, pari æqualis ſit AC, reliqua pars dimidia, erit & AC, numerus par.

A . . . . . . C . . . . . . B

SED iam CB, par detractus maior ſit, vel minor dimidia parte ipſius AB. Quoniam igitur AB, CB, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione, ſit DB, dimidia pars ipſius AB, & EB, dimidia ipſius CB. Itaque

A . . . . . . C . . D . . . E . . . . . B   A . . . . . . D . . . C . . E . . B

cum ſit vt AB, ad DB, dimidium, ita CB, ad EB, dimidium; erit permutando vt AB, ad CB, ita DB, ad EB; & diuidendo vt AC, ad CB, ita DE, ad EB; Rurſuſque permutando, vt AC, ad DE, ita CB, ad EB. Atqui CB, ipſius EB, duplus eſt: Igitur & AC, ipſius DE, duplus erit; Ac propterea AC, cum bifariam diuidatur, (quod DE, ſit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat oſtendendum.

S C H O L I V M.

FACILIVS demonſtrabimus hanc propoſ. ducendo ad impoßibile, hoc modo. Si AC, reliquus non dicatur par, ſed impar; detracta vnitate AD, erit reliquus DC, par. [a] *Igitur compoſitus DB, par quoque erit: ac proinde, addita vnitate AD, totus AB, impar fiet, quod eſt abſurdum, cum par ponatur.*

a 21. noni.

A . D . . . . C . . . . . . B

xxvj.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem eſſe. Detracta enim vnitate CD, ex CB, reliquus ſit numerus DB, par. Quia igitur & totus AB, ponitur par; [a] erit & reliquus AD, par. Dempta ergo vnitate CD, reliquus AC, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 24. noni. A . . . . C . D . . . . B

xxvij.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquum AC, parem eſſe. Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CB; erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par aufertur CD; [a] erit & reliquus AC, par. Quare ſi ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 24. noni. A . . . . C . . . . D . B

xxviij.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur. Reliquus impar erit.

EX impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, imparem eſſe. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cum detrahatur CB, par; [a] reliquus DC, par quoque erit; Ac proinde addita vnitate AD, fiet AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 24. noni. A . D . . . . C . . . . . . B

THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit:

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot in A, ſunt vnitates. Quare cum B, ſit par, componetur C, ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot ſunt vnitates in A; *a* Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat. a 21. noni.

A . . . B . . . .
C . . . .

SCHOLIVM.

EADEM *demonſtratione oſtendemus & hoc.*

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM *rurſus C, componetur ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.*

A . . B . . . .
C . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, parem numerum in ſe multiplicatum procreare parem: vt patet, ſi pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot ſunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, ſit impar; componetur C, ex imparibus ipſi B, æqualibus, quorum multitudo impar eſt, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. *a* Igitur C, impar erit. Quocirca ſi impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum. a 23. noni.

A . . . B . . . . .
C . . . .

COROLLARIVM.

HINC ſequitur, Imparem numerum in ſe multiplicatum gignere imparem: vt conſtat, ſi impares A, & B, ponantur æquales.

A . . . B . . .
C . . . .

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur. b 29. noni.

METIATVR *impar A, parem B, per C. Dico C, parem eſſe. Nam ſi impar ſit;*[b] *erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod eſt abſurdum, cum ponatur par. Eſt ergo C, par.*

A . . . C . . . .
B . . . .

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR *impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem eſſe. Si enim ſit par;* [b] *erit B; factus ex A, impari in C, parem par. Quod eſt abſurdum, cum impar ponatur. Eſt ergo C, impar.* b 28. noni.

A . . . C . . . . .
B . . . .

SCHOLIVM

EX *his clariſſime quoque demonſtrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non poſſe accommodari: Id quod etiam in ſcholio propoſ. 14. huius lib. aliter oſtendimus; recepimusque nos hoc loco clarius demonſtraturos. Secetur enim, ſi fieri poteſt, numerus AB, in partes AC, CB, ita vt numerus ex AB, in CB, factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis AC. Aut igitur vtraq; pars AC, CB, impar eſt; aut maior AC, impar, & minor CB, par; aut contra, maior AC, par, & minor CB, impar; aut deniq; vtraq; pars AC, CB, par. Sit primum vtraq; pars AC, CB, impar,* [d] *ideoq; totus numerus AB, par.*[e] *Igitur qui fit ex AB, in CB, par eſt: qui vero ex AC, in ſe fit, impar eſt, ex Coroll. huius propoſ. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex AC, in ſe; erit par numerus impari æqualis, quod fieri non poteſt.* d 22. noni. e 28. noni.

A——— C——— B
D——— E——

DEINDE *ſit AC, impar, & CB, par, ideoq; ex ſcholio propoſ. 32. huius lib. totus AB, impar.*[f] *Quia ergo numerus ex AB, impare in parem CB, factus, par eſt, & numerus ex impare AC, in C, genitus, impar, ex coroll. huius propoſ. 29. erit rurſus ille par huic impari æqualis, quod eſt abſurdum.* f 28. noni.

TERTIO *ſit AC, par, & CB, impar; ideoque ex ſcholio propoſ. 23. huius lib. totus AB, impar.* [g] *Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB, factus, impar eſt, & numerus ex pare AC, in ſe genitus, par, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. erit rurſus ille impar huic pari æqualis, quod abſurdum eſt.* g 29. noni.

QVARTO *ſit vtraq; pars AC, CB, par. Inuentis igitur, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione AC, ad CB,* [h] *erunt D, E, inter ſe primi: ac proinde ambo pares non erunt, ſed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia eſt, vt AC, ad CB, ita D, ad E; erit conuertendo, vt CB, ad AC, ita E, ad D: Et componendo, vt AB, ad AC, ita totus DE, ad D:*[i] *Eſt autem, vt AB, ad AC, ita AC: ad CB; quod numerus factus ex AB, in CB, æqualis ponatur quadrato medij AC. Igitur erit quoq; vt totus DE, ad D, ita D, ad E,*[k] *ac proinde numerus, qui fit ex toto DE, in E, æqualis erit quadrato ipſius D. Totus ergo numerus D, E, ſectus eſt in partes D, E, quarum vel vtroq; impar eſt, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto DE, in partem E, æqualis ſit quadrato alterius partis D, quod fieri non poſſe, iam demonſtratum eſt in numero AB, quando vtraq; pars AC, CB, vel impar eſt, vel vna impar, & altera par. Conſtat ergo propoſitum.* h 24. ſepti. i 20. ſeptim. k 20. ſepti.

xxxiii.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipſius B, metiri. Metiatur A, ipſum B, per C. Erit ergo, ex iis, quæ in antecedente propoſ. ex Campano demonſtrauimus, numerus C, par. Atque adeo dimi-
a 8. pro. diam partem habebit. Itaq; cum A, metiatur B, per C, *a* metietur quoque C, ipſum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipſius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam vero eſt vt C, ad dimidium ſui, ita B, ad dimidium ſui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipſius C, ad dimidiam partem ipſius B. Eſt autem C, pars ipſius B, denominata ab A, vt oſtenſum eſt; erit & dimidium ipſius C, dimidii ipſius B, pars ab eo-
b 40. ſepti. dem A, denominata. *b* Ac propterea A, dimidium ipſius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . C . . . . . .
B . . . .

xxxiv.

THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus ſit ad numerum B, cuius duplus ſit C. Dico A, ad C, quoque primum eſſe. Si enim A, C, non ſunt inter ſe primi; metietur eos aliquis numerus, qui ſit D, qui neceſſario impar erit. Nam ſi ſit
a 28. noni. par, cum metiatur imparem A; *a* erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod eſt abſurdum, ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiens, (eſt enim C, par, cum
b 30. noni. dimidium habeat B) *b* metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipſos A, B, primos inter ſe metitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt. Ergo primus. Quapropter ſi impar numerus ad aliquem numerum primus ſit, &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . . . B . . . .
C . . . . D---

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus eſt, primum quoque eſſe non ſolum ad eius duplum, vt Euclides demonſtrauit, ſed etiam ad eius quadruplum, octuplum, ſedecuplum, & ſic
c 31. noni. deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam ſi primus eſt ad duplum, *c* primus quoq; erit ad quadruplum, qui dupli duplus eſt. Et ſimiliter ad octuplum, qui quadrupli duplus eſt, &c.

xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM à binario duplorum vnuſquiſque pariter par eſt tantum.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque ſint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, eſſe pariter pares tantum. Quod enim ſint pariter pares, perſpicuum eſt. Nam expoſita vnitate, cum A, ſit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportiona-
a 11. noni. les, nimirum in proportione dupla. *a* Quare A, quemlibet ipſorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem ſequentem metietur per aliquem ipſorum A, B, C, D, E; qui cum omnes ſint pares, vtpote dupli à binario: metietur quemlibet ipſorum B, B, C, D, E, par numerus per numerum parem: Ac propterea quilibet pariter par erit ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

QVOD autem iidem numeri ſint pariter pares tantum, liquido etiam conſtat. Cum enim A, B, C, D, E,
b 13. noni. ſint ab vnitate continue proportionales, ſitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius; *b* nullus alius quemlibet ipſorum metietur, præter ipſos A, B, C, D, E; qui cum ſint omnes pares; metietur quemlibet ipſorum par numerus per parem numerum tantum; Ac propterea quilibet pariter par eſt tantum. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM

HINC cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui ſint pariter pares tantum. Sint enim A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hic demonſtratis omnes ſunt pariter pares tantum. Dico nullum alium eſſe pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeo ſi ordo numerorum à binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantũ inueniri, nullo relicto. Si enim fieri poteſt, ſit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia ſit H. Erit igitur H, numerus par. (Nam ſi dicatur impar, cum ſit ipſius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipſum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod eſt abſurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rurſum dimidia pars ſit I. Erit igitur rurſum I, par numerus: (Nam ſi dicatur impar, cum ſit ipſius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipſum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod eſt abſurdum: ponitur enim pariter par tantum) Atq; ita deinceps erit ſemper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo ipſius I, dimidia pars vnitas, ita vt ſit I, binarius. Igitur H, G, ſunt à binario I, dupli: Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipſorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non eſſe. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo alius pariter par eſt tantum, præter eos, qui à binario ſunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I---- H---- G---

xxxvj.

THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar eſt tantum.

HABEAT

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, eſſe pariter imparem tantum. Quod enim ſit pariter impar, ita perſpicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipſum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar eſt. Quod autem idem A, ſit pariter impar tantum, hoc modo demonſtrabimus. Sit B, dimidia pars ipſius A; & C, binarius. Si igitur A, non eſt pariter impar tantum; ipſe erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E, *a* Igitur fit A, ex D, in E: ſed idem A, fit ex C, binario in B, eius di midium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis eſt ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium, *b* Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipſum B, metietur, par imparem. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum: Quocirca ſi numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . .

A . . . . a 9. pro.

B . . . . .   C . .

D - - - - -   E - - - -   b 19. ſept.

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi omnium numerorum imparium dupli ſumantur, inuenientur omnes numeri, qui ſunt pariter impares tantum. Quod enim quilibet illorum ſit pariter impar tantum, conſtat ex hac propoſitione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi ſoli ſint pariter impares tantum, perſpicuum erit ex ſequenti theoremate, in quo demonſtratur, omnes pares qui nec à binario ſunt dupli, neque dimidios habent impares, eſſe pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum, manifeſtum eſt, nullum alium præter ipſos, eſſe pariter imparem tantum; ſed vel eſſe pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparem.

Impares	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
Pariter impares tantum.	6.	10.	14.	18.	22.	26.	30.

THEOR. 32 PROPOS. 34. xxxvij

SI par numerus neque à binario duplus ſit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par eſt, & pariter impar.

PAR numerus A, neq; ſit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, ſed parem. Dico A, & pariter parem eſſe, & pariter imparem. Quod enim ſit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par eſt.

A . . . .

QVOD autem idem A, ſit etiam pariter impar, ita oſtendemus. Diuiſo A, bifariam, & eius dimidio rurſus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam ſi in binarium incideremus eſſet A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod eſt abſurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipſum A, per numerum parem: Alias ſi per imparem metiretur, *a* cum impar imparem multiplicans faciat imparem; eſſet A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod eſt abſurdum, ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo viciſſim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur eſt & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque A binario duplus ſit, &c. Quod oſtendendum erat. a 29. noni.

SCHOLIVM I.

FACILE ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares ſint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario ſunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propoſ. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. ſcripſimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. xxxviij.

SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo: Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F; & ex B, C, ſecundo, & E, F, vltimo detrahantur CG, FH, primo A, æquales. Dico eſſe vt BG, ad A, ita EH, ad A, B, C, & D, ſimul. Detrahatur FI, ipſi BC, & FK, ipſi D, æqualis. Quoniam igitur FI, æqualis eſt ipſi BC, & ablatus FH, ablato CG; erit & reliquus

A . . . .

B . . . . G C

D . . . .

E . . . . K . . . . . . I . . . . H . . . . F

IH, reliquo BG, æqualis. Quia vero eſt vt A, ad BC, ita BC, ad D, & D, ad EF; conuertendoque vt EF, ad D, ita D, ad BC, & BC, ad A; Atque eſt KF, ipſi D, & IF, ipſi BC, & HF, ipſi A, æqualis: Erit quoq; vt EF, ad KF, ita KF, ad IF, & IF, ad HF. Diuidendo igitur vt EK, ad KF, ita KI, ad IF, & IH, ad HF; *a* Ac proinde ita etiam erunt omnes EK, KI, IH, ad omnes KF, IF, HF, hoc eſt, totus EH, ad D, BC, A, ſimul, (quibus ſumpti ſunt æquales KF, IF, HF,) vt IH, ad HF, hoc eſt, vt BG, ad A; ſunt enim BG, & A, ipſis IH, & HF, æquales. Quare ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat. a 12. ſepti.

A .

B . . G . C

D . . . .

E . . . . K . . . . . . I . . H . F

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam ſummæ quotcunque numerorum continue proportionalium, ſi modo primus ſecundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim ſit vt exceſſus ſecundi ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes; Si primus à ſecundo, & vltimo dematur, fiatque vt reliquus ſecundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium: Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedũt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota ſumma. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum vltimi, & productus diuidatur in exceſſum ſecundi: vt liquet ex ſcholio prop. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus eſt, ſunt exceſſus ſecundi, primus, & exceſſus vltimi: Vt in exemplo appoſito, ſi primus numerus nimirum vnitas, detrahatur ex 3. ſecundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui exceſſus, 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe vt 2. ad 1. ita 2186. ad ſummam omnium excepto vltimo, ſi ſecundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui ſi diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo vltimo 2187. qui ſi addatur ſummæ inuentæ 1003. procreabitur ſumma omnium 3280.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

xxxix.
THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli quoad E, ex illis compoſitus ſit primus; & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, eſſe numerum perfectum. Quot enim ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ab E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quàm E, G, H, I; erit ex æ-
a 19. ſept. quo, vt A, ad D, ita E, ad I; *a* Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis eſt facto ex D, ſe-

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G------62. H, 124. I, 248. F----- 496
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O------ P---

b 7. pron. cundo in E, tertium: Factus eſt autem F; ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; *b* ideoque I, ipſum F, metietur per A; binarium; & ob hoc F, ipſius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli ſunt. Detrahantur ex G; ſe-
c 35. noni. cundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, ſintque reliqui exceſſus M, N, *c* Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, ſimul: Eſt auem M, æqualis ipſi E. (Cum enim G, duplus ſit ipſius E, ablatuſque ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E, G, H, I, ſimul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt ipſi E, ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex LN, nimirum ipſe F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, ſimul. Quare
d 7. pro.
e 11. pron. cum vnitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipſum F; (Cum enim F, factus ſit ex E, in D; *d* me-
f 11. pron. tietur D, ipſum F; *e* atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, *f* qui ipſum D, metiuntur. Rurſus
g 11. pron. cum I, ipſum F, metiatur vt oſtenſum eſt, *g* metientur, quoque eundem F, numeri E, G, H, *h* qui ipſum I, pro-
h 11. noni. pter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, vt mox oſtendemus; Erunt vnitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cum æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus.
i 9. pron. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; *i* atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F,
k 19. ſepti. factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium: *k* ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cum A, B, C, D, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus
l 13. oct. vnitati primus, *l* vltimum D, nullus alius, præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipſum P, metietur. Cum er-
m 31. ſepti. go E, primus ſit, *m* erunt E, & P, inter ſe primi; *n* ideoque in ſua proportione minimi. *o* Ac proinde æque metie-
n 23. ſepti. tur E, ipſum O, & P, ipſum D. *p* Nullus vero alius præter A, B, C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui ali-
o 21. ſexti.
p 23. octau. quis ipſorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B, C, D, tot ab E, ſumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex
q 18. ſepti. æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; *q* Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E,
r 29. ſepti. tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, *r* atq; adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem eſt, qui O. Quod eſt abſurdum, ponitur enim O, diuerſus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipſum F, metitur, ſed ipſum ſoli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus ſimul ſumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipſi æquales ſunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam ſummam colligantur, donec compoſitus ſit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod ſi ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, ſumantur tot continue dupli (ipſo primo etiam computato) quot ſunt numeri illi dupli ab vnitate, excluſa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipſa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuẽtus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demõſtratione theorematis, & facile ex ſubiectis exem-

exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1. 2. primus eſt, erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 3. Item, quia compoſitus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus eſt: idcirco 28. factus ex 7. in 4. eſt perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. hoc eſt, 15. non eſt primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE *quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus eſt; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.*

LVBET *hoc loco demonſtrare proprietates quaſdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis, illa proprietas, quam libro 5. ſeptimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, expoſuimus, hinc exordientes.*

I.

QVOLIBET numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.

NVMERVS *enim A, diuiſus per B, C, faciat Quotientes D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiſo A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in E, tertium* [a] *erit vt B, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod eſt propoſitum.* a 19. *ſepti.*

A, 48.
B, 8. C, 3.
D, 6. E, 16.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales.

DIVISO *enim numero A, per B, C, D, E, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico eſſe, vt B, ad C, ita G, ad F. Et vt C, ad D, ita H, ad G. Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifeſtum eſt ex theoremate 1. proxime demonſtrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H: erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I: erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, ſi plures fuerint. Quod eſt propoſitum.*

A, 48.
B, 3. C, 4. D, 8. E, 6.
F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continue proportionales.

DIVISO *enim numero A, per B, C, D, E, continue proportionales, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continue proportionales eſſe. Quoniam enim per 2. theorema eſt, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc eſt, vt D, ad E, ita H, ad G: Et vt B, ad C, hoc eſt, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod eſt propoſitum.*

A, 15.
B, 1. C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15. G $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{1}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

IV.

SI ſint quotuis numeri quicunq; , & totidem alii in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet.

SINT *quotuis numeri A, B, C, quorum ſumma D: Et totidem alij E, F, G, quorum ſumma H; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico eſſe, vt D, ad A, B, C, ſigillatim ita H, ad E, F, G, ſigillatim. Cum enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul, ad C, ita erit E, F, ſimul, [illegible] Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, & ſimul, hoc eſt, H, ad G.*

A, 3. B, 6. C, 20.
D, 29.
E, 6. F, 12. G, 40.
H, 58.

QVIA *igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad E.*

DENIQVE *quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.*

V.

SI ſint quotuis numeri quicunq;,& totidem alii in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM, vt in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſque proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraque ſumma ſeorſum per primos numeros, quæq; per ſuum, diuidatur. Eademq; ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſitum.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT continue proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorum ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe: Item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

A, 1.	B, 2.	C, 4.	D, 8.	E, 15.
F, 15.	G, $7\frac{1}{2}$.	H, $3\frac{3}{4}$.	I, $1\frac{7}{8}$.	K, $28\frac{1}{8}$.
L, $1\frac{7}{8}$.	M, $3\frac{3}{4}$.	N, $7\frac{1}{2}$.	O, 15.	

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandem continuam porportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A, B, C, D. Et quotientes L, M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quam numeri A, B, C, D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cum ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod eſt propoſitum.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medii Quotientis in ſe.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D, E, F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum ſumma O. Dico ſummæ O, æqualem eſſe numerum, qui fit, ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, ſunt continue proportionales

A, 1.	B, 2.	C, 4.	D, 8.	E, 16.	F, 32.	G, 63.
H, 63.	I, $31\frac{1}{2}$.	K, $15\frac{3}{4}$.	L, $7\frac{7}{8}$.	M, $3\frac{15}{16}$.	N, $1\frac{31}{32}$.	O, $124\frac{1}{2}$.

a 19. ſepti. *conuerſo ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, vt I, ad H. [a] Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademq; ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H, I, K, L, M, N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N, producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continue proportionales A, B, C, D, E, quorum ſumma F, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum ſumma M, Dico ſummæ M, æqualem eſſe numerum genitum ex G, in

A, 1.	B, 2.	C, 4.	D, 8.	E, 16.	F, 31.
G, 31.	H, $15\frac{1}{2}$.	I, $7\frac{3}{4}$.	K, $3\frac{7}{8}$.	L, $1\frac{15}{16}$.	M, $60\frac{1}{16}$.

L, & ex H, in K, & ex I, in ſeipſum. Quod enim æqualis ſit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, continue proportionales ſunt.

b 20. ſepti. *[b] erit numerus ex H, in K, genitus, id eſt, ſumma M, æqualis numero, qui ex I, in ſeipſum ducto generatur. quod eſt propoſitum.*

HINC fit, quando numerus terminorum eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cuius latus, ſiue radix, eſt medius terminus.

ITAQVE ſi inueniendi ſint quotcunque numeri continue proportionales in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuſuis duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant: accipiendi ſunt in data proportione tot numeri quotcunq; continue proportionales, quot inquiruntur. Nam ſi eorum ſumma per ipſos ſigillatim

tim diuidatur; erunt Quotientes quæſiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perſpicuum eſt. Quod ſi deſiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum ſumma ſit numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix ſit medius terminus: ſumendi ſunt in data proportione totidem numeri continue proportionales, eorumq; ſumma per eos ſigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæſiti, vt ex eadem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile ſane eſt, poſſe reperiri quotcunq; numeros continue proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium ſumma æqualis ſit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant, inter ſe multiplicatis; & deniq; ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio termino in ſeipſum multiplicato.

SIC etiam ſi quis optet duos numeros in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero producto ex vno in alterum, ſumat duos numeros in data proportione quoſcunq;, eorumque ſummam per vtrumque diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæſitos, vt oſtenſum eſt: quia videlicet eorum ſumma æqualis eſt numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc eſt, in ſecundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunq; in data proportione ſeſquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq; ſumma 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. ſunt numeri quæſiti. Habent enim proportionem ſeſquiquintam datam, & tam eorum ſumma, quam numerus ex multiplicatione eorum productus eſt $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE NVMERORVM FRACTORVM

DEMONSTRATIONES.

I.

DVÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, ea... m proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ AB, CB, eundem habentes denominatorem, & numerator C, ſit vnitas. Dico ita eſſe minutiam AB, ad minutiam CB, vt eſt numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutias C B, in A B, includitur; propterea quod minutia A B, diuiditur in tot minutias minutiæ C B, æquales, quot vnitates ſunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. [a] *Igitur eadem pars eſt vnitas C, numeri A, quæ minutiæ CB, minutiæ AB; ac proinde eſt, vt vnitas C, ad A, ita minutia CB, ad minutiam AB: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutiam AB, ad minutia CB. quod eſt propoſitum.* a 29. defin.

A, $\frac{6.}{11.}$ C, $\frac{1.}{11.}$
B,   B,

QVONIAM vero minutiæ ſunt fractiones, ſiue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuſpiam numeri, (Neq; enim eorum ſententiam probare poſſum, qui exiſtimant, eas reſpectu ſolius vnitatis eſſe accipiendas; propterea quod falſo putant, earum demonſtrationes nō poſſe omnes explicari in numeris integris, ſed ſolum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonſtrationes quibuſuis etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonſtrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam ſtudioſus lector addiſcat, veras eſſe demonſtrationes, quas afferimus.

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius $\frac{1}{11}$. eſt 4. & $\frac{6}{11}$. ſunt 24. perſpicuum eſt, ita eſſe 4. ad 24. vt eſt numerator 1. in numeratorem 6. Vel ita 24 ad 4. vt 6. ad 1.

HANC porro propoſitionem demonſtrabimus propoſ. 4. in vniuerſum de quibuſcunq; duabus minutiis eiuſdem denominationis, etiamſi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiuſuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius eſt minutia.

SIT minutia quæcunq; AB. Dico eſſe numeratorem A, ad denominatorem B, vt eſt minutia AB, ad ſuum integrum. Sumatur minutia CB, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis ſit eidem denominatori B, ita vt ſuo integro ſit æqualis. Quando enim numerator denominatori eſt æqualis, minutia ſuo integro æquiualet: quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipſum integrum diuiſum eſt, ac proinde totum integrum contineat. [b] *Quoniam igitur eſt, vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB: Et vt C, ad D, ita minutia CB, ad minutiam DB; erit ex æquo vt A, ad D, hoc eſt, vt numerator A, ad denominatorem B, ipſi D, æqualem, ita minutia AB, ad minutiam DB, hoc eſt, ad integrum. quod eſt propoſitum.* b 1. huius.

A, $\frac{3.}{5.}$ C, $\frac{1.}{5.}$ D, $\frac{5.}{5.}$
B,   B,   B,

ALITER. Sit primum datæ minutiæ AB, numerator A, vnitas, ita vt minutia ſit pars aliquota integri C, ſiue C, ſit vnitas, ſiue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutiæ ipſi AB, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas eſt in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, ſit pars numeri, B, ab ipſo B,

A, $\frac{1.}{5.}$ C, $\frac{1.}{30.}$
B,   C,

c 20. def. *denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; eadem pars erit vnitas A, numeri B, quæ minutia AB, integri C.* [c] *Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C, quod eſt propoſitum.*

d 1. huius. *DEINDE non ſit vnitas numerator A. Sumatur minutia DB, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutiæ AB.* [d] *Et quia eſt vt A, ad D; numerator ad numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam DB: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proxime demonſtrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem; ita minutia AB, ad integrum C. Quod eſt propoſitum.*

A, 3. D, 1. C, 1.
B, 5. B, 5. C, 30.

ITAQVE ſi data minutia $\frac{3}{5}$. *ſit huius numeri integri 30. erit eius* $\frac{1}{5}$. *numerus 6. ac proinde* $\frac{3}{5}$. *numerus 18. vbi vides ita eſſe 18. ad 30. vt eſt 3. ad 5. numerator ad denominatorem.*

III.

MINVTIA quælibet, pars eſt numeratoris à denominatore denominata.

e 2. huius. *SIT quælibet minutia AB. Dico eam eſſe partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam.* [e] *Quoniam enim eſt, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad ſuum integrum C, erit permutando, vt A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum. Et conuertendo, vt minutia AB, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrum C, ſit pars denominatoris B. (hoc eſt, integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore B.) ab ipſo denominatore B, denominata; (Cum enim æque metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipſum integrum toties acceptum, quoties vnitas eſt in denominatore; ſit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore) erit quoq; minutia AB, numeratoris A, hoc eſt, integri toties accepti, quoties eſt vnitas in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata. quod eſt propoſitum.*

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. *eſſe huius integri 30. cuius* $\frac{3}{5}$. *ſunt 18. & quia numerator 3. numerat tria integra, hoc eſt, valet 90. & denominator valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia* $\frac{3}{5}$. *ſumitur reſpectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinq;.) liquido conſtat, 18. eſſe quintam partem numeratoris, hoc eſt, trium vnitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt, quinque vnitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.*

IV.

DATÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propoſitione oſtenſum eſt de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonſtratur hic de quibuſuis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ AB, CB, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam AB, ad minutiam CB, vt eſt A, ad C, numerator ad numeratorem.
f 2. huius. [f] *Quia enim eſt, vt A, ad B, ita minutia AB,*
g 2. huius. *ad ſuum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB; (Nam* [g] *cum ſit, vt C, ad B, ita minutia C, B, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB,) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam CB, quod eſt propoſitum.*

A, 6. C, 3.
B, 7. B, 7.

DATÆ minutiæ $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. *ſint huius integri 28. cuius* $\frac{6}{7}$. *ſunt 24. &* $\frac{3}{7}$. *ſunt 12. vbi perſpicuum eſt, ita eſſe 24. ad 12. vt eſt numerator 6. ad numeratorem 3.*

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad poſteriorem, vt prior numerus productus ad poſteriorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico eſſe minutiam AB, ad minutiam CD,
h 18. ſepti. *vt eſt F, ad H. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H,* [h] *erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B,*
i 2. huius. [i] *ita eſt minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rurſus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H;*
k 18. ſept. [k] *erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita eſt integrum ad minutiam CD, Nam*
l 2. huius. [l] *cum ſit, vt C, ad D, ita minutia CD, ad integrum, erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam CD.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam CD. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, vt minutia AB, ad minutiam CD. quod eſt propoſitum.*

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B, 3. D, 5.
H, 15.

SI duæ

F,	AB.
H,	Integrum.
G,	CD.

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. ſint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiuſdem, 24. Perſpicuum autem eſt ita eſſe 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati ſunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE ſi productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoq; minutia AB, minutiæ CD, æqualis, ſi minor minor: Et ſi maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc eſt demonſtratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoſcendum, vtra duarum minutiarum maior ſit.

VI.

INTEGRVM ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F, & ex C, in B, fiat G. Dico ita eſſe integrum ad ſummam minutiarum AB, CD, vt eſt H, ad ſummam numerorum F, G. [m] Quoniam enim eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita ſumma numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia CD, ad integrum, ita eſt G, ad H, (nam [n] vt minutia CD, ad integrum, ita eſt C, ad D. [o] Et vt C, ad D, ita eſt G, ad H: propterea quod G, D, ipſum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad integrum, ita ſumma numerorum F, G, ad H: [et] conuertendo, vt integrum ad ſummam minutiarum AB, CD, ita H, ad ſummam numerorum F, G, quod eſt propoſitum.

m 5. huius.
n 2. huius.
o 18. ſepti.

F, 10.		G, 12.	
A, 2.	✕	C, 4.	
B, 3.		D, 5.	
	H, 15.		

AB,	CD,	F, G.
	CD,	G.
Integrum.		H.

SINT rurſus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30 cuius $\frac{2}{3}$. ſunt 20. & $\frac{4}{5}$ eiuſdem 24. ac proinde ſumma minutiarum 44. Vbi vides, ita eſſe integrum 30. ad hanc ſummam 44. vt eſt 15. ex denominatoribus productus ad 12. ſummam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita eſſe minutiam AB, ad minutiam AC, vt eſt denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [p] erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E, [q] ita eſt minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoq; minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod eſt propoſitum.

p 17. ſept.
q 5. huius.

D, 105.	✕	E, 35.	
A, 5.		A, 5.	
B, 7.		C, 21.	

DVÆ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. ſint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. ſunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiuſdem 10. Manifeſtum autem eſt, ita eſſe 30. ad 10. vt poſterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIÆ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior eſt; Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD, ſitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales eſſe. [r] Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo ſunt minutiæ AB, CD. quod eſt propoſitum.

r 2. huius.

A, 3.	C, 9
B, 4.	D, 12.

SED ſint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico eſſe vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales ſint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. [s] Eſt autem, Et minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod eſt propoſitum.

s 2. huius.

DEIN-

a 2. huius.

DEINDE ſit maior proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico maiorem eſſe minutiam AB, quam CD. [a] *Cum enim ſit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum, ponatur autem maior proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AC, ad integrum, quam minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo eſt minutia AB, quam minutia CD, quod eſt propoſitum.*

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

b 2. huius.

VERVM ſit iam minutia AB, maior, quam minutia CD. Dico maiorem eſſe proportionem A, ad B, quam C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrum, quam minutiæ CD, minoris ad idem integrum. [b] *Cum ergo ſit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoq; maior proportio A, ad B, quam C, ad D. quod eſt propoſitum.*

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. integer numerus ſit 24. cuius tam $\frac{3}{4}$. quam $\frac{9}{12}$. ſunt 18. ac proinde æquales ſunt minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$. eiuſdem numeri 24. ſunt 16. vbi manifeſtum eſt, numerum 18. maiorem eſſe numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. maiorem eſſe minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIÆ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, ſunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator, maiorem proportionem habet, illa maior eſt: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quam denominator.

c 8. huius.

SINT duæ minutiæ AB, CD, ſitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipſas æquales eſſe. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [c] *ac proinde minutiæ æquales erunt. quod eſt propoſitum.*

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

d 8. huius.

SED ſint iam minutiæ æquales AB, & CD. Dico ita eſſe A, ad C, vt B, ad D. [d] *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D; itaque permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod eſt propoſitum.*

e 8. huius.

DEINDE ſit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem eſſe minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D, [e] *ac propterea maior erit minutia AB, quam CD. quod eſt propoſitum.*

A, 6. C, 3.
B, 9. D, 5.

f 8. huius.

VERVM ſit iam minutia AB, maior quam CD. Dico maiorem proportionem eſſe A, ad C, quam B, ad D. [f] *Erit enim maior proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod eſt propoſitum.*

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc eſt 60. æqualem eſſe minutiæ $\frac{2}{3}$ id eſt, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id eſt, 60. maiorem eſſe minutia $\frac{3}{5}$. hoc eſt numero 54.

X.

DVAS minutias diuerſarum denominationum ad alias duas eiuſdem denominationis illis æquales reducere.

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B, 3. ✕ D, 5.
G, 15.

g 18. ſept.
h 8. huius.
i 18. ſepti.
k 9. huius.

DVÆ minutiæ AB, CD, habeant diſſimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, eſſe æquales minutiis AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; [g] *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* [h] *Quare minutiæ AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C. D, multiplicantes B, faciunt F, G,* [i] *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* [k] *Igitur minutiæ CD, FG, æquales erunt. quod eſt propoſitum.*

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

l 2. huius.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam BC, vnitati A, æqualem eſſe. [l] *Quia enim eſt, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Eſt autem B, ipſi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id eſt, vnitati, erit æqualis. quod eſt propoſitum.*

A, 1. B, 6.
C, 6.

DEINDE ſit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius dominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam BC, integro A, æqualem eſſe. Supponatur ... integro A, vnitas D, vt fiat minutia AD, tot vnitatibus æqualis, quoties vnitas eſt in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex def. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem.

A, 7. C, 42.
D, 1. C, 6.

m 8. huius.

Cum ergo minutiarum AD, BC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, [m] *ipſæ inter ſe æquales erunt. Quare cum minutia AD, ſit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui eſt vnitas; erit quoq; minutia BC, eidem integro A, æqualis. quod eſt propoſitum.*

XII. DA-

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par eſt, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramq; minutiam CB, AD, duplam eſſe minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, CB, eundem habeant denominatorem; [a] *erit vt C, ad A, numerator, ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia ad minutiam. Eſt autem C, ipſius A, duplus, ex conſtructione. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod eſt propoſitum.* a 4. huius.

A,	3.	C,	6.	A,	3.
B,	8.	B,	8.	D,	4.

RVRSVS quia minutiæ AB, AD, eundem habent numeratorem; [b] *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Eſt autem B, ipſius D, duplus, per conſtructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit. quod eſt propoſitum.* b 7. hui.

DEINDE dimidianda ſit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par eſt, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtramque minutiam AC, DB, dimidium eſſe minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, AC, eundem habeant numeratorem; [c] *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita AC, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo B. ſit per conſtructionem ipſius C, dimidium, erit & minutia AC, minutiæ AB, dimidium. quod eſt propoſitum.* c 7. huius.

A,	6.	A,	6.	D,	3.
B,	11.	C,	22.	B,	11.

RVRSVS cum minutiæ AB, DB, habeant eundem denominatorem; [d] *erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita DB, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo D, ſit ipſius A, dimidium, ex conſtructione; erit & minutia DB, minutiæ AB, dimidium. quod eſt propoſitum.* d 4. huius.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. ſi vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri poteſt) ſi denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datæ minutiæ ſumetur pars tertia, quarta, &c. ſi denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri poteſt) ſi numeratoris tertia pars, quarta, &c. ſumatur. Quod eodem modo demonſtrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim AB, minutia minutiæ CD, reſpectu integri numeri E, ſiue vnitatis E, & valorem huius minutiæ exprimat ſimplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem eſſe ſimplici minutiæ FG, reſpectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rurſus H, ex C, in B. [e] *Et quoniam eſt, vt A, ad B, ita minutia AB, ad ſuum integrum, nimirum ad minutiam CD, cuius integrum eſt E:* [f] *Item vt A, ad B, ita eſt F, ad H; quod A, B, ipſum C, multiplicantes faciant F, H: Erit quoque, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad H. Rurſus* [g] *quia eſt, vt C, ad D. ita minutia CD, ad ſuum integrum E:* [h] *Item vt C, ad D, ita eſt H, ad G; quod B, ipſos C, D, multiplicans fecerit H, G: Erit quoque vt CD, minutia ad ſuum integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad H: Et vt minutia CD, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt AB, minutia minutiæ CD, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem AB, minutia minutiæ CD, ad integrum E, ita eſt ſimplex minutia K, ad idem integrum E; quod ſimplex minutia K, æqualis poſita ſit datæ minutiæ AB, minutiæ CD; cum eius valorem reſpectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia ſimplex K, ad integrum E.* [i] *Cum ergo quoque ſit, vt F, ad G, ita minutia FG, ad idem ſuum integrum E; æquales erunt minutiæ ſimplices K, & FG: ac proinde cum minutia K, æqualis ſit datæ minutiæ minutiæ, erit quoq; ſimplex minutia FG, æqualis datæ minutiæ, AB, reſpectu minutiæ CD, cuius integrum E. quod eſt propoſitum.*

e 2. huius.
f 18. ſepti.
g 2. huius.
h 17. ſept.
i 2. huius.

F,	6.	H,	9.		
A,	2.	C,	3.	E,	1.
B,	3.	D,	4.	E,	24.
	G, 12.		K, $\frac{1}{2}$.		

A B.	F.
C D.	H.
E.	G.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. ſunt 12. qui numerus eſt $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifeſtum autem eſt, ſi tam numeratores 2. 3. inter ſe multiplicentur, quam denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquiualet, qualis nimirum erat numerus 12. reſpectu numeri integri 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

SIT primum AB, minutia minutiæ CD. Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D, fiat F. [k] *Et quoniam minutia EF, exprimit* k 13. huius.

Kk valorem

E, 6.
A, $\frac{2.}{3.}$ C, $\frac{3.}{4.}$
B, D,
F, 12.

valorem minutiæ AB, reſpectu minutiæ CD; reducta erit data minutia minutiæ ad ſimplicem minutiam EF. quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit AB, minutia minutiarum CD, EF, ita vt CD, ſit minutia minutiæ EF, & AB, minutia minutiæ CD. Fiat G, ex A, in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atque ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam IK, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem eſſe.[a] Nam minutia GH, æqualis eſt, minutiæ AB, minutiæ CD, reſpectu minutiæ EF, tanquam integri cuiuſdam. [b] Item minutia IK, æqualis eſt minutiæ GH, (hoc eſt, minutiæ AB, minutiæ CD.) minutiæ EF, reſpectu integri, cuius EF, eſt minutia; & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia IK, ex numeris vltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum. quod eſt propoſitum.

a 13. huius.
b 13. huius.

G, 6. I, 6.
A, $\frac{2.}{3.}$ C, $\frac{3.}{4.}$ E, $\frac{1.}{2.}$
B, D, F,
H, 12. K, 24.

SIT minutia $\frac{2}{3}$. minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 9. Huius deniq; $\frac{2}{3}$. ſunt 6. qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quam denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ AB, CD, quarum AB, ad aliam æqualem reducenda ſit cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum: denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam GH, minutiæ AB, æqualem eſſe; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans AB, facit G, H, [c] erit vt A, ad B, ita G, ad H, [d] ac proinde minutiæ AB, GH, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F, [e] metitur C, ipſum F, per D: [f] Metietur autem & vnitas ipſum D, per D. Eadem igitur pars eſt C, ipſius F, quæ vnitas ipſius D. Cum ergo vnitas ſit ipſius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipſius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipſius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia eſt minutiæ F, reſpectu integri G, ſuntque numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; [g] conſtituet C, minutia minutiæ F, reſpectu integri G, minutiam ſimplicem M, (quas minutias C, F, M, ſeorſum ſcripſimus) reſpectu eiuſdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores ſint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus eſt numerus K,) conſtituet minutia C, minutiæ F, reſpectu integri G, minutiam ſimplicem eiuſdem integri G, cuius numerator eſt vnitas, & denominator numerus K, æqualis eſt minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ CD, qui conſtituit C, minutiam minutiæ F, reſpectu integri G, pars erit ipſius integri G, à numero K, denominata. Quo circa numerus C, ipſum G, metietur per K; toties nimirum ſumptus, quoties vnitas eſt in K, numero. Eadem prorſus ratione demonſtrabimus, D, metiri ipſum H, per L, numerum. Quod eſt propoſitum.

c 17. ſept.
d 7. huius.
e 9. pron.
f 5. pro.
g 13. huius.

G, 24. K, 8.
A, $\frac{2.}{3.}$ F, 12. C, $\frac{3.}{4.}$
B, D,
H, 36. L, 9.
C, $\frac{1}{4}$. F, $\frac{1}{2}$. M, $\frac{1}{8}$.

XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt numeros æquales, æquales ſunt:. Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt. Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ AB, CD: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: ſintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias AB, CD, æquales eſſe. Quoniam numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis eſt numero F, facto ex C, ſecundo in B, tertium, [h] erit vt A, primus ad C, ſecundũ, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem. [i] Quare minutiæ AB, CD, æquales ſunt. VEL ſic. [k] Quoniam eſt vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Eſt autem E, ipſi F, æqualis; erit quoq; minutia AB, minutiæ CD, æqualis. quod eſt propoſitum.

h 19. ſepti.
i 9. huius.
k 5. huius.

E, 24. F, 24.
A, $\frac{2.}{3.}$ ⋈ C, $\frac{8.}{12.}$
B, D,

SED

SED ſint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerum E, æqualem quoque eſſe numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [a] erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem. [b] Quapropter idem numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, ſecundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL ſic. [c] Quoniam eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F, ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoq; numeri E, F, æquales, quod eſt propoſitum.

a 9. huius. b 19. ſepti. c 5. huius.

DEINDE ſit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoq; AB, maiorem eſſe minutia CD. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quam F; gignetur F, ex minore numero quam A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in B, tertium, [d] erit vt G, primus ad C, ſecundum, ita B, tertius ad D, quartum: Eſt autem maior proportio A, ad C, quam G, ad C; quod A, maior ſit, quam G, Igitur maior quoque; [e] erit proportio A, ad C, quam B, ad D; ac proinde minutia AB, maior erit, quam minutia CD. VEL ſic. [f] Quoniam eſt, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Eſt autem E, maior quam F; erit quoq; minutia AB, maior quam minutia CD. Quod eſt propoſitum.

E, 24. F, 21.
G $1\frac{1}{4}$ A, $\frac{2.}{3.}$ ⋈ C, $\frac{7.}{12.}$
B, D,

d 19. ſepti. e 9. huius. f 5. huius.

VERVM ſit iam minutia AB, maior quam minutia CD. Dico & numerum E, numero F, eſſe maiorem. Cum enim maior ſit minutia AB, quam minutia CD, [g] erit maior proportio A, ad C, quam B, ad D Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui ſit G. [h] Idem ergo numerus fiet ex G, primo, in D, quartum, qui ex C. ſecundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quam ex G, in D; propterea quod A, maior eſt quam G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quam F, ex C, in B, genitus. VEL ſic. [i] Quoniam eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F: Eſt autem AB, minutia maior quam minutia CD, erit quoq; E, maior quam F. Quod eſt propoſitum.

g 9. huius. h 19. ſepti. i 5. huius.

ATQVE hæc eſt quoque demonſtratio eius regulæ, quam in Arithmetica præſcripſimus ad dignoſcendum, vtra duarum minutiarum propoſitarum maior ſit. Id quod etiam ad 5. propoſitionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, ſint inter ſe primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, ſed ipſa iam in minimis erit terminis conſtituta. Reducatur enim ſi fieri poteſt, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutiæ AB, ſit æqualis. [k] Quoniam igitur eſt, vt A, ad B, ita C, ad D; ſuntque C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi termini in ſua proportione [l] ſunt autem & minimi, cum primi inter ſe ſint quod eſt abſurdum.

A, $\frac{11.}{12.}$ C, $\frac{\ }{\ }$
B, D,

k 8. hui. l 23. ſepti.

SI vero A, B, non ſint inter ſe primi; [m] ſit eorum maxima menſura C, quæ metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualem eſſe datæ minutiæ AB, & in minimis terminis conſtitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; [n] producentur A, B, ex C, in D, E. [o] Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E, [p] ac propterea minutiæ AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima menſura numerorum A, B, metitur ipſos per D, E; erunt ex coroll. propoſit. 35. libr. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod eſt propoſitum.

A, $\frac{36.}{48.}$ D, $\frac{3.}{4.}$
B, E,
C, 12.

m 2. ſepti. n 9. pro. o 17. ſept. p 8. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri poteſt, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus ſit C. Ex A, numeratore in denominatorem datam C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem eſſe minutiæ AB, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, [q] fiet D, ex B, in E: Factus eſt autem idem D, ex A, in C. [r] Igitur erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita E, tertius ad C, quartum; [s] ideoque minutiæ AB, EC, æquales erunt. quod eſt propoſitum.

A, $\frac{3.}{4.}$ E, $\frac{9.}{12.}$
B, C,
D, 36.

q 9. pron. r 19. ſepti. s 8. huius.

QVOD ſi B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia AB, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, ſi fieri poteſt, ad minutiam EC. Quia ergo minutiæ AB, EC, æquales ſunt; [t] erit vt A, ad B, ita E, ad C. [u] Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, ſecundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. [x] Igitur B, metietur D, per E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſum D, non metiri.

A, $\frac{3.}{4.}$ E, $\frac{\ }{10.}$
B, C,
D, 30.

t 8. huius. u 19. ſepti. x 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens eſt minutia, cuius numerator eſt numerus minor diuiſus, denominator vero maior numerus diuidens.

 SIT

a 8. huius.

A, 6. B, 11.

$\frac{A,\ 6.}{B,\ 11.}$

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem eſſe minutiam AB, cuius numerator A, & denominator B. a Quoniam enim eſt, vt A, ad B, numerus diuiſus ad diuidentem, hoc eſt, vt numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad integrum, hoc eſt, ad vnitatem; erit ex defin. Diuiſionis minutia AB, Quotiens diuiſionis numeri A, per numerum B. quod eſt propoſitum.

HINC fit, ſi diuiſo numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid ſuperſit; Quotienti integro inuento addendam adhuc eſſe minutiam cuius numerator ſit numerus ex diuiſione reliquus; denominator vero, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui neceſſario minor eſt numero diuidente, diuidendus adhuc eſt per eundem numerum diuidentem, qui maior eſt. Verbi gratia. Diuiſo numero 23. per 4. Quotiens integer eſt 5. & ſuperſunt 3. adhuc diuidenda per
b 19. huius. 4. b Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens ſit $5\frac{3}{4}$.

XX.

MINVTIAS plures in vnam ſummam colligere.

SINT primum addendæ duæ minutiæ AB, CB, eiuſdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat ſumma D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam DB, eſſe ſummam ex additione minutiarum AB, CB, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habent denominatorem; c erit vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB: Et componendo, vt A, C, ſimul ad C, ita minutiæ AB, CB, ſimul ad minutiam CB. d Vt autem C, ad D, ita quoque eſt minutia CB, ad minutiam DB. Igitur ex æquo erit, vt A, C, ſimul ad D, ita minutiæ AB, CB, ſimul ad minutiam DB. Cum ergo A, & C, ſimul æquales ſint ipſi D, ex conſtructione; erunt quoq; minutiæ AB, CB, ſimul æquales minutiæ DB. quod eſt propoſitum.

c 4. huius.
d 4. huius.

$\frac{A,\ 3.}{B,\ 10.}$ $\frac{C,\ 4.}{B,\ 10.}$ $\frac{D,\ 7.}{B,\ 10.}$

DEINDE ſint addendæ duæ minutiæ AB, CD, diuerſarũ denominationũ. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorẽ poſterioris; & C, numerator poſterioris, in B, denominatorẽ prioris collectaq; ſit ſumma E, ex duob. illis ꝓductis, cui ſupponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorũ B, D, procreatus. Dico minutiã EF, eſſe ſummam ex datis duab. minutiis AB, CD, collectam. e Quoniam enim eſt, vt integrum ad ſummam duarum minutiarum AB, CD, ita F, ex denominatoribus productus ad E, ſummam productorum ex numeratoribus in denominatores viciſſim ductis: erit conuertendo, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad inte-
f 2. huius. grum, ita E, ad F: f Vt autem E, ad F, ita quoque eſt minutia EF, ad idem integrum. Igitur erit, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad integrum, ita minutia EF, ad idem integrum. Quapropter ſumma minutiarum AB, CD, æqualis erit minutiæ EF, ac proinde minutia EF, ſumma erit ex minutiis AB, CD, collecta. quod eſt propoſitum.

e 6. huius.

$\frac{A,\ 2.}{B,\ 3.}$ ✕ $\frac{C,\ 3.}{D,\ 4.}$ $\frac{E,\ 17.}{F,\ 12.}$

VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores, viciſſim & ex multiplicatione denominatorum inter ſe, fiunt duæ minutiæ eiuſdem denominationis, minutiis AB, CD, æquales, vt ex demonſtr. propoſ. 10. conſtat: ſi ſummæ E. productorum ex numeratoribus in denominatores ſupponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia EF, ſumma minutiarum AB, CD, hoc eſt, duarum illarum eiuſdem denominationis, ad quas AB, CD, reductæ ſunt, vt initio huius propoſitionis eſt demonſtratum.

IAM vero datis pluribus minutiis, addendæ primum erunt duæ primæ: deinde hæc ſumma cum tertia coniungenda, atque hæc ſumma cum quarta, & ſic deinceps, donec omnes abſoluantur.

QVOD ſi dentur integra cum minutiis, addenda erunt integra ſeorſum, & minutiæ ſeorſum.

SINT verbi gratia. $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. ſunt 40. & $\frac{3}{4}$. ſunt 45. Ex 40. & 45. fit ſumma 85. hoc eſt, totus numerus integer 60. & inſuper 25. vnitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta eſt ſumma $\frac{17}{12}$. id eſt, ſemel 1. & inſuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam ſumma minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. eſt $\frac{21}{27}$. hoc eſt, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum ſit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipſius 12. at $\frac{4}{9}$. eiuſdem 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc eſt $\frac{7}{9}$. ipſius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia AB, detrahenda ſit minor CB, ſintque primum hæ minutiæ eiuſdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus ſit numerus D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam DB, reliquam eſſe poſt detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, ſubtractus relinquit D, componetur A, ex C, & D, Minutia ergo AB, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus eſt, ſumma eſt, duarum minutiarum CB, DB, vt in prima parte antecedentis propoſit. oſtenſum eſt. Quare detracta minutia CB, ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB. quod eſt propoſitum.

$\frac{A,\ 7.}{B,\ 10.}$ $\frac{C,\ 3.}{B,\ 10.}$ $\frac{D,\ 4.}{B,\ 10.}$

DEINDE minutiæ AB, CD, habeant diuerſos denominatores, detrahendaque ſit minor CD, ex maiore AB. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris fiat F, & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat G, cui ſupponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam GH, eſſe reliquã poſt detractio-
g 17. ſept. nem minutiæ CD, ex minutia AB. Quoniam enim D, multiplicans A, B. facit FH, g erit vt A, ad B, ita F, ad H: h vt autem
h 2. huius. A, ad B, ita eſt minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque vt F, ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rurſus quia B, multi-
i 17. ſepti. plicans C, D, facit E, H, i erit vt C, ad D, ita E, ad H: k Vt autem C, ad D, ita eſt minutia CD, ad integrum. Igitur erit
k 2. huius. quoque

F, 15. E, 8.

$\frac{A,\ 3.}{B,\ 4.}$ ✕ $\frac{C,\ 2.}{D,\ 5.}$ $\frac{G,\ 7.}{H,\ 20.}$

quoq; vt E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur eſt vt E, primus ad H, ſecundum, ita minutia CD, tertius numerus ad integrum, quartum numerum: [a] Et vt G, quintus ad eundem ſecundum H, ita minutia GH, ſextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. ſcholij propoſ. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus ſimul, ad H, ſecundum, ita minutiæ CD, GH, tertius & ſextus numerus ſimul, ad integrum. Vt autem E, G, ſimul, ad H; ita eſt F, ipſis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutiæ CD, GH, ſimul ad integrum. Cum ergo oſtenſum ſit, vt eſt F, ad H, ita eſſe minutiam AB, ad integrum; erit quoq; vt minutia AB, ad integrum, ita minutiæ CD, GH, ſimul ad idem integrum: ac propterea æquales erunt minutia AB, & minutiæ CD, GH, ſimul. Detracta igitur minutia CD, ex minutia AB, reliqua erit minutia GH. quod eſt propoſitum. a 2. huius.

VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim, & ex ductu denominatorum inter ſe, gignuntur duæ minutiæ eiuſdem denominationis minutiis datis æquales, vt ex demonſtratione propoſ. 10. conſtat; ſi E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, ſupponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia GH, reliqua poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia AB, veluti initio huius propoſ. oſtenſum eſt.

IAM vero ſi dentur integra vna cum minutiis, ſubtrahenda erunt integra ſeorſum ab integris, & minutia à minutia. Quod ſi minutia detrahenda, maior ſit quam ea à qua fieri debet ſubtractio, [b] reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit ſubtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt ſi ſubtrahenda ſint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. ſubtractis 6. ex 10. ſuperſunt 4. & ſubductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. ſupereſt minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At ſi ſubtrahendæ ſint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebuntq; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. ſuperſunt 15. & ſubducta minutia $\frac{6}{7}$. ex munutia $\frac{7}{4}$. reliqua eſt minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$. b 11. huius.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur ſi $\frac{2}{5}$. id eſt, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc eſt, ex 30. ſuperſunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt ſuperior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia AB, per minutiam CD, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum AC, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam EF, gigni ex multiplicatione minutiarum AB, CD, inter ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, [c] Eritque vt minutia EF, ad minutiam CD, ita G, ad H. Quia vero C, multiplicãs A, F. facit E, H; [d] erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutãdo, vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicãs E, & B, facit G, & F; [e] erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E, F, ad minutiam CD: [f] Et vt A, ad B, ita eſt minutia AB, ad integrum, hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia EF, ad minutiam CD, ita minutia AB, ad 1. Quapropter ex Multiplicationis, minutia EF, defin. producitur ex multiplicatione minutiæ AB, in minutiam CD. Quod eſt propoſitum.

c 5. huius.
d 17. ſepti.
e 17. ſepti.
f 2. huius.

	H, 60.		G, 40.		
A,	$\frac{2.}{3.}$	C,	$\frac{4.}{5.}$	E,	$\frac{8.}{15.}$
B,		D,		F,	

A,	G.
E,	F.
B,	H.

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eiuſdem minutiæ propoſitæ denominator; propterea quod vnitas integro numero ſuppoſita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

SI vero integris minutiæ adhæreant, [g] reuocanda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, atq; ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator conſtitui. Vt ſi multiplicanda ſint $7\frac{2}{3}$, per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$. g 11. huius.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero aſſumpto conferenda, vt in additione, ac ſubtractione factum eſt, ſed cum quadrato numeri integri aſſumpti: quia cum comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc eſt, cum eius quadrato. Itaq; ſint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Neceſſe eſt ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiuſdem faciant numerum, qui conſtituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in ſe producitur: Id quod liquido conſtat. Nam $\frac{2}{3}$. num. 60. ſunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem ſunt 48. At ex 40. in 48. fit num. 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. num. 3600. hoc eſt quadrati ipſius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia AB, per minutiam CD, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita vt diuiſo A, per C, Quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam EF. eſſe Quotientem diuiſionis minutiæ AB, per minutiam CD. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [h] gignetur A, ex C in E, & B, ex D, in F. [i] Igitur minutia AB, producta eſt ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam C D; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad 1. Quocirca cum ſit, vt AB, minutia diuiſa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex def. Diuiſionis minutia EF, Quotiens diuiſionis minutiæ AB, per minutiam CD. quod eſt propoſitum.

h 9. pron.
i 22. huius.

A,	12.	C,	3.	E,	4.
B,	16.	D,	8.	F,	2.
A,	6.	C,	3.	E,	2.
B,	8.	D,	8.	F,	1.
A,	3.	C,	3.	E,	1.
B,	8.	D,	4.	F,	2.

k 15. huius. DEINDE numeri C,D, minutiæ CD, non metiantur numeros A,B, minutiæ AB. [k] Reducatur minutia AF, ad aliam æqualem EF, cuius numeros EF, numeri C,D, minutiæ CD, metiantur per numeros G,H, ex A, in D, & ex C, in B, produ-

E,	24.	A,	2.	K,	12.	C,	3.	G,	8.
F,	36.	B,	3.			D,	4.	H,	9.

E,	90.	A,	6.	K,	15.	C,	3.	G,	30.
F,	135.	B,	9.			D,	5.	H,	27.

ctos: quod quidem fiet, ſi K, ex C, in D, procreatus ducatur in A,B, vt gignantur E,F, veluti propoſ. 15. oſtenſum eſt. Quoniam igitur C,D, metiuntur E, F, per G,H, erit minutia G,H, Quotiens diuiſionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propoſ. demonſtratum eſt. quod eſt propoſitum.

QVIA vero G,H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum eſt, ſatis eſt ad diuiſionem cuiuſuis minutiæ per quamlibet minutiam, ſi numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & poſterior H, denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atq; hoc verum eſt in omnibus minutiis, ſiue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, ſiue non. Nam ſemper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda ſecun-

E,	48.	A,	8.	K,	6.	C,	2.	G,	4.	L,	24.
F,	54.	B,	9.			D,	3.	H,	3.	M,	18.

dum doctrinam propoſ. 15. reuocatur, vt ex eius propoſ. demonſtratione liquet, atque in hoc appoſito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A,B, metiuntur per G,H, & numeros E, F, procreatos ex A,B, in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiuntur per L, M: atque adeo tam minutia G H, quam L M, Quotiens eſt minutiæ A B, per minutiam C, D, diuiſæ.

IAM vero ſi numerus integer diuidendus ſit per minutiam vel per numerum integrum minutia diuidenda, ſupponenda eſt ei vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1. Vt ſi numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appoſito priori exemplo perſpicuum eſt. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda ſit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in poſteriori exemplo apparet.

$\frac{8}{1.}$	$\frac{1}{2.}$	$\frac{16}{1.}$
$\frac{1}{2.}$	$\frac{8}{1.}$	$\frac{1}{16.}$

QVOD ſi minutiæ adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propoſ. diximus.

VERVM quia non facile eſt memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; ſatius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter ſe permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vſurpare. Vt ſi diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde quotiens erit $\frac{21}{8}$. Vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ ſemper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, vt fiat numerator, &c.

$\frac{3}{4.}$	$\frac{7}{2.}$	$\frac{21}{8.}$

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda ſit per eiuſdem $\frac{2}{7}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpicuum autem eſt, diuiſis 525. per 200. Quotientem eſſe $2\frac{5}{8}$ id eſt, minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proxime inuenta eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. octies ſumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus ſupra fuit, ex diuiſione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINVTIAM in minutiam inſerere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inſerenda, ſitque primum ſenſus, addendam eſſe minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiam CD: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{3}{4}$. vnius ſeptimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & compoſito numero G, ſupponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo ſenſu, quem diximus, hoc eſt, minutiam GH, æqualem eſſe minutia A B, reſpectu vnius particulæ minutiæ

		F,	24.		
A,	3.	C,	6.	G,	27.
B,	4.	D,	7.	H,	28.

l 14. huius. CD, additæ ad minutiam CD. Quoniam enim AB, minutia vnius particulæ minutiæ CD, [l] reducitur ad ſimplicem minutiam AH, cuius numerator idem eſt, qui A, productus nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appoſito hoc exemplo apparet. Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis eſt, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C, D, faciat F, H; [m] erit vt C, ad D, ita F, ad H; [n] ac propterea minutiæ CD. FH, æquales erunt) efficitur, minutiam GH, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum FH, AH, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,)

A,	3.		1.	A,	3.
B,	4.	D,	7.	H,	28.

m 17. ſepti.
n 8. huius.

ex A.) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum FH, AH; efficiatur, inquam, minutiam GH, ſummã eſſe minutiarum FH, AH, vt initio propoſ. 20. oſtenſum eſt; hoc eſt ſummam ex minutia AB, reſpectu vnius particulæ minutiæ CD, quæ minutiæ AH, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia CD, quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ FH, collectam. Minutia igitur GH, procreatur ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD; id eſt, æqualis eſt minutiæ AB, vnius particulæ minutiæ CD, & minutiæ CD, ſimul. Quod eſt propoſitum.

IAM vero ſi plures minutiæ AB, CD, EF, GH, ſint inſerendæ, hoc eſt, ſi minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH: & minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH: & minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, addi debeant ad minutiam GH, ita agendum erit: Ex G, numeratore poſtremæ minutiæ GH, in F, denominatorem penultimæ minutiæ EF, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiuſdem penultimæ minutiæ EF, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorẽ antepenultimæ minutiæ CD, addatur C, numerator eiuſdẽ minutiæ CD, vt fiat M, producto quoq; ex M, in B, denominatorem proxime antecedentis minutiæ AB, adijciatur A numerator eiuſdem minutiæ AB, vt fiat P: Atq; ita deinceps ducatur ſemper vltimus numerus cõflatus in denominatorem proxime antecedentis minutiæ; productoque numerator eiuſdem proxime antecedentis minutiæ adijciatur, donec nulla minutia ſuperſit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex denominatoribus inter ſe multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, poſt hæc N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam PQ, ex inſitione datarum minutiarum produci in eo ſenſu, quem expoſuimus. Nam vt in duabus minutijs oſtenſum eſt, minutia KL, producitur ex inſitione minutiæ EF, in minutiã GH, hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia GH, collectæ. Deinde minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH,[d] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis poſitam hoc modo, 3.1.1.) & denominator N, ex D, in L, hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, E, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L productus,[e] æqualis eſt minutiæ KL;[f] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propoſ. 20. demonſtrauimus, minutia MN, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutia MN, ſummæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, atque ex minutia CD, vnius, particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH. Rurſus minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH,[g] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id eſt, ex multiplicatione denominatorũ H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus[h] æqualis eſt minutiæ MN,[i] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur PQ, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propoſ. 20. monſtratum eſt; æqualis quoq; erit eadem minutia PQ, ſummæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutic EF, vnius particulæ minutiæ GH, quod eſt propoſitum. Eademque ratio eſt de pluribus.

P, 119. M, 59. K, 14.

A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4 F, 3. H, 5

Q. 120. N, 60. L, 15.

d 14. huius
e 8. huius.
f 17. ſepti.
g 14. hui.
h 8. huius.
i 17. ſepti.

SIT deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam GH, produci ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, ſenſu; hoc eſt, minutiam GH, æqualem eſſe ſummæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD,[k] reducitur ab minutiam ſimplicem EH, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat:[l] Minutia quoque FH, æqualis eſt minutiæ CD;[m] quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia GH, (quæ ex iis, quæ ad initium propoſ. 20. oſtendimus, æqualis eſt ſummæ minutiarum EH, FH,) æqualis ſummæ collectæ ex minutia CD; (hoc eſt, ex minutia FH,) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id eſt, ex minutia EH,) atque ideo minutia GH, procreatur ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in hoc poſteriori ſenſu. Quod eſt propoſitum.

E, 18. F, 24.

A, 3. C, 6. G, 42.
B, 4. D, 7. H, 28.

k 14. hui.
l 8. huius.
m 17. ſept.

A, 3. C, 6. E, 18.
B, 4. D, 7. H, 28.

QVOD ſi plures ſint minutiæ inſerendæ AB, CD, EF, GH, hoc eſt, minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia EF, minutiæ GH, addendæ ſint ad minutiã GH, ita agendũ erit. Ducatur G, in F, productoq; numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroq; producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoq; numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adijciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla ſuperſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex omnib. denominatorib. productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiã PQ, produci ex inſitione dictarũ minutiarũ, ſi inſitio intelligatur, vt dictũ eſt. Nã, vt in duabus minutijs demonſtratũ eſt, minutia KL, producitur ex inſitione minutiarum EF, GH, id eſt, æqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia EF, totius minutiæ GH, &

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q. 120. N, 60. L, 15.

m 14. hui. ex minutia, GH. Deinde minutia CD, totius minutiæ EF, totius minutiæ GH, [m] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus;

n 8. huius. o 17. ſept.

P, 232.	M, 104.	K, 20.	
A, 1. / B, 2.	C, 3. / D, 4	E, 2. / F, 3.	G, 4. / H, 5.
Q. 130.	N, 60.		L, 15.

[n] æqualis eſt minutiæ KL; [o] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandẽ quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia MN, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G gignunt, & ex numero, quẽ D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator vero eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, ſummæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH, & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH. Rurſus minutia AB, minutiæ CD,
p 14. huius minutiæ EF, minutiæ GH, [p] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, produci-
q 8. huius. r 17. ſepti. tur, denominator autem eſt idem Q, ex B, in N, procreatus; [q] æqualis eſt minutiæ MN; [r] quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis ſit, ex iis, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoq; erit ſummæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH, & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH, & ex minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH. Quod eſt propoſitum. Eademque de pluribus eſt ratio.

DE PROPORTIONVM compoſitione.

EXPEDITIS ijs, quæ ad fractorum numerorum demonſtrationes pertinent, reliquum eſt, vt compoſitionem proportionum explicemus: Id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propoſ. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionem illam proportionũ, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in ijs propoſitionib. vbi duplicatam, triplicatã aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe vero additionem proportionum ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicataue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus compoſita ſit vere totum quippiam, cuius partes ſint proportiones ex quibus componi dicitur, vt plerunq; interpretes Euclid. exiſtimant, ex hoc perſpicue confirmari poteſt; quod pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cum hæc compoſitio intelligenda ſit, ſiue maior quantitas cum minore, ſiue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. oſtendimus, ſi poſitis his tribus terminis continue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolum duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Euclid. interpretes putant, quis non videt partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorem eſſe proportione 1. ad 100. Hic autem 4. 4. 4, partem æqualem eſſe toti? Sic etiam, ſi, poſitis his tribus terminis non continue proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. vere coaceruaretur ex proportionib. 4. ad 2. & 2. ad 8. tamquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior quam totum, quod proportio dupla 4, ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris vero 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonſtrat, proportionem 24. ad 48. compoſitam eſſe ex proportionibus laterum, hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (ſi hæc compoſitio eſt vera additio) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione. ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. vere totum eſt, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harum ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quã ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quod ſi poſterioris numeri plani 48. latera ſumãtur 12. & 4. erit vna partiũ componentiũ nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior eſt quã totũ, hoc eſt, quã proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totum non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis n. his quatuor terminis 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis continentur adhuc alij tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eædem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem noncuplam, vt prædicti auctores volunt, quamquam noncupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9. Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5, moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autem ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem com-

24.	48.
12.2.	3.16.

24.	48.
12.2.	12.4.

nem compoſita eſſe dicatur, ex defin.5.lib.6. vt patet in his numeris, 15.5.1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis, ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non poſſet habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat: agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quam agens vt 6.

LIQVET *ergo huiuſmodi compoſitionem proportionum non eſſe additionem, ſed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin.5.lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus compoſita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defi.10.lib.5. explicauimus, cur poſitis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continue proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.*

ITAQVE *omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio fieri debent per proportionum denominatores, vt recte docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poßit vnitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab vnitate denominata) quarum quælibet æqualis eſt fractioni, quam conſtituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedente fiat numerator, & ex conſequente denominator: manifeſto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, ſiue per proportionum denominatores, ſiue per numeros earundem proportionum quoſcunque, poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarum, inſtituantur, vt egregie Cardanus præcepit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.*

PRIMVM *enim ſint in vnam ſummam colligendæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores ſunt 3. & 5. ex quorum additione fit ſumma 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis, quæ ſumma etiam colligitur, ſiue denominatores, ſuppoſita prius vnitate cuilibet illorum, inſtar minutiarum addantur, ſiue numeri 12.4. & 40.8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent fracti numeri, poſitis terminis conſequentibus ſub antecedentibus, in vnam ſummam*

$\frac{3}{1} \times \frac{5}{1}$	$\frac{12}{4} \times \frac{40}{8}$	$\frac{18}{7} \times \frac{3}{2}$	$\frac{54}{21} \times \frac{6}{4}$
$\frac{8}{1}$	$\frac{256}{32}$	$\frac{57}{14}$	$\frac{342}{84}$

colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. poſteriori autem 256. ad 32. quarum vtraq; octupla eſt. Sic etiam ex proportione dupla ſuperquadrupartiente ſeptimas, & ſeſquialtera, quarum denominatores ſunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54.21. & 6.4. reperiuntur, fit proportio quadrupla ſeſquidecima quarta, qualem habent tam numeri 57.14. quam 342.84. Sed quando per denominatores inſtituitur operatio, reuocandi prius ſunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum eſt. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligendum eſt.

DEINDE *ſi ex proportione octupla ſubtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla ſeſquidecimaquarta deducatur proportio ſeſquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla ſuperquadrupartiens ſeptimas, vt hic perſpicuum eſt,*

$\frac{8}{1} \times \frac{3}{1}$	$\frac{256}{32} \times \frac{12}{4}$	$\frac{57}{14} \times \frac{3}{2}$	$\frac{342}{84} \times \frac{6}{4}$
$\frac{5}{1.}$	$\frac{640}{128.}$	$\frac{72}{28}$	$\frac{864}{336.}$

TERTIO *ſi multiplicanda ſit proportio tripla per 2. vel quod idem eſt per proportionem duplam: Item proportio ſeſquialtera per ſupertripartientem quintas; inſtituenda erit operatio, vt hic vides, produceturq; ibi proportio ſextupla, hic autem dupla ſuperbipartiens quintas.*

3—2 6	12—10 120	3—8 24	9—16 144
1—1 1	4—5. 20.	2—5. 10	6—10 60

QVARTO *& vltimo ſi proportio ſextupla diuidenda proponatur per proportionem triplam: Item proportio dupla ſuperbipartiens quintas per proportionem ſeſquialteram: ſi diuiſoris termini permutentur, vt in diuiſione minutiarum docuimus, ita inſtituetur operatio.*

6—1 6	120—4 480	24—2 48	144—6 864
1—3. 3.	20—12. 240.	10.—3. 30.	16—9. 540.

VIDES *ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re diſcrepare, niſi quod in proportionibus neceſſe non eſt interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutiis:*

IAM *vero multiplicationem proportionũ à nobis præſcriptam, quã auctores additionem falſo nuncupant, cũ proportionũ compoſitione, de qua Eulides defin.10.lib.5. & defin.5.lib. 6. egit, cõuenire, atq; adeo compoſitionẽ illã Euclidis vere eſſe multipicationem, non autem additionem, vt diximus hoc modo demonſtrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, ſiue æquales, ſiue inæquales; ducaturq; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex conſequente vero B, in conſequẽtem D, fiat F.*

Dico

Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, eſſe compoſitam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt ſi proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult

A,	6.	C,	12.	B,	2.	D,	4.		A,	3.	C,	6.	B,	2.	D,	5.
E,	72.	F,	8.	G,	24.				E,	18.	F,	10.	G,	12.		

defin. 10. lib. 5. ſi autem fuerint inæquales, dicatur ex illis compoſita, ex ſententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia a 18. ſepti. *ex A, B, in C, fiunt E, & G,* [a] *erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rurſus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F,* [b] *erit vt C, ad D, ita G, ad F.* b 17. ſepti. *Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eædem ſint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonſtratione, quam ad defin. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compoſitio proportionum ab Euclide deſcripta reſpondeat multiplicationi denominatorum inter ſe, vt ibi demonſtrauimus, noſtra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido conſtat compoſitionem illam proportionum eſſe multiplicationem, quam tradidimus.*

EADEM *ratione oſtendemus, ſubtractionem proportionum, quam iidem auctores docent, non eſſe aliud, quam diuiſionem à nobis explicatam, eſſeque compoſitioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipſi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F, quod idem eſt, ac ſi termini preportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuiſione proportionis A, ad B, per proportionem C,*

A,	9.	C,	3.	B,	1.	D,	1.		A,	4.	C,	6.	B,	2.	D,	3.
E,	9.	F,	3.	G,	27.				E,	8.	F,	12.	G,	24.		

ad D, producitur, vt docuimus, eſſe eam, quæ relinquitur, ſublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, [c] *erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rurſus quia ex A, in C, D, fiunt G, E;* [d] *erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo* c 1. ſeptim. *proportio G, ad F, compoſita ſit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoq; proportio A, ad B, (quæ eadem* d 17. ſepti. *eſt, quæ G, ad F,) compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E, hoc eſt, C, ad D, & E, ad F; ac proinde ſubducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum ſi ex proportione G, ad F, (poſito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua eſt proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius eſſe diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in poſteriori exemplo accidit? Atque hæc de proportionum compoſitione: qui plura deſiderat, legat eruditiſſimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conſcriptum.*

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

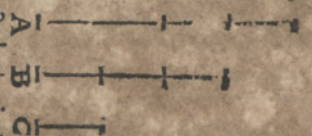
DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantum ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad diſputationem linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium, quarum cauſa numerorum tractationem ab eo ſuſceptam eſſe ſuperius diximus. Nam ſine cognitione harum linearum complures magnitudines cum ſolidæ, tum planæ, neq; perfecte intelligi poſſunt, neq; cum res tulerit, in opus atque vſum conferri; propterea quod plerunque latera earum incommenſurabilia ſunt: Id quod & de planis ipſis atque ſolidis dici poteſt, quippe cum & hæc incommenſurabilia ſæpenumero exiſtant, vt ad finem huius libri demonſtrabimus. Quoniam vero hic liber multis obſtructus eſt difficultatibus, ob linearum, de quibus differit, obſcuritatem, omnes neruos induſtriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide ſunt demonſtrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt ſine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonſtrationes recte intellexerit, poßit percipi. Neq; enim in eorum poſſum ſententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam eſſe neceſſariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quam irrationalibus, vt vocant, ſermonem inſtituit: Immo contra perſuaſum mihi prorſus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abeſt, vt exiſtimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino ſit ignarus, propterea quod ille demonſtrationes ad vſum poteſt reuocare, hic vero nullo modo. Hac enim de cauſa & nos priora decem theoremata ſecundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo ſtudioſus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonſtrantur, facilius arbitraremur intelligi poſſe ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vſurpaſti, vt ea res & maiori voluptati eſſet, & commodo legentibus? In promptu cauſa eſt, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci ſint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars ſit cognita, videbantur numeri illi, ſi adhiberentur, tenebras potius offuſuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perſpicuitatis; quippe ita ingenia ſtudioſorum pro adiumento, ac luce, quam his noſtris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minuſq; demonſtrationes ipſas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ ſolæ neceſſariæ ibi fuerunt, nemo fere ſit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demonſtrationes huius lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſe ipſos, quando volunt, præſertim cum iam hoc ipſum non multo ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inſcripſit, diligenter effectum ſit, & accurate.

ITAQVE, vt ad inſtitututum redeamus, inchoans rem ipſam Euclides, more ſuo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit: declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commenſurabiles, definiens eas eſſe, quas eadem menſura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem menſura C, metitur, (metitur enim C, ipſam A, quater repetita, & ter ſumpta ipſam B,) dicuntur commenſurabiles: Eodem modo commenſurabiles ſunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas linea tam vnius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commenſurabiles dicuntur ſuperficies, quas vna, & eadem ſuperficies metitur; Item corpora, ſolidaue commenſurabilia, quæ metitur idem corpus ſeu ſolidum.



II.

Incommenſurabiles autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

TALES magnitudines ſunt, diameter quadrati cuiuſuis, & latus eiuſdem; quoniam nullam habent menſuram communem, vt propoſitione vltima huius lib. demonſtrabitur, ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommenſurabiles, quibus ſcilicet menſura aliqua communis dari nullo modo poteſt, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quanam ratione inueniri poßint. Rurſus, ſuperficies dicentur incommenſurabiles, & ſolida incommenſuralilia, quæ nullam admittunt menſuram communem.

III. RECTA

III.

RECTÆ lineæ potentia commenſurabiles ſunt, cum quadrata earum idem ſpatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commenſurabiles ſunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam menſura communis, metitur; cuiuſmodi ſunt illæ, quas; in expoſitione defin. 1. commenſurabiles ſimpliciter diximus: quædam vero longitudine incommenſurabiles, quas ſcilicet nulla linea, tanquam menſura communis, metitur. Rurſus linearum, quæ ſunt incommenſurabiles longitudine, aliæ ſunt eiuſmodi, vt earum quadrata ſint commenſurabilia; aliæ vero ita ſe habent, vt & quadrata earum incommenſurabilia ſint. Lineæ ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata ſunt commenſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earum potentias, hoc eſt, ſecundum earum quadrata (eſt enim, vt ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiuſq; lineæ quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſæ ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.

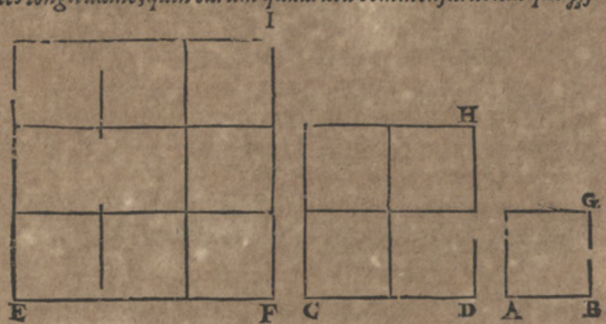
QVOD ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſum lineas potentia commenſurabiles, non autem commenſurabiles longitudine, reſpondendum eſt, lineas longitudine commenſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitione commenſurabilium magnitudinum, cum huiuſmodi lineas vna communis menſura metiatur, vt dictum eſt: At vero quoniam lineas potentia commenſurabiles nulla communis menſura metiri poteſt, ſed tantummodo earum quadrata idem ſpatium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, vt eæ propria definitione explicarentur.

IV.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommenſurabiles, quarum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commenſurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quaſi conuenientiam inter ſe, & connexionem, vt lineæ longitudine commenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles potentia, ita vt nullæ lineæ dari poſsint commenſurabiles longitudine, quin earum quadrata commenſurabilia quoq; ſint, quoniam quadratum ex communi earum menſura deſcriptum metitur tanquã menſura communis earum quadrata, vt in ſubiecta figura apparet: ſicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoque quadratum AG, quadrata CH, EI metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles longitudine; multæ enim lineæ ſunt potentia commenſurabiles, hoc eſt, quadrata habent commẽſurabilia, quæ tamẽ longitudine omnino incommenſurabiles ſunt, vt in hoc libro demonſtrabitur, Rurſus inter lineas incommenſurabiles tam longitudine quam potentia, huiuſmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommenſurabiles: ſint etiam incommenſurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoq; incommenſurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommenſurabiles, cum tamen potentia, hoc eſt, ſecundum earum quadrata, commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex coroll. propoſ. 9. huius libri.



V.

HIS poſitis, oſtenditur, cuicunque rectæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea notæ magnitudinis, erunt omnium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum. Item quædam illi incommenſurabiles longitudine tantum, quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonſtrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quamquam eius verba hoc ſonare videantur) hæc ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdam dici poſſe propoſitæ rectæ lineæ commenſurabiles longitudine, & potentia, quaſdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo ſequitur, ſed demonſtrabitur in ſequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa propoſita, ratione cuius aliæ commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur ſemper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non ſemper notæ ſunt, quamuis ſingulæ ſeorſum ſumptæ exiſtant certæ quoque, ac notæ; cum quælibet in quotcunq; partes æquales poſsit diuidi.

VI.

ET huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commenſurabiles quomodocunque, appellari quoq; Rationales, non quidem ex poſitione, vt illa, ſed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE

ITAQVE ex ſententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem eſt, linea recta, cuius quadratum eſt 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia ſit commenſurabilis lineæ Rationali, (eſt enim tam numerus 20, quam 1000. commenſurabilis numero cuilibet quadrato. vt 16. 100. &c.) quamuis longitudine ſit eidem incommenſurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam irrationalem vocant, quod numero non poßit exprimi.

VII.

HVIC vero incommenſurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum ſunt commenſurabiles propoſitæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido conſtat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propoſitæ rectæ Rationali incommenſurabiles ſunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifeſtum eſt, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. ſeu (quod idem eſt) lineam, cuius quadratum eſt 20. vel 1000 &c. non poſſe appellari Irrationalem, cum non ſit longitudine & potentia, ſed longitudine tantum Rationali lineæ propoſitæ incommenſurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod à propoſita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea deſcriptum, Rationale vocatur, quia & ipſum certum eſt, ac notum, comparationeque illius aliæ ſuperficies, commenſurabiles, incommenſurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commenſurabilia quidem Rationalia.

OMNES planæ ſuperficies quadrato Rationalis lineæ propoſitæ commenſurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex [illegible]tione, vt illud. ſed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commenſurabiles, vel incommenſurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunque commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potentia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3, defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies planæ quadrato à Rationali linea deſcripto incommenſurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatijs incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita vt ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidem quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia; ſi vero non fuerint quadrata, ſed alia quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatijs incommenſurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſupra ex 6. defin. colligimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabiturque in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin, lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantum: *apponere fere ſemper vocibus iſtis:* commenſurabiles ac incommenſurabiles: *Vix aute, & rariſsime his:* Rationales & Irrationales: *Recte enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine, & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occaſionem multis præbuit, vt varie & obſcure in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque ſint locuti,*

CÆTERVM his definitionibus adiungemus poſtulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vſus in hoc libro reperitur,

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inæqualibus, cum maior infinita non ſit, minor vero infinite poßit augeri, perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem. Conſtat hoc etiam ex ijs, quæ

 in defin.

in defin.5. lib. 5. ſcripſimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum cenſeri eiuſdem generis,cum alterutra ita poteſt multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuerſi eſſe generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONVNCIATA.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HÆC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis lib.7. Quare cum ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quod fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quod ad verbum huc poſſint transferri, mutata ſolum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

CÆTERVM quia hoc in libro diſcedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani negleximus, vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine è regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autem Campani ſeriem demonſtraret. Quod ſi vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet,

j. THEOR. 1. PROPOS. 1.

DVABVS magnitudinibus æqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITÆ ſint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, ſit maior. Dico ſi ex AB, auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit quàm C.



Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior ſit quam AB, ita vt DE, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quam AB. Diuiſa autem D E, in partes D F, FG, G E, ipſi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidium HI; atque hoc ſemper fiat, donec partes ipſius A B, multitudine æquales ſint partibus ipſius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot ſunt ipſę DF, FG, GE. Quia igitur D E, maior eſt quã AB; At ex DE, ablatũ eſt DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium, ſi DE, ipſius C, ſit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium A H: Erit reliquum FE, reliquo H B, maius. (Cum enim DE, maior ſit quam AB; ſi ex D E, dimidium auferetur, nec non & ex A B, dimidium, eſſet quoque reliquum ex D E, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidinm, vel certe dimidium, & ex AB, maius quàm dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rurſus quoniam FE, maior eſt quam H B, auferturq; ex FE, dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, ſi FE, maior ſit quam duplex ipſius C; at ex HB, maius quam dimidium H I, erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo oſtendemus tandem poſtremam partem ipſius DE, qualis hic eſt GE, maiorem eſſe poſtrema parte ipſius AB, qualis hic eſt IB. Cum ergo GE, poſtrema pars ipſius DE, æqualis ſit ipſi C; erit quoque C, maior quam I B, poſtrema pars ipſius A B. Relicta igitur eſt I B, magnitudo, quæ minor eſt magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonſtrandum.



IDEM demonſtrabitur, ſi ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rurſus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cum ex maiori DE, ablatum ſit DF, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium A H, &c.

ALITER. Facta conſtructione vt prius, ſumatur KL, ita multiplex ipſius IB, vt eſt multiplex DE, ipſius C. Diuiſa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipſi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in D E. Quoniam vero AH, maior eſt quam HB, vel certe illi æqualis, ſi ablatum ſit dimidium ex AB, & H B, maior eſt quam I B; erit quoque AH, maior quam I B, hoc eſt, quam KM. Rurſus quia HI, maior eſt quam IB, vel certe illi æqualis; eſt autem IB, ipſi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quam M N, vel illi æqualis; atque adeo tota A I, maior quam

quam tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota KL: Eſt autem DE, maior adhuc, quam AB. Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cum ſit vt DE, ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipſius IB, tam multiplex, quam multiplex eſt DE, ipſius C,) [a] erit quoque C, maior quam IB. Ac proinde relicta eſt IB, minor quam C. Quod erat demonſtrandum.



a 14. quin.

S C H O L I V M.

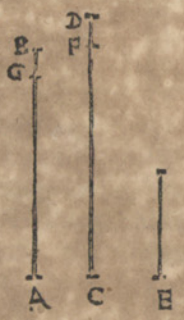
LVCE clarius ex demonſtratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propoſitas debere eſſe tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem poſſit ſuperare. Id quod ad propoſ. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

ij.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propoſitis AB, CD, quarũ minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB, & ſic deinceps, alterna quadam detractione auferatur ſemper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommenſurabiles eſſe. Si enim non ſunt incommenſurabiles, metietur eas aliqua menſura communis. Metiatur eas, ſi fieri poteſt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipſi AB, vel minor. Detracta autem AB, ex CD, quoties poteſt, relinquat FD, ſe minorem, ita vt AB, ipſam CF, metiatur. Rurſus detracta FD, ex AB, relinquat ſe minorem GB, ita vt FD, metiatur ipſam AG; atque hoc ſemper fiat. [a] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, ſe minorem, erit CF, ablata maior, quam dimidia ipſius CD; aliâs ſi eſſet dimidia, vel minor quam dimidia, poſſet adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipſius AB; Et ſic deinceps ſemper fiet. Quare cum ſemper auferatnr maius, quam dimidium, [b] relinquetur tandem magnitudo quædam minor quam E.) Sit ergo iam relicta GB, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur AB, & AB, metitur CF; [c] metietur quoque E, ipſam CF: Metitur autem E, & totam CD. [d] Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG; [e] quare & E, ipſam AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB. [f] ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.



a 1. deci.
b 1. deci.
c 2. pron.
d 3. pron.
e 2. pron.
f 3. pron.

S C H O L I V M.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.



SINT incommenſurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturque minor AB, ex CD, & reliqua ſit ED, Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt, metiatur FB, præcedentem ED. Quoniam igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [g] metietur quoque FB, ipſam AF; Metitur autem & ſeipſam. [h] Igitur FB, & totam AB, metietur. Metitur autem AB, ipſam CE. [i] Igitur & FB, ipſam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipſam ED; [k] Igitur & FB, totam CD, metietur. Oſtenſa eſt autẽ & FB, ipſam AB, metiri. Quare FB, vtramque AB, ED, metitur, quod eſt abſurdum, ponuntur enim AB, CD, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.

g 2. pron.
h 1. pron.
i 2. pron.
k 1. pron.

SIMILITER & hoc demonſtrabimus.

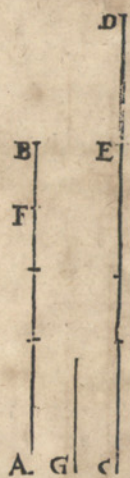
SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incommenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim commenſurabiles.

ITAQVE facile ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nam detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commenſurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitam, vt conſtat ex demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur præcedentem ED, oſtenſum eſt, eandem reliquam FB, metiri vtramque magnitudinem AB, CD. Si vero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

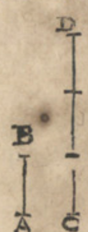


DATÆ duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam AB, CD, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties poteſt, relinquat ED; & ED, detracta ex AB, quoties poteſt, relinquat FB, & hoc ſemper fiat alterna quadam detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iam FB, reliqua præcedentem ED. Dico FB, eſſe maximam menſuram communem magnitudinum AB, CD. Quod enim vtramque metiatur, ita oſtendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [a] metietur quoque FB, ipſam AF: At metitur FB, & ſeipſam. [b] Igitur EB, totam AB, metietur; [c] atque adeo & ipſam CE, quam AB, metitur. Cum ergo & ipſam ED, metiatur; [d] metietur quoque FB, totam CD, metitur ergo FB, vtramque AB, CD. Quare vtriuſque AB, CD, communis menſura eſt FB.

a 2.pron.
b 1.pron.
c 2.pron.
d 1.pron.

QVOD autem FB, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earũ menſura maior, quã FB. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem & AB, ipſam CE, [e] metietur quoque G, ipſam CE: At metitur que totam CD, [f] Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED, ipſam AF. [g] Ergo & G, ipſam AF, metietur. Quare cum G, totam etiam AB, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam FB, maior minorem. [h] Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quam FB, communis menſura eſt ipſarum AB, CD. Quare FB, maxima earum communis menſura eſt.

e 2.pron.
f 3.pron.
g 2.pron.
h 3.pron.



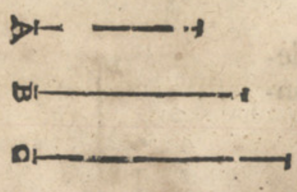
QVOD ſi minor magnitudo AB, metiatur maiorem CD, ita vt detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipſa AB, ambarum maxima menſura communis; cum & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

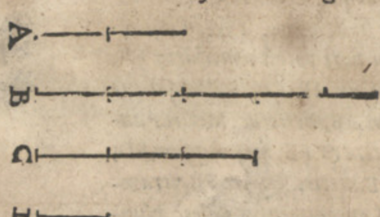
EX hoc manifeſtum eſt, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt FB, eſſe maximam menſuram communem ipſarum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoque maximam menſuram FB. Eademque eſt ratio de cæteris.

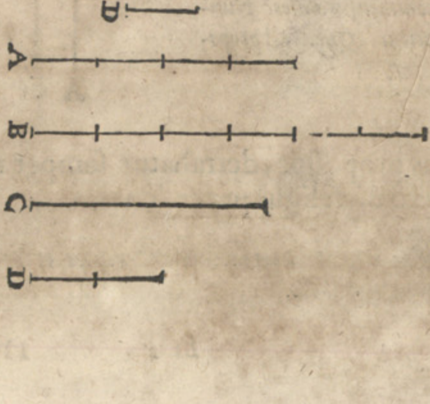
SCHOLIVM.



EX his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propoſ. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuum eſt, omnes tres A, B, C, eſſe incommenſurabiles, quod nullam habere poſſint communem menſuram, propter incommenſurabiles magnitudines A, & B.



SI vero A, & B, fuerint commenſurabiles, ſi earum maxima communis menſura inuenta D; quæ ſi metiatur quoque magnitudinem C, manifeſtum eſt, tres magnitudines A, B, C, commenſurabiles eſſe, cum habeant communem menſuram D.

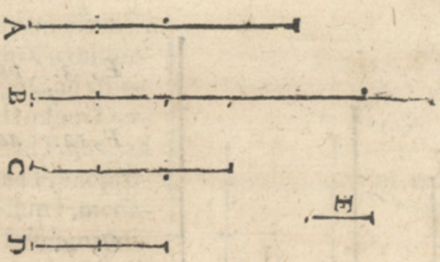


QVOD ſi D, maxima menſura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commenſurabiles, vel non. Si ſunt incommenſurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommenſurabiles. Si enim credantur eſſe commenſurabiles, metitur earum maxima communis menſura ipſam D, maximam menſuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoq; C, non erunt C, & D, incommenſurabiles. Quod eſt contra hypotheſim.

SI vero

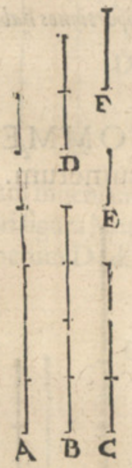
SI vero C, & D, ſunt commenſurabiles, erunt quoque tres A, B, C, commenſurabiles. [i] *Inuenta enim E, maxima menſura ipſarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipſas A, & B;* [k] *metietur quoque E, ipſas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.* i 3. decimi. k 2. pron.

SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quàm tres, ſint commenſurabiles, nec ne. Nam ſi datæ ſint quatuor, experiemur id primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.



PROBL. 2. PROPOS. 4. iv.

TRIBVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.



SINT datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, C, quarum maximam menſuram inuenire oporteat. [a] Sit D, maxima menſura ipſarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perſpicuum eſt, D, maximam eſſe menſuram omnium trium A, B, C. Nam ſi maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C, metietur eadem per coroll. propoſ. 3. huius lib. maximam menſuram ipſarum A, B, nempe ipſam D, maior magnitudo minorem, quod fieri non poteſt. Si vero D, non metiatur C, erunt ſaltem D, C, commenſurabiles. Cum enim A, B, C, ſint commenſurabiles, metietur quælibet menſura earum communis ipſam D, maximam menſuram ipſarum A, B, per coroll. præcedentis propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoque ipſam C; erunt D, & C, commenſurabiles. [b] Sit igitur E, maxima menſura ipſarum inuenta. Dico E, ... imam menſuram eſſe datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim ſit communis earum menſura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoque E, ipſas A, & B. Metitur autem & ipſam C: Igitur E, menſura eſt communis ipſarum A, B, C, quemadmodum aſſeruimus. a 3. decimi. b 3. decimi. c 2. pron.

QVOD autem E, ſit earum maxima menſura, hoc modo confirmari poteſt. Si non eſt maxima, ſit F, maior quam E, ſi fieri poteſt, earum menſura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximã menſuram D, per coroll. præcedentis propoſ. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum menſuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earum communis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.

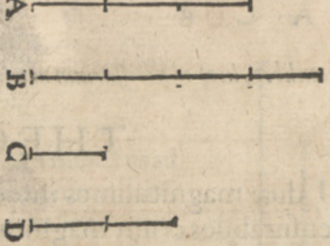
INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem menſuram. Eademque de cæteris eſt ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, quam tribus, maximam earum menſuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua vero omnia abſoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

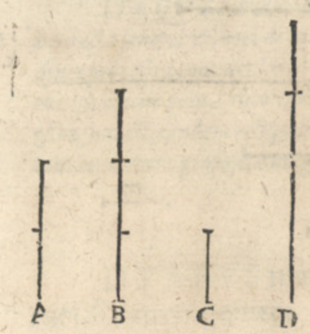
LEMMA.

SI ſint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eiſdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo eſſe, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; G, ad H; perſpicuum eſt, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compoſitas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales eſſe, hoc eſt, eſſe vt A, ad D, ita E, ad H. Quod eſt propoſitum.



E, 3.
F, 4.
G, 1.
H, 2.



E, 3.
F, 12.
G, 4.
H, 6.

IDEM ſequitur, ſi magnitudinum & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo eſt, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

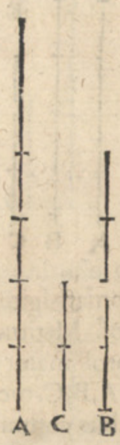
SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cum non facile videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa tantum eſt in quantitatibus eiuſdem generis; In numeris quidem lib 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri poſſit, cum omnes demonſtrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

v.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.



D, 3.
Vni . tas.
E, 2.

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerum.[a] Sit enim earũ maxima menſura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerũ E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinẽ A, & vnitas numerũ D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Eſt autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipſam B, atque vnitas numerum E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedẽs, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commenſurabiles ergo magnitudines inter ſe rationem habent, &c. Quod erat demonſtrandum.

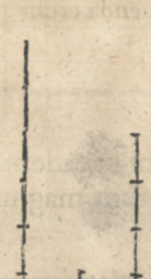
a 3. decimi.

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinum commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuũ eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, vt rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum. Hæ enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atque adeo in eis demonſtratio locum habet.

QVOD ſi lineæ ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem, quam numerus ad numerum, quia commenſurabilia ſunt, atque idcirco menſuram habent communem, ipſiſque demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cum ſint, communis menſuræ ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat, commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.



D, 6.
Vni - tas.
E, 4.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac communis magnitudinum commenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quamcunque communem earum menſuram, nihilominus hoc theorema demonſtrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex appoſita figura apparet. Quoniam vero in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium; propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam communem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.

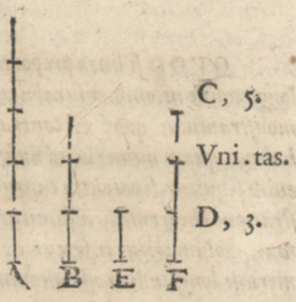
vj.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

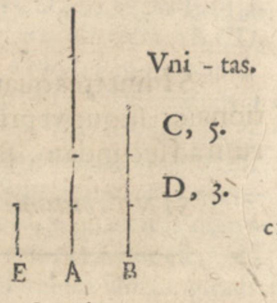
HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines eſſe commenſurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuiſa intelligatur magnitudo A, quarum partium vni æqualis ſit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D,

ſum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C, continebit æqualiter A, ipſam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Eſt autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipſam F, & vnitas ipſum D, æque metiatur. Igitur per lemma propoſ. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F, [a] ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter ſe ſunt. Quocirca cum E, ipſum F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipſam B; Metiebatur autem & ipſam A. Igitur magnitudo E, vtramq; A, & B, metitur: [b] Ac proinde A, & B, magnitudines commenſurabiles inter ſe ſunt. Si igitur duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 9. quin.
b 1. def.

ALITER. Quot ſunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuiſa magnitudo A, quarum partium vni æqualis ſit magnitudo E. Quoniam igitur eſt vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipſam A, & vnitas ipſum D, æque metiantur; poniturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma ſuperius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem E, metitur: Metitur autem E, ipſam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem menſuram E, [c] commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

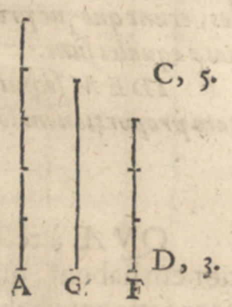


c 1. defi.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerũ. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates ſunt in C, & ſumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, vt C, ad demonſtratum eſt.

HINC rurſus apparet, quanam arte poſſit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda ſit linea, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quam ſic ſe habeat A, vt C, ad D: [d] Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, ſint continue proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum ſit vt A, ad F, ita C, ad D,) ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterq; deſcripta.



d 13. sext.

SCHOLIVM.

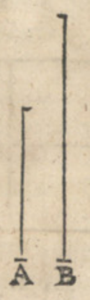
IN hoc etiam theoremate manifeſtum eſt, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commenſurabiles eſſe longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonſtratione conſtat, menſuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, menſuram communem E, habere demonſtratum eſt.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

vii. o.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommenſurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum: [a] erunt ipſæ commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommenſurabiles magnitudines, &c. Quod oſtendendum erat.



a 6. decimi.

SCHOLIVM.

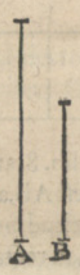
QVOCVNQVE modo lineæ incommenſurabiles ſint, ſiue longitudine & potentia, ſiue longitudine tantum, ſemper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonſtratum eſt, eſſent longitudine commenſurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

viii. o.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommenſurabiles eſſe. Si enim A, & B, credantur eſſe commenſurabiles; [a] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, &c. Quod erat oſtendendum.



a 5. decimi.

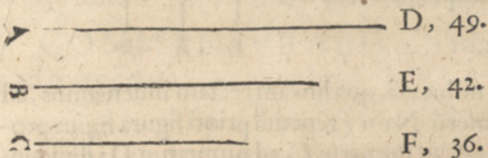
SCHOLIVM.

QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſario, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt contra hypotheſim. Non autem colligendum eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſario potentia incommenſurabiles eſſe, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione. Non enim ſequitur, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonſtratione theorematis aſſumitur; immo nullo modo talem proportionem habere poſſunt, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus, Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

LEMMA.

SI ſint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportionales; ſitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam.

SINT continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non: ſitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque eſſe vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata eſt; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales ſunt.



IDEM ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quam tres; ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

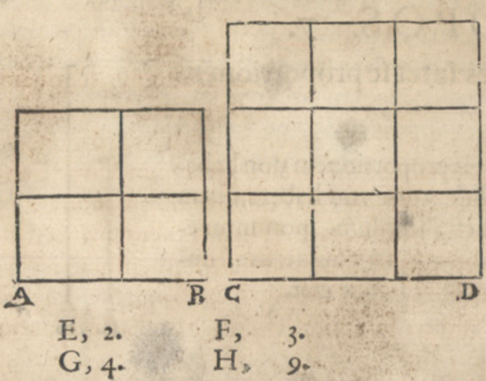
vij.

THEOR. 1. PROPOS. 9.

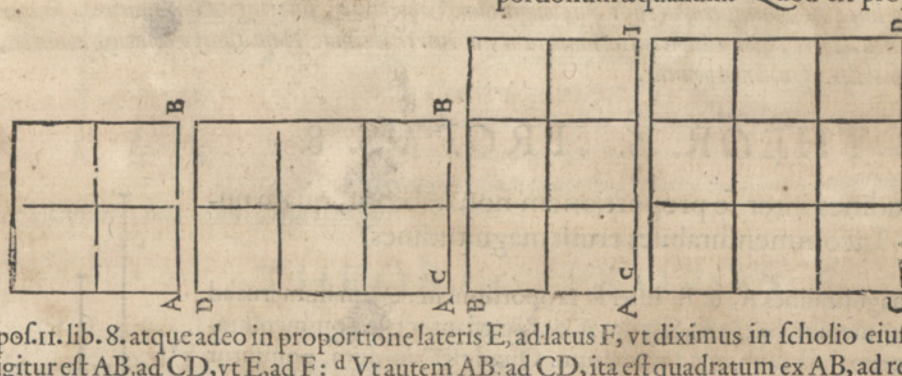
QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ A B, C D, longitudine ſunt commenſurabiles; [a] erit A B, ad C D, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt A B, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: [b] habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: [c] Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H, quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitum.

a 5. decimi.
b 20. ſex.
c 11. oct.



ALITER. Poſita eadem conſtructione, contineatur rectãgulũ B D, ſub rectis A B, CD. Et E, F, ſe mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt conſtat ex demõſtratione propoſ. 11. lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in ſcholio eiuſdem propoſ. Quoniam igitur eſt AB, ad CD, vt E, ad F: [d] Vt autem AB, ad CD, ita eſt quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, ſi CD, ponatur baſis rectanguli; Item vt E, ad F, ita eſt G, ad I: Erit quoque quadratum ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rurſus quia eſt A B, ad C D, vt E, ad F, [e] Vt autem AB, ad CD, ita eſt rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandem altitudinem CD, ſi AB,



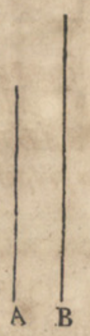
d 1. ſexti.
e 1. ſexti.

ſi AB, ponatur baſis rectanguli; Item vt E,ad F,ita eſt I,ad H: Erit quoque rectangulum BD,ad quadratum ex
CD,vt I,numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB,rectan-
gulum B D, & quadratum ex C D, in eadem ratione continua ſunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo
per lemma propoſ. 4. huius lib. erit quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad nu-
merum quadratum H. Quod eſt propoſitum.

SIT ſecundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadra-
tum H. Dico rectas AB, CD, eſſe longitudine commenſurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum
numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex B D, vt qua-
dratus numerus G, ad quadratum numerum H: [f] Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, pro- f 20. ſext.
portionem duplicatam lateris AB, ad latus CD. [g] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, g 11. oct.
proportionem habet duplicatam lateris E,ad latus F: erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad la-
tus F: quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales ſunt. Quare cum rectæ AB, CD,
proportionem habeant, quam numeri E, F, ipſæ commenſurabiles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. [h] Quia igitur eſt vt AB, ad CD, ita quadratum ex h 6. dec.
AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rurſum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt ſupra di- i 1. ſexti.
ximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continue proportionalia in ratione li-
neæ A B, ad lineam C D. Sunt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad nu-
merum F, vt ſupra oſtendimus; ponitur que quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt quadratus nume-
rus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, vt G, ad I, hoc eſt, vt E,
ad F; [k] ideoque AB, CD, rectæ proportionem habentes, quam numeri E, F, commenſurabiles ſunt longitudi- k 6. dec.
ne. Quod eſt propoſitum.

SINT tertio rectæ A B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata pro-
portionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadra-
tum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad nu-
merum quadratum; erunt A, B, longitudine commenſurabiles, vt iam eſt demonſtratum.
Quod eſt abſurdum. ponuntur enim longitudine incommenſurabiles. Non ergo quadratum
ex A, ad quadratum ex B proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum qua-
dratum. Quod eſt propoſitum.



QVARTO, ac poſtremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportio-
nem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine eſſe incom-
menſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt
eſt demonſtratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod
eſt abſurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commenſurabiles ſunt A,
& B. Quod eſt propoſitum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c.
Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia com-
menſurabiles eſſe: Quæ vero potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine in-
commenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: Quæ vero potentia incommenſurabiles,
omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commenſurabilium proportionem habent, quam
quadratus numerus ad quadratum numerũ. vt in hoc theoremate demonſtratum eſt, hoc eſt, ſimpliciter quam
numerus ad numerum: [l] ipſa commenſurabilia erunt; [m] Ac propterea & latera ipſorum potentia commenſu- l 6. dec.
bilia exiſtent. Quare lineæ longitudine commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. m 3. defin.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad qua-
dratum numerum, ſed tamen quam numerus ſimpliciter ad numerum, [n] potentia quidem commenſurabiles n 3. defi.
ſunt, [o] cum earum quadrata commenſurabilia ſint: ac longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate eſt o- o 6. dec.
ſtenſum; perſpicuum eſt, lineas potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine commenſurabiles eſ-
ſe. Solum enim eæ lineæ potentia commenſurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus
quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque ſunt commenſurabiles, vt conſtat ex ſecunda parte
huius theorematis.

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad nu-
merum quadratum, ſed tamen, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles quidem ſunt longitudine,
ac potentia commenſurabiles, vt modo diximus, liquido conſtat, lineas longitudine incommenſurabiles, non
omnino & potentia incommenſurabiles eſſe, ſolum enim eæ lineæ longitudine incommenſurabiles, quarum
quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [p] potentia quoque incommenſurabiles p 4. defi.
ſunt, [q] cum earum quadrata incommenſurabilia ſint. q 8. dec.

POSTREMO lineas potentia incommenſurabiles, eſſe omnino & longitudine incommenſurabiles,
perſpicuum eſt. Nam ſi longitudine eſſent commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles forent,
vt patet ex prima parte corollarij. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim potentia incommenſurabiles. Quam
obrem lineæ potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt.

SCHOLIVM.

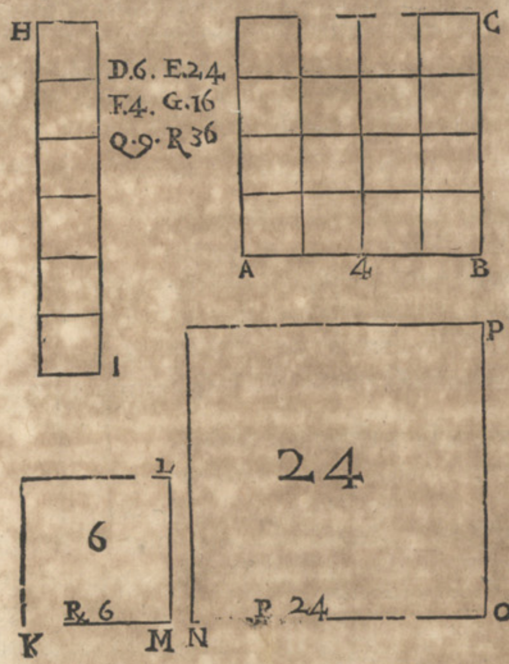
*VT autem ſcopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq́; percipiatur, diligenter conſideran-
da ſunt hæc, quæ ſequuntur. Primum lineas rectas longitudine commenſurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorema-
tis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nõ ſolum eſſe eas quæ numeris exprimi poſſunt, ſi*

cum li-

cum linea Rationali propoſita comparentur; quales ſunt illæ, quæ in demonſtratione ſunt poſitæ (eſt enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis poſſunt numeris efferri, ſi cum Rationali linea propoſita conferantur: Deinde è contrario, quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, ſeu latera ex ſecunda theorematis parte, longitudine ſunt commenſurabilia, non ſolum ea eſſe intelligenda, quæ continent totidem quadratas menſuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ reſoluitur, quot ſunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipſis proportionem habentibus; cuiuſmodi ſunt quadrata in demonſtratione deſcripta; (continet enim quadratum ex AB, quatuor menſuras quadratas & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates ſunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures menſuras quadratas complectuntur, quam ſunt vnitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commenſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quod Rationali lineæ propoſitæ ſunt longitudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratas menſuras, vel plures continet, quam ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

126.oct. EXPONATVR linea Rationalis AB, expreſſa numero 4. cuius quadratum AC, continebit menſuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur rectangulum HI, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; atque ipſi HI, quadratum æqualem conſtituatur KL, cuius latus KM. Poſtremo per ea, quæ in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratum NP, ita ſe habeat KL, quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerũ E, vel vt quadratus F, ad quadratũ G. Quoniã igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6 ad 24. ita quadratum KL, ad quadratum NP per conſtructionem; continet autem quadratum KL, 6. menſuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale AC: (conſtructum enim eſt quadratum KL, æquale rectangulo HI, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris) continebit quadratum NP, earundem menſurarum quadratarum 24. ac propterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erunt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non ſint numeri quadrati, eruntque lineæ Rationali AB, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata KL, NP,

614.ſec.



14. deci. proportionem habeant, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla, videlicet 1, ad 2. Huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. Quare longitudine commenſurabiles ſunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparētur. Quod ſi conſiderentur eædem lineæ KM, NO, ſimpliciter & abſolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant ſubduplam, ſi KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, reſoluitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadem proportione ſumantur Q, R, pauciores tales menſuras complectuntur quadrata KL, NP, quam ſunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus conſtituatur; manifeſtum eſt, in hoc theoremate intelligenda quoque eſſe quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas menſuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadem quadrata KL, NP, conſiderentur abſolute, & ſimpliciiter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB, deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, & Q, R, continentur. Nam ſi recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum KL, quatuor menſuras quadratas, & quadratum NP, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eædem lineæ ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi meuſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, reſoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum eſt de lineis longitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali lineæ incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine inter ſe commenſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpe numero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionẽ habentia, quã quadratus numerus ad

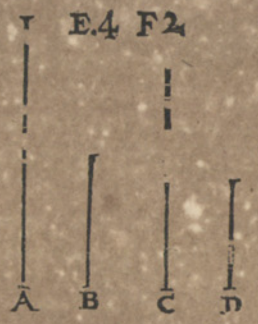
quadra-

quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poßint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationali ſint longitudine incommenſurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis; vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabilia. Hoc etiam nos demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 8. Quod tamen clarius oſtendet Euclides propoſ. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10. xj. x.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; & tertia quartæ incommenſurabilis erit.



SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, ſitq; A, prima ſecundæ B, commẽſurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commenſurabilem eſſe. Quoniam enim A, & B, inter ſe commenſurabiles ſunt, [a] habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet, quam numerus E, ad numerum F. [b] Quare C, & D, commenſurabiles inter ſe ſunt. a 5. deci. b 6. dec.

SED ſit iam A, ipſi B, incommenſurabilis. Dico & C, ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Quoniam enim A, & B, incommenſurabiles ſunt, [c] non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [d] Quare C, & D, incommenſurabiles ſunt inter ſe. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum. c 7. dec. d 8. deci.

SCHOLIVM.

QVOD ſi quatuor propoſitæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem ſecundæ commenſurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commenſurabilis, vt ex demonſtratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo oſtendemus, poſteriores duas propoſitionem habere numeri ad numerum. Quare vt in ſcholio propoſit. 5. huius lib. diximus, longitudine commenſurabiles ſunt.

Si autem prima ſecundæ fuerit commenſurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commenſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commenſurabilis eſt potentia ipſi B, [e] erunt earum quadrata commenſurabilia, [f] ac propterea proportionẽ habebunt, quam numerus ad numerũ [g] Eſt autem vt quadratũ ex A, ad quadratum ex B, ita quadratũ ex C, ad quadratũ ex D, (quod quatuor lineæ propoſitæ A, B, C, D, proportionales ſint, & earum quadratæ figuræ ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionẽ habebunt, quã numerus ad numerum. [h] Quare commenſurabilia erunt; [i] Ac propterea lineæ C, D, potentia commenſurabiles. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita manifeſtum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum ſint commenſurabiles potentia tantum, longitudine incommenſurabiles ſunt: non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propoſ. 8. huius lib. Sunt autem potentia commenſurabiles, vt oſtendimus: Igitur potentia tantum ſunt commenſurabiles. Quod eſt propoſitum. e 3. defin. f 5. deci. g 22. ſex. h 6. deci. i 3. def.

EADEM ratione, ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommenſurabilis. Nam ſi A, & B, ſint longitudine tantum incommenſurabiles; erunt ipſarum potentiæ tantum commenſurabiles; ac propterea ipſæ potentiæ tantum commenſurabiles erunt. Igitur, vt nunc oſtendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commenſurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

RVRSVM ſi quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ ſuperficies, vel ſolida; ſequetur nihilominus, ſi lineæ ſint longitudine commenſurabiles vel incommenſurabiles, & reliquas duas magnitudines commenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim lineæ longitudine ſint commenſurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum; [k] atque adeo commenſurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommenſurabiles ſint, ſiue potentia commenſurabiles exiſtant, ſiue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. [l] Quare incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum. k 6. deci. l 8. dec.

EODEM modo, ſi priores duæ magnitudines fuerint ſuperficies, vel ſolida, poſteriores vero duæ lineæ, demonſtrabimus, ſi plana, vel ſolida commenſurabilia ſiut, vel incommenſurabilia; lineas longitudine commenſurabiles eſſe, vel incommenſurabiles. Si enim plana, ſolidaue commenſurabilia ſunt, [m] habebunt ipſa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipſis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commenſurabiles erunt, vt diximus in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Si vero plana, vel ſolida ſint incommenſurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipſis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommenſurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Quod eſt propoſitum. m 5. deci.

LEMMA.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non ſimiles, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorũ acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non ſint plani ſimiles, vt ad finem lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO *inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt* Federicus Commandinus. *Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.*

A, 2.	C, 3.
B, 6.	D, 16.
E, 12.	F, 48.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non ſit ſicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perſpicuum igitur eſt E, F, numeros planos eſſe, planos autem diſſimiles; quoniam latera proportionalia non ſunt. quod facere oportebat.

HÆC *eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium. Errant autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpenumero inuenti numeri ſecundum eorum doctrinam, plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti, 12. & 48. ſunt plani ſimiles, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus poſterioris 6. & 8. conſtat; quamuis latera prioris ab illis aſſumpta 2. & 6. non ſint proportionalia lateribus poſterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim eſt, vt duo numeri plani ſint ſimiles, aliqua duo latera vnius proportionalia eſſe quibuſdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia ſint quibuſcunque duobus lateribus alterius. qua de re plura ſcripſimus in defin. 21. lib. 7. & in ſcholio propoſ. 23. lib. 8.*

PROBL. 3. PROPOS. 11.

x. xj. PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta propoſita A, cui primum inuenienda ſit linea incommenſurabilis longitudine tantum inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propoſ. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine ſint incommenſurabiles, ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non eſt autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [a] Igitur rectæ A, & D, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quod autem tantum longitudine ſint incommenſurabiles, patet.



B, 10.

C, 6.

a 9. dec.

b 6. dec. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, [b] ipſa commenſurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commenſurabiles. Quare longitudine tantum incommenſurabiles ſunt.

c 13. ſex. SIT iam eidem rectæ propoſitæ A, inuenienda linea incommenſurabilis longitudine, & potentia. [c] Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommenſurabiles, media proportionalis. Dico E, ipſi A, incommenſurabilem eſſe longitudine, & potentia. Quoniam enim eſt quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommenſurabilis eſt longitudine ipſi D, vt iam eſt oſtenſum:

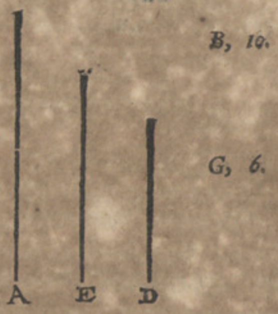
b 10. dec. [d] erit & quadratum ex A, incommenſurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia ſunt incommenſurabiles: ac proinde ex coroll. propoſ. 9. huius lib. & omnino longitudine incommenſurabiles ſunt. Eſt igitur E, ipſi A, incommenſurabilis longitudine & potentia. Quocirca propoſitæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Qud erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, propoſita ſtatuatur Rationalis, *ita vt ab ea menſuræ cæterarum ſumantur; erit & recta D, per defin. 6.* Rationalis, *quia potentia illi eſt commenſurabilis, licet eidem longitudine incommenſurabilis ſit. At vero E,* Irrationalis *ex defin. 7. cum* Rationali *A, incommenſurabilis ſit longitudine, & potentia.*

CÆTERVM *ex demonſtratione huius theorematis liquido conſtat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia*

potentia tantum commenſurabiles, vel quod idem eſt, inter duas longitudine tantum incommenſurabiles, eſſe vtrilibet illarum incommenſurabilem longitudine & potentia; atq; adeo appellari Irrationalem, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, ſunt longitudine tantum incommenſurabiles, vel commenſurabiles potentia tantum, demonſtrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem eſſe, ipſi incommenſurabilem longitudine, & potentia; Eodemque argumento oſtendemus, eandem longitudine, & potentia ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, ſint continue proportionales, erit



ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Eſt autem recta D, rectæ A, incommenſurabilis longitudine.[c] Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommenſurabile erit. Quare rectæ, D, & E, ex defin. incommenſurabiles ſunt potentia, atq; adeo & longitudine, per coroll. propoſ. 9. huius lib. c 10. dec.

IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propoſitio à Theone propoſitioni decimæ præcedenti, quod errore librariorum factum eſſe puto, cum ſecunda pars huius ex præcedenti propoſitione decima demonſtretur, vt ex dictis apparet.

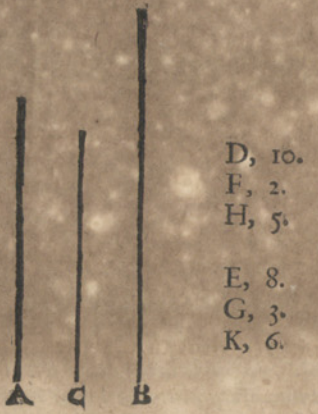
THEOR. 9. PROPOS. 12.

xij.
viij.

QVÆ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles.

SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commenſurabilis. Dico & A, B, inter ſe eſſe commenſurabiles. Cum enim A, & C, ſint commenſurabiles,[a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rurſus quia C, B, commenſurabiles ſunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G,[b] ſumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; ſitque H, ad I, vt D, ad E, hoc eſt, vt A, ad C: & I, ad K, vt F, ad G, hoc eſt, vt C, ad B. Quoniam igitur eſt A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K,[c] inter ſe commenſurabiles ſunt. Quæ ergo eidem magnitudini commenſurabiles ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 5. dec.
b 4. octa.
c 6 dec.



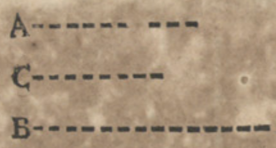
S C H O L I V M.

QVOD ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, atque A, & B, ipſi C, longitudine commenſurabiles exiſtant, erunt quoque A, & B; inter ſe longitudine commenſurabiles, vt conſtat ex demonſtratione theorematis, quia eodem modo oſtendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commenſurabiles erunt, vt ad propoſ. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipſi C, potentia commenſurabiles, licet eidem longitudine ſint incommenſurabiles, demonſtrabuntur eodem modo & A, B, inter ſe commenſurabiles potentia. Cum enim A, & C, ſint potentia commenſurabiles,[d] erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. ſint commenſurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G,[e] Sumptis ergo in eiſdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps, proportionalibus: erit rurſum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K.[f] Quare quadrata ex A, & B, commenſurabilia ſunt, atque adeo lineæ A, B, potentia commenſurabiles. Non tamen ex hoc ſequitur, A, & B, potentia tantum eſſe commenſurabiles. Poſſunt enim eſſe duæ lineæ, longitudine inter ſe commenſurabiles, licet vtraq; cuipiam alteri lineæ potentia tantum ſit commenſurabilis; quales ſunt duæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, potentia vero tantum Rationali expoſitæ commenſurabiles, quas quidem inueniemus poſtea in ſcholio 2. propoſ. 19. huius lib.

d 5 dec.
e 4. oct.
f 6. dec.

SED & conuerſum quodammodo huius theorematis demonſtrabimus hoc modo.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera vero ſit vni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis.



SINT enim A, & B, commenſurabiles, ſitque A, ipſi C, commenſurabilis. Dico & B, eidem C, commenſurabilem eſſe. Cum enim tam B, quam C, ipſi A, ſit commenſurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi magnitudines A,B,C, ſint lineæ, & A,B, commenſurabiles longitudine, ſit autem A, ipſi C, commenſurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commenſurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipſi A, longitudine ſit commenſurabilis, erunt etiam B,C, inter ſe commenſurabiles longitudine, vt oſtendimus. At vero ſi lineæ A, & B, potentia tantum ſint commenſurabiles, & A, ipſi C, commenſurabilis ſiue longitudine, & potentia ſiue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia eſſe commenſurabilem; quia vtraq; B, C, ipſi A, hac ratione potentia eſt commenſurabilis ex hypotheſi. Non autem colligere licebit, ſi A, ipſi C, commenſurabilis ſit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commenſurabilem eſſe, quia non vtraque B, C, ipſi A, longitudine commenſurabilis eſt, ſed C, quidem longitudine at vero B, potentia tantum, vt ex hypotheſi conſtat.

xij. o.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera vero incommenſurabilis: Incommenſurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, ſit ipſi C, commenſurabilis, & B, eidem C, incommenſurabilis, Dico A, & B, inter ſe incommenſurabiles eſſe. Si enim B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi A, cum eidem A, commenſurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter ſe commenſurabiles, quod eſt abſurdum, ponitur enim B, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi A, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat oſtendendum.

a 12. dec.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A,B,C, ſint lineæ, & A, quidem ipſi C, longitudine commenſurabilis, at B, eidem C, incommenſurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles eſſent, [b] oſtenderemus quoque B,C, eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles (cum hoc poſito, vtraq; B,C, ipſi A, commenſurabilis eſſet longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, ſi A, ipſi C, potentia ſit commenſurabilis, ſiue tantum, ſiue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommenſurabilis: erunt A, & B, potentia incommenſurabiles, Si enim eſſent commenſurabiles potentia, eſſent quoque B, & C, potentia commenſurabiles (cum hoc poſito, vtraque B, & C, ipſi A, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſi C, potentia incommenſurabilis.

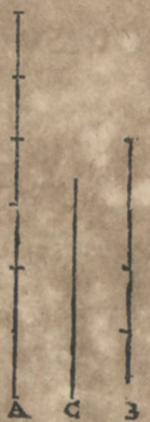
b 12. dec.

QVONIAM vero hæc propoſitio 13. apud Theonem lemma eſt, fit, vt poſthac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac ſeriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.

xiij. viij.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles; altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.



SINT duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommenſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem. Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cum & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; [a] erunt & A, C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 12. dec.

SCHOLIVM.

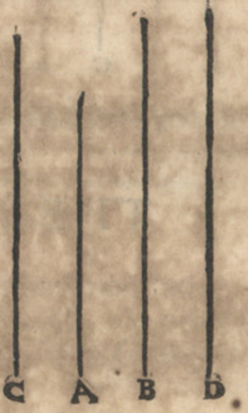
HIC quoque, ſi magnitudines A,B,C, ſint lineæ, & A,B, commenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantũ, ſiue longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidẽ C, longitudine incommenſurabilis. Si enim C, & B, eſſent

eſſent longitudine commenſurabiles,[b] *eſſent quoque A, & C, commenſurabiles longitudine (cum hoc poſito, vtraq; A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum: ponitur enim A, ipſi C, longitudine incommenſurabilis. Quod ſi A, & B, commenſurabiles ſint potentia tantum, & A, ipſi C, potentia incommenſurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipſi C, potentia incommenſurabilem eſſe. Alias ſi B, C, potentia eſſent commenſurabiles*[c] *& A, C, potentia commenſurabiles eſſent (cum hoc poſito, vtraq; A, C, ipſi B, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod non ponitur.* b 12. dec. c 12. dec.

COLLIGVNT *porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis ſequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonſtrantur, perutile.*

QVÆ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles, & inter ſe incommenſurabiles erunt,

SINT *duæ magnitudines incommenſurabiles A, B, quibus commenſurabiles ſint C, & D, nempe C, ipſi A, & D, ipſi B. Dico C, & D, inter ſe incommenſurabiles eſſe. Quoniam enim A, & C, commenſurabiles;*[d] *erit quoque reliqua C, eidem B, incommenſurabilis. Rurſus quia D, & B, commenſurabiles ponuntur, & eſt B, oſtenſa ipſi C, incommenſurabilis;*[e] *erit & reliqua eidem C, incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.* d 14. dec. e 14. dec.

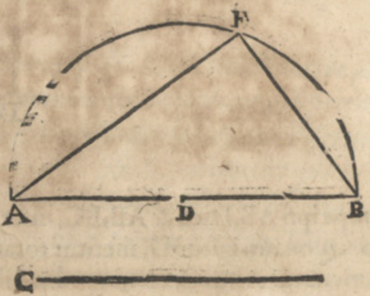


SI autem magnitudines A, B, C, D, ſint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommenſurabiles, vel longitudine & potentia; ſint autem C, D, ipſis A, B, longitudine commenſurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommenſurabiles. Si vero A, & B, incommenſurabiles ſint potentia, & ipſis potentia tantum commenſurabiles C, & D; oſtendemus ſimiliter C, & D, potentia eſſe incommenſurabiles; vt perſpicuum eſt.

L E M M A.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus poteſt, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior oporteatque inuenire, quo AB, plus poßit quam C. Diuiſa AB, bifariam in D, deſcribatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, ſemicirculus AEB, f *in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ EB.* g *Cum enim angulus E, in ſemicirculo rectus ſit;* h *erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc eſt, quam C, quadrato rectæ EB. Quod eſt propoſitum.* f 1. quarti. g 31. tertij. h 47. primi.



Similiter.

DVABVS datis rectis lineis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.

HOC etiam tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ ſi coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, i *quippe cum quadratum ex AB, æquale ſit quadratis ex AE, EB.* i 47. prim.

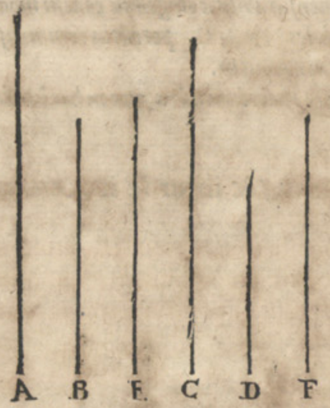
THEOR. 12. PROPOS. 15.

xiv.
xii.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tanto plus poſſit quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, poſſitque A, prima plus quam B, ſecunda, quadrato rectæ E; & C, tertia plus poſſit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C. Si vero E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilem eſſe. Quoniam enim eſt vt A, ad B, ita C, ad D;[a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Eſt autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypotheſim, & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex BE, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D. Et diuidendo, vt quadratũ ex E, ad quadra- a 22. ſexti.

b 22. *ſexti.* tum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratũ ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt, vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoq; ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commenſurabilis. Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.



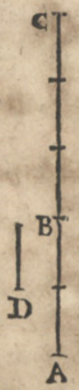
SCHOLIVM.

EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantum commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. ſcripſimus.

xv.
ix.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt.



a 13 *dec.*
b 1. *pron.*

COMPONANTVR duę magnitud commẽſurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtriq; ipſarum AB, BC, cõmenſurabilem eſſe. [a] Sit enim ipſarum AB, BC, communis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, [b] metietur quoq; D, totam AC, ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur AC, & A; erũt AC, AB, commenſurabiles: Similiter cũ D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, commenſurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit.

SED iam tota AC, ex AB, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB, BC, nempe ipſi AB. Dico & AB, BC, inter ſe commenſurabiles eſſe. [c] Sit enim D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; [d] metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commenſurabiles erunt AB, BC, inter ſe. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, eſſe commenſurabiles, ſi AC, ipſi BC, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines commenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

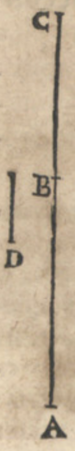
c 3. *dec.*
d 9. *pro.*

COROLLARIVM.

HINC ſequitur, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ commenſurabilem eſſe. Vt ſi AC, ipſi AB, ſit commenſurabilis, eſſe quoque eandem AC, reliquæ BC, commenſurabilem. Nam vt in poſteriori parte theorematis oſtenſum eſt, ſemper D, communis menſura totius AC, & ablatæ AB, cum metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commenſurabiles ſunt AC, BC. Quod eſt propoſitum.

xvj.
ix.

THEOR. 14. PROPOS. 17.



SI duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt,

a 3. *dec.*
b 3. *pron.*

COMPONANTVR duæ magnitudines incommenſurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtrique ipſarum AB, BC, incommenſurabilem eſſe. Si enim non eſt vtrique incommenſurabilis, ſit alteri commenſurabilis, ſi fieri poteſt, nempe ipſi AB, [a] ſitque D; communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; [b] metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramque AB, BC, erunt AB, BC, commenſurabiles. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim incommenſurabiles. Non ergo commenſurabilis eſt AC, ipſi AB: Eademque ratione neque ipſi BC, commenſurabilis erit. Quare vtrique ipſarum AB, BC, incommenſurabilis eſt.

SED

SED iam tota AC, compoſita ex AB, BC, incommenſurabilis ſit vni ipſarum, vni componentium nempe ipſi AC. Dico quoq; AB, BC, incommenſurabiles eſſe. Si enim ſint commenſurabiles [c] erit quoque tota AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim AC, alteri ipſarum, nempe ipſi AB, incommenſurabilis. Non ergo commenſurabiles ſunt AB, BC. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, incommenſurabiles eſſe, ſi AC, ipſi BC, incommenſurabilis fuerit. Quapropter ſi duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum. c 16.dec.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ incommenſurabilem eſſe. Nempe ſi AC, incommenſurabilis ſit ipſi AB, eſſe quoque eandem AC, reliquæ BC, incommenſurabilem. Si enim AC, ipſi BC, foret commenſurabilis, eſſet quoque AC, ex corol. præcedentis propoſ. reliquæ AB, commenſurabilis. Quod eſt abſurdum, ponitur enim incommenſurabilis. Non eſt ergo AC, ipſi BC, commenſurabilis. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, in duabus proximis antecedentibus propoſitionibus, earumque corollariis, ſi de lineis agatur, intelligendas eſſe lineas longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles. Aſſumitur enim ad vtriuſque propoſitionis demonſtrationem communis menſura D, &c. quam quidem ſolum lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

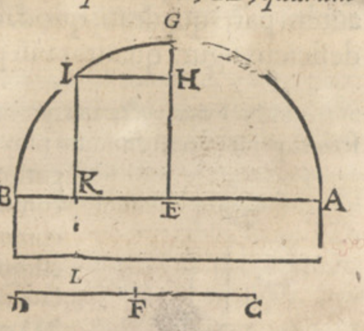
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonſtrauimus nos in ſcholio propoſ. 28. lib. 6.

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, abſolui poſſit ex propoſ. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea deſcripti minor ſit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteque figura quadrata, vt vult propoſ. illa 28. lib. 6. hoc eſt, quadratum ex dimidio minoris lineæ deſcriptũ, (quod quidem quarta pars eſt quadrati ex tota deſcripti, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2.) minus ſit quadrato ex dimidia parte maioris deſcripto; (quod quidem applicatum eſt ad dimidium maioris, deficitque figura quadrata.) Quamuis, inquam, abſolui hoc poſſit per propoſ. 28. lib. 6. libet tamen idipſum hoc in loco cum aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB, maior ſit, oporteatq; ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale ſit quartæ parti quadrati ex recta CD, deſcripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, deſcribatur ex centro E, & interuallo EA, vel EB, ſemicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque AE, dimidia ipſius AB, hoc eſt EG, ipſi AE, æqualis, maior quam CF, dimidia ipſius CD. Poſita igitur EH, æquali ipſi CF, agatur per H, ipſi AB, parallela HI, demittaturq; IKL, ad AB, perpendicularis, & ſit KL, ipſi KB, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratũ BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale eſſe quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam enim KI, media proportionalis eſt inter AK, KB, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. tradidimus; [d] erit rectangulum ſub AK, KB, hoc eſt, rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc eſt, quadrato ex EH; [e] (eſt enim KI, ipſi EH, æqualis, ob parallelogrammum EI,) hoc eſt, quadrato ex CF: Eſt autem quadratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD, quod quadratum ex CD, per ſcholium propoſ. 4. lib. 2. quadruplum ſit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficienſq; quadrato BL, æquale eſt quartæ parti quadrati ex CD, deſcripti. Quod eſt propoſitum.



d 17.ſexti.
e 34.primi.

SCHOLIVM II.

EX hoc lemmate abſoluemus & hoc problema, quod ſequitur, in hunc modum.

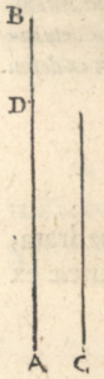
DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus contentum, æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quam quadratum à dimidia linea deſcriptum.

SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius ſit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, ſit EH, æqualis ipſi CF. Deinde acta HI, parallela ipſi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis oſtendemus, vt prius, rectangulum ſub partibus AK, KB, æquale eſſe quadrato ex IK, hoc eſt, quadrato ex CF, atq; adeo & rectilineo dato, cui æquale eſt poſitum quadratum ex CF. Quod eſt propoſitum. Diximus autem, rectilineum datum non debere eſſe maius, quam quadratum ex dimidia linea deſcriptum; quia ſi maius eſſet, eſſet quoq; recta CF, maior quam recta EG. Quare ex EG, abſcindi nõ poſſet recta ipſi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti deficiens figura quadrata; Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ſitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, deſcripti, ita vt DB, latus ſit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico ſegmenta AD, DB, inæqualia eſſe. Si enim AD, DB, ſegmenta dicantur eſſe æqualia, cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB, deficienſque figura quadrata ex DB, deſcripta, æquale ſit rectangulo ſub AD, DB; ſit autem quod ſub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD, dimidio ipſius AB, deſcriptum, atque adeo ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipſius parallelogrammi: Eſt autem & quadratum ex C, per hypotheſim, quadruplum eiuſdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia ſunt, atque rectæ AB, & C, æquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur ſunt ſegmenta AD, DB. Quod eſt propoſitum.



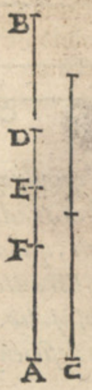
HOC facile etiam apparet ex conſtructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abſciſſa ſit per conſtructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipſius CD, nempe ipſi CF, ductaque HI, parallela ipſi AB, & tandem demiſſa perpendicularis IK, vt partes factæ ex applicatione ſint AK, KB; manifeſtum eſt AK, KB, ſegmenta eſſe inæqualia, cum AB, in E, ſecta ſit bifariam. Immo hinc conſtat, prius ſegmentum maius eſſe, & poſterius, quod latus eſt quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvij.
xiij.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat: maior tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB, quartæ autem parti quadrati ex minore C, deſcripti, per lemma ſecundum præcedentis propoſ. applicetur ad AB, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum ſub AD, DB, faciatque ſegmenta AD, DB, longitudine commenſurabilia. Dico AB, plus poſſe quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quoniam enim per 3. lemma præcedentis propoſ. AD, maior eſt quam DB; diuidatur AB, bifariam in E, & ipſi ED, æqualis ſumatur EF. Quo facto, cum totæ EA, EB, æquales ſint, & ablatæ quoque EF, ED, erunt & reliquæ AF, BD, æquales. Et quia recta AB, diuiſa eſt bifariam in E, & non bifariam in D, [a] erit rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadruplum rectanguli ſub AD, DB, & quadrati ex ED, æquale erit quadruplo quadrati ex EB. Eſt autem quadruplo rectanguli ſub AD, DB, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum ſub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex ED, æquale eſt quadratum ex FD, (quadratum enim ex FD, quadruplum eſt ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cum FD, dupla ſit ipſius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale eſt quadratum ex AB, (quod quadratum ex AB, quadruplum ſit per ſcholium propoſ. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipſius AB.) Igitur & quadrata ex C, & FD, æqualia ſunt quadrato ex AB: Ac proinde recta AB, plus poteſt quam recta C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur FD, demonſtrare oportet longitudine commenſurabilem eſſe ipſi AB. Quoniam rectæ AD, DB, longitudine ponuntur commenſurabiles: [b] erit quoque tota AB, parti DB, commenſurabilis longitudine. Eſt autem & ipſi DB, compoſita ex DB, AF, longitudine commenſurabilis; (quod compoſita ex DB, AF, dupla ſit ipſius DB.) Igitur cum vtraque AB, & compoſita ex DB, AF, longitudine ſit commenſurabilis ipſi DB, [c] erunt quoque AB, & compoſita ex DB, AF, longitudine inter ſe commenſurabiles; Ac propterea cum AB, compoſita ex AF, DB, tan-



a 5. ſec.
b 16. dec.
c 12. dec.

DB, tanquam vna, & ex FD, commenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. commenſurabilis longitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus poteſt quam C, quadrato rectæ FD, longitudine ſibi commenſurabilis.

SED iam AB, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque ſegmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine eſſe commenſurabiles. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus poſſe, quam C, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit recta AB, ipſi FD, longitudine commenſurabilis. Igitur cum tota AB, compoſita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commenſurabilis ſit longitudine ipſi FD; erit eadem AB, longitudine commenſurabilis reliquæ compoſitæ ex AF, DB, per coroll. propoſ. 16. huius lib. Eſt autem & compoſita ex AF, DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis, cum ipſius ſit dupla: Igitur cum vtraque AB, DB, longitudine ſit commenſurabilis compoſitæ ex AF, DB; [d] erunt quoque AB, DB, longitudine inter ſe commenſurabiles; Atq; adeò cum tota AB, compoſita ex AD, DB, commenſurabilis ſit longitudine ipſi DB; [e] erunt ipſæ AD, DB, longitudine quoque inter ſe commenſurabiles. Quocirca ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonſtrandum.

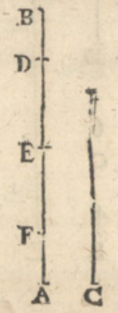
d 12. dec.
e 16. deci.

THEOR. 16. PROPOS. 19.

xviii.
xiiij.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incõmenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit, quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB; quartæ autem parti quadrati ex C, minore deſcripti applicetur ad AB, per 2. lemma propoſ. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incommenſurabiles. Dico AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur demonſtrare oportet ipſi A, longitudine eſſe incommenſurabilem. Quoniam rectæ AD, DB, ponuntur longitudine incommenſurabiles; [a] erit quoque tota AB, parti DB, longitudine incommenſurabilis. Sed DB, longitudine commenſurabilis eſt compoſitæ ex DB, AF, cum hæc illius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commenſurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF, ipſa DB, longitudine ſit incommenſurabilis rectæ AB: [b] erit quoque reliqua compoſita ex DB, AF, eidem AB, longitudine incommenſurabilis: Ac propterea cum AB, compoſita ex AF, DB, tanquam vna, & ex FD, incommenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex AF, DB, erit eadem AB, per coroll. propoſ. 17. huius lib. & reliquæ FD, longitudine incommenſurabilis. Ergo AB, plus poteſt quam C, quadrato rectæ FD, longitudine ſibi commenſurabilis.



a 17. dec.
b 14. dec.

IAM vero AB, plus poſſit quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque in recta AB, partes AD, DB. Dico & rectas AD, DB, eſſe incommenſurabiles longitudine. Iiſdem enim conſtructis, oſtendemus vt prius, rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus poſſe, quam C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis: erit AB, ipſi FD, incommenſurabilis longitudine. Igitur cum tota AB, compoſita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, longitudine incommenſurabilis ſit ipſi FD; erit eadem AB, per coroll. propoſ. 17. huius libr. & reliquæ compoſitæ ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis: Eſt autem compoſita ex AF, DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis, cum illa huius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commenſurabilium, nempe quæ ex AF, DB, componitur, & DB, ipſa compoſita ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis ſit rectæ AB, [c] erit & reliqua DB, eidem AB, longitudine incommenſurabilis: Ac proinde cum tota AB, compoſita ex AD, DB, incommenſurabilis ſit ipſi DB, longitudine; [d] erunt & ipſæ AD, DB, longitudine inter ſe incommenſurabiles. Quam ob rem ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 14. dec.
d 17. dec.

SCHOLIVM

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus; nunc ad Rationales & Medias tranſit in ſequentibus.

LEMMA 1.

QVONIAM demonſtratum eſt, lineas longitudine commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles eſſe, potentia vero commenſurabiles, non omnino & longitudine, ſed poſſe & longitu-

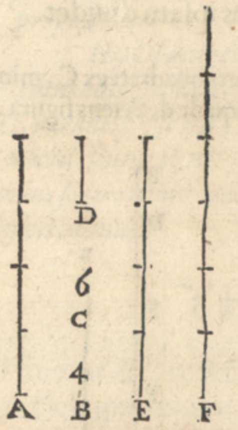
dine commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles; manifeſtum eſt, ſi expoſitæ Rationali aliqua linea commenſurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si vero expoſitæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quod ſi expoſitæ Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis; dicetur & ſic Rationalis, potentia tantum ipſi commenſurabilis.

LEMMA II.

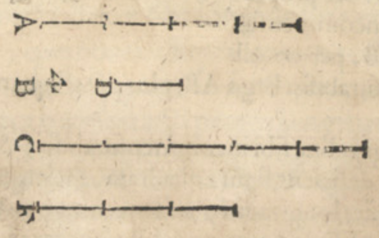
EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expoſitæ Rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolum commenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur Rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus Rationales; commenſurabiles, inquam, inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum: Et ſi quidem longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur, etiam potentia commenſurabiles eſſe; Si vero potentia inter ſe ſolum ſunt commenſurabiles: dicuntur ipſæ quoque Rationales, potentia ſolum inter ſe commenſurabiles.

SCHOLIVM.

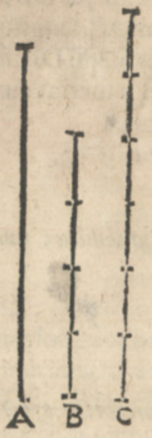
ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique vtra poſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia. Hæc autem tria genera inuenimus hoc modo. Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes, quot nimirum vnitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D, ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cum habeant D, communem menſuram. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarum vna nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.



IAM vero D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita vt vtraque linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communem D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles Rationales ſunt. Cum ergo & inter ſe ſint longitudine commenſurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

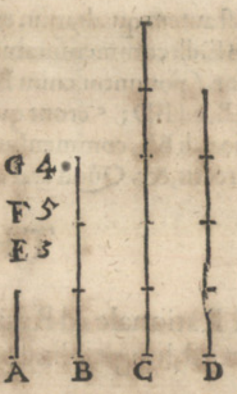


a 11. dec. *POSTREMO expoſitæ Rationali A, [a] inueniatur recta B, longitudine tantum incommenſurabilis, quæ ſecetur in quotcunque partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolum eſſe commenſurabiles. Quoniam enim A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeo & potentia;* b 12. dec. *[b] Igitur quadrata rectarum A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A; longitudine incommenſurabilis;* c 14. deci. *[c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolum potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia vero tantum commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.*



QVOD

QVOD ſi quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta menſura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipſi A, æqualibus, quot ſunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem menſuram A, longitudine commenſurabiles erunt.

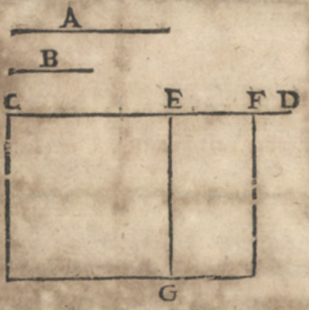


CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe eſſe commenſurabiles, facile hoc modo demonſtrabimus. [d] Quoniam Rationales lineæ ſunt, quæ expoſitæ Rationali ſunt commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [e] quæ autem eidem commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt; manifeſtum eſt, Rationales lineas quaſcunq; inter ſe commenſurabiles eſſe.

d 6. def.
e 12. ſexti.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur; Et vt ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima.



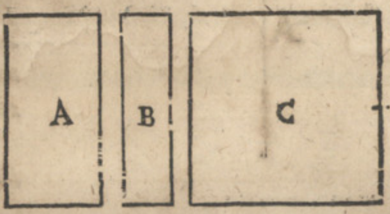
SINT duæ rectæ A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum ſub A & B, comprehenſum. Ex quantacunque enim linea recta CD, abſcindatur CE, ipſi A, æqualis & EF, ipſi B. Deinde ſuper CE, deſcribatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum ſub CE, & EF, hoc eſt, ſub A, & B. [f] Quoniam igitur eſt vt CE, ad EF, hoc eſt, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc eſt, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, ſub A, & B, comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, vt quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.

f 1 ſexti.

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod eſt propoſitum.

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile; & ipſum Rationale eſt.



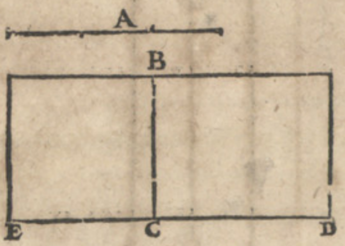
SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit namque C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod nimirum ab expoſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur B, Rationale eſt, [g] erit ipſum Rationali C, commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cum commenſurabilia ſint ipſi B, [h] inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripto commenſurabile, [i] Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.

g 9. def.
h 12. dec.
i 6. def.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

xix.
xv.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.



SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus BC, CD, ſecundum aliquem prædictorum modorum, (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorum, quos in ſcholio 2. antecedentis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarum BC, CD. Rationali expoſitæ A, ſit æqualis, vel neutra, ſed tamen ei vtraq; commenſurabilis ſit aut longitudine aut potentia tantum. Dico BD, rectangulum Rationale eſſe. Deſcribatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expoſitæ A, commenſurabilis eſt vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum: [a] erit quoq; quadratũ BE, ex BC, deſcriptũ quadrato ex A, cõmenſurabile:

a 3. defin.

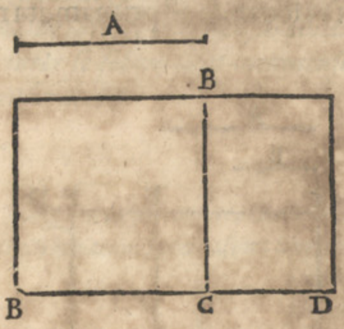
b 8. *def.* bile: [b] Eſt autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. c 9. *def.* Igitur & BE, illi commenſurabile, Rationale eſt. Quia vero BC, hoc eſt, EC, & CD, longitudine commenſurabiles ſunt, (ponuntur enim BC, CD, Rationales inter ſe longitudine commenſurabiles.) [d] & eſt vt EC, ad d 1. *ſexti.* CD, ita EB, ad BD; [e] erunt quoque EB, BD, commenſurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propoſ. e 10. *dec.* BD, Rationali BE, commenſurabile, Rationale eſt. Quod igitur ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis, &c. Quod erat demonſtrandum.

xx.
xvi.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

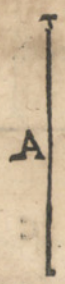
SI Rationale ad Rationale applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.

SIT rurſum expoſita Rationalis A, & alia Rationalis BC, ſecundum aliquem modorum, quos in ſcholio 2. propoſitionis 19. expoſuimus, hoc eſt, ſiue BC, æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non, commenſurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad B C, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi BC, commenſurabilem longitudine. Deſcribatur enim ex BC, quadratum BE; quod ſimiliter, vt in antecedenti propoſ. oſtendemus a 9. *defin.* Rationale eſſe. Quia igitur BE, BD, Rationalia ſunt, [a] ipſa cō- b 11. *dec.* menſurabilia erunt quadrato ex linea Rationali expoſita A, de- c 1. *ſexti.* ſcripto; [b] Ac propterea & commenſurabilia inter ſe erunt: [c] Eſt autem vt BE, ad BD, ita EC, hoc eſt, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commenſurabiles ſunt longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. docuimus. Eſt ergo CD, ipſi BC, commenſurabi- d 6. *def.* lis longitudine: [d] ſed & Rationalis, quippe q̃ Rationali BC, atq; adeo Rationali expoſitæ A, commenſurabilis ſit, vt in ſch propoſit. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis eſt: & longitudine commenſurabilis ipſi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonſtrandum.



LEMMA I.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.



POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius libr. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

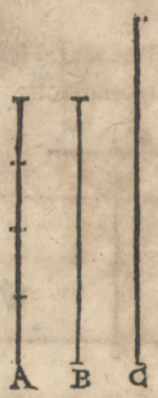
HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tantum inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, [e] *inueniatur C, longitudine tantum incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum incommenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.*

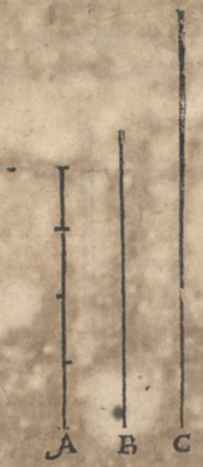
e 11. *dec.*



POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantum incommenſurabilis [f] *inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quod enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles, erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſit. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraq; B, C, expoſitæ Rationali A, ſit potentia commenſurabilis;* [g] *erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles.*

f 21. dec.

g 6. defin.



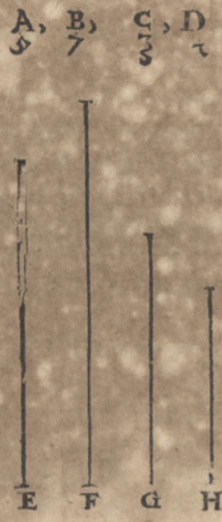
SCHOLIVM

QVOD ſi inueniendæ ſint quotcunq; lineæ Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales, & potentia tantum commenſurabiles inter ſe. Quod enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (Nēpe quadratū ex E, ad quadratū ex F, vt numerus A, ad numerū B, ex conſtructione; ſimiliterq; quadratū ex F, ad quadratū ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratū ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratū ex E, ad quadratū ex G, vt A, ad C; ſimiliterq; quadratū ex E, ad quadratū ex H, vt A, ad D; & deniq; quadratū ex F, ad quadratū ex H, vt B, ad D.) [h] *erunt ipſa inter ſe cōmenſurabilia; ac propterea & rectæ ipſæ potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.* [i] *Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*

h 6. dec.

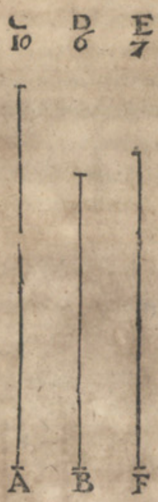
i 9. dec.



QVOD ſi propoſitis quotcunq; Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantum ſi, et id hoc modo. Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur,) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, [k] *commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. oſtendimus; (quod D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoq; plani non ſimiles, ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)* [l] *erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.*

k 6. dec.

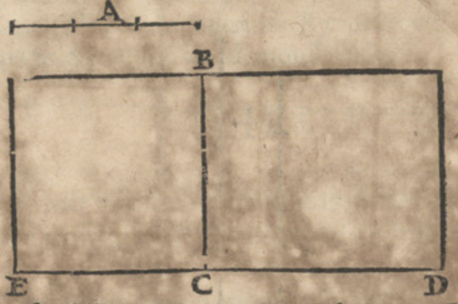
l 9. dec.



THEOR. 19. PROPOS. 22. xxi. xix.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum BD, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum BE, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus.



a 1. *ſexti.* [a] Et quoniam eſt vt EC, hoc eſt, BC, ad CD, vt BE, ad BD: Eſt autem BC; ipſi CD, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipſi BD, incommenſurabile. b 9. *defin.* [b] Quare cum BE, commenſurabile ſit quadrato ex rationali expoſita A, ſit autem BE, ipſi BD, incommenſurabile; c 14. *dec.* [c] erit quoque quadratum ex Rationali expoſita A, eidem BD, incommenſurabile: Ac propterea BD, quadrato Rationalis expoſitæ incommenſurabile exiſtens, d 10. *def.* [d] Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum BD, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis.

e 17. *ſexti.* VOCETVR autem hæc linea potens ipſum BD, Media, [e] propterea quod media proportionalis eſt inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, quippe cum eius quadratum æquale ſit rectangulo BD, ſub ipſis BC, CD, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, Media vocabitur. f 17. *ſexti.* [f] *Cum enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile deſcribemus, ſi dicamus eam eſſe lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum. Nam ſola hæc linea Media hoc loco appellatur.*

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non ſolum rectæ potens rectangulum Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Irrationalis eſt vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipſius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolum commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continue proportionales, quales ſunt, BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterq́; deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata, proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptum medium proportionale eſt inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari poteſt.

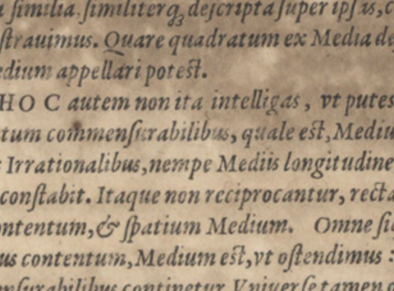
HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quale eſt, Medium BD. Hoc enim falſum eſt, cum & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Mediis longitudine, vel potentia tantum inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum, ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alia, recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilib. comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

xxii.
xx.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

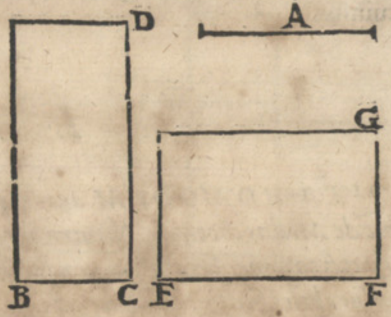
QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.



SIT linea Media A, & Rationalis BC, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, tantum a 45. *primi.* [a] applicetur que ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatq́; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi BC, longitudine incommenſurabilem. Quoniam enim A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duas rectis Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum, alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, ſub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commenſurabilibus contentum

Et quia

Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum BD, æqualia erunt BD, & EG, [b] lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos nempe erit vt BC, ad EF, ita FG, ad CD [c]; Ac propterea quoq; vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex CD: Sed quadratum ex BC, commenſurabile eſt quadrato ex EF. (quod rectæ BC, EF, ponãtur Rationales: atq; adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur [d] & quadratum ex FG, commenſurabile erit quadrato ex CD: proptereaq; & rectæ FG, CD, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expoſitæ Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa non eſt expoſita Rationalis; erit quoque CD, expoſitæ Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommenſurabilis ipſi BC. Quoniam enim EF, FG, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt EF, ad FG, ita quadratum ex EF, ad rectangulum EG, ſub EF, FG, contentum, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. [e] erit quadratum ex EF, incommenſurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum ex EF, commenſurabile eſt quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales ſint, atque idcirco ſaltem potentia commenſurabiles.) Igitur cum quadrato ex CD, commenſurabile ſit quadrato ex EF, at rectangulum BD, eidem quadrato ex EF, incommenſurabile; [f] incommenſurabilia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Eſt autem ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulum BD, vt recta CD, ad rectam BC. [g] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo eſt CD, & Rationali BC, longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit ad rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.



b 14. ſext.
c 22. ſexti.
d 10. dec.
e 10. dec.
f 13. dec.
g 16. dec.

S C H O L I V M.

FACILIVS quam ex propoſ. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, ſi ipſis BC, & A, [h] ſumatur tertia proportionalis pro latere CD. Cum enim BC, A, & CD, proportionales ſint; [i] erit rectangulum BD, ſub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.

h 11. ſexti.
i 17. ſexti.

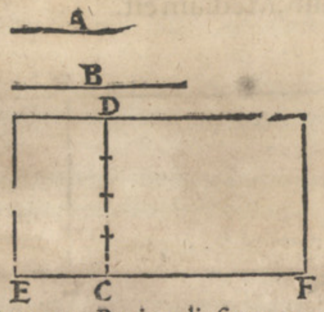
HAC arte vtendum erit & in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuſpiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifeſtum eſt omne Medium, hoc eſt, ſpatium, quod linea Media poteſt, æquale eſſe cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus. Nam ſi illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommenſurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunq; Medium reduci poterit ad Medium contentum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIÆ commenſurabilis, Media eſt.

SIT Mediæ A, recta B, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & B, mediam eſſe. Expoſita enim ſit Rationalis CD, [a] ad quam applicetur rectangulum DE, æquale quadrato ex A Media. Quoniam igitur DE, Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit CE, latitudinem; [b] erit CE, Rationalis ipſi CD, longitudine incommenſurabilis. Rurſus ad CD, Rationalem [c] applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, DE, DF, commenſurabilia. [d] Eſt autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. [e] Igitur EC, CF, longitudine ſunt commenſurabiles: Sed EC, oſtenſa eſt Rationalis; & longitudine ipſi CD, incommenſurabilis. [f] Igitur & CF, longitudine eidem CD, incommenſurabilis eſt. Cum ergo Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ CD, ſit commenſurabilis; (Nam cum EC, CF, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & EC, ipſi CD, commenſurabilis ſaltem potentia, quod Rationalis ſit; erit & CF, eidem CD, commenſurabilis potentia ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus.) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commenſurabiles, [g] Ac proinde recta B, potens rectangulum DF, ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD CF, Media eſt. Mediæ igitur commenſurabilis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.



a 45. primi.
b 23. dec.
c 45. prim.
d 1. ſexti.
e 10. dec.
f 14. dec.
g 22. dec.

C O R O L L A R I V M.

EX hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabile Medium eſſe. Poſtquam enim demonſtratum eſt DF, commenſurabile eſſe Medio DE, oſtenſum ex eo mox fuit DF, eſſe quoque, Medium nimirum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD, CF, contentum. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

SIT ſpatium DF, ſpatio Medio DE, commenſurabile. Dico & DF, Medium eſſe. Poſſit enim A, Media ipſum DE, Medium. (Nam cum DE, Medium ſit, poterit ipſum recta, quæ Media dicitur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipſum DF. Quoniã igitur DE, DF, commenſurabilia ſunt, erunt quoq; qua-

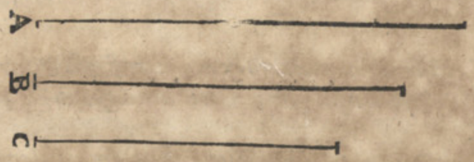
drata ex A,B,ipſis æqualia, commenſurabilia. Qare A,B,rectæ potentia ſaltem ſunt commenſurabiles; Atque idcirco exiſtente A, Media,erit & B,illi commenſurabilis Media, vt in hoc theoremate oſtenſum eſt. Igitur & DF, Medium erit. Omne enim ſpatium,quod poteſt Media, Medium appellatur,vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus.

I. LEMMA.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propoſ. 19. huius lib. de Rationalibus dictum eſt, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commenſurabilem, dici Mediam, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed & potentia. Vniuerſe enim quæ longitudine commenſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & potentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media ipſi potentia ſolum commenſurabilis.

II. LEMMA.

DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.



a 24. dec *SIT Media aliqua linea A, cui ſi inueniantur duæ rectæ commenſurabiles B, C; illa quid longitudine, hæc vero potentia tantum; [a] erit vtraq; B,C, Mediæ A, commenſurabilis, Media. Cum ergo A, B, ſint longitudine commenſurabiles; & A, C, potentia tantum; erunt inuentæ A,B, Mediæ longitudine commenſurabiles; & A,C, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*

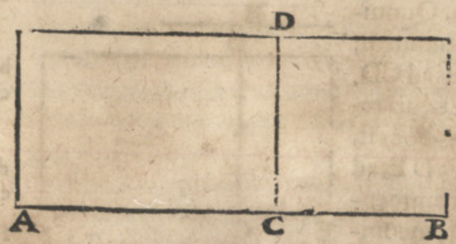
SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commenſurabilis, Media ſit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis; cum duæ Mediæ dari poßint prorſus incommenſurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propoſ. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ ſint duæ Mediæ longitudine & potentia incommenſurabiles.

xxiiii. xxiii.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.



a 1. ſexti. CONTINEATVR rectangulum AD, ſub Mediis AC, CD longitudine commenſurabilibus. Dico AD, Medium eſſe. Deſcribatur ex CD, Media quadratum BD, quod erit Medium. [a] Et quoniam eſt vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autem AC, CB, hoc eſt, AC, CD, longitudine commenſurabiles; erunt AD, DB, commenſurabilia. Quare ſpatium AD, Medio DB, commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. præcedentis propoſ. Quod ergo ſub Mediis longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

xxv. xxiii.

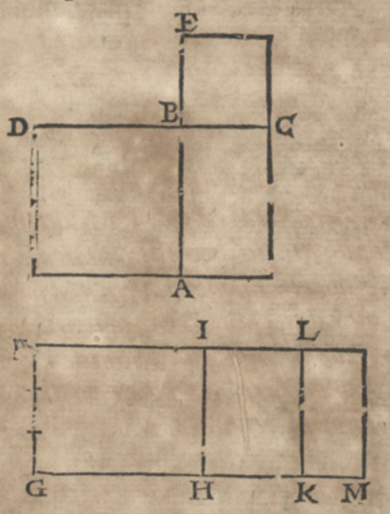
THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD ſub Mediis potentia tantum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehenſum ſub Mediis AB, BC, potentia tantum commenſurabilibus. Dico AC, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. ducuimus, cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, [a] ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, deſcripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, deſcripto; eritque totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum propoſit 45. libr. 1. eſt oſtenſum. Quia vero AD, CE, Media ſunt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum a[illegible]licentur ad Rationales FG, KL,

a 45. primi.

FG,KL, ([b] eſt enim & KL. Rationali FG,æqualis,ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitu- b 34. prim.
dines GH,KM, [c] erunt rectæ GH,KM,Rationales, ipſi FG,ſeu KL,longitudine incommenſurabiles. Et quia c 23. dec.
rectæ AB, BC, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, e-
runt & earum quadrata AD, CE,atque adeo & ipſis æqualia
rectangula FH,LM,commenſurabilia: [d] Vt autem FH, ad
LM,ita eſt recta GH, ad KM. [e] Igitur GH, KM, longitu- d 1. ſexti.
dine inter ſe commenſurabiles ſunt. Quare GH,KM,Ratio- e 10. dec.
nales oſtenſæ, ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles,
Rationali vero FG, ſolum commenſurabiles potentia,cum
ei oſtenſæ ſunt longitudine incommenſurabiles; [f] Ac pro- f 20. dec.
pterea rectangulum ſub ipſis GH, KM, Rationale eſt. Et
quoniam eſt,vt DB,ad BC, ita AB, ad BE, (quod DB, BC, g 1. ſexti.
ipſis AB,BE,ſint æquales,vtraq; vtriq;.) [g] & vt DB,ad BC,
ita AD,ad AC; & vt AB,ad BE,ita AC,ad CE; erit quoque
vt AD,ad AC,ita AC,ad CE,atque adeo AD,AC,CE,pro-
portionalia ſunt. Igitur & illis æqualia FH,HL,LM,propor-
tionalia erunt: [h] Habent autem rectæ GH, HK,KM, eaſ-
dem proportiones,quas rectangula FH,HL,LM. Igitur & h 1. ſexti.
rectæ GH,HK, KM, proportionales ſunt; [i] propterea que i 17. ſexti.



rectangulum ſub GH,KM,quadrato ex HK,æquale eſt. Eſt autem rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Ra-
tionale. Igitur & quadratum ex HK. Rationale eſt, ideoq; & recta HK, Rationalis erit: [k] & ob hoc ipſi FG,Ra- k 6. def.
tionali expoſitæ,hoc eſt,ipſi HI,commenſurabilis vel longitudine,& potentia,vel ſolum potentia. Et ſi quidem
HK, ipſi HI, longitudine ſit cõmenſurabilis, [l] rectangulum HL,ſub Rationalibus HI,HK,longitudine com- l 20. dec.
menſurabilibus contentum, hoc eſt,AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK,ipſi HI, potentia ſolum com- m 22. dec.
menſurabilis ſit, [m] erit rectangulum HL,ſub Rationalibus HI, HK,potentia tantum commenſurabilibus con-
tentum, hoc eſt, AC, illi æquale, Medium. Eſt ergo AC, rectangulum ſub Mediis AB, BC, potentia tantum
commenſurabilibus contentum,vel Rationale,vel Medium. Quocirca quod ſub Mediis potentia tantum com-
menſurabilibus,&c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propoſ. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipſi AC, æquale, [n] *ſi tribus rectis HI, AB, BC,* n 12. ſexti.
quarta proportionalis ſumatur pro latere HK. [o] *Nam rectangulum ſub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo ſub mediis* o 16. ſexti.
AB, BC.

HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alter rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Mediis potentia tantum commenſurabilibus eſſe vel Rationale,vel Medium, docebit Euclides propoſ. 28. quanam ratione inueniendæ ſint duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles,quæ Rationale comprehendant: Propoſ. vero 29. duas Medias potentia ſolum incommenſurabiles inquiret,quæ ſpatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, [p] *rectangulum contentum ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe* p 20. dec.
Rationale: [q] *Sub duabus vero rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum rectangulum eſſe Irrationale,* q 22. dec.
appellarique Medium, & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat, [r] *rectangulum comprehen-* r 25. dec.
ſum ſub duabus Mediis longitudine commenſurabilibus eſſe medium; [s] *rectangulum autem ſub duabus Mediis potentia ſo-* s 26. dec.
lum commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel Medium.

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Mediis longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituere, nempe æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulum AC, comprehenſum ſub duabus Mediis AB, BC, longitudine, & potentia incommenſurabilibus.
Dico AC, neq; Rationale eſſe, neq; Medium, &c. Conſtructis enim eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH,
KM, Rationales eſſe, & ipſi FG, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponuntur incommenſurabiles longi-
tudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo ipſis æqualia rectangula FH, LM: incommenſurabilia, [t] t 1. ſexti.
Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad rectam KM. [u] *Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabi-* u 10. dec.
les. Quare GH, KM, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia tantum inter ſe commenſurabiles [x] *Ac propterea rectangulum ſub*
ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media. [y] *Poteſt au-* x 22. dec.
tem rectangulum ſub ipſis GH, KM, recta HK; (Nam vt prius oſtendemus, tres GH, HK, KM, eſſe proportionales.) Igitur HK, y 17. ſexti.
Irrationalis eſt, & Media. Quare IK, Rationale non eſt: ſi enim Rationale eſſet, [z] *faceret ipſum ad Rationalem HI, appli-* z 21. dec.
catum latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum, oſtenſa enim eſt HK, Irra-
tionalis, ac Media. Eodem modo neque IK, Medium eſt; ſi enim eſſet Medium, [a] *faceret ipſum applicatum ad Rationalem* a 23. dec.
HI, latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine incommenſurabilem, quod eſt abſurdum, oſtenſa eſt enim HK. Irra-
tionalis & Media. Itaq; cum IK, neque Rationale ſit, neq; Medium; neceſſario neq; AC, illi æquale, Rationale erit, neq; Me-
dium, ſed tertium quoddam genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi IK, quod ſub Rationali, & Media continetur, cum HI,
Rationalis ſit, & HK, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ poteſt ſpatium ſub duabus Mediis longitudine & poten-
tia incommenſurabilibus, quales ponuntur AB, BC, comprehenſum, poſſe quoque rectangulum ſub Rationali, & Irrationali,
quæ Media vocatur, contentum. Quod eſt propoſitum.

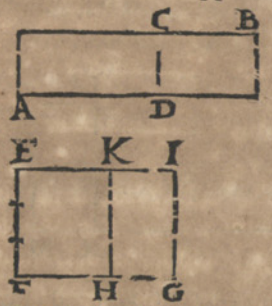
xxvi.
xxii.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

a 45. prim. — b 23. dec. — c 34. pri. — d 21. dec. — e 14. dec. — f 10. dec. — g 16. dec. — h 17. dec. — i 4. ſec. — k 10. dec. — l 11. dec.

SVPERAT Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non eſſe Rationale. Sit enim, ſi fieri poteſt, DB, Rationale. Expoſita ergo Rationali linea EF, [a] ad ipſam applicetur rectangulum EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt ſit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, ſunt applicata, [b] erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipſi EF, incommenſurabiles longitudine. Rurſus quia Rationale HI, applicatum eſt ad Rationalem HK, ([c] eſt enim recta HK, Rationali EF, æqualis) [d] erit recta HG, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine ſint commenſurabiles; & EF, ipſi FH, longitudine incommenſurabilis, vt eſt oſtenſum [e] erit & HG, eidẽ FH, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum ſub FH, HG, ex tertio lemmate propoſ. 19. huius lib. [f] Igitur quadratum ex FH, incommenſurabile eſt rectangulo ſub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commenſurabile eſt quadratum ex HG, (quod ſint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, deſcripta) [g] atque adeo & duo quadrata ex FH, HG, ſimul, quadrato ex FH, commenſurabilia ſunt: Et rectangulo ſub FH, HG, commenſurabile eſt id, quod bis continetur ſub FH, HG, (quia hoc illius eſt duplum.) Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſtendimus, & duo quadrata ex FH, HG, ſimul incommenſurabilia ſunt rectangulo ſub FH, HG, bis. [h] Quare & compoſitum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis ſub FH, HG, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum FH, HG. [i] At quadratis ex FH, HG, vna cum rectangulo bis ſub FH, HG, æquale eſt quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum FH, HG: Eſt autem compoſitum hoc Rationale, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. quod oſtenſit commenſurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cum huic compoſito, quod rationale eſt, incommenſurabile ſit quadratum ex FG, [k] erit quadratum ex FG, Irrationale [l] ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod eſt abſurdum, oſtenſa enim eſt FG, Rationalis longitudine ipſi EF, incommenſurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, ſuperat Medium AC, Rationale eſt. Quam ob rem Medium non ſuperat Medium Rationali. Quod erat oſtendendum.



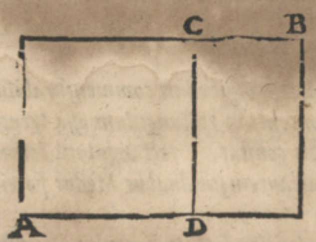
SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonſtrabimus.

RATIONALE ſuperat rationale Rationali.

m 9. def. — n 12. dec.

RATIONALE enim AB, ſuperet Rationale AC, ſpatio DB. Dico DB, quoque eſſe Rationale. Quoniam enim AB, AC, Rationalia ſunt; [m] erunt AB, AC, commenſurabilia quadrato Rationalis expoſita; [n] atque adeo & inter ſe commenſurabilia. Quare cum totum AB, compoſitum ex AC, DB, commenſurabile, ſit ipſi AC, erit quoq; idem AB, reliquo DB, commenſurabile, ex coroll. propoſit. 16. huius lib. Eſt autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. Rationale eſt. Quod eſt propoſitum.



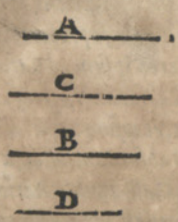
xxvii.
o.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

a 13. ſexti. — b 12. ſexti. — c 22. dec. — d 17. ſexti. — e 24. dec. — f 17. ſexti.

EXPONANTVR per lemma 2. propoſ. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles, [a] inter quas media proportionalis ſumatur C, [b] fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commenſurabiles; [c] erit rectangulum ſub ipſis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo [d] cum ipſum poſſit recta C, erit C, Media. Et quoniam eſt vt A, ad B, ita C, ad D, ſuntque A, B, potentia tantum commenſurabiles; erunt quoq; C, D, ſolum commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus [e] Eſt ergo & D, Mediæ C, commenſurabilis Media. Quare inuentæ ſunt Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Rationale. Quoniam enim eſt vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt autem A, ad C, ita eſt C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D, ideoque media proportionalis inter C, & D, [f] poterit rectangulum ſub ipſis C, D, comprehenſum. Eſt autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub C, D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

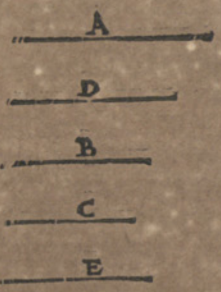


PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 29.

xxviii. o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant.



EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus, tres Rationales A,B,C, potentia tantum commenſurabiles, [a] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [b] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D,E, Medias eſſe potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim AB, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: erit rectangulum ſub A,B, atq; adeo & quadratum ex D, [c] quod illi æquale eſt, [d] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E, ſunt autem B,C, Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; erunt quoque D,E, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D, Media ſit, [e] erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis, Media; Ac propterea D,E, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Medium. Quoniam enim eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [f] Rectangulum igitur ſub DE, æquale eſt ei quod ſub A,C: Eſt autem quod ſub A,C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus [g] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D,E, Medium eſt. Medias ergo inuenimus D,E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

a 13. ſexti.
b 12. ſexti.
c 17. ſexti.
d 22. dec.
e 24. dec.
f 16. ſext.
g 22. dec.

SCHOLIVM. I.

IN iis quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

A,	6.	C,	12.
B,	4.	D,	8.
E,	24.	F,	96.

SVMANTVR quatuor quicunq; numeri proportionales, A,B,C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem ſunt mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

QVONIAM autem in lib. 9. [h] oſtenſum eſt, ſi impar numerus, vel par parē multiplicet, procreari numerū parem: Imparem vero, ſi impar multiplicet imparem, perſpicuum eſt, quonam modo inueniri poſſint duo plani ſimiles, quorum vterque par ſit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera ſumpta ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares, numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

h 28. & 29. noni.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.

A . . . . . E . . . . . D . . . . B
C . . . .

INVENIANTVR per ea, quæ in ſcholio proximo dicta ſunt, duo plani ſimiles AB, & C, quorum vterque vel par ſit, vel impar. [i] Et quoniam, ſiue à pari par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; detracto BD, ex AB, qui æqualis ſit ipſi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiſo bifariam in E; Dico numerum factum ex AB, in BD, [k] qui quidem quadratus eſt, compoſitū cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam eſt diuiſus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compoſiti faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod eſt propoſitum.

i 24. & 26. noni.
k 1. noni.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, quando AB, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum exceſſus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus ſit.

QVOD ſi numeri ſumantur AB, & C, non ſimiles, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum BE, ED, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex AB, BD, non eſt quadratus. Si enim quadratus eſſet, [l] numeri AB, BD, hoc eſt, AB, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

l 2. noni.

SCHOLIVM. III.

ITAQVE ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterque par, vel impar ſit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex BE, E D, deſcripti ſunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex BE, quadratum ex ED, numero, qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus eſt.

A ..... E ..... D .... B
C ....

SI vero inueniendi ſunt duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani AB, & C, non ſimiles, quorum vterq; par ſit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam ſimiliter oſtendemus quadratum ex BE, æqualem eſſe quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare exceſſus quadratorum ex BE, ED, eſt numerus factus ex AB, in BD, qui cum non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent AB, BD, plani ſimiles, quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A ... E ... D .... B
C ....

HOC poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunq; quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

SINT duo numeri plani ſimiles A B, & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatque eadem conſtructio, ita vt rurſus quadratus, qui fit ex multiplicatione ſimilium numerorum AB, DB, inter ſe, vna cum quadrato ex DE, æqualis ſit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE,

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B

C . . . .

vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe fit compoſitos non efficere numerum quadratum. Nam ſi compoſitus ex ipſis eſt quadratus, erit is vel maior quadrato ex B F, vel æqualis, vel minor: quod fieri non poſſe, in hunc modum demonſtrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex B F; ac propterea latus ipſius maius latere B F, Erit ergo latus ipſius vel æquale numero B E, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur; Eſſet autem dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quam B F, minus vero quam B E.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex B E, æqualis ſit quadratus numerus compoſitus ex quadrato, qui fit ex AB, in B D, & ex quadrato numeri D F; cum eidem quadrato ex B E, ſit oſtenſus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in BD, vna cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E, Ablato ergo communi, eo ſcilicet, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri D E, æquale pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe fit, æquale eſt numero B E. Sed neque maius. Sit enim ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quam B E, ita vt quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex, B I, latere maiore, maior eſt quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe fit, (cum hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B

C . . . .

D F, latere D E, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ſit ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neq; æquale, neq; minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex B F.

SIT

SIT iam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus AH, duplus vnitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus eſt (diuiſus enim eſt AD, in E, biſariam) & ablatus AH, ablatæ vnitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui FD, duplus, ex ijs, quæ ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco HD, in F, biſariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis eſt ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cum HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros, a habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipſi AB, æqualis pars, toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. ſept.

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod ſit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vna cũ quadrato ex DF, æqualis ſit quadrato ex BG. Sumatur autem ipſius EG, *duplus* AI. *Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus eſt, & ablatus AI, ablati EG; erit rurſus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur biſariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum; quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus, qui fit ex IB, in BD, vna cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis, qui fit ex* AB, *in* BD; *vna cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex*

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B
C . . . .

IB, *in* BD, *vna cum quadrato ex DG, æqualis eſt ei, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor eſt, remanebit qui ex* IB, *in* BD, *maior eo, qui* AB, *in* BD, *pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo qui ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex* BF. *Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex* AB, *in* BD, *vna cum quadrato ex DF. Quod eſt propoſitum.*

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

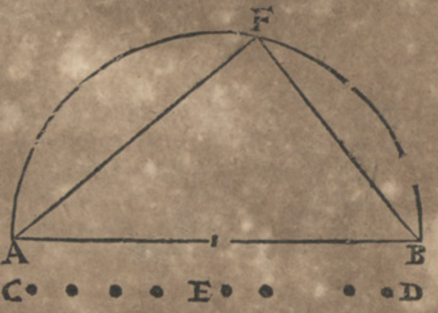
IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

PROBL. 6. PROPOS. 30. xxix. xvij.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in ſcholio 2. propoſ. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum exceſſus DE, non ſit quadratus. Deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum, ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF, accommodeturque AF, in ſemicirculo ABF, circa diametrum AB, deſcripto: ac denique connectatur recta FB. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; [b] erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB, hoc eſt, recta AB, plus poterit quam AF, quadrato rectæ FB. Et quia eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE, [c] erũt quadrata ex AB, AF; commenſurabilia; atq; adeo cum quadratum ex AB, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali AB; deſcriptum; erit & quadratum ex AF, Rationale, propterea que & recta AF, ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt AB, AF, atque adeo commenſurabiles ſaltem potentia. Quia vero quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; alias & DE, quadratus eſſet, [d] vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, quod non ponitur) [e] erunt rectæ AB, AF, longitudine incommenſurabiles. Sunt autem commenſurabiles potentia, vt oſtenſum eſt. Igitur AB, AF, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles.

a 31. tertij.
b 47. prim.
c 6. dec.
d 74. oct.
e 9. dec.



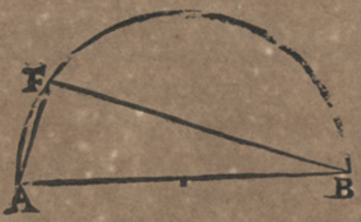
IAM vero, quoniam eſt vt CD; ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuerſionem rationis, vt quadratus numerus CD, ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, (ſicut enim CD, ſuperat DE, quadrato CE, ita etiam quadratum ex AB, ſuperat quadratum ex AF, quadrato ex FB.) [f] Quare rectæ AB, FB, longitudine commenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſſit, quam minor AF, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat. f 9. dec.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

xxx. xviij. INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propoſ. 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, ED, ita vt ex illis compoſitus CD, non ſit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, ſecetur in duos numeros non quadratos CE, ED: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD, ad neutrum ipſorum CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, alias ſecundum priorem modum, eſſet totus CD, etiam quadratus: iuxta poſteriorem vero, quilibet ipſorum CE, ED, quadratus quoque,[a] vt in Arithmeticis oſtenſum eſt, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodeturque AF, in ſemicirculo AFB, circa AB, deſcripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quam AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia ſolum commenſurabiles: Eadem enim hic eſt demonſtratio, quæ in præcedenti propoſ. Quoniam vero rurſus, vt prius, eſt per conuerſionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB; Non habet autem CD, ad CE, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. [b] Quare rectæ AB, FB, longitudine incommenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſſit quam minor AF, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod erat faciendum.

a 24. oct.

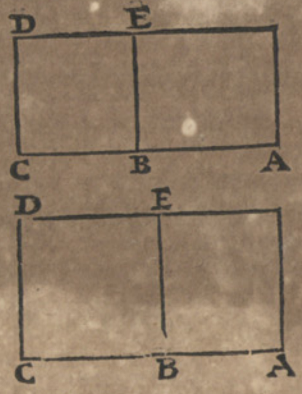


C 144. E 16. D. C, 160. D
C . . . . . . E . . . D

b 9. dec.

L E M M A.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum conſtitutæ, quarum AB, maior ſit. Dico eſſe, vt AB, ad BC, ita rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex BC. Deſcribatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturque rectangulum AD; eritque rectangulum AE, ſub AB, BC, contentum; quod EB, ipſi BC, ſit æqualis: c *perſpicuum autem eſt, eſſe vt AB, ad BC; ita AE, ad BD.*

c 1. ſexti.

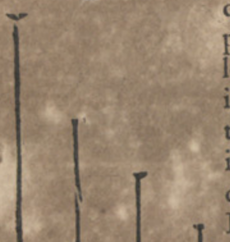
EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris, vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua AB, minor eſt, quam BC,

PROBL. 8. PROPOS. 32.

xxxj. xxiv. xxv. INVENIRE duas Medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

a 30. dec. [a] REPERTÆ ſint duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles: ita vt A, maior plus poſſit quam B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolum commenſurabiles;[b] erit rectangulum ſub A, B, Irrationale, & recta C, ipſum potens, linea Media: Et quia eſt vt A, ad B, ita C, ad D, ſunt autem A, & B, potentia tantum commenſurabiles; erunt quoque C, & D, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus.[c] Quare D, Mediæ C, commenſurabilis, Media quoque eſt. Inuentæ ergo ſunt duæ mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles. Dico eas rationale comprehendere. Cum enim ſit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; ſit autem vt A, ad C, ita C, ad B, erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D;[d] Ac propterea rectangulum ſub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem cum quadratum ex B, Rationali Rationale ſit, erit & rectangulum ſub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles, Rationale. Quoniam vero eſt vt A, ad B, ita C, ad D: Poteſt autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, ex conſtructione;[e] poterit quoque C, plus quam D, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus poſſit quam minor D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.

b 22. dec.
c 24. dec.
d 17. ſexti.
e 15. dec.



QVOD ſi repertæ ſint A, B, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſſit quam B quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: reliqua autem fiant, vt prius, oſtendemus eodem modo inuen

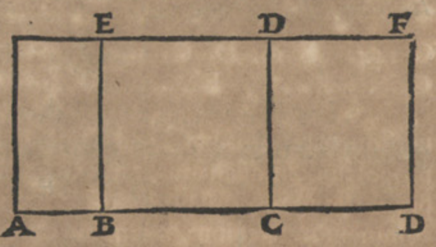
inuentas eſſe duas Medias C,D,potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus poſſit quam minor D,quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis.

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonſtrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem ſine ipſo oſtendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonſtratione hanc noſtram contulerint. Immo rectas C, D, Medias eſſe potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic oſtendimus, ac in propoſ. 28 huius lib.

LEMMA.

SI ſint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur.



SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum conſtitutæ. Dico eſſe vt AB, ad CD, ita rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub BC, CD. Deſcribatur enim ex BC, quadratum BCDE, perſiciaturque rectangulum AF; Eritque AE, contentum ſub AB, BC; & CF, ſub BC, CD; quod BE, CD, ipſi BC, æquales ſint. a Perſpicuum autem eſt eſſe AB, ad CD, vt AE, ad CF. Quod eſt propoſitum. a 1. ſexti.

PROBL. 9. PROPOS. 32.

xxxii. xxvj.

INVENIRE duas Medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.



SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum.[a] Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commenſurabilibus, ita vt A, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia ſolum commenſurabilis, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus.) [b] Et ipſarum AB, ſumatur media proportionalis D; [c] fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, eſt vt A, ad C, ita rectangulum ſub A, B, ad rectangulum ſub B, C: [d] Eſt autem rectangulo ſub A, B, æquale quadratum ex D, [e] & rectangulo ſub B, C, æquale rectangulum ſub D, E, quod proportionales ſint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia ſolum commenſurabiles. Ergo & D, E, potentia ſolum commenſurabiles ſunt, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus. [f] Quia vero D, potens ſpatium ſub A, B, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Irrationalis eſt, & Media; [g] erit quoque E, ipſi oſtenſa commenſurabilis media. Inuentæ ergo ſunt duæ Mediæ D, E, potentia ſolum commenſurabiles. Et quia oſtenſum eſt rectangulo ſub B, C, [h] quod Medium eſt, (quod B, C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles,) æquale eſſe rectangulum ſub D, E; erit rectangulum ſub DE, Medium. Deniq; quia oſtendimus eſſe vt A, ad C, ita D, ad E; poteſt autem A, plus quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ex conſtructione; [i] poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent, ita vt maior D, plus poſſit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quod erat faciendum.

a 30. dec. — b 13. ſexti. — c 12. ſexti. — d 17. ſexti. — e 16. ſex. — f 22. dec. — g 24. dec. — h 22. dec. — i 15. dec.

QVOD ſi repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, reliqua autem conſtruantur, vt prius, demonſtrabimus ſimiliter, inuentas eſſe duas Medias D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus poſſit quam minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facile apparere poteſt ex adducta demonſtratione.

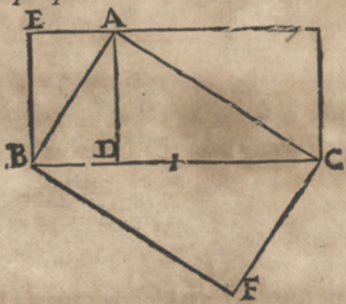
LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, à quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum ſub CB, BD, æquale eſſe quadrato ex AB: contentum autem ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC: & contentum ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum deniq; ſub BC, AD, æquale contento ſub AB, AC.

QVONIAM ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis eſt inter CD, BD; [k] erit rectangulum ſub CB, BD, quadrato ex AB, æquale. k 17. ſexti.

EADBM

EADEM ratione erit rectangulum ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniam per idem coroll. AC, media proportionalis eſt inter BC, CD.



RVRSVS quia ex eodem coroll. AD, inter ED, BD, DC, media proportionalis, erit eodem modo rectangulum ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

l 8. ſexti. m 16. ſexti. *POSTREMO, l quia triangula ABC, ABD, ſimilia ſunt; erit vt BC, ad AC, ita AB, ad AD.* m *Quare rectangulum ſub BC, AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, AC. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum ſub BC, AD: Item rectāgulum AF, ſub AB, AC, contentum.*

n 41. prim. n *Quoniam igitur rectangulum CE, duplum eſt trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula CE, AF. Quod eſt propoſitum.*

LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.



SECETVR recta AB, non bifariam in C, ſitque maior pars AC. Dico eſſe vt AC, ad CB, ita rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub AB, CB. Deſcribatur enim ipſius AB, quadratum ABDE, ducaturque CF, ipſi AE, parallela; eritque AF, contentum ſub AB, AC, & CD, contentum ſub AB, CB; quod AE, CF, ipſi AB, æquales ſint.

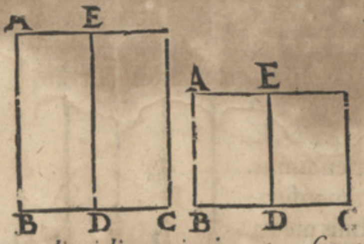
o 1. ſexti. o *Quoniam igitur eſt vt AC, ad CB, ita AF, ad CD; conſtat propoſitum.*

EADEM ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita contentum ſub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum ſub AB, CA, tota & maiore parte.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectanguli, quod ſub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum conſtituentes ABC, ſeceturque minor BC, bifariam in D. Dico rectangulum ſub AB, BC, duplum eſſe rectanguli ſub AB, BD. Compleatur enim rectangulum AC, ſub AB, BC, ducaturque DE, ipſi AB, parallela, eritque BE, contentum ſub AB, & BD, dimidia minoris.



p 1. ſexti. p *Quoniam igitur AC, ipſius BE, duplum eſt, quod & baſis BC, dupla ſit baſis BD, conſtat propoſitum.*

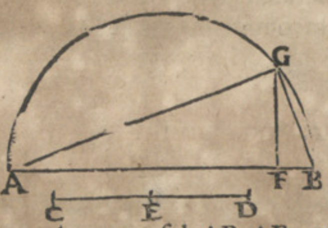
EODEM modo, ſi BC, ſecta bifariam, ſit maior, erit quod ſub AB, BC, continetur duplum eius, quod continetur ſub AB, minore & BD, dimidia maioris, vt ex ſecunda figura apparet.

xxxiii. xxvii.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis. Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Medium.

a 31. dec. [a] REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia ſolum commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſſit quam minor CD, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; ſeceturque CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc eſt quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & ſit illud quod ſub AF, FB, continetur. Poſtremo deſcripto ſemicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturque rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus poteſt, quam CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, applicatumque eſt ad AB, rectangulum ſub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata;



b 19. dec. [b] erit AF, ipſi FB, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propoſitionis antecedentis, rectangulum ſub AB, AF, ad rectangulum ſub AB, FB; Rectangulum vero ſub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum ſub AB, FB, quadrato ex GB, eſt æquale, per

c 31. tertij. lemma 1. eiuſdem antecedentis propoſitionis; [c] qnod angulus AGB, rectus ſit in ſemicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB, ac propterea cū AF, FB, lōgitudine ſint incōmenſurabiles; [d] erunt quadrata ex AG, GB, incommenſurabilia. [e] Igitur rectæ AG, GB, potentia incommen-

d 10. dec. ſurabiles ſunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale eſt, [f] æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam

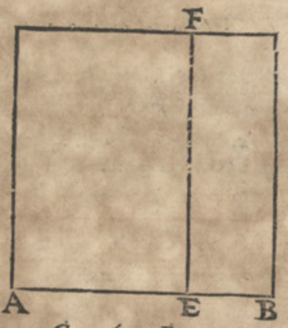
e 4. def. f 47. prim. compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rurſus, quia ex 1. lemmate propoſitionis præcedentis

g 17. ſexti. rectangulum ſub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale eſt factum, [g] æquale eſt quadrato ex FG, (propterea quod angulus AGB, rectus eſt & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ

rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla exiſtens ipſius CE, dupla etiam erit ipſius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propoſitionis, rectangulum ſub AB, CD, duplum erit rectanguli ſub AB, FG, (cum FG, dimidia ſit minoris CD.) [h] Sed rectangulum ſub AB, CD, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, contentum, Medium eſt. Igitur & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, cum ſit eius dimidium, Medium eſt, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Atqui rectangulo ſub AB, FG, per 1. lemma propoſitionis præcedentis, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB. Contentum igitur ſub AG, GB, Medium quoque eſt: Oſtenſum autem eſt compoſitum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Medium. Quod faciendum erat. h 22. dec.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in ſcholio quodam antiquo, fieri poſſe, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale, hac fere ratione.



EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior ſit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatque vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem deſcripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur eſt vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum; [i] erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommenſurabilia; Ac propterea cum AB, tota longitudine ſit incommenſurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommenſurabilis, ex coroll. propoſ. 17. huius lib. [k] Vt autem AB. ad AE, ita eſt quadratum ex AB, ad AF. Igitur cum AB, AE, incommenſurabiles ſint longitudine, [l] erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommenſurabilia: Quare quadrato ex AB, exiſtente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommenſurabile, Irrationale, eodemq; argumento oſtendemus BF. Irrationale eſſe. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB, perſpicuum eſt, ex duobus Irrationalibus confici Rationale. Quod eſt propoſitum.

i 9. dec.
k 1. ſexti.
l 10. dec.

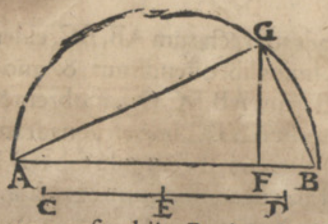
AT vero ſi AF, FB, Rationalia ſint, oſtendemus & totum AFB, ex ipſis compoſitum Rationale eſſe. Cum enim vtrumque AF, FB, Rationale ſit: erunt ipſa inter ſe commenſurabilia. [m] Igitur & totum AFB, ex ipſis compoſitum vtrique eorum commenſurabile erit. Quare AFB, totum commenſurabile vtriq; Rationali AF, FB, [n] Rationale quoque eſt. Quod eſt propoſitum.

m 16. dec.
n 9. defin.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

xxxiv.
xxviij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum Rationale.



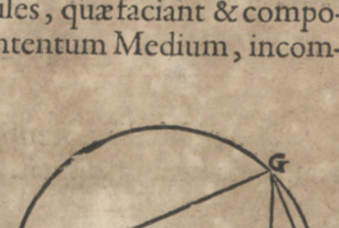
[a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus poſſit quam minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propoſ. Oſtẽdemus igitur ſimiliter, vt in propoſ. antecedenti, rectas AG, GB, potentia eſſe incommenſurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, [b] æquale exiſtens quadratis rectarum AG, GB, Medium eſt, erit quoque compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rurſus vt in antecedenti propoſitione, oſtendemus rectangulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG; atque adeo illud eſſe huic commenſurabile. Quare cum rectangulum ſub AB, CD, Rationale ſit, ex conſtructione; erit & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propoſ. 33 huius lib. rectangulo ſub AB, FG, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB. Igitur & rectangulum ſub AG, GB, Rationale eſt. Oſtenſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum AG, GB, eſſe Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ oſtenſæ ſunt potentia incommenſurabiles, faciunt compoſitum ex earum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem comprehenſum, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.

a 32. dec.
b 47. prim.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

xxxv.
xxix.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.



[a] REPERIANTVR duæ mediæ AB, CD, potentia tantum commenſurabiles, quæ medium contineant, ita vt maior AB, plus poſſit quam minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantq; reliqua, vt in propoſ. 34. Oſtendemus igitur ſimiliter, rectas AG, GB, potentia incommenſurabiles eſſe. Et quia quadratum ex Media AB, Medium eſt, [a] & quadratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Mediũ. Rurſus, vt in 34. demonſtrabimus, rectangulũ ſub AB, CD, duplũ eſſe rectanguli ſub AB, FG; atq; adeo illud eſſe huic cõmenſurabile. Quare cũ ex conſtructione, rectangulũ ſub AB,

a 33. dec.
b 47. prim.

ſub AB,CD,Medium ſit:erit quoq; rectangulum ſub AB,FG,hoc eſt ſub AG,GB, quod illi per 1.lemma propoſ.33.huius lib.æquale eſt,Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quoniam vero AB,longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi CD:Eſt autem eidem CD,ipſa CE,longitudine commenſurabilis; quod illa huius ſit
c 13. dec. dupla; [c] erunt AB,CE,longitudine incommenſurabiles.Sed vt AB,ad CE, ita eſt per lemma 3. propoſ.19. huius lib.quadratum ex AB,ad rectangulum ſub AB,CE,hoc eſt, ad rectangulum ſub AB, FG; hoc eſt, ſub AG, GB.
d 10. dec. (ſunt enim rectangulum ſub AB,FG,& ſub AG,GB, per 1.lemma propoſ. 33. huius lib. æqualia.)[d] Igitur quadratum ex AB, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AG, GB. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium,incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.

S C H O L I V M.

EX hoc vero problemate facile illud abſoluemus, quod ad propoſ.24. huius lib.nos demonſtraturos recepimus,nimirum

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.

QVONIAM oſtenſum eſt tam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, quam rectangulum ſub ipſis, eſſe Medium & hoc illi compoſito incommenſurabile;erunt quoq; lineæ potentes illud compoſitum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ,incommenſurabiles tam longitudine,quem potentia. Si enim potentia eſſent commenſurabiles, eſſent & earum quadrata,hoc eſt,compoſitum ex quadratis rectarum AG,GB, & rectangulum ſub AG,GB,commenſurabilia,quod non ponitur. Quocirca ſi ſumatur AB,potens compoſitum ex quadratis rectarum AG,GB,& alia recta potens rectangulum ſub AG,GB, id eſt media proportionalis inter AG, GB, inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

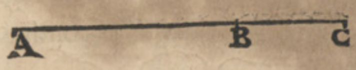
PRINCIPIVM SENARIORVM per compoſitionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

xxxvi.
xxx.

SI duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ rationales AB, BC potentia ſolum commenſurabiles, inuentæ per 2. lemma propoſ.21.huius lib. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim AB,longitudine incommenſurabilis eſt ipſi BC, & vt AB, ad BC, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex BC, per lemma propoſ.31.huius
a 10. dec. lib.[a] erit rectangulum ſub AB,BC,quadrato ex BC, incommenſurabile.Sed rectangulo ſub AB,BC, commenſurabile eſt eius duplum, nempe quod bis ſub AB,BC,continetur;& quadrato ex BC,commenſurabile eſt quadratum
b 16. dec. rectæ AB; (omnia enim ſunt Rationalia) [b] atque adeo & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, eidem quadrato ex BC, commenſurabile eſt. Igitur per ea,quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſtendimus, & quod bis ſub AB, BC, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB,BC.Quamobrem & compoſitum ex eo,quod bis ſub AB,BC,& ex compoſito quadratorum rectarum AB,BC,hoc eſt, quadratum ex tota AC, ([c] Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB,
c 4. ſecun. d 17. dec. BC,vna cum rectangulo ſub AB,BC,bis)compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, [d] incommenſurabile erit: Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale, quod commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex BC, Rationali.Igitur quadratum ex AC, quadrato Rationali ex BC, incommenſurabile,
e 10. defin. [e] Irrationale eſt;atque adeo & recta ipſa AC,Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu vt alii loquuntur,Binomium,quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia ſolum commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur,tota Irrationalis erit,&c. Quod oſtendendum erat.



S C H O L I V M.

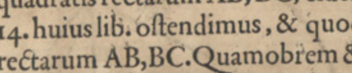
ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta
f 22. dec. *quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, [f] Irrationalis eſt,quæ Media vocatur. At vero compoſita ex ipſis,[g] Irrationalis eſt,*
g 37. dec. *quæ ex binis nominibus dicitur.*

THEOR. 26. PROPOS. 38.

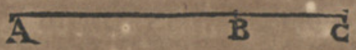
xxxvij.
xxxj.

SI duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

a 28. dec. COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia tantum commenſurabiles,quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem eſſe.Quia enim AB, eſt ad BC, vt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate prop 31.huius lib.eſt oſtenſum;ſunt autem AB, BC,lon-



BC, longitudine incommenſurabiles; [b] erunt rectangulum ſub AB,BC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub AB,BC, commenſurabile eſt, quod ſub AB,BC, bis; & quadrato ex BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia ſint commenſurabiles, erunt ipſarum quadrata commenſurabilia, [c] atque adeo & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex BC, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub AB, BC, bis, & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, vna cum rectangulo bis ſub AB,BC, hoc eſt, quadratum ex AC, [d] quod huic compoſito æquale eſt, [e] incommenſurabile quoque eſt rectangulo ſub AB,BC, bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub AB, BC, commenſurabile rectangulum ſemel ſub AB, BC, cum hoc ſit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AB, BC: Ponitur autem rectangulum ſub AB,BC, Rationale. [g] Irrationale ergo eſt quadratum ex AC, [h] & ob id recta quoque AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commenſurabiles ponantur, &c. Quod erat oſtendendum.

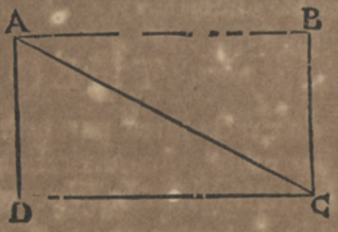


b 10. dec.
c 16. dec.
d 4. ſec.
e 7. dec.
f 13. dec.
g 10. def.
h 11. def.

LEMMA.

QVOD ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale eſt.

CONTINEATVR rectangulum AB, CD, ſub Rationali AB, & Irrationali BC. Dico ipſum Irrationale eſſe. Si enim dicatur eſſe Rationale, [i] faciet ipſum ad Rationalem AB, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod eſt abſurdum. ponitur enim BC, Irrationalis. Non ergo AC, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quod eſt propoſitum.



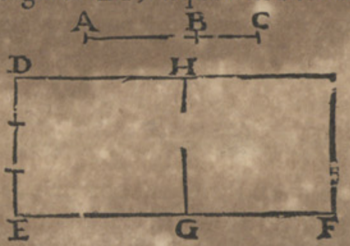
i 21. dec.

THEOR. 27, PROPOS. 39.

xxxviij.
xxxij.

SI duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs ſecunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE, [b] ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF, [c] æquale eſt duobus quadratis ex AB,BC, vna cũ rectangulo bis ſub AB,BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub AB,BC, continetur. Quoniam vero ex hypotheſi, rectangulum ſub AB,BC, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub AB, BC, ei commenſurabile, hoc eſt, HF, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia quadrata Mediarum AB,BC, potentia commẽſurabilium, commenſurabilia ſunt; [d] erit & compoſitũ ex ipſis, nimirum rectangulum DG, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed vtrumque quadratorum ex Medijs AB,BC, Medium eſt. Igitur & DG, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; ([e] eſt enim GH, Rationali DE, æqualis) [f] erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia *AB, BC*, longitudine incommenſurabiles ſunt; & eſt vt *AB*, ad *CE*, ita quadratum ex *AB*, ad rectangulum ſub *AB, BC*, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit quadratum ex *AB*, incommenſurabile rectangulo ſub *AB, BC*, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt; Atqui quadrato ex *AB*, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum *AB, BC*, commenſurabile eſt, quod continetur bis ſub *AB, BC*, cum hoc illius ſit duplum. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. diximus, erit & compoſitum ex quadratis rectarum *AB, BC*, hoc eſt, rectangulum DG, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, rectangulo HF. [g] Cum ergo ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [h] erit EG, ipſi GF, longitudine incommẽſurabilis. Oſtenſum autem iam fuit EG, GF, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt EG, GF, potentia tantum commenſurabiles, [i] ac propterea & tota EF, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex AC, ipſi DF, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur autem ex binis Medijs ſecunda, ſeu vt alijs placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 29. dec.
b 45. pri.
c 4. ſecun.
d 16. dec.
e 34. pri.
f 23. dec.
g 1. ſexti.
h 10. dec.
i 37. dec.

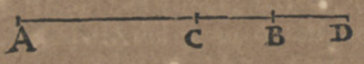
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propoſitione lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic vero lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitum ex quadratis partium maius, quam rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem ſuperat.

SECETVR recta AD in B, non bifariam, ſitque maior pars AB; in qua ſumatur BC, minori BD, æqualis, vt ſit AC, exceſſus, quo AB, ſuperat BD, hoc eſt, BC, ipſi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, ſimul maiora eſſe rectangulo bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC.



k 7. ſecun. *Quoniam enim quadrata ex AB, BC, k æqualia ſunt rectangulo bis ſub AB, BC, vna cum quadrato ex AC, eſtque BC, ipſi BD, æqualis: erunt quoque quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo, bis ſub AB, BD, vna cum quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora ſunt, quam rectangulum bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC,. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

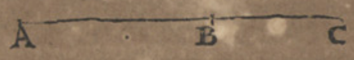
EX hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

xxxix.
xxxiij.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quę faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; Quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

a 34 dec. COMPONANTVR duæ rectæ [a] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, rectangulum vero ſub ipſis contentum, Medium. Dico totam AC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim rectangulum ſub AB, BC, Medium ponitur, erit & rectangulum, bis ſub AB, BC, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri, atque adeo Irrationale. Ponitur autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale; [b]



b 10 def. c 17. dec. Incommenſurabile ergo eſt rectangulum bis ſub AB, BC compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. [c] Igitur & rectangulum bis ſub AB, BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compoſitũ ponatur Rationale; [d] erit quadratum ex AC, illi incommenſurabilis, Irrationale. [e] Ac propterea recta AC, Irationalis eſt. Vocetur autem Maior, quia cum poſſit duo quadrata ex AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC; compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, per lemma antecedẽs maius eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Quare cum compoſitum ex quadratis rectarum ex AB, BC, Rationale ſit, rectangulum vero bis ſub AB, BC, Medium, recte vocabitur AC. Maior, ſiquidem à Rationali quod maius eſt, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

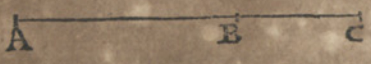
d 10. def.
e 11. def.
f 4. ſec.

XL.
xxxiv.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

a 35. dec. COMPONANTVR duæ rectæ [a] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium, rectangulum vero ſub ipſis contentum Rationale. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium eſt; quod vero continetur bis ſub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe



b 10. def. quod ſub AB, BC, ſemel continetur, Rationale ponatur; [b] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC. [c] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, vna

c 17. dec. cum rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB, BC.

d 10. def. Cum ergo rectangulum bis ſub AB, BC, vt diximus, ſit Rationale; [d] erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile,

e 11. def. rabile, Irrationale; [e] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe compoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, & Rationale, rectangulum ſcilicet bis contentum ſub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

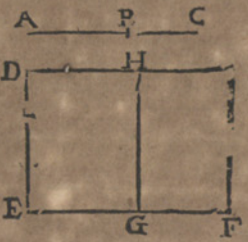
xlj.
xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPO-

COMPONANTVR duæ rectæ [a] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE, [b] ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF, [c] æquale eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis ſub AB, BC. Quoniam vero tam compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulum DG, quam rectangulum ſub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis ſub AB, BC, nempe ipſum HF, (cum illi ſit commenſurabile) Medium ponitur, [d] facient DH, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GE. Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC. id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB, BC: Eidem autem rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; [e] erunt & DG, HF, incommenſurabilia. Quare [f] cum ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [g] erunt EG, GE, longitudine incommenſurabiles: Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, [h] Ac propterea tota EF, ex ipſis compoſita Irrationalis eſt. Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; [i] ideoque & recta ipſa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.

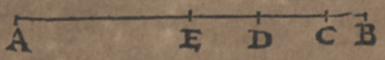


a 36. dec.
b 45 pri.
c 4. ſec.
d 23. dec.
e 13. dec.
f 1. ſexti.
g 10. dec.
h 37. dec.
i 11. def.

LEMMA.

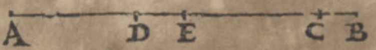
SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualium ſimul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rurſus inæqualiter in D, ſintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quam poſteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, ſimul maiores eſſe quadratis ex AD, DB, ſimul. Diuiſa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC; [k] æquale eſt quadato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale eſt eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius ſit quadrato ex ED; erit reliquum rectangulum ſub AC, CB, minus reliquo rectangulo ſub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis ſub AC, CB. minus erit rectangulo bis ſub AD, DB. Quoniam vero quadratum ex AB, [l] æquale eſt tam rectangulo bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, quam rectangulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis ſub AC, CB, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.



k 4. ſec.
l 4. ſec.

SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB, erit AD, (quæ minor eſt poſteriorum) maior quam CB; (quæ priorum minor eſt) ac proinde cum AE, EB, æquales ſint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE. Itaque quia rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, [m] æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cũ quadrato ex DE, æquale eſt quadrato ex AE, hoc eſt, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur, vt prius, demonſtrabimus quadrata ex AC, CB, maiora eſſe quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.



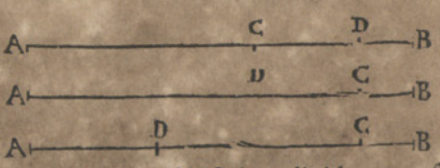
m 5. ſec.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

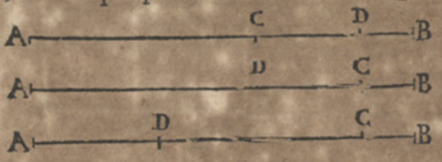
xlij.
xxxvj.

QVÆ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt vult propoſ. 37. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Rationales lineæ potentia tantum commenſurabiles. Si enim fieri poteſt, diuidatur iterum in ſua nomina ad D. Conſtat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam ſi bifariam diuideretur, eſſent AC, CB, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum



tum commenſurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam ſecantur AB, cum & AD, DB, Rationales ſint potentia tantum commenſurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter, ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales ſunt, quam partes A D, D B, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora ſunt quadratis ex A D, D B, vel maiora. (Neque enim partes AD, DB, vbicunque punctum D, extiterit, partibus A C, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione ſecaretur A B, ſecunda diuiſione in eadem nomina, in quæ ſecta eſt diuiſione prima. quod non ponitur.) Quia vero ſi ab æqualibus inæqualia demantur, reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis eſt, vt in pronunciato 16. libro 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis



a 4.ſec. ſub AC.CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vna cũ rectangulo bis ſub AD, DB,[a] quod tam illa, quam hæc æqualia ſint quadrato ex AB; ſit, vt qui exceſſus fuerit ablati compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, idem ſit reliqui rectanguli bis ſub A C. C B, & reliqui rectanguli bis ſub AD, DB. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. (Cum enim rectæ AC, CB, Rationales ſint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compoſitum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtẽdimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum AD, DB, Rationale. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propſitionis 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, DB, ſpatium eſſe rationale.)

b 22.dec. Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpacium Rationale eſt.[b] Quoniam vero rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt, erit & quod bis ſub AC, CB, illi commenſurabile, ex coroll. prop.

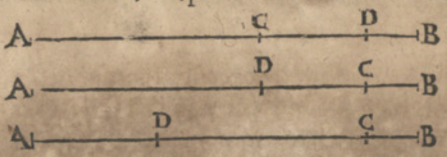
c 27.dec. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub AD, DB, Medium erit.[c] Quare cum Medium non ſuperet Medium Rationali non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpacium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

xLiij.
xxxvij.

THEOR. 32. PROPOS. 44

QVÆ ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propoſ. 38 huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet etiam ſint Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Rationale. Diuidatur enim ſi fieri poteſt, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedẽti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub A D, DB. eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB. Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub AC, CB, ei, quod continetur ſemel ſub *AC, CB*, commenſurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub *A D, DB*. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtẽdimus: perſpicuum eſt exceſſũ rectanguli bis ſub *AC, CB*, & rectanguli bis ſub *A D, D B*, ſpaciũ eſſe Rationale.) Igitur &



exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum *A C, CB*, & compoſiti ex quadratis rectarum *AD, DB*, ſpacium Rationale eſt. Quia vero rectæ *AC, CB*, Mediæ ſunt, & potentia commẽſurabiles, erunt earum quadrata Media quoq;,

a 16. dec. & commenſurabilia.[a] Quare & compoſitum ex ipſis vtriq; ipſorum commenſurabile erit. Igitur, cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Me-

b 27.dec. dium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum *AD, DB*.[b] Cum ergo Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum *AC, CB*, & compoſiti ex quadratis rectarum *AD, DB*, ſpacium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur *AB*, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quamobrem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.

xLiv.
xxxviij.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

QVÆ ex binis Medijs ſecunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

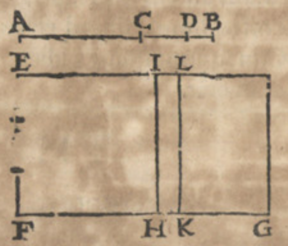
SIT ex binis Medijs ſecunda *AB*, diuiſa ad punctũ C, in ſua nomina, ita vt *AC, CB*, Mediæ ſint potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult prop. 39. huius lib. Dico *AB*, ad aliud punct. diuidi non poſſe in alia nomina, quę ſcilicet ſint etiam lineæ Medię potentia tantum commenſurabiles, continentes Medium. Diuidatur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina *A D, D B*. Igitur vbicunque punctum *D*, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſ. 43. quadrata ex *AC, CB*, maiora eſſe quadratis ex *A D, DB*, vel minora. Ex-

a 45. pri. ponatur Rationalis E F,[a] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB, item E H, æqua-

b 4.ſec. le quadratis ex A C, CB. Erit igitur reliquum I G, æquale ei quod continetur bis ſub *A C, CB*, quandoquidem quadratum ex *AB*,[b] æquale eſt quadratis ex *AC, CB*, & rectang. bis ſub *ACCB*. Eodem modo ſi ad B F, applicetur E K, quadratis ex *A D, DB*, æquale erit reliquum L G, æquale rectangulo bis ſub *A D, DB*, comprehenſo.

Et quia

Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia ſunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex AC, CB, maiora ſunt per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis ſub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipſius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidium ipſius FH. Eadem ratione oſtendemus FK, maiorem eſſe dimidio ipſius FG. Inæquales ergo ſunt partes FH, HG, partibus FK, KG, ſingulæ ſingulis. Quoniam vero AC, CB, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. [c] Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cum ergo vtrumque ipſorum ſit Medium, erit quoque compoſitum ex ipſis, hoc eſt, EH, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK, [d] Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK. Rationales ipſi EF, longitudine incommenſurabiles. Eodē modo cum rectangulū ſub AC, CB, ponatur Medium, erit & quod bis ſub AC, CB, hoc eſt, IG, illi commenſurabile, Mediū, ex coroll. prop. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, erit HG, Rationalis ipſi HI, [e] longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus EG, Medium eſſe, & KG, Rationalem ipſi KL; longitudine incommenſurabilem. Rurſus quia AC, CB, longitudine ſunt incommenſurabiles, & eſt, vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, [f] erit quadratum ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile. Sed quadrato ex AC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB. (Cum enim AC, CB, potentia ſint commenſurabiles, atque adeo ipſarum quadrata commenſurabilia; [g] erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum quadrato ex AC, commenſurabile.) Rectangulo vero ſub AC, CB, commenſurabile eſt, quod bis ſub AC, CB. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, per ſcholium propoſ. 14. huius libri, rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt, ipſi IG. Quocirca [h] cum ſit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, [i] erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolum commenſurabiles. [k] Igitur FG, tota Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum G. Eodem modo oſtendemus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poteſt, [l] vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur AB, ex binis Medijs ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.



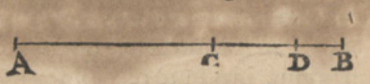
c 16. dec.
d 23. dec.
e 23. dec.
f 10. dec.
g 10. dec.
h 1. ſexti.
i 10. dec.
k 37. dec.
l 43. dec.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

XLV.
XXXIX.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, rectangulum vero ſub ipſis Medium, vt vult propoſ. 40. huius lib. Dico AB, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoque ſint potentia, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulum ſub ipſis Mediū. Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctū D, extiterit, demōſtrabimus ſimiliter, vt in propoſitione 43. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, eū eſſe, qui rectanguli bis ſub AC, CB, & rectāguli bis ſub AD, DB. Sed exceſſus cōpoſiti ex quadratis rectarū AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarū AD, DB, ſpatium eſt Rationale: (quia cum vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoq; eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quoniam vero rectangulum ſub AC, CB, ponitur medium, erit & rectangulum bis ſub AC, CB, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atq; eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub AD, DB. [a] Igitur cum Medium non ſuperet Medium Rationali, non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.



a 27. dec.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

XLVj.
XL.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Mediū potens AB, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum vero ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius lib. Dico AB, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, BD, ſpatium Rationale eſt;



 quod

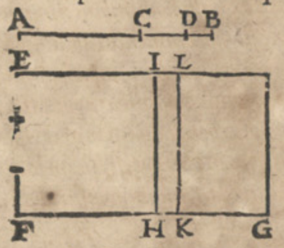
quod oſtendemus, vt in propoſ.44. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quia vero compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media:
a 27. dec. [a] Medium autem non ſuperat Medium Rationali; non erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

xlvij.
xlj.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuiſa in ſua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri. Dico AB, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis. Nam ſi poteſt fieri diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunque hoc punctum D, exiſtat. Conſtructio autem eadem fiat, quæ in propoſ. 45. oſtendemuſque vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales eſſe, ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt.



a 23. dec. Igitur Media EH, IH, applicata ad Rationalem EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis) [a] faciũt latitudines FH, HG, Rationales longitudine ipſi EF, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas KG. Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi EF. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub AC, CB,
b 1. ſex. nempe rectangulo IG; [b] eſtque vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus. Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina
c 43. dec. ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, [c] iam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine. Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IV.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine, Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen, Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum ſex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ quæ ex binis nominibus dicitur, ſunt lineæ rationales potentia tantum commenſurabiles, non poterit vtrumque nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (alias enim nomina ipſa eſſent quoque lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ.12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles. quod non ponitur) poterit maius nomen plus quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

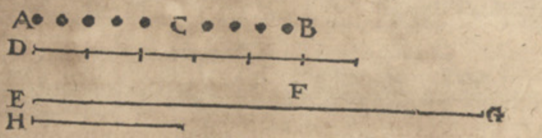
PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quod commenſurabile antecedit incommenſurabile, vt manifeſtum eſt.

RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen incommenſurabile eſt longitudine expoſitæ lineæ Rationali; & ſecundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expoſitæ longitudine eſt commenſurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipſorum nominum expoſitæ Rationali longitudine eſt commenſurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans ſecundam, quintam; & tertiam, ſextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49. xlviij. xlij.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs quæ in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri ſcripſimus, quorum exceſſus AC, non ſit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratũ ad AB, AC, proportionem nõ habeant quã quadratus ad quadratũ. Exponatur Rationalis quæpiã D, cui longitudine cõmenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commẽſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, eſſe ex binis nominibus primam. Quoniam



enim quadrata ex EF, FG, cum proportionem habeant, quam numeri AB, AC, [a] commenſurabilia ſunt; erunt a 6. dec.
& rectæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa autem eſt EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis eſt. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; [c] Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cum enim ſit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, ſit autem AB, maior, quam AC, erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propoſ. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eſt vt AB, numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad exceſſum, quo antecedens AB, ſuperat conſequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum ex EF, ſuperat conſequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] ac proinde rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima, inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

b 9. dec.
c 37. dec.
d 9. dec.

PROBL. 14. PROPOS. 50. xlix. xliij.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propoſitione, expoſitaque Rationali quadam D; ſumatur ei longitudine commenſurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam enim quadrata ex FG, a 6. dec.
EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, [a] commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ FG, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa eſt autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis eſt. Quia

vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. b 9. dec. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ FG, EF. Sunt igitur b 37. dec. EF, FG. Rationales potentia tantum commenſurabiles; [c] Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & ſecundam eſſe. Cum enim ſit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; ſit autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propoſ. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in præcedenti propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque minus nomen FG, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionem ex binis nominibus ſecunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundam. Quod erat faciendum.

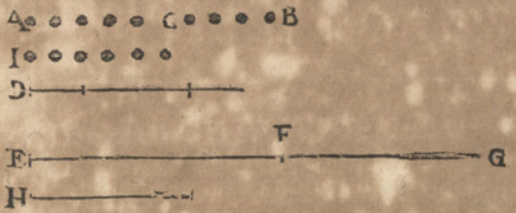
L. xliv.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AC, CB, vt in propoſ. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum.

L. xvij.



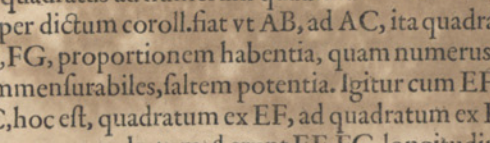
Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel ſola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidem, quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt ſi AC, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi AC, 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, ad AC, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Expoſita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propoſ. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. a 6. dec. [a] Erunt ergo quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commenſurabilia; atque adeo & lineæ D, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc eſt, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum b 9. dec. [b] erunt D, & EF, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. c 6. dec. [c] Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia. Igitur cum EF, oſtenſa ſit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc eſt, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; d 9. dec. [d] erunt EF, FG, longitudine incommenſurabiles. Sunt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; e 37. dec. [e] Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt I, ad AB, ita quadratũ ex D, ad quadratum ex EF, & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: f 9. dec. Non habet autem I, ad AC, proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [f] ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quoniam autem eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Eſt autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propoſ. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Oſtendemus iam ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; & neutra ipſarum EF, FG, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratum eſt; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

Lj. xliv.

PROBL. 16. PROPOS. 52.

INVENIRE ex binis nominibus quartam,

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compoſitus ex ipſis AB, ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cum Rationali D, commenſurabilis ſit.



Quod ſi reliqua conſtruantur, vt in propoſ. 49. oſtendemus ſimiliter, vt ibi, totam EG, ex binis nominibus eſſe. Dico & quartam eſſe. Erit enim rurſus, vt in 49. propoſ. quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propoſ. per conuerſionem rationis eſt, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non eſt autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neque quadratum ex EF, ad quadratum ex H, erit, vt numerus quadratus ad numerum quadratum. a 9. dec. [a] Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt rectæ EF, & H. Itaque cum maius nomen EF, plus poſſit quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & maius rurſus nomen EF, longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali

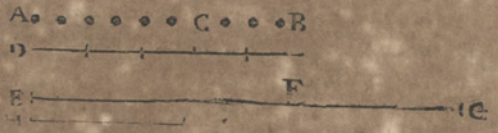
tionali D; erit E G, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

Lij. XLVj.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS (repetita figura præcedentis propoſ.) duobus numeris AC, CB, vt in præcedenti propoſ. fiat conſtructio, vt in propoſ. 50. hoc eſt, ſumatur F G, longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D, &c. Oſtendemus ergo, vt in propoſ. 50. EG, eſſe ex binis nominibus. Dico & quintam eſſe. Demonſtrabimus enim eodem modo, vt in 50. propoſ. quadratum ex E F, maius eſſe, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propoſ. 49. oſtenſum eſt, per conuerſionem rationis, eſt vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Oſtendemus, vt in propoſitione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incommenſurabiles eſſe. Quare cum maius nomen EF, plus poſſit, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi londitudine incommenſurabilis, & minus nomen F G, longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

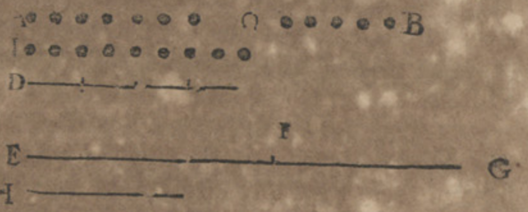


PROBL. 18. PROPOS. 54.

Liij. XLVij.

INVENIRE ex binis nominibus ſextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non ſimilibus, quorum neuter ſit quadratus, & compoſitus ex ipſis A B, non ſit quoque quadratus, habeatque ad neutrum ipſorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, ſi numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter ſe primos. [a] Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipſorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonſtrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis eſt quiuis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propoſ. 6. huius lib. & reliqua fiant, vt in propoſ. 51. oſtendemusque vt ibi, rectas D, & EF, eſſe longitudine incommenſurabiles; atque totam EG, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextam eſſe. Demonſtrabimus enim ſimiliter, vt in 51. propoſ. D, & FG, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque vt in propoſ. 49. per conuerſionem rationis, eſſe vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; [b] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum maius nomen EF, plus poſſit, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutrum ipſorum nominum EF, FG, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D, erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat.



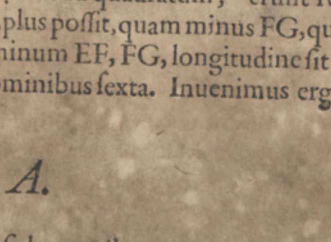
a 30. ſept.

b 9. dec.

LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA ſit recta AB, vtcunque in C. Deſcribatur ex AB, quadratum A, B, D, E, in quo diameter ducatur BE: Ducta autem ex C, recta CF, ipſi BD, parallela, quæ diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium AC, CB; vtrumque autem rectangulorum DG, GA, comprehenſum eiſdem partibus: Et vero rectangula CD, AI, ſub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, medium proportionale eſſe inter quadrata FH, CI: At CD, medium eſſe proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniam enim c *vt HG, ad GI, ita eſt tam FH, ad DG, quam AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI:* d *Eſt autem AG, ipſi DG, æquale. Igitur erit quoque vt FH, ad DG, ita DG, ad CI; Atque adeo DG, medium proportionale eſt inter quadrata FH, CI.*



c 1. ſexti.

d 43. pri.

RVRSVS quia eſt, e *vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quam AI, ad CI; erit vt AD, ad CD, ita AI, ad CI: Eſt autem AI, ipſi CD, æquale. Igitur erit vt AD, ad CD, ita quoque CD, ad CI. Quare CD, me-*

e 1. ſexti.

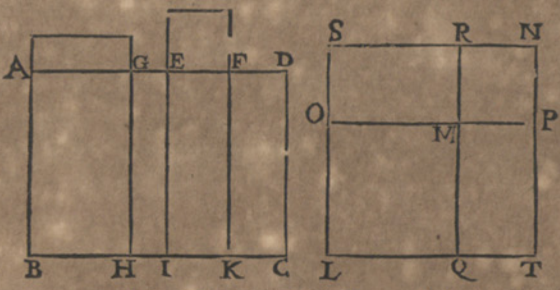
C D, medium proportionale eſt inter quadrata A D, C I. Eodem modo erit A F medium proportionale in-ter quadrata A D, F H.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

LIV.
LVIIJ.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea ſpa-tium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR ſpacium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus prima A D. Dico re-ctam lineam, quæ poteſt ſpacium A C, Irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipſius A D maius nomen A E, Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & denique A E, expoſitæ Rationali A B longitudine commenſurabilis erit. Secetur E D bifariam in F. Quia igitur A E, plus poteſt quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ex E D, hoc eſt, quadrato ex E F, æquale parallelogrammum ſub A G, G E, contentum, per 2. lemma propoſ. 17. huius lib.



a 18. dec. applicetur deficiẽs figura quadrata [a] in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. Quare A G, G E, partes inter ſe longitudine commenſurabiles ſunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipſis A B, C D, parallelæ G H, E I, F K. [b] Et parallelogrammo A H, æquale quadratum fiat L M: At parallelogrammo

b 14. ſec. G I, æquale fiat quadratum M N, coniunganturque quadrata L M, M N, ita ad angulum M, vt latera M O, M P, vnam rectam lineam conſtituant O P. Facient ergo & latera M Q, M R, vnam rectam Q R, vt demonſtratum eſt à nobis ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. propterea quod anguli O M Q, P M R, ad verticem M, ſunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo L N, cum rectæ O M, M P, rectis Q M, M R, æquales ſint; ideoque & tota O P, toti Q R, [c] ſit autem O P, ipſis S N, L T, & Q R, ipſis L S, T N, æqualis æquilaterum erit rectangu-

c 34. pri. lum L N, ideoque quadratum.

d 17. ſexti. QVONIAM vero rectangulum ſub A G, G E, æquale eſt, per conſtructionem, quadrata ex E F, [d] erit

e 1. ſextii vt A G ad E F, ita E F, ad G E. [e] Ac propterea & vt A H, ad E K, ita E K ad G I. Quare E K, medium proportionale eſt inter A H, G I, hoc eſt inter quadrata L M, M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N, medium proportionale eſt T M, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur eſt T M, ipſi E K. [f] Cum ergo ipſi T M, æ-

f 43. pri. quale ſit M S, [g] & ipſi E K, æquale ſit F C, erit & M S, ipſi F C, æquale. Quocirca totum quadratum L N, toti re-

g 36. pri. ctangulo A C, æquale; atque adeo recta O P, poteſt ſpacium A C, contentum ſub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico O P, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

h 16. dec. QVONIAM enim A G, G E, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles, [h] erit & tota A E, vtrique ipſarum longitudine commenſurabilis: Eſt autem A E, cum ſit maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commenſurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. longitudine commenſurabiles ſunt: Atque adeo cum A B, ſit Rationalis, erunt & A G, G E; Rationales.

i 20. dec. Quare rectangula A H, G I, ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus contenta, Rationalia ſunt. Ideoque & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

ET quoniam A E, ipſi E D, longitudine incommenſurabilis eſt; Eſt autem ipſi A E, longitudine oſtenſa commenſurabilis A G & ipſi E D, commenſurabilis eſt longitudine E F, eius dimidia; erunt ex ſcholio pro-

k 1. ſexti. poſit. 14. huius lib. & A G, E F, inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & A H, E K, [k] eandem pro-

l 10. dec. portionem habentia, quam A G, E F, [l] incommenſurabilia ſunt, ac proinde & L M, M T, illis æqualia, ſunt in-commenſurabilia. [m] Igitur rectæ O M, M P, longitudine ſunt incommenſurabiles, [n] cum eandem habeant

m 10. dec. proportionem, quam L M, M T: Sunt autem & O M, M P, Rationales oſtenſæ. Igitur O M, M P, Rationales

n 1. ſexti. ſunt potentia ſolum commenſurabiles. [o] Quapropter tota O P, potens ſpatium A C, Irrationalis eſt, quæ ex bi-

o 37. ſex. nis nominibus dicitur. Si ſpacium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

LIX.
XLIX.

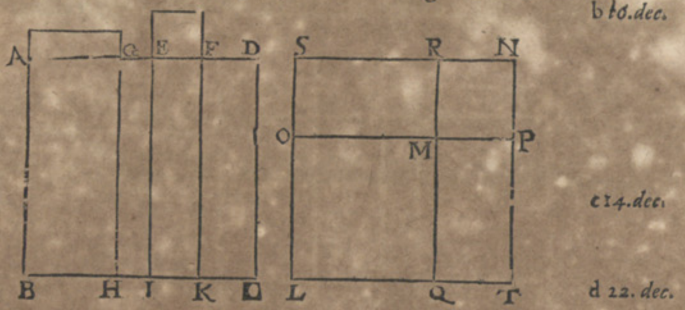
Si ſpacium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpacium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR ſpacium A C. ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſecunda A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt A C, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit enim ipſius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit quã E D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commẽſurabilis; Et deniq; E D, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis. Secetur E D, biſariam in F, & reliqua conſtruantur, vt in antecedenti propoſitione. Quo facto demonſtrabimus ſimiliter, vt ibi, rectam O P, poſſe ſpacium A C, contentum ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſecunda A D. Dico iam O P, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim A E, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi E D; & E D, minus nomen exiſtens

a 13. dec. ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine commenſurabilis eſt Rationali A B; [a] erunt A E, A B, longitudine

[lon]gitudine incommenſurabiles. Et quia A G, G E, oſtenſæ ſunt in antecedenti propoſitione longitudine com[men]ſurabiles; [b] erit quoque tota A E, vtrique ipſa[rum] commenſurabilis. [b 16. dec.] Quare cum A E, maius no[men] exiſtens ipſius A D, ex binis nominibus ſecun[dæ], linea ſit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationa[les]. Cum ergo vtraque AG, GE, ipſi AE, ſit longitu[di]ne commenſurabilis; at vero A E, Rationali A B, longitudine incommenſurabilis; [c] erit vtraque AG, GE, eidem AB, incommenſurabilis longitudine; [c 14. dec.] Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationa[les] ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Igitur re[d]ctangula AH, GI, Media ſunt, [d 22. dec.] propterea que & qua[d]rata LM, MN, ipſis æqualia, Media ſunt. Ergo & rectæ OM, NP, ſunt Mediæ.



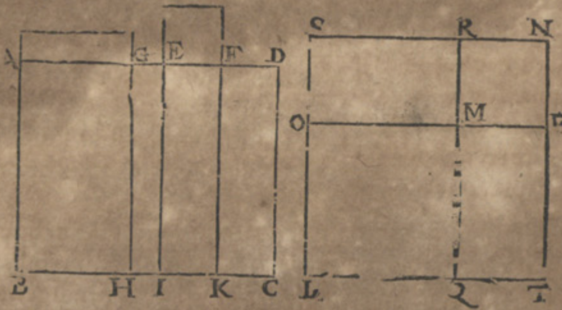
QVIA vero AG, GE, longitudine ſunt commenſurabiles; [e] erunt & AH, GI, eandem cum illis propor[tio]nem habentia commenſurabilia, [e 10. dec.] atque idcirco & quadrata L M, M N, ipſis æqualia commenſurabilia ſunt. Igitur & rectæ O M, M P, commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incom[me]nſurabiles ſunt; ipſi vero AE, oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis A G, & ipſi AD, longitudine com[me]nſurabilis eſt EF, eius dimidia; erunt per ſcholium propoſ. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommen[ſu]rabiles: Ac proinde A H, E K, eandem habentia proportionem cum ipſis, [f] incommenſurabilia ſunt. [f 10. dec.] Igi[tu]r & LM, MT, ipſis AH, & EK, æqualia, incommenſurabilia ſunt; [g] Ideoque & rectæ OM, MP, longitudine [g 10. dec.] [ſu]nt incommenſurabiles, [h] cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T. [h 1. ſex.] Cum ergo oſtenſum ſit OM, MP, Medias eſſe, & commenſurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quo[n]iam denique E D, minus nomen ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſu[ra]bilis ipſi AB, hoc eſt, ipſi E I: Eſt autem EF, ipſi ED, quoque longitudine commenſurabilis; [i] erunt etiam [i 12. dec.] EI, EF, longitudine commenſurabiles; Ac propterea cum EI, Rationalis ſit, erit & EF, Rationalis. [k] Quare [k 20. dec.] EK rectangulum, Rationale eſt; Eſt autem MT, ſub OM, MP, contentum ipſi EK, æquale. Igitur & MT, Ra[tion]ale eſt. Quapropter O M, M P, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, Rationaleque continen[t]es; [l] atque adeo O P, Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur, [l 38. dec.] Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 39. PROPOS. 57.

LVj.
L.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium AC, Irrationalem eſſe, quæ dicitur ex binis Medijs ſecunda. Sit enim ipſius AD, maius no[men] AE. Erunt ergo AE, ED, ex definitione Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique neutra ipſarum A E, ED, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propoſ. 55. Similiter ergo, vt ibi, oſtendemus rectam O P, poſſe ſpatium A C: Et vt in antecedenti propoſ. 56. rectas O M, MP, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles; propterea quod A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum & ibi eadē AE, ipſi A B, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam vero E D, E F, ſunt commēſurabiles longitudine; eſtq; ED, ipſi AB, Rationali, hoc eſt, ipſi EI, longitudine incommenſurabilis: [a] erit quoque E F, eidem EI, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem EF, EI, Rationales, quod EF, [a 14. dec.] dimidia ſit ipſius ED, Rationalis: & EI, expoſitæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; [b] Ac propterea EK, Medium eſt: ideoque & M T, æquale ipſi EK, Medium eſt, [b 22. dec.] quod ſub Medijs OM, MP, continetur. Itaque cum OM, MP, Mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; [c] erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Medijs ſecunda appellatur, [c 22. dec.] Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 40. PROPOS. 58.

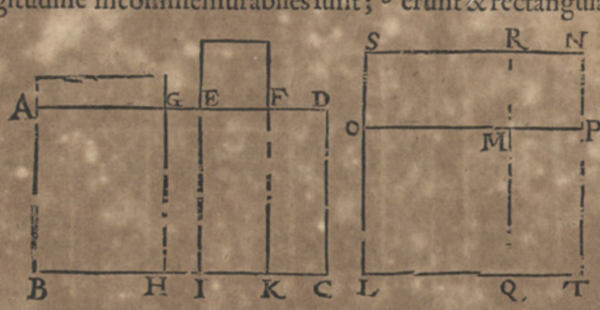
LVij.
Lj.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim A E, ipſius A D, maius nomen. Erunt igitur ex definit. A E, E D, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique A E, ipſi AB, commenſurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. [a] Erunt ergo A G, G E, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, [a 19. dec.]

vt ibi

vt ibi, OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE, lon-
b 10. dec. gitudine incommenſurabiles ſunt; [b] erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem,



incommenſurabilia; atque adeo & quadrata LM, MN, ipſis AH, GI, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia vero AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali AB;
c 20. dec. erit & AE, Rationalis; [c] & rectangalum AI, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN. Compoſitum ergo ex quadratis LM, MN, Rationale eſt.

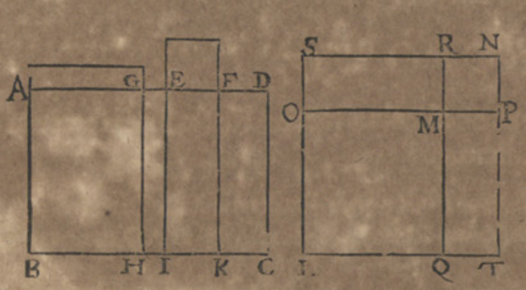
ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine incom-
menſurabilis Rationali AB, erit & EF, ipſius dimidia eidem AB, longitudine incommenſurabilis; Et eſt EF,
Rationalis, cum ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales ſunt potentia ſolum com-
d 22. dec. menſurabiles. [d] Quare EK, medium eſt, ſub ipſis contentum; ideoque & MT, illi æquale, contentumque ſub
OM, MP, Medium eſt. Quocirca cum OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum
quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis MT, Medium; [e] Irrationalis
e 40. dec. erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta,
&c. Quod erat oſtendendum.

LVIIJ.
LIJ.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potẽs Rationale & Medium. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poteſt, quam ED, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis: & denique ED, longitudine commenſurabilis eſt



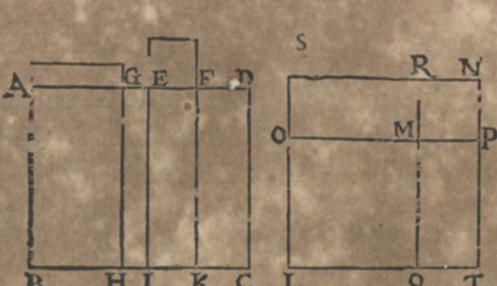
a 19. dec. expoſitæ Rationali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propoſ. 55. [a] Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Similiter autem modo, vt in propoſ. 55. conſtabit rectam OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM,
MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt
Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantum com-
b 22. dec. menſurabiles. [b] Quare rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem AI, æquale compoſito
ex quadratis LM, MN. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia ED, Rationalis ponitur longitu-
dine commenſurabilis Rationali AB, cum ſit minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, erit & EF,
ipſius dimidia, eidem AB, commenſurabilis longitudine, & Rationalis. [c] Quare EK, ſub Rationalibus EI,
c 20. dec. EF, longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt, atque idcirco & MT, ſub OM, MP, contentum Ra-
tionale erit, cum ipſi EK, ſit æquale. Quamobrẽ cum rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles ſint,
faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, ſub
d 41. dec. ipſis contentum, Rationale; [d] Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur
ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

LIX.
LIIJ.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

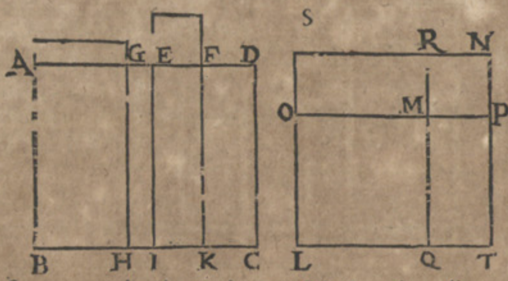
SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles, & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB. Fiant



a 19. dec. omnia, quæ in ſuperioribus, [a] eruntque AG,
GE, longitudine incommenſurabiles. Iam vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium

tium AC. Item vt in propoſ. 58. rectas OM, MP, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propoſ. 58. erit quoque MT, ſub OM, MP, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ED, hæc vero eidem commenſurabilis,[b] erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles.[c] Igitur & AI, EK, incommenſurabilia ſunt[d] cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis LM, MN, quod ipſi AI, æquale eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, ſub ipſis contentum, Medium incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis,[e] erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.



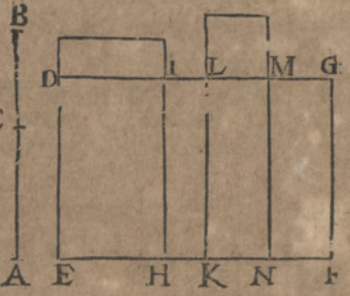
b 13. dec.
c 10. dec.
d 1. ſexti.
e 42. dec.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

lx. liv.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC,[a] & ad Rationalem expoſitam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis ſub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis ſub AC, CB,[b] æqualia ſint quadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex AB, æquale eſt, per conſtructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipſis LK, GF, parallela agatur MN: eritque vtrumque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur.[c] Et quoniam AC, CB, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quod tota AB, ſit ex binis nominibus, erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commēſurabilia;[d] quorum vtrique cum etiam commenſurabile ſit compoſitum ex ipſis; erit quoque compoſitum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectangulum DK. Igitur & DK, Rationale erit: quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE, faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipſi DE, longitudine commenſurabilem.



a 45. prim.
b 4. ſec.
c 37. dec.
d 16. dec.

RVRSVS quia AC, CB, Rationales ſunt ſolum potentia commenſurabiles,[e] erit rectangulum ſub ipſis, Medium, atque adeo, & quod bis ſub ipſis, cum ſit ei commenſurabile, hoc eſt, ipſum LF, Medium erit, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem,[f] facit LG, latitudinem Rationalem, & ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Eſt autem DL, oſtenſa eidem DE, commenſurabilis longitudine.[g] Igitur DL, LG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantum commenſurabiles;[h] Ac propterea DG, ex binis nominibus eſt. Dico & primam eſſe.

QVONIAM enim ex lemmate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC, CB, medium proportionale eſt inter quadrata ex AC, CB, erit quoque LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo[i] cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeant, quam DH, LN, IK; erit quoque recta LM, media proportionalis inter DI, IL.[k] Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, commenſurabilia ſunt, quod AC, CB, ponantur potentia commenſurabiles; erunt & DH, IK, ipſis æqualia commēſurabilia.[l] Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autem DK, maius eſt, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora ſint, per lemma propoſ. 39. huius libri, quam rectangulum bis ſub AC, CB; erit & recta DL, maior quam LG,[m] cum DL, LG, eandem rationem habeant, quam DK, LF. Itaque quoniam DL, maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatur rectangulum ſub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore LG, deſcripti (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quadrato ex LM,) diuiditurque DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum;[n] poterit DL, maior plus quam LG, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum DG, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus poſſe, quam LG, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

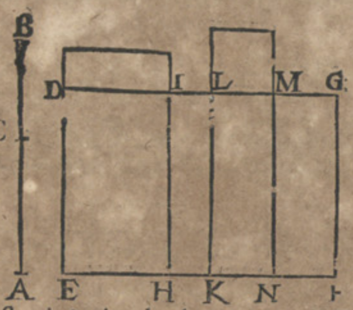
e 22. dec.
f 23. dec.
g 13. dec.
h 37. dec.
i 1. ſexti.
k 17. ſexti.
l 10. dec.
m 1. ſexti.
n 18. dec.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

lxj. lv.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

a 45. prim. SIT ex binis Mediis prima AB, cuius maius nomen AC,[a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe ſecundam. Conſtituantur enim eadem, quæ in propoſ. præcedenti, ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipſorum LN, MF, ei quod ſub



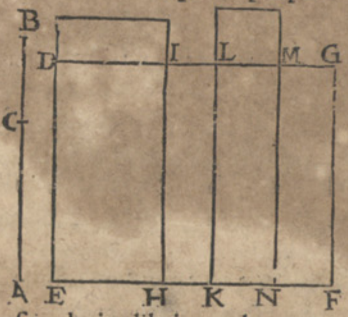
b 38. dec. AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Mediis primam AB, componentes [b] Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectangula ipſis
c 16. dec. æqualia DH, IK, commenſurabilia, atque Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipſorum DH, IK, ſit commenſurabile; erit quoque ex
d 23. dec. coroll. propoſ. 24. huius lib. DK, Medium, quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE, [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rectangulum ſub AC, CB, Rationale
e 21. dec. eſt, erit & eius duplum, nempe LF, Rationale, quod cum applicatum ſit ad Rationalem LK, [e] erit eius latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG,
f 13. dec. ipſa LG, ſit ipſi DE, commenſurabilis longitudine, at DL, longitudine incommenſurabilis, [f] erunt DL, LG, longitudine incommenſurabiles. Quod cum DL, LG, oſtenſæ ſint Rationales; erunt ipſæ Rationales potentia
g 37. dec. ſolum commenſurabiles; [g] ac propterea tota DG, ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus DL, maius nomen eſſe, & poſſe plus, quam minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quocirca cum ipſius DG, maius nomen DL, plus poſſit, quam minus nomen LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen LG, oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſecunda. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, &c. Quod erat oſtendendum.

lxii.
lvj.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

a 45. prim. SIT ex binis Mediis ſecunda AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe ex binis nominibus tertiam. Conſtru-
b 39. deci. ctis enim iiſdem, quæ in propoſ. 61. quoniam AC, CB, ex binis Mediis ſecundam AB, componentes, [b] Mediæ



ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ Mediũ continent; Erunt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectangula ipſis æqualia DH, IK, commenſu-
c 16. dec. rablia, & Media.[c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipſorum DH, IK, ſit commenſurabile; erit & ex corol. propoſ. 24. huius libri DK, Medium;
d 23. dec. quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE, [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt; erit & eius duplum LF, Medium; quod cum
e 23. dec. applicatum ſit ad Rationalem LK; [e] erit latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, ipſi CB, longitudine eſt incommenſurabilis; eſtque vt AC, ad CB, ita per lemma 3. pro-
f 10. dec. poſ. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, [f] erit quoque quadratum ex AC, rectan-
g 16. dec. gulo ſub AC, CB, incommenſurabile. [g] Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, quod quadrata ex AC, CB, commenſurabilia ſint, quippe cum rectæ ipſæ potentia ponãtur commenſurabiles; & rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt eius duplum, nimirum rectangulum bis ſub AC, CB. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc eſt, rectangulũ DK, incõmenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt rectangulo LF, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius libri conſcripſimus.
h 10. dec. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum DK, LF, habentes, [h] longitudine ſunt incommenſurabiles:
i 37. deci. Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles; [i] ac propterea tota DG, ex binis nominibus eſt. Iam vero, vt in propoſ. 61. oſtendemus DL, eſſe maius nomen, poſſeque plus, quam minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrem cum DL, maius nomen plus poſſit, quam LG, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & neutra ipſarum DL, LG, Rationali expoſitæ DE, ſit oſtenſa longitudine commenſurabilis; erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia Quadratum ergo eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam, &c. Quod erat demonſtrandum.

lxiij.
lvij.

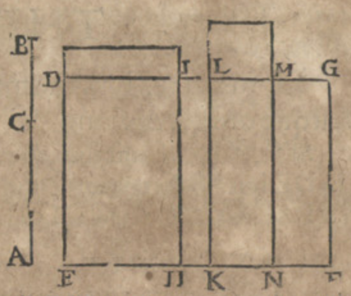
THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

a 45. prim. SIT Maior AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe quartam. Conſtruan-
b 45. dec. tur enim eadem prorſus, quæ in propoſition. 61. Et quia AC, CB, Maiorem AB, componentes, [b] potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero ſub ipſis, Medium; erit quoque DK, compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, æquale exiſtens, Rationale; At vero LF, duplum eius quod ſub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur

Ratio-

Rationale DK, ad Rationalem DE, eſt applicatum; [c] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Item cum LF, Medium ſit applicatum ad Rationalem LK, [d] erit LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, DE, longitudine incommenſurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipſi DE, commenſurabilis ſit longitudine; hæc vero eidem DE, longitudine incommenſurabilis; [e] incommenſurabiles erunt longitudine DL, LG. Oſtẽſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LH, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [f] ideoque DG, ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in propoſ. 61. demonſtrabimus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex LM. Quia autẽ quadrata ex AC, CB, incommenſurabilia ſunt, quod rectæ AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommenſurabilia, atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incõmenſurabiles. [g] Quoniam vero, vt in propoſ. 61. oſtendimus, DL; maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipſam DL, ad I, in partes longitudine incommenſurabiles, [h] poterit DL, plus quam LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cum ipſa DL, (maius nomen ipſius DG, quæ eſt ex binis nominibus,) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DB; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.



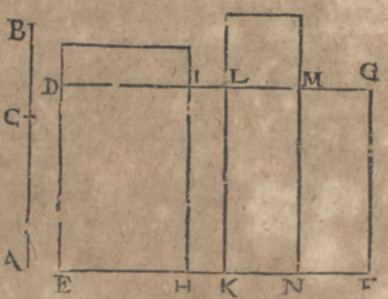
c 21. dec.
d 23. dec.
e 13. dec.
f 37. dec.
g 10. dec.
h 19. dec.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

lxiv.
lviij.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, [b] potentia incommenſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectangulum ſub ipſis contentum, Rationale; erit DK, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur, atque adeo ipſius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, [c] facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommenſurabilem: At vero Rationale, LF, ad Rationalem LK, applicatum, [d] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, commenſurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine cõmenſurabilis eſt Rationali DE, illa vero longitudine incommenſurabilis, [e] erunt DL, MG, longitudine incommenſurabiles. Quare DL, LG, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, [f] Ac propterea DG, eſt ex binis nominibus. Iam vero, vt in propoſ. 61. oſtendemus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex LM, & vt in antecedenti propoſ. DL, maius nomen eſſe, atque poſſe plus, quam LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quapropter cum & minus nomen LG, oſtenſum ſit expoſitæ Rationali DE, longitudine commenſurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.



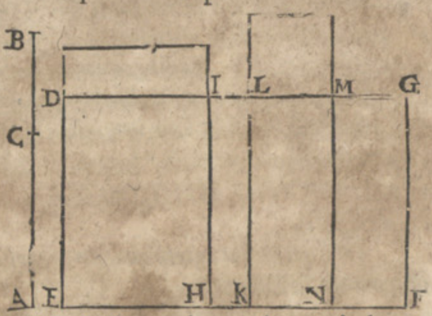
a 45. pri.
b 41. dec.
c 23. dec.
d 21. dec.
e 13. dec.
f 37. dec.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

lxv.
lix.

QVADRATVM eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG, Dico DG, eſſe ex binis nominibus ſextam. Conſtructis enim iiſdem quæ in propoſ. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipſam AB, potentem bina Media [b] potentia incomenſurabiles ſunt, faciuntque & compoſitũ ex ipſarum quadratis Mediũ, & quod ſub ipſis cõtinetur Mediũ, & incõmenſurabile cõpoſito ex quadratis ipſarũ; erit tam DK, illi compoſito æquale, quã LF, rectãgulo bis ſub AC, CB, ęquale Mediũ. Et quia Media DK, LF, applicata ſunt ad Rationalẽ DE; [c] erunt eorũ latitudines DL, LG, Rationales ipſi DE, longitudine incõmenſurabiles. [d] Quoniam vero cõpoſitũ ex quadratis rectarum AC, CB, incõmenſurabile eſt rectangulo ſub AC, CB, eidem vero rectangulo ſub AC, CB, cõmenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, CB, cum hoc illius ſit duplum; [e] Erit compoſitũ ex dictis quadratis, hoc eſt, DK, incõmenſurabile rectãgulo bis ſub AC, BC, hoc eſt, ipſi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [f] longitudine incommenſurabiles ſunt. Rationales ergo ſunt DL, LG, potentia ſolum commenſurabiles; [g] Ac proinde DG, eſt ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus DL, eſſe maius nomen, poſſeque plus quam LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Cum ergo oſtenſum ſit neutram ipſarum DL, LG, longitudine commenſurabilem eſſe expoſitæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. Quod erat oſtendendum.



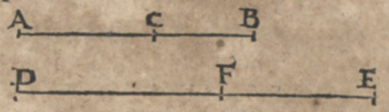
a 45. prim.
b 42. dec.
c 23. dec.
d 42. dec.
e 13. dec.
f 10. dec.
g 37. dec.

lxvj.
lx.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

EI,quæ eſt ex binis nominibus,longitudine commenſurabilis,& ipſa ex binis nominibus eſt,atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque AB, diuiſa in ſua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, ſitque
recta DE,ipſi AB,longitudine commenſurabilis.Dico DE,quoque eſſe ex binis nominibus,& ordine eandem
a 12. ſexti. ipſi AB.[a] Fiat enim vt tota AB,ad totam DE,ita ablata AC,ad ablatam DF. [b] Erit ergo & reliqua CB, ad reli-
b 19. quin.



quam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipſi AB, longitudine
c 10. dec. commenſurabilis ponitur DE;[c] erit & DF, ipſi AC, & FE, ipſi CB,lon-
d 37. dec. gitudine commenſurabilis:[d] Sunt autem AC.CB,cum ſint nomina eius,
quæ ex binis nominibus,Rationales. Igitur & DF,FE, Rationales ſunt.
Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Sunt autem AC,
e 10. dec. CB,potentia ſolum commenſurabiles;[e] erunt &DF,FE,potentia ſolum commenſurabiles.Igitur DF,FE;Ra-
f 37. dec. tionales ſunt potentia tantum commenſurabiles;[f] Ac propterea DE,ex binis eſt nominibus. Dico & ipſi AB,
ordine eandem eſſe. Aut enim AC, plus poteſt quam CB, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſura-
bilis, aut incommenſurabilis. Siquidem AC, plus poteſt quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine commen-
g 15. dec. ſurabilis;[g] poterit & DF,plus quam FE,quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi AC, com-
h 12. dec. menſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ,ita vt AB,ſit ex binis nominibus prima;[h] erit &DF,eidem Ra-
tionali longitudine commenſurabilis,cum vtraque,& Rationalis, & DF, eidem AC, ſit commenſurabilis lon-
gitudine.Quare & DE,ex defin.eſt ex binis nominibus prima,hoc eſt, ordine eadem. Si vero CB, expoſitæ Ra-
tionali ſit longitudine commenſurabilis, vt AB, ſit ex binis nominibus ſecunda; erit eodem modo & FE, Ra-
tionali expoſitæ longitudine commenſurabilis.Quare & DE,ex defin. eſt ex binis nominibus ſecunda. Si deni-
que neutra ipſarum AC,CB,longitudine ſit commenſurabilis expoſitæ Rationali,ita vt AB, ſit ex binis nomi-
i 12. dec. nibus tertia;[i] erit & neutra ipſarum DF,FE,longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali.Quare & DE,ex
defin.eſt ex binis nominibus tertia.

k 15. dec. AT ſi AC, plus poſſit, quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis;[k] poterit & DF,
plus quam FE,quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, oſtendemus DE,ex binis
nominibus quartam eſſe,vel quintam,vel ſextam,prout & AB,fuerit ex binis nominibus quarta,vel quinta,vel
ſexta.Ei igitur,quæ ex binis nominibus,longitudine commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

S C H O L I V M.

QVOD ſi recta DE, potentia tantum commenſurabilis ſit ipſi AB, quæ eſt ex binis nominibus, oſtendemus quidem eodem modo, (ſi loco: Commenſurabilis longitudine: in demonſtratione reponamus vbique: commenſurabilis potentia tantum:) & DE, eſſe ex binis nominibus. At eam eſſe ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis eſt, nullo modo concludemus. Non enim ſequitur, ſi AC, maius nomen longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali; & DF, maius nomen eidem eſſe commenſurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expoſita Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine commenſurabilis eſt, ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine: At vero DF, potentia tantum, ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione poteſt, vt DE, illi potentia tantum commenſurabilis ſit ex binis nominibus ordine eadem.

*SIT enim AB, ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, diuiſa in ſua nomina ad C, ſitq; ei commenſura-
bilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonſtrabimus eſſe ex binis nominibus, diuiſamq; eſſe in ſua no-
mina ad F, & partes AC, CB, partibus DF, FE, proportionales eſſe, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota
AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri poſſe, vt DE, ex binis nominibus ſit eadem ordine ipſi AB. Nam ſi poteſt fieri, ſit vtraq;
ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expoſitæ commenſurabilis longitudi-*
l 12. dec. *ne.[l] Quare & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt. Et quoniam eſt vt AC, ad DF, ita AB, ad DE,[m] erunt propterea &*
m 10. dec. *AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis. Non
ergo vtraq; AB, DE, ex binis nominibus prima eſt. Eodem modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; ſecunda vel
quinta. Eſſet enim vtrumq; nomen minus CB, FE, ex defin. longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ, atq; adeo & inter
ſe. Igitur & totæ AB, DE, longitudine forent commenſurabiles, quod non ponitur.*

*SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, ipſi AB, potentia ſo-
lum commenſurabilem, eſſe quoq; vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quam CB,
quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo ſit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE,[n] poterit quoq; DF, plus quam*
n 15. dec. *FE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare ex defi. erit DE, ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia.
Eodem modo ſi AB, eſt ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poſſit, quam CB, quadrato rectæ ſibi lon-*
o 15. dec. *gitudine incommenſurabilis;[o] poterit quoq; DF, plus quam FE. quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum ſit,
vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel ſexta, licet non eadem
ordine ipſi AB.*

IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, quanquam potentia tantum illi commenſurabilis ſit.

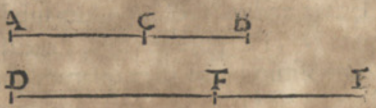
lxvij.
lxi.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI,quæ eſt ex binis Mediis, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt,atq; ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB,quæcunq; diuiſa in ſua nomina,quorum AC,maius & CB,minus,ſitque ei recta DE, lon-

DE, longitudine commenſurabilis. Dico DE, quoque ex binis Mediis eſſe, & ipſi AB, ordine eandem,[a] Fiat e- a 12. ſext.
nim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF.[b] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota b 19. quin.
AB, ad totam DE. Et quoniam ipſi AB, ponitur longitudine commenſurabilis DE;[c] erit & DF, ipſi AC, & FE, c 10. dec.
ipſi CB, longitudine commenſurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ.[d] Igitur & DE, FE, illis commenſurabiles, d 24. dec.
Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.[e] Sunt au- e 38. dec.
tem AC, CB, potentia ſolum commenſurabiles;[f] erunt & DF, FE, ſolum f 10. dec.
commenſurabiles potentia. Cum ergo & oſtenſæ ſint Mediæ, erunt DF,
FE, Mediæ potentia tantum commenſurabiles;[g] Atque idcirco DE, erit g 38. vel
ex binis mediis. Dico & ipſi AB, eandem eſſe ordine. Quoniam enim eſt vt 39. decimi.



AC, ad CB, ita DF, ad FE: Eſt autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, & rectangulum ſub AC, CB, & vt DF,
ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt
quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE; & permu-
tando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE.
Commenſurabile eſt autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, commenſurabiles oſten-
ſæ ſint longitudine.[h] Igitur & rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. Quare h 10. dec.
ſi rectangulum ſub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, ſit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum ſub DF,
FE, Rationale, cum illi ſit commenſurabile;[i] atque adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum i 18. dec.
ſub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, ſit ex binis Mediis ſecunda: erit & rectangulum ſub DF, FE, ei commen-
ſurabile, Medium, ex corollario propoſ. 24. huius lib.[k] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis ſecunda. Quare k 39. dec.
ei, quæ ex binis Mediis longitudine commenſurabilis, &c. Quod demonſtrandum erat.

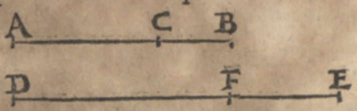
S C H O L I V M.

EODEM prorſus modo demonſtrabimus, rectam lineam DE, ſi potentia tantum fuerit commenſurabilis ipſi AE, quæ eſt ex binis Mediis, ex binis Mediis eſſe, atq; ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis eſt, ſi modo loco commenſurabilis longitudine: in demonſtratione dicamus vbique: commenſurabilis potentia tantum, &c. vt manifeſtum eſt.

THEOR. 51. PROPOS. 69. lxviij. lxij.

MAIORI commenſurabilis, & ipſa Maior eſt.

SIT linea Maior AB, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis ſit DE, ſiue longitudine & po-
tentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, Maiorem eſſe. Fiant enim eadem, quæ ſuperius; ita vt partes AC, CB,
ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, commen-
ſurabiles ſunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantum;[a] erunt quoque tam AC, DF, quam CB, FE, eo- a 10. dec.
dem modo commenſurabiles. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, b 22. ſexti.
& permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE,[b] erit vt quadratum ex AC, ad



quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & compo-
nendo vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex
CB, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex
CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compoſitum ex quadratis recta-
rum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compoſitum ex quadratis recta-
rum AC, CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratum ex CB,
quadrato ex FE, quod rectæ CB, quadrato ex FE, oſtenſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia,
vel potentia tantum.[c] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile eſt compoſito ex c 10. dec.
quadratis rectarum DF, FE.[d] Eſt autem compoſitum illud Rationale, cum rectæ AC, CB, componant Maio- d 40. dec.
rem AB.[e] Igitur & hoc Rationale eſt. e 9. def.

RVRSVS quia eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita eſt quadratum ex AC, ad rectan-
gulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propoſ.
19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectan-
gulum ſub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB;
ad rectangulum ſub DF, FE: Eſt autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commenſurabile, quod rectæ AC,
DF, oſtenſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.[f] Igitur & rectangulum f 10. dec.
ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt.[g] Eſt autem rectangulum ſub AC, CB, Medium. Igi- g 40. dec.
tur & rectangulum ſub DF, FE, illi commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quoniam
vero eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE,[h] ſuntque AC, CB, potentia incommenſurabiles, cum componant Maio- h 40. dec.
rem AB,[i] Erunt quoque DF, FE, potentia incommenſurabiles Itaq; cum DF, FE, ſint potentia incommenſu- i 10. dec.
rabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, k 40. dec.
Medium, vt oſtenſum eſt;[k] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commenſurabilis & ipſa maior eſt. Quod demon-
ſtrandum erat

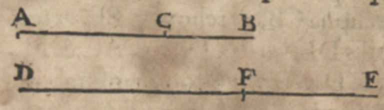
THEOR. 52. PROPOS. 70. lxix. lxiij.

RATIONALE ac Medium potenti commenſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium
potens eſt.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue
longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, eſſe potentem Rationale ac Medium. Constructis
enim iiſdem quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB,

 commen-

a 41. dec. commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarū DF, FE:[a] Eſt autem illud compoſitū Medium, cum rectæ AC, CB, cōponant ipſam AB, potentem Rationale ac Mediū. Igitur per coroll. prop. 24. huius lib. & hoc compoſitū illi commenſurabile, Mediū eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum



b 41. dec. ſub AC, CB,[b] quod Rationale eſt, commenſurabile rectangulo ſub DF, FE, atque adeo & rectangulum ſub DF, FE, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt DF, FE, potentia incommenſurabiles. Quare cum DF, FE, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demon-

c 41. dec. ſtratum eſt;[c] erit tota DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrndum.

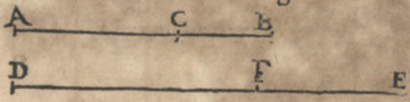
lxx.
lxiv.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

SIT bina Media potens AB, diuiſa in ſua nomina ad C, eiq; commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia ſiue potentia tantū. Dico & DE, eſſe bina Media potentē. Constructis n. iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus, vt in prop. 69. compoſitū ex quadratis rectarū AB, CB, compoſito ex quadratis rectarum DF, FE, cōmenſura-

a 42. dec. bile eſſe: Nec non & rectangulū ſub AC, CB, eſſe commenſurabile rectangulo ſub DF, FE.[a] Cū ergo tam compoſitū ex quadratis rectarum AC, CB, quam rectangulū ſub AC, CB, Mediū ſit; erit etiā ex coroll. prop. 24. huius lib. tā compoſitū ex quadratis rectarū DF, FE, quam rectangulum ſub DF, FE, Medium. Sed



b 42. dec. & DF, FE, potentia incōmenſurabiles ſunt, vt prius. Poſtremo[b] quia compoſitum ex quadratis rectarū AC, CB, & rectangulum ſub AC, CB, incommenſurabilia ſunt, ex hypotheſi propterea quod AB, bina Media poteſt; Eſt autem compoſito ex quadratis rectarū AC, CB, commenſurabile oſtenſum compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum ſub AC, CB, probauimus cōmenſurabile rectangulū ſub DF, FE; Erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitū ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum ſub DF, FE, incommenſurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incōmen-

c 42. dec. ſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum;[c] erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commenſurabilis, & ipſa Media potens eſt. Quod erat oſtendendum.

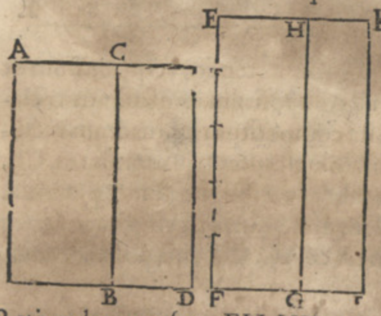
lxxi.
lxv.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale ſpatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum ſpatium AD, poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Æquale ſiquidem non erit; alias cum AB, ſit Rationale, eſ-

a 45. primi. ſet & illi æquale CD, Rationale, quod non ponitur. Sit primo maius,[a] & expoſita Rationali EF, applicetur ad eam rectangulum EG, æquale ipſi AB, & ad HG, aliud HI, æquale ipſi CD, vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Et quoniam AB, Rationale eſt, & CD, Medium, erit quoq; EG, Ra-



b 21. dec.
c 23. dec. tionale, & HI, Medium; quæ cum applicentur ad Rationalem EF,[b] erit EH, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis;[c] At vero HK, Rationalis, & eidem EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia EG, HI, incommenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitionibus; quod

d 10. dec. EG, Rationale ſit, ad HI, Irrationale, nempe Medium;[d] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommenſurabiles longitudine.

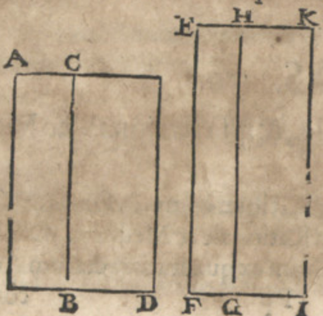
e 37. dec. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles;[e] Ac propterea EK, ex binis nominibus eſt.

f 1. ſexti. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD, hoc eſt, EG, quam HI; erit quoq; EH, maior quam HK,[f] cum EH, HK, eandem rationem habeant, quam EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & ſpatium AD, compoſitum ex Rationali AB, & Me-

g 55. dec. dio CD,[g] Irrationalis eſt quæ ex binis nominibus appellatur.

SI vero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo &

h 58. dec. ſpatium AD,[h] Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.



SIT deinde AB, minus quam CD, & eadem conſtruantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus & EH, ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Et quia AB, minus eſt quam CD, hoc eſt, EG, quam HI; erit quoque recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rurſus HK, maius nomen ipſius EK, quæ eſt ex binis nominibus, plus quam EH, mins nomen, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit HK, quam EH, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit EK, ex binis no-

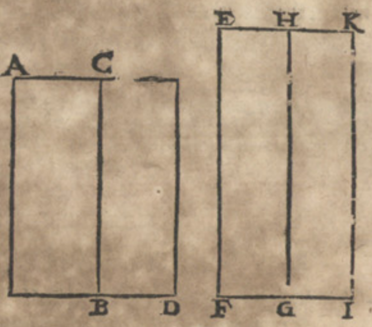
nis nominibus ſecunda, cum EH, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali EF, vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus ſecunda EK, atq; adeo & ſpatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compoſitum, [i] Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Mediis prima. i 56. dec.

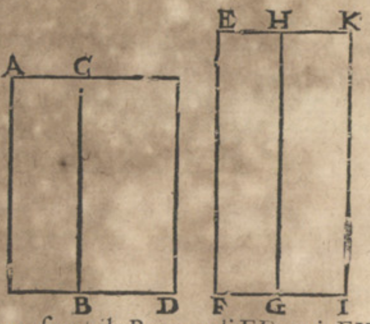
SI vero HK, plus poſſit quam EH, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, erit EK, ex binis nominibs quinta, cum EH, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & ſpatium AD, [k] Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat. k 59. dec.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

Lxxii.
Lxvi.

SI duo media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis ſecunda, vel bina Media potens.





COMPONANTVR duo Media incommenſurabilia AB, CD. Dico rectam quæ poteſt totum ſpatium AD, eſſe vel ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media potentem. Erit enim rurſus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Æquale ſiquidem non erit; alias eſſent AB, CD, commenſurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propoſitione. Et quia ſpatia AB, CD, ponuntur Media, & incommenſurabilia; erunt & ſpatia EG, HI, Media & incommenſurabilia; cum illis ſint æqualia. [a] Igitur rectæ EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles ſunt; & vtraque (cum EG, HI, Media ſint applicenturque ad Rationalem EF.) [b] Rationalis eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis, Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; [c] ac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD, erit vt in antecedenti propoſ. EH, maius nomen ipſius EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, cum vtrumq; nomen EH, HK, oſtenſum ſit longitudine incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atq; adeo & ſpatium AD, [d] Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

a 10. dec.
b 23. dec.
c 37. dec.
d 57. dec.

SI vero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis, cum vtrumq; nomen EH, HK, longitudine ſit incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium EI, ſiue ſpatium AD, [e] Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur. e 60. dec.

QVOD ſi AB, minus ſit, quam CD, non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe commenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neq; Mediæ neque inter ſe eaſdem eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [f] latitudinem efficit Rationalem ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. f 23. dec.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem efficit ex binis nominibus primam. g 61. dec.

ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, [h] latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. h 62. dec.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, [i] latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. i 63. dec.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [k] latitudinem facit ex binis nominibus quartam. k 64. dec.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, [l] ſi latitudinem facit ex binis nominibus quintam. l 65. dec.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, [m] latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. m 66. dec.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales: Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus: perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenariis.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & deniq; eius, quæ poteſt bina Media.

IN ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docent ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe in ſua nomina.

IN tertio deinde contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.

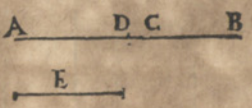
IN quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN quinto autem, quem reperies in propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN ſexto vero, qui quinq; propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunq; commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.

IN ſeptimo denique contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. E recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.



SIT enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen A C, & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidiæ AD, vel DB, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter AC, CB: & eſſe quoque ex binis nominibus. Quoniam enim AC, ſuperat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, ſuperat ipſam CB, eadem recta DC; perſpicuum eſt dimidiam ipſius AB, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commenſurabilis eſt longitudine toti AB, cum hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi AB, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentib. ſeptem ſenariis de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

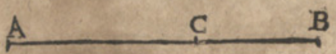
PRINCIPIVM SENARIORVM.
per detractionem.

Lxxiii.
Lxviii.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. eſt vt AB, ad AC, ita quadra-
a 10. dec. tum ex AB, ad rectangulum ſub AB, AC; Et ſunt AB, AC; longitudine incommenſurabiles; [a] erunt incommenſurabilia quadratum ex AB, & rectangulum ſub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponan-
b 16. dec. tur commenſurabiles, erunt quadrata ex AB, A C, commenſurabilia. [b] Igitur & conpoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero ſub AB, AC, commenſurabile eſt rectangulũ ſub AB, AC, bis. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum ſub, AB, AC, bis contentum, incommenſurabilia ſunt,
c 7. ſec. vt in ſcholio propoſ. 14. huius lib. demonſtrauimus [c] Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile eſt. Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, ſit Rationale; (propterea quod commenſurabile eſt quadrato Rationali ex AB, linea Rationali deſcripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Reſiduum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

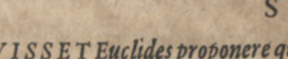


SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propoſitionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

d 37. dec.



NAM cum AB, A C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles; [d] erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

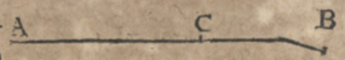
THEO-

THEOR. 57. PROPOS. 75.

Lxxiiii.
Lxix.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB, ſitque rectangulum ſub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia ſunt commenſurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commenſurabilia, [a] atque adeo & compoſitum ex ipſis commẽſurabile erit quadrato ex AC. Eſt autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum ſub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis ſub AB, AC, Rationale. Igitur incommenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis ſub AB, AC. [b] Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale ſit rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoq; rectangulum bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. [c] Quare & rectangulum bis ſub AB, AC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia ſunt. Exiſtente ergo rectangulo bis ſub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in ſcholio ſequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod oſtendendum erat.



a 16. dec.
b 7. dec.
c 17. deci.

SCHOLIVM.

POTVISSET hac propoſito proponi hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

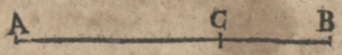
Cum enim AB, AC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantq́; Rationale; [d] erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome prima. d 38. dec.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

Lxxv.
Lxx.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat, Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB, ſitque rectangulum ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commenſurabilibus commenſurabilia ſunt; [a] erit & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile: Eſt autem vtrumque ipſorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compoſitum ex ipſis, vtriq; cõmenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia rectangulũ ſub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis ſub AB, AC, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. [b] Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale ſit rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, quod etiam Medium eſt, quadrato ex BC. [c] Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & ipſa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, à maiori nomine, vt ex ſcholio ſequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 16. dec.
b 7. ſec.
c 67. dec.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuiſſet proponi.

SI à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

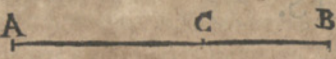
QVONIAM enim AB, AC, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, continentq́; Medium; [d] erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome ſecunda. d 39. dec.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

Lxxvi.
Lxxi.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

DETRA-



DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; Sit autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam B C, Irrationalem eſſe. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale eſt; rectangulum vero ſub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & ei commenſurabile, hoc eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, Medium, hoc eſt, Irrationale;
a 10. dec. [a] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC.
b 7. ſec. [b] Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſit. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile erit. Ponitur autem compoſitū ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale.
c 10. def. [c] Igitur quadratum ex B C, illi incommenſurabile, Irrationale eſt, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, puoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineæ Maioris à minori nomine, vt in ſcholio ſequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrarionalis eſt. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium:
d 40. dec. *[d] erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Auſertur igitur A C, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.*

Lxxvii.
Lxxii.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

SI à recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.



DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub AB, AC, Rationale;
a 10. defin. [a] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC.
b 7. ſec. [b] Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB, AC.
c 17. deci. [c] Sunt ergo rectangulum bis ſub AB, A C, & quadratum ex BC, incommenſurabilia. Cum ergo rectangulum bis ſub AB, AC, Rationale ſit;
d 10. defin. [d] erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis ſub AB, AC. quod Rationale eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium exiſtit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

Cum enim AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale;
e 41. defin. *[e] erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt AB, minus autem AC. Aufertur igitur minus nomen AC, à maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.*

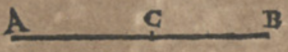
Lxxviii.
Lxxiii.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRA-

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; Sitq; tam compoſitum ex ipſarum quadratis, quam rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. [a] Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, a 7. ſec. æquale eſt rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur; rectangulum bis ſub AB, AC, quod ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium etiam eſt, (cum Medio, quod ſub AB, AC, continetur, ſit commenſurabile) quadrato ex BC



[b] Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo ſub AB, AC, quod Medium eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam eſt. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod erat oſtendendum. b 27. dec.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuiſſet hoc theorema.

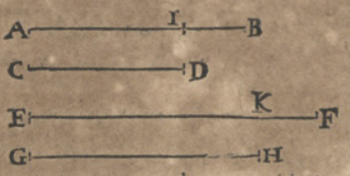
SI à maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum, erit compoſita, ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.

LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & viciſſim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter ſecundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magitudines AB, CD, EF, GH, ſitque IB, exceſſus inter AB, CD, æqualis exceſſui KF, inter EF, GH. Dico eundem eſſe exceſſum inter AB, EF, qui eſt inter CD, GH. Quoniam enim IB, exceſſus eſt inter AB, & CD; erit AI, ipſi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipſi GH. Idem igitur exceſſus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autem totorum AB, EF, ex pronuntiato 16. libr. 1. idem exceſſus, qui inter AI,



EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

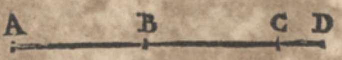
EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant,

THEOR. 62. PROPOS. 80.

Lxxix.
Lxxiv.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

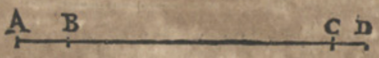
SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ipſi AB, aliam Rationalem non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipſi AD, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia BC, Rationalis eſt; erit AC, illi ſolum potentia commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt AC, BC, potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem



exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis ſub AC, BC, qui inter cõpoſitũ ex quadratis rectarũ AD, BD, & rectangulũ bis ſub AD, BD; (ſuperat enim [a] compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, rectangulum bis ſub AC, BC, quadrato ex AB; [a] quod compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale ſit rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, ſuperat rectangulum bis ſub AD, BD, quadrato eodem ex AB; [b] cum & compoſitũ ex quadratis rectarũ AD, BD, æquale ſit rectangulo bis ſub AD, BD, vna cũ quadrato ex AB.) erit quoq; permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulũ bis ſub AC, BC, & rectangulum

a 7. ſec.
b 7. ſecun.

gulum bis ſub AD,DB. Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. quod vtrumq; Rationale ſit. (Nam cum AC,BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles; c 16. dec. erunt earum quadrata Rationalia, & commenſurabilia [c] Igitur & compoſitum ex ipſis vtriq; illorum commenſurabile eſt, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & exceſſus, inter rectangulum bis ſub



AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, ſpatium Rationale eſt. d 11. dec. [d] Et quia rectangulum ſub AC,BC, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Eadem que ratione Medium erit rectangulum bis ſub e 27. deci. AD,BD, [e] Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD,BD, Rationale ſpatium non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

Lxxx.
Lxxv.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipſi congruat BC, Media toti AC, potentia ſolum commenſurabilis, & rectangulum ſub AC,BC, ſit Rationale. Dico ipſi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Si enim fieri poteſt, congruat alia BD, Media toti a 24. dec. AD, potentia tantum commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub AD,BD, Rationale. Et quia BC, Media eſt potentia ſolum ipſi AC, commenſurabilis; [a] erit & AC, Media, cum illi ſit commenſurabilis. Mediæ ergo ſunt AC,BC, potentia tantum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC,CB, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD,BD, vt in propoſ. præcedenti oſtenſum eſt: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ex ſcholio propoſitionis 27. huius lib. ſpatium Rationale; quod vtrumq; ſit Rationale. (cum enim rectangulum ſub AC,BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis ſub A C, B C, illi commenſurabile Rationale; Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis ſub. AD,BD. (Igitur & exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD.BD, ſpatium Rationale eſt. Et quoniam rectæ AC,BC, Mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erunt



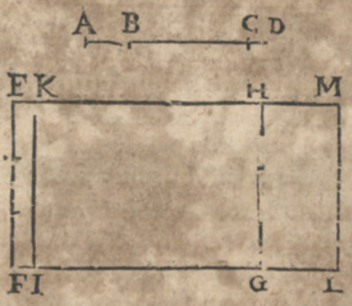
b 16. deci. & ipſarum quadrata Media, & commenſurabilia. [b] Igitur & compoſitum ex ipſis vtriq; ipſorum commenſurabile eſt, atq; adeo & Medium, ex coroll. pro- c 27. dec. poſ. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compoſitum ex quadratis rectarum AD,BD. [c] Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD,BD, ſpatium Rationale non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti ſit potentia ſolum commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

Lxxxi.
Lxxvi.

THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIÆ Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome ſecunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commenſurabilis, & rectangulum ſub AC,BC, ſit medium. Dico ipſi AB, aliam Mediam non congruere quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potentia, congruat ipſi alia BD. Media



toti AD, potentia tantum commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub AD, a 45. pri. BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, [a] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC,BC, & ad eandem b 7. ſec. EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et denique aliud EL, æquale compoſito ex quadratis rectarum AD,BD. [b] Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur ſub AC,BC. Eodemq; modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur ſub AD, BD. Et quoniam AC,BC, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; (cum c 24. dec. enim BC, Media ponatur, [c] erit & AC, ipſi potentia commenſurabilis, d 16. dec. Media) erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. [d] Ergo & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtrique eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Igitur & EG, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; quod cum applicetur ad Rationalem EF, [e] e 23. ſex. erit EH, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt; erit ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & eius duplum, nempe KG, Medium: quod cum applicetur ad Ra- f 23. dec. tionalem KI, [f] erit KH, Rationalis ipſi KI, hoc eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt, eſtque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, g 10. dec. vt oſtendimus lemmate 3. ad propoſ 19. huius lib. [g] erit quadratum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC,BC. Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, hoc eſt, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC,BC, ponantur potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata commenſura-

menſurabilia. [h] Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtrique ipſorum, nempe quadrato ex AC.) rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile eſt eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipſi KG, incommenſurabile eſt, ex iis quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus. [i] Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommenſurabiles ſunt: Sed & Rationales ſunt oſtenſæ. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH auferatur Rationalis KH, potentia ſolum commenſurabilis ipſi EH, [k] erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonſtrabimus EK, Apotomen eſſe, & illi, congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantum congruit recta linea Rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti: quod eſt abſurdum. Vnam enim tantum congruere, [l] demonſtratum eſt. Igitur mediæ Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

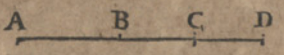
h 16. dec.
i 10. dec.
k 74. dec.
l 80. dec.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

Lxxxii. Lxxvii.

MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; at rectangulum ſub AC, BC, Medium. Dico ipſi AB, aliam non congruere, quæ eadem præſtet. Sit enim, ſi fieri poteſt, alia congruens BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, ad rectangulum ſub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propoſ. 80. demonſtratum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, ſpatium eſt Rationale: ſed & non Rationale eſt. (Cum enim rectangulum ſub AC, BC, ponatur Medium, erit quoq; ex coroll. propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Similiterq; Medium erit rectangulum bis ſub AD, BD, [a] Quare vnum non ſuperabit alterum Rationali. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergo vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.



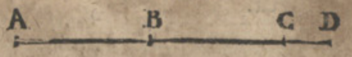
a 27. dec.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

Lxxxiii. Lxxviii.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat, ipſi alia recta BD toti AD, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Medium, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt; cum vtrumq; ſit Medium. [a] Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.



c 27. dec.

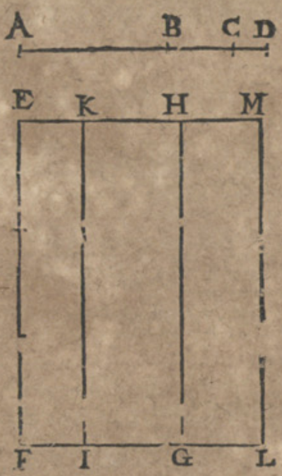
THEOR. 67. PROPOS. 85.

Lxxxiv. Lxxix.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipſi vero congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub AC, BC, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipſi AB, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, ita vt & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, Medium ſit & rectangulum ſub AD, BD, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum AD, BD. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium eſt; erit etiam EG, illi æquale Medium. [a] Recta igitur EH, Rationalis eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub

a 23. dec.



ſub AC, BC, Medium eſt; erit & eius duplum KG, Medium.

b 23. deci.

b Igitur & recta KH, Rationalis eſt, longitudine ipſi EF, incommenſurabilis. Et quoniam KG, commenſurabile eſt rectangulo ſub AC, BC, cum illud huius ſit duplum; at rectangulum ſub AC, BC, incommenſurabile ponitur compoſito ex quadratis rectarum AC, BC;

c 14. dec.

c erit quoque KG, eidem compoſito, hoc eſt, ipſi EG, incommenſurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem,

d 10. dec.

d longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed & oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolum commenſurabilis ipſi EH;

e 74. deci.

e erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter oſtendemus EK, eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe KM. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit; &c. Quod eſt abſurdum.

f 80. dec.

f Vnam enim tantum congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

DEFINITIONES
TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IV.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD ſi neque tota, neq; congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

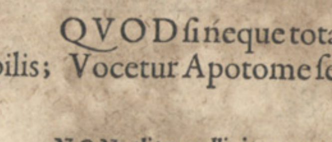
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarum, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus eſt perſpicuum.

Lxxxv.
Lxxx.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

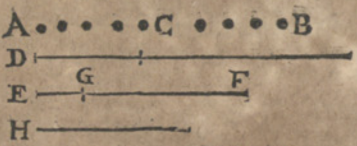
INVENIRE primam Apotomen.



REPERTIS duobus numeris quadratis, AB, CB, vt in ſcholio 2. propoſ. 29. huius lib. docuimus, quorum exceſſus AC, non ſit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF. Eritque EF, cum commenſurabilis ſit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numer' AB, ad numerũ AC, ita per coroll.

coroll. propoſ. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, eſſe primam Apotomen.[a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia vero AB, AC, proportionem non habent quam quadrati numeri; neque quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ EF, GF. Rationales ergo ſunt EF, GF, potentia tantum commenſurabiles [c] atq; idcirco reliqua EG, Apotome eſt. Dico & primam eſſe. Poſſit enim recta EF, plus quam recta GF, quadrato ex H. Et quia eſt vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuerſionẽ rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Habent autem AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [d] Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur tota EF, plus poteſt, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque tota eadem EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

a 6. dec. b 9. dec. c 74. deci. d 9. dec.



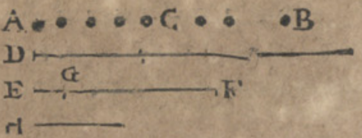
PROBL. 20. PROPOS. 87.

LXXXVI. LXXXI.

INVENIRE ſecundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. præcedenti; expoſitaq; Rationali D, ſumatur ei longitudine commenſurabilis GF, eritq; GF, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis quoq;. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Dico EG, eſſe ſecundam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ GF, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo GF, ſit oſtenſa Rationalis; erit quoq; EF, Rationalis. Quia vero numeri AC, AB, atque adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati [b] erunt GF, EF, longitudine incommenſurabiles, Rationales ergo ſunt GF, EF, potentia ſolum commenſurabiles, [c] Ideoque EG, reliqua, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Poſſit enim recta EF, plus quam GF, quadrato ex H. Quoniam ergo eſt vt AC, ad AB, ita quadratum ex GF, ad quadratũ ex EF; & conuertendo, vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF: Oſtendemus iam vt in antecedenti propoſ. rectam H, ipſi EF, longitudine eſſe commenſurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus poſſit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis, ſitque congruens GF, expoſitæ Rationali D, longitudine commenſurabilis; erit EG, ex defin. ſecunda Apotome. Inuenimus ergo ſecundam Apotomen. Quod erat faciendum.

a 6. dec. b 9. dec. c 71. dec.



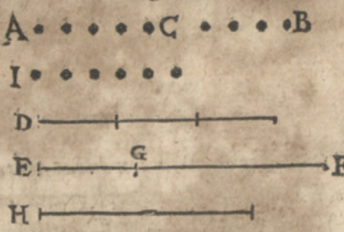
PROBL. 21. PROPOS. 88.

LXXXVII. LXXXII.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. 86. ſumatur alius numerus I, vt in propoſ. 31. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipſorum, AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expoſita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius lib. [a] Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commenſurabilia; atque adeo & rectæ D, & EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [b] erunt rectæ D, & EF, longitudine incommenſurabiles. Rurſus fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem coroll. propoſ. 6. huius lib. Dico EG, eſſe tertiam Apotomen. [c] Quoniam enim quadrata ex EF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia AB, AC, atque adeo & quadrata ex EF, GF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [d] Erunt rectæ EF, GF, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt EF, GF, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi ſolum commenſurabilis; [e] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF: Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri quadrati. Neq; igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati, [f] Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſſit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H; Oſtendemuſq; vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi EF, longitudine commenſurabilem. Quapropter cum tota EF, plus poſſit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

a 6. dec. b 9. dec. c 6. dec. d 9. dec. e 74. dec. f 9. dec.

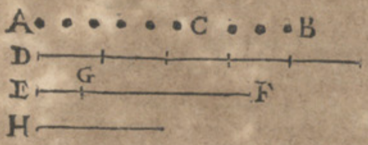


Lxxxviii
Lxxxiii.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportioně habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in ſcholio 3. propoſit. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quod ſi reliqua fiant, quæ in propoſ. 86. oſtendemus, vt ibi, EG, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſſit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus poteſt, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, eſtq; eadem tota EF, commenſurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



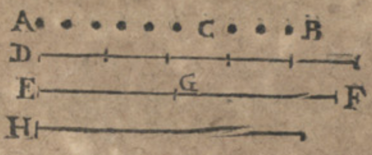
a 9. dec.

Lxxxix.
Lxxxiv.

PROBL. 23. PROPOS. 90.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propoſ. præcedenti. fiat conſtructio, vt in propoſ. 87. hoc eſt, ſumatur GF, longitudine commenſurabilis Rationali D, &c. Oſtendemus ergo vt in propoſ. 87. EG, eſſe Apotomen. Dico & quintam eſſe. Poſſit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia ſimiliter, vt in propoſ. 86. oſtendemus, per conuerſionem rationis eſſe vt AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rurſus, vt in propoſ. antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incõmenſurabiles; eſtque congruens GF, Rationali D, commenſurabilis, longitudine; erit ex defin. EG, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

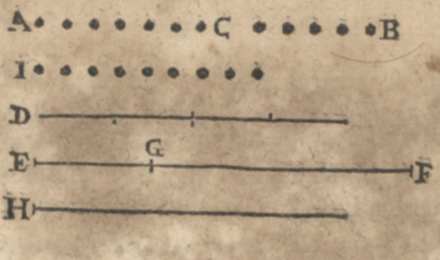


Lxxxx.
Lxxxv.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE ſextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, vt in propoſ. 54. ita vt AB, ad neutrum ipſorum AC, CB, & I; ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propoſit. 88. Oſtendemus ergo ſimiliter, vt ibi, D, & EF, longitudine incommenſurabiles eſſe. Dico & ſextam eſſe. Nam vt in propoſit. 88. erunt D, & GF, longitudine quoque incommenſurabiles; Atq; adeo neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſſit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H, quam oſtendemus, vt in propoſ. 89. longitudine incommenſurabilem eſſe ipſi EF. Igitur cum tota EF, plus poſſit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incõmenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine ſit commenſurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, ſexta Apotome. Inuenimus ergo ſextam Apotomen. Quod erat faciendum.

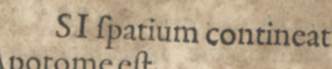


SCHOLIVM.

SED & expeditius ſex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

a 49. dec. *SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.* [a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abſciſſa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis ſit ipſi CB: Dico AD, eſſe primam Apotomen. Quoniam enim AC, BC, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; erunt etiam AC, DC, Rationales potentia tantum commenſurabiles.* [b] *Eſt ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus poteſt, quam CB, hoc eſt, quam DC, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis, ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex defin. Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex ſecunda ſecundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex ſexta ſextam, ſi minora nomina ex maioribus auferamus.*

b 74. dec.

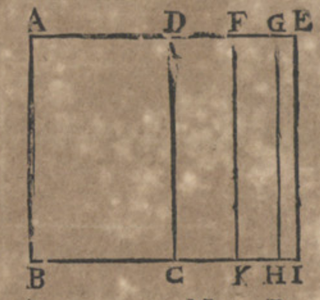


Lxxxxi.
Lxxxvi.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Apotomen eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; & tota AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & deniq; eadem AE, tota plus poterit, quam congruens DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale ſub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. Et quia AE, plus poteſt, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: [a] erunt rectæ AG, GE, longitudine commenſurabiles [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis erit: Eſt autem AE Rationali AB, longitudine commenſurabilis. [c] Igitur & vtraque AG, GE, ipſi AB, longitudine eſt commenſurabilis; atque ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipſi AB, parallelis, quæ ipſi BC, productæ occurrant in HI, [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum ſub duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraq; DF, FE, longitudine commenſurabilis eſt ipſi DE; & DE, longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB; (Nam ſi commenſurabilis eſſet longitudine, cum & AE, ſit eidem AB, longitudine commenſurabilis; [e] eſſent AE, DE, longitudine quoq; commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolum potentia commenſurabiles:) [f] erit etiam vtraque ipſarum DE, FE, ipſi AB, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam vtraque DF, FE, Rationali DE, commenſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB, parallela, [g] erit vtrumq; rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium.





a 18. dec.
b 16. dec.
c 12. dec.
d 20. dec.
e 22. dec.
f 14. dec.
g 22. dec.

IAM vero ipſi AH, [h] fiat quadratum æquale LM, & ipſi GI, æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, angulum LPM. [i] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ ſit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum ſub AG, GE, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex FE: [k] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [l] Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipſis habeant rationem; erit FI, mediũ proportionale inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autẽ inter eadẽ LM, NO, per lemma propoſ. 14. huius lib. mediũ quoq; proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: [m] Sed ipſi FI, æquale eſt DK, & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totũ DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem & totum AI, per conſtructionẽ, æquale quadratis LM, NO. Igitur & reliquũ AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale; Ac ꝓpterea recta TS, poteſt ſpatiũ AC, Dico TS, Apotomẽ eſſe.

h 14. ſec.
i 26. ſexti.
k 17. ſexti.
l 1. ſexti.
m 36. dec.

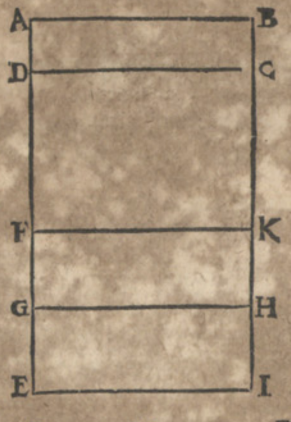
QVONIAM enim ſpatia AH, GI, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia, atq; adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommenſurabilia ergo ſunt LO, & NO, çum vnum ſit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [n] eandem rationem habentes cum LO, NO, [o] longitudine incommenſurabiles ſunt; [p] Atque idcirco reliqua TS, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

n 1. ſexti.
o 10. dec.
p 74. dec.

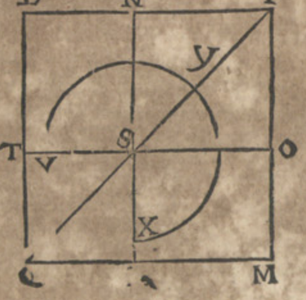
THEOR. 69. PROPOS. 93.

Lxxxxii.
Lxxxvii.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.



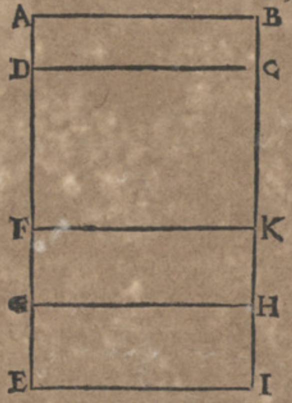
CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſe[illegible]da AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Me[illegible]æ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum cõmenſurabiles; & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & deniq; AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, vt in propoſitione præcedenti. [a] Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſitione, AG, GE, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cum DE, eidem AB, ponatur longitudine commenſurabilis; [c] eſſent AE, DE, inter ſe quoq; commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles.) [d] Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidem AB. Eſt



a 18. dec.
b 16. dec.
c 12. dec.
d 14. dec.

autem

autem vtraq; AG,GE,Rationali AE,commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB,AG, q̃ AB,
e 22. dec, GE,potentia ſolum commenſurabiles; e Atque idcirco rectangulum vtrumque AH,GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF,FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis; erit quoque, vt in ſcholio propoſ.12. huius lib. oſtendimus, eidem AB,
f 20. dec. Rationali longitudine commenſurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. f Vtrumque ergo rectangulum DK,FI, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt. Iam vero, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen eſſe primam.





g 10. dec. QVONIAM enim AG, GE, longitudine ſunt commenſurabiles, g erunt & AH,GI, eandem cum illis habentia rationem, commenſurabilia; atque adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commenſurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, ſaltem potentia erunt commenſurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM,NO, Mediis AH,GI, æqualia, (oſtenſa enim ſunt AH, GI, Media eſſe) Media ſunt. Et quoniam FI, atque adeo ſibi æquale LO, Rationale eſt, proptereaque Medio NO, incommenſurabile; erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo & Mediæ ſint oſtenſæ, & commenſurabiles; erunt TO, SO, Me-
h 75. dec. diæ potentia tantum commenſurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale eſt oſtenſum; h erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda, &c. Quod demonſtrandum erat.

Lxxxxiii.
Lxxxviii.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.





CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC poteſt, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam. Sit enim ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propoſ. 92. eruntque rurſus, vt ibi, AG, GE, lon-
a 16. dec. gitudine inter ſe commenſurabiles; a Ac propterea & vtraq; toti AE, longitudine commenſurabilis erit. Eſt autem AE, po-
b 14. dec. ſita incommenſurabilis longitudine Rationali AB. b Igitur & vtraq; AG,GE, eidem AB, longitudine erit incōmenſurabilis. Cum ergo vtraq; AG,GE, Rationali AE, cōmenſurabilis Ra-
c 22. dec. tionalis ſit; erunt tam AB,AG, quam AE,GE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; c Ac propterea vtrumq; rectangulum AH,GI, Medium erit. Rurſus quia DE, longitudine ponitur incommenſurabilis Rationali AB; erit quoque vtraq; DF,FE, ipſi DE, longitudine commenſura-
d 14. dec. bilis exiſtens, d eidem AB, longitudine incommenſurabilis. Cum ergo vtraq; DF,FE, Rationali DE, commẽ-
e 22. dec. ſurabilis, ſit Rationalis; erunt tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles; e atque propterea vtrumque rectangulum DK,FI, Medium erit. Similiter iam demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam.

QVONIAM enim AH,GI, Media ſunt oſtenſa; erunt & quadrata LM,NO, illis æqualia, Media; Ac pro-
f 10. dec. pterea & rectæ TO,SO, Mediæ. Et quia AH,GI, eandem habentia rationem, quam AG,GE, quas oſtendimus commenſurabiles eſſe, f commenſurabilia ſunt; Erunt & quadrata LM,NO, commenſurabilia. Igitur & rectæ TO,SO, cōmenſurabiles ſunt ſaltē potentia. At vero quia AE, DE, potētia ſolum ſunt cōmenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles, eſtque ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis GE, ipſi vero DE, com-
g 10. dec. menſurabilis eſt longitudine FE; erunt ex ſcholio propoſ.14. huius lib. & GE,FE, longitudine incommenſurabiles; g ac propterea GI,FI, eandem rationē habentia, quam GE,FE, hoc eſt, illis æqualia NO,LO, incommenſurabilia. Quare TO,SO, eandem rationem habentes, quam LO,NO, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commenſurabiles. Mediæ ergo ſunt TO,SO, potentia ſolum commenſurabiles.
h 76. dec. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale ſit ipſi FI, vt conſtat ex propoſ. 92. quod Medium eſſe oſtendimus; erit & LO, Medium.) h erit TS, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

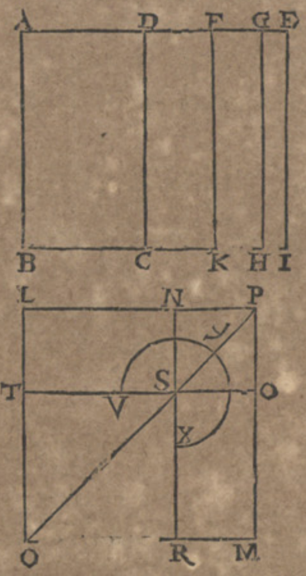
THEOR.

xciv.
lxxxix.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; Recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Minorem eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariã in F, & reliqua omnia fiant, vt prius.[a] Erũt ergo AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus poteſt, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE, applicatum eſt rectangulum ſub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficienſque figura quadrata. Et quia AE Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis, [c] erit DI, atque adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, ſint longitudine incommenſurabiles; [d] incommenſurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero ſimiliter demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe minorem.



a 19. dec.
b 20. dec.
c 22. dec.
d 10. dec.

QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſitum ex quadratis rectarnm TO, SO, Rationale. Item quia F, Medium eſt oſtenſum, erit & LO, contentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atque adeo rectæ TO, SO, potentia incommenſurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitque compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub ipſis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

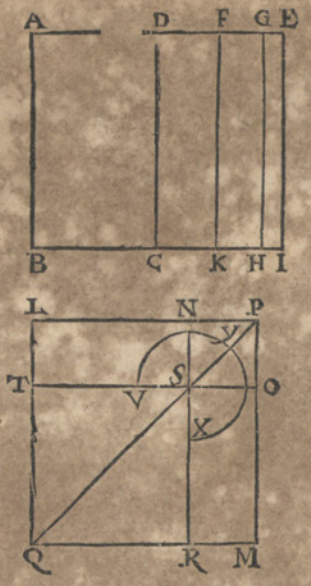
e 77. dec.

lxxxxv.
lxxxx.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proxime antecedentis propoſitionis) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB, vt in propoſ. 93. diximus; [a] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; [b] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rurſus erunt, vt in præcedenti propoſ. AH, GI, incommenſurabilia; poteritque, vt oſtenſum eſt in propoſ. 92. recta TS, ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.



a 22. dec.
b 20. dec.

QVONIAM enim oſtenſum eſt AI, Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonſtrauimus FI, Rationale eſſe; erit & LO, rectangulum ſub TO, SO, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommenſurabiles, vt in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cũ TO, SO, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; [c] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 78. dec.

lxxxvi.
lxxxxj.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali,& Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR ſpatium AC,ſub Rationali AB,& Apotoma ſexta AD. Dico rectam,quæ poteſt ſpatium AC,eſſe eam,quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipſi AD,congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ. 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis eſt,& Rationali AB, longitudine incommen-
a 22. dec. ſurabilis; [a] erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt
b 10. dec. commenſurabiles; [b] Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum DI,
c 14. dec. FI,commenſurabilia ſint, [c] erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. Iam vero demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

QVONIAM enim AI, Medium oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium oſtenſum eſt; erit & LO, illi æquale, contentumque ſub TO, SO, Medium. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile, vt oſtendimus; erit quoque LO, ſub TO, SO, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum TO, SO; propterea quod LO, ipſi FI, & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Denique TO, SO, potentia incommenſurabiles ſunt, vt in propoſ. 95. eſt demonſtratum. Quamobrem cum TO, SO, ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; necnon & rectan-
d 79. dec. gulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſito ex quadratis ipſarum incommenſurabile; [d] erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta, &c. Quod erat oſtendendum.

xcvij.
xcij.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

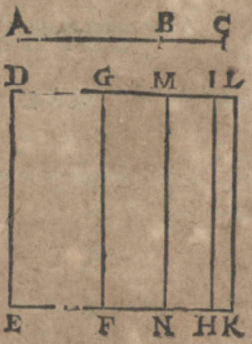
QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.



SIT Apotome AB,& ipſi congruens BC,ita vt AC, BC, ſint Ra-
a 45. primi. tionales potentia ſolum commenſurabiles; [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe Apotomen primam. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totum DK, æquale ſit compoſito ex
b 7. ſexti. quadratis rectarum AC, CB. [b] Et quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; ſi auferantur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis ſub AC, BC, æquale; atque adeo diuiſa GL, bifariam in M, ductaq; MN, ipſi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo ſub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales ſunt, e-
c 16. dec. runt quoque quadrata ex AC, BC, Rationalia; ideoque commenſurabilia. [c] Cum ergo & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipſorum ſit commenſurabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt, illi æquale
d 21. dec. DK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, [d] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia AC, BC, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; erit rectangulum ſub ipſis,
e 23. dec. atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem GF; [e] erit GL, Rationalis ipſi GF, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam DK, Rationale & GK, Medium, hoc eſt, Ir-
f 10. decim. rationale, incommenſurabilia ſunt; [f] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint demonſtratæ; erunt DL, GL, Rationales po-
g 74. dec. tentia tantum commenſurabiles; [g] Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam eſſe.

QVONIAM enim per Lemma propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC, BC, hoc eſt, MK, medium eſt proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, hoc eſt, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis hahentes proportionem, continue proportionales
h 17. ſexti. ſunt. [h] Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex ML, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex GL. Et quo-
i 10. dec. niam quadrata ex AC, BC, hoc eſt, illis æqualia DH, IK, commenſurabilia ſunt, [i] erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commenſurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales ſint,

ſint,& ad maiorem DL,applicatum rectangulum ſub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficienſque figura quadrata;atq; ſit oſtenſa DI, ipſi IL, longitudine commenſurabilis; [k] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quare cum ſit oſtenſum DG, eſſe Apotomen, & totam DL, plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atq; eandem totam commenſurabilem eſſe longitudine Rationali DE ; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod oſtendendum erat. k 18. dec.

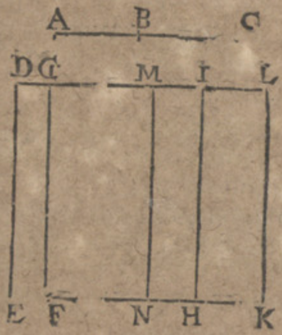


THEOR. 75. PROPOS. 99. xcviij. lxxxxiij.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale:[a] Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen ſecundam eſſe conſtruantur enim eadem, quæ in antecedenti propoſ. ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex AC, BC, & GK, æquale ei, quod ſub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod ſub AC, BC, continetur ſemel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ ſunt potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata, hoc eſt, illis æqualia, DH, IK, Media, & commenſurabilia; [b] ac proinde & totum DK, vtrique illorum commenſurabile erit. Igitur & Medium, per coroll. propoſ. 24. huius libri. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, [c] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, [d] erit GL, Rationalis longitudine commenſurabilis ipſi DE. Quia vero DK, Medium, id eſt, Irrationale, & GK, Rationale incommenſurabilia ſunt; [e] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem longitudine incommenſurabiles. Cum ergo Rationales ſint oſtenſæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [f] Ac propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Nam ſimiliter, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus totam DL, plus poſſe, quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum congruens GL, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome ſecunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam. Quod oſtendendum erat.

a 45. prim. b 16. dec. c 23. dec. d 21. dec. e 10. dec. f 74. dec.



THEOR. 76. PROPOS. 100. lxxxxix. xciv.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome ſecunda AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia tantum cõmenſurabiles, contineantque Medium: [a] Et ad Rationalem DE, Applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra oſtendemus iam, vt in propoſ. præcedenti, DK, Medium eſſe, [b] atque adeo rectam DL, Rationalem ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Et quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt, atque ob id & eius duplum GK, [c] erit quoque GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtque vt AC, ad BC, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratũ ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, [d] erit quadratum ex AC incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC, [e] Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub AC, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, BC, hoc eſt, ipſi GK, [f] Atque adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles ſunt, Sunt autem oſtenſæ Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; [g] Ac proinde reliqua DG, Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in prop. 98. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum DL, GL, Rationali DE, longitudine ſit commenſurabilis, vt demonſtratum eſt; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat oſtendendum.

a 45. prim. b 23. dec. c 23. dec. d 10. dec. e 16. dec. f 10. decim. g 74. dec.



THEOR.

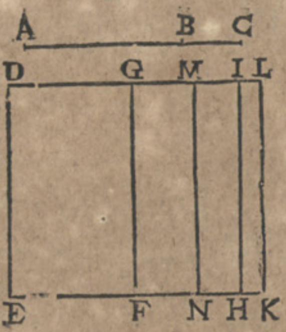
C. LXXXXV.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommenſurabiles ſint, facienteſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero ſub AC, BC, Medium; [a] & ad

a 45. prim.



Rationalem DE, applicetur ſpatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale eſt; [b] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Item quia rectangulum ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GL, Medium eſt; [c] erit GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium incommenſurabilia ſunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipſis habentes rationem longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia tantum commenſurabiles; [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & quartam eſſe. Quoniam enim AC, BC, potentia ſunt incommenſurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc eſt, ipſis æqualia, DH, IK, incommenſurabilia; [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo rectangulum ſub DI, IL, æquale ſit quadrato ex ML, id eſt, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propoſ. 98. eſt demonſtratum; [g] poterit DL, plus, quam GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore deficiens figura quadrata, diuidenſque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum tota DL, plus poſſit quam congruens GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, ſitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine oſtenſa commenſurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrãdum.

b 21. deci. c 23. dec. d 10. dec. e 74. dec. f 10. dec. g 19. dec.

ci. lxxxxvi.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum

a 45. primi.



vero ſub iiſdem AC, BC, Rationale: [a] Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam eſſe. Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeo & illi æquale DK, Medium eſt; [b] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Item quia rectangulum ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale eſt; [c] erit GL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Et quia DK, Medium ſeu Irrationale, & GK, Rationale, incommenſurabilia ſunt: [d] erunt DL, GL, eandem cum ipſis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sunt autem & Rationales oſtenſæ. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Atque idcirco reliqua DG, Apotome eſt. Dico & quintam eſſe. Eodem enim modo, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe quam GL, congruentem, quadrato ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare cum congruens GL, demonſtrata ſit longitudine commenſurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 23. dec. c 21. dec. d 10. dec. e 74. dec.

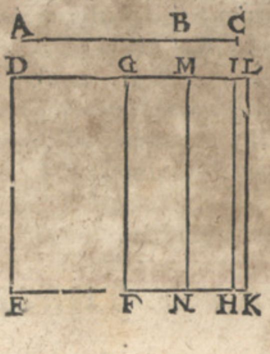
cij. lxxxxvij.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub iiſdem AC, BC, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum. [a] Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, ſpacium æquale DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe ſextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Quoniam igitur tam compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc eſt, illi æquale DK, quam rectangulum ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium eſt; [b] Erit tam DL, quam GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Et quia rectangulum ſub AC, BC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; Et ſunt, rectangulum ſub AC, BC, & eius duplum GK, commenſurabilia; [c] Erit & GK, eidem

a 45. prim. b 23. dec. c 14. dec.



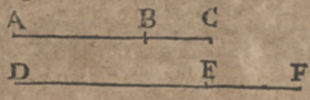
eidem compoſito, hoc eſt, ipſi DK, incommenſurabiles;[d] propterea que rectæ DL, GL, eandem habentes ratio- d 10. dec.
nem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt
DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles;[e] Atque idcirco reliqua DG, Apotome eſt. Dico eſſe & ſextam. O- e 74. dec.
ſtendemus enim ſimiliter, vt propoſ. 101. totam DL, plus poſſe, quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi
longitudine incommenſurabilis. Cum igitur neutra ipſarum DL, GL, commenſurabilis ſit longitudine Ratio-
nali DE; erit ex defin. DG, Apotome ſexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c.
Quod erat oſtendendum.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

ciij.
xcviij.

RECTA linea Apotomæ longitudine commenſurabilis; & ipſa Apotome eſt, atque or-
dine eadem.

SIT Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles.
Sit autem ipſi AB, longitudine commenſurabilis DE. Dico & DE, Apotomen eſſe, atque ordine eandem ipſi
AB;[a] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF.[b] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. a 12. ſexti. b 12. quint.
Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commenſurabiles;[c] Erunt quoque AC, DF, nec non & BC, c 10. dec.
EF, commenſurabiles longitudine. Et quia AC, BC, ſunt Rationales, erunt et-
iam illis commenſurabiles DF, EF, Rationales. Rurſus quia eſt, vt AC, ad DF,
ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & ſunt AC, BC, po-
tentia ſolum commenſurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propoſ. 10. huius li-
bri demonſtrauimus, DF, EF, potentia tantum commenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint oſtenſæ,[d] reli- d 74. dec.
qua DE, Apotome eſt. Dico & ipſi AB, ordine eandem eſſe. Poſſit enim primum AC, plus quam BC, quadrato
rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quo poſito,[e] poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longi- e 15 dec.
tudine commenſurabilis. Si igitur AC, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſitæ, vt AB, ſit Apoto-
me prima;[f] erit quoque DF, longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, cum tam Rationalis expoſita, f 12. dec.
quam DF, eidem AC, ſit longitudine commenſurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nem-
pe ordine eadem ipſi AB. Si vero BC, ſit longitudine commenſurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Ratio-
nali longitudine commenſurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome ſecunda. Si denique
neutra ipſarum AC, BC, commenſurabilis ſit longitudine expoſitæ Rationali;[g] erit quoq; neutra ipſarum DF, g 14. dec.
EF, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.



POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quo poſito,[h] po- h 15. dec.
terit & DF, plus EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, oſtendemus DE, eſſe
Apotomen quartam, quintam, vel ſextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commenſurabilis, &c.
Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

IDEM *hic dicemus de Apotomis, quod ad propoſ. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus ſcripſimus. Nimirum, ſi recta DE, commenſurabilis ſit ipſi AB, potentia tantum, eodem modo demonſtrari poſſe, (ſi loco vocis: longitudine commenſurabilis vtamur voce: potentia tantum commenſurabilis:) & DE, Apotome eſſe: At non poſſe inferri, illam eſſe ordine eandem ipſi AB. Non enim ſequitur, ſi tota AC, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſitæ, & DF, eidem eſſe commenſurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis expoſita, & DF, eidem AC, longitudine commenſurabilis eſt; ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine; At vero DE, potentia tantum ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit Apotome prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt DE, illi potentia tantum commenſurabilis, ſit Apotome eadem ordine.*

SIT *enim AB, prima Apotome, ſecunda, quarta, vel quinta, eiq; congruens BC, & ſit DE, ipſi AB, potentia tantum com-*
menſurabilis, quam quidem, vt in theoremate, oſtendemus Apotomen eſſe, eiq; congruentem EF, & partes AB, BC, ad partes
DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen eſſe ordine eandem ipſi AB. Nam
ſi fieri poteſt, ſit vtraque Apotome prima. Quo poſito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex defin. Apotomæ primæ, Rationali
expoſitæ commenſurabilis longitudine:[i] atque adeo & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt AC, & DF. Quare cum i 12. dec.
ſit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE;[k] erunt quoque AB, & DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponitur enim k 10. dec.
DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis, Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima eſt. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque ſecunda vel quinta. Eſſet enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, atque adeo & ipſæ inter ſe. Quocirca & AB, DE, inter ſe longitudine forent commenſurabiles, quod non ponitur.

SEMPER *tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipſi AB, potentia ſolum eſt*
commenſurabilis, eſſe quoq; vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quam BC, qua-
drato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF,[l] poterit quoque DF, plus quam EF, l 15. decim.
quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem mo-
do ſi AB, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poßit, quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommen-
ſurabilis; erit quoque DE, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi AB, quia rurſus, cum ſit vt
AC, ad BC, ita DE, ad EF,[m] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex m 15. dec.
defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN *ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolum illi fuerit commenſurabilis.*

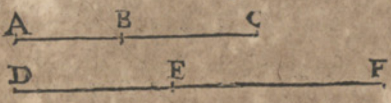
THEOR.

civ.
lxxxxix.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolum
commenſurabiles: Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum.
a 12. ſexti. Dico & DE, Mediæ Apotomen eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. [a] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad FE, [b] Erit
b 12. quint.



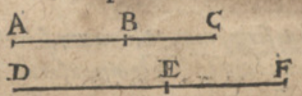
ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam
igitur AB, DE, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & poten-
c 10. dec. tia, vel potentia tantum; [c] erũt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem mo-
d 24. dec. do commenſurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ ſunt, [d] erunt quoque DF,
EF, illis commenſurabiles, Mediæ. Rurſus, quia eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC,
ita DF, ad EF; Sunt autem AC, BC, potentia ſolum cõmenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib.
e 75. vel DF, EF, ſolum potentia commenſurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ, [e] erit reliqua DE, Mediæ
76. decim. Apotome. Dico & eandem eſſe ordine ipſi AB. Quoniam enim eſt vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad
BC, ita eſt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt DF, ad EF,
ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; erit quoq; vt quadratũ ex AC, ad rectangulũ ſub AC, BC,
ita quadratũ ex DF, EF; Et permutando vt quadratũ ex AC, ad quadratũ ex DF, ita rectangulũ ſub AC, BC, ad
rectangulũ ſub DF, EF. Igitur cum quadratum ex AC, cõmenſurabile ſit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF,
f 10. dec. oſtenſæ ſint commenſurabiles; [f] erit & rectangulũ ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, cõmenſurabile. Quare
ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Rationale, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub
g 75. dec. DF, EF, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; [g] atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero re-
ctangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoq; rectangulum ſub DF,
EF, ei commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome
h 76. dec. ſecunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

cv. cxvi.
c.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt;

SIT Minor AB, ipſique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, facienteſq; com-
poſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero ſub iiſdem AC, BC, Medium. Sit
autem DE, ipſi AB, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, Minorem
eſſe. Fiant enim eadem quæ ſupra, ita vt rurſus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quã AC, ad DF.
Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. DF, EF, ipſis AC, BC, commenſurabiles ſiue longitudine & po-
tentia, ſiue potentia tantum. Et quoniam eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF,
a 22. ſexti.



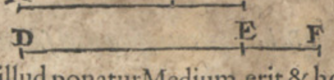
ad EF, [a] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF,
ad quadratum ex EF, & componendo vt compoſitum ex quadratis rectarum
AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF,
ad quadratum ex EF, & permutãdo vt compoſitum ex quadratis rectarum AC,
BC, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Eſt autem qua-
dratum ex BC, commenſurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, oſtenderimus commenſurabiles eſſe.
b 10. dec. [b] Igitur & compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, compoſito ex quadratis rectarum DF, EF, commenſura-
bile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypotheſi, Rationale. Igitur, & compoſitum
ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale eſt. Rurſus quoniam, vt in antecedenti propoſ. demonſtra-
bimus rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, eſſe commenſurabile: ponitur autem rectangulum
ſub AC, BC, Medium: Erit quoq; rectangulum ſub DF, EF, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium, Et quia eſt
c 10. dec. vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, ſuntq; AC, BC, potentia incommenſurabiles, [c] erunt etiam DF, EF, potentia in-
commenſurabiles Quam ob rem cum DF, EF, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum qui-
d 77. dec. dem ex quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum vero ſub iiſdem DF, EF, Medium; [d] erit DE, Mi-
nor. Recta ergo linea Minori commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

cvi. cxvii.
ci.

PROBL. 83. PROPOS. 107.

RECTA linea commenſurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum Rationali Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia
incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum
ſub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipſi AB, incommenſurabilis quocunque modo. Dico & DE, eſſe, quæ



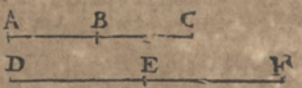
cum Rationali Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem; quæ ſupra o-
ſtendemus, vt in antecedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC,
BC commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo
illud ponatur Medium, erit & hoc, ex corol. propoſ. 24. huius lib. Mediũ. Rurſus vt in prop. 105. demonſtrabimus
rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cũ ergo illud Rationale ponatur, erit
& hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt deniq; eodẽ modo, vt in præcedenti prop. eſt probatũ, rectæ DF, EF, potẽtia
incom-

incommenſurabiles. Igitur cum DF, EF, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum vero ſub ipſis Rationale; [a] erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat. a 78.dec.

THEOR. 84. PROPOS. 108. cvij. cij.

RECTA linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB, cum Medio Medium totũ efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles, facientesq; compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium quoque & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autem DE, ipſi AB, quomodolibet commenſurabilis. Dico & DE, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit.



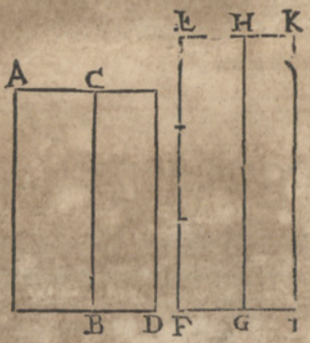
Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra probabimus ſimiliter, vt in propoſ. 106. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. oſtendemus, rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud ſit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propoſ. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommenſurabiles. Poſtremo quia compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum eſt; & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile rectangulum ſub DF, EF; Sunt autem compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum ſub AC, BC. per hypotheſim, incommenſurabilia; erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum ſub DF, EF, incommenſurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia ſint incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum ſub ipſis Medium; incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis; [a] erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat oſtendendum. a 79. dec.

THEOR. 85. PROPOS. 109. cviij. ciij.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel *M*inor,

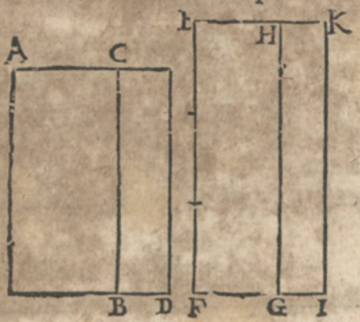
DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium reliquum AB, eſſe vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, [a] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipſi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipſi CD, ita vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale eſt; [b] erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia HI, Medio CD, æquale Medium eſt, [c] erit HK, Rationalis, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Itaque cum EK, quidem ſit longitudine commenſurabilis ipſi EF, at HK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis, [d] erunt EK, HK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles: [e] propterea que reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt EK, quam HK, quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine, cum tota EK, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc eſt, ſpatium AB, ſibi æquale, [f] Apotome eſt. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; cum tota EK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF, erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, [g] Minor eſt. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

a 45.pri.
b 21.dec.
c 23.dec.
d 13.dec.
e 74.dec.
f 92.dec.
g 95.dec.



THEOR. 86. PROPOS. 110. cix. civ.

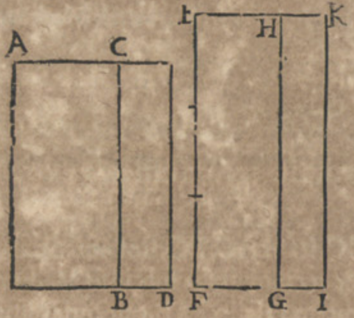
RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.



DETRAHATVR à Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB, poteſt eſſe, vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadẽ enim conſtruantur, quæ ſupra. Et quia EI, Medio AD, æquale Mediũ eſt; [a] erit EK, Rationalis ipſi EF, longitudine incommẽſurabilis. Itẽ quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; [b] erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudine commẽſurabilis. Itaque cum HK, quidem ipſi EF, ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis; [c] erunt HK, EK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum

a 23. dec.
b 21. dec.
c 13. dec.

a 74. dec. commenſurabiles; [d] Ac proinde reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si EK, plus poteſt, quam *HK*, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens *HK*, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin, EH, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſecunda EH,



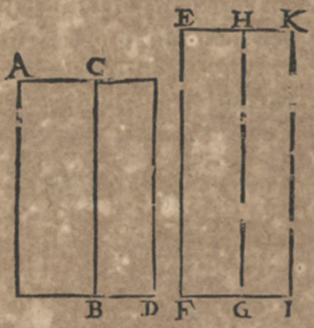
e 93. dec. hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [e] Mediæ eſt Apotome prima. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens HK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, hoc eſt, ſpatium illi æquale AB, [f] eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quam ob
f 96. dec. rem Rationali à Medio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

cx.
cv.

THEOR. 87. PROPOS. 111.

MEDIO à Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR à Medio AD, Medium CD, quod incommenſurabile ſit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium to-
a 23. dec. tum efficit. Conſtructis enim iiſdem quæ ſupra; quoniam EI, HI, Medijs AD, CD, æqualia Media ſunt, [a] erunt EK, HK, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Et
b 10. dec. quia AD, CD, hoc eſt, EI, HI, ponuntur incommenſurabilia; [b] erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tan-
c 74. dec. tum commenſurabiles; [c] Ac propterea reliqua F H, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali



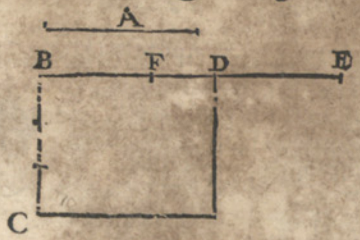
d 94. dec. E F, & Apotoma tertia EH, hoc eſt ſpatium A B, illi æquale; [d] Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF, ſit longitudine commenſurabilis, vt demonſtrauimus; erit ex defin. E H, Apotome ſexta. Quam ob rem recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpatium A B, il-
e 97. dec. li æquale, [e] eſt ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

cxj.
cvj.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri po-
a 45. pri. teſt, A, aliqua ex binis nominibus. Expoſita autem Rationali BC, [a] applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale
b 98. dec. quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome eſt; [b] erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE. Rationales potentia tantum commenſurabiles, poteritque B E, plus quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & ipſa B E, Rationali BC, commenſurabilis erit longitudine. Rurſus quia A, ponitur eſſe quo-
c 61. dec. que ex binis nominibus; [c] erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipſius nomen BF. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima eſt, BF, FD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commen-



ſurabilis ſibi longitudine, & ipſa B F, Rationali B C, longitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam BE,
d 12. dec. quam BF, longitudine ſit commenſurabilis eidem BC; [d] erunt quoque BE, BF, inter ſe commenſurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, ſit longitudine commenſurabilis parti B F, erit & eadem BE, reliquæ parti FE, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ. 16. huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis ſit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum BE, FE, longitudine commenſurabilium, ipſa BE, longitudine
e 14. dec. incommenſurabilis eſt ipſi DE; (quod BE, DE, Rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles) [e] erit quoque altera FE, eidem DE, incommenſurabilis longitudine. Sed & vtraque FE, *DE*, Rationalis eſt oſtenſa. Ratio-
f 74. dec. nales ergo ſunt *FE, DE*, potentia ſolum commenſurabiles. Quare reliqua FD, [f] Apotome eſt; Atque adeo Irrationalis. Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis nominibus. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

EX demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eſſe eaſdem.

QVA-

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, [g] latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. g 23. dec.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, [h] latitudinem efficit Apotomen primam. h 98. dec.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatum, [i] latitudinem efficit Apotomen ſecundam. i 99. deci.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, [k] latitudinem efficit Apotomen tertiam. k 110. deci.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, [l] latitudinem efficit Apotomen quartam. l 101. dec.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totnm efficit, ad Rationalem applicatum, [m] latitudinem efficit Apotomen quintam. m 102. decimi.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, [n] latitudinem efficit Apotomen ſextam. n 103. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem Apotomæ; Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & à Media, & inter ſe differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtrauimus, Apotomen eandem non eſſe, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam conſequentiam, ad Rationalem applicata latitudines efficiunt Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarũ quinq; Irrationalium, quæ ipſam ſequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiũt ex binis nominibus primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, ac ſextam; liquido conſtat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam. Quam ob rem & tam illæ, quam hæ à Media differant; efficitur, Rationali quapiam expoſita, tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſeſe differentes, de quibus hactenus diſputauimus; Hæ ſcilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.
4. Ex binis Medijs ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens;
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113. cxij.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus. o.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D; [a] & ad BC, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BF. Dico B F, eſſe Apotomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus BD, DC, ipſius BC, ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotomen B F, eſſe ordine eandem ipſi BC, ex binis nominibus. [b] Applicetur enim rurſus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A, atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens D G; ſitque ipſi DG, æqualis BH. Et quoniam æqualia ſunt BE, CG; [c] erit vt BC, ad DC, ita DG, hoc eſt, ſibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Eſt autem BD, maior quam DC. Igitur & HF, maior eſt, quam FB. Ponatur FI, ipſi FB, æqualis; [d] & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc eſt, ad ſibi æqualem BF, ita FK, ad BK. Oſtenſum eſt autem eſſe vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt B D, ad D C, ita F K, ab BK. At BD, DC, (cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus. Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles. [e] Igitur & FK, BK, potentia ſolum commenſurabiles ſunt.

a 45. pri.



b 45. pri.

c 14. vel 16. ſex.

d 12. ſex.

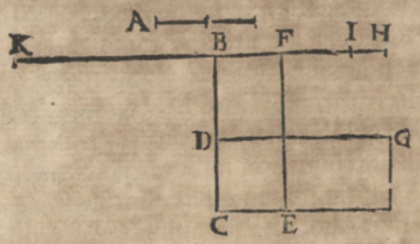
e 10. dec.

RVRSVS quia eſt vt HF, ad BF, ita FK, ad BK, [f] erunt quoque HF, FK, antecedentes ſimul, nempe tota HK, ad BF, & BK, conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam FK, vt FK, ab BK. Ac propterea FK, media proportionalis f 12. quin.

nalis

nalis eſt inter HK,BK. Quare vt HK, prima ad BK,tertiam, ita erit, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. quadratum ex HK,prima ad quadratum ex FK,ſecunda. Quia vero CG,cum Rationale ſit, (eſt enim quadrato Rationalis
g 21. dec. A,æquale) ad Rationalem DC,applicatum [g] facit DG, latitudinem Rationalem ipſi DC, longitudine commenſurabilem; Erit quoque HB, ipſi DG, æqualis, Rationalis & longitudine commenſurabilis ipſi DC. Et quoniam oſtenſum eſt,eſſe vt BD,ad DC,ita FK, ad BK: Vt autem FK,ad BK,ita HK,ad FK; erit quoque vt
h 22. ſex. BD, ad DC, ita HK, ad FK. [h] Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commenſurabile eſt quadrato ex DC. (quod rectæ BD, DC, ſint
i 10. dec. Rationales potentia commenſurabiles, cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus.) [i] Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratum ex FK;
k 10. dec. ita recta HK, ad BK. [k] Igitur longitudine commenſurabilis eſt HK, ipſi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propoſitionis 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & BK, ipſi HK, commenſurabilis, Rationalis exiſtit. Cum ergo oſtenſa ſit FK, ipſi BK,potentia ſolum commenſurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales ſint,
l 74. dec. & potentia tantum oſtenſæ commenſurabiles, [l] erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod eſt primum.

QVONIAM vero oſtenſum eſt eſſe rectam HK, totam parti BK, longitudine commenſurabilem,
m 16. dec. [m] erunt propterea & BK, BH, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cum ergo BH, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi DC,erit quoque BK,ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum eſt eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK,ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC,BK, oſtẽſæ longitudine commen-
n 10. dec. ſurabiles; [n] Erunt quoque BD,FK,commenſurabiles longitudine.Itaque cum FK,ipſi BD, & BK,ipſi DC,longitudine ſit commenſurabilis, erunt ipſius Apotomæ BF, nomina FK,BK,nominibus BD,DC, ipſius BC,ex binis nominibus,longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.



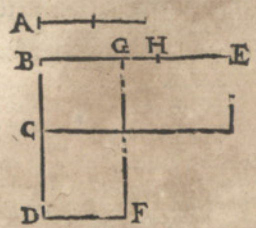
ITEM quia demonſtrauimus eſſe vt BD,ad DC, ita FK, ad BK; erunt idcirco Apotomæ nomina FK, BK,in eadem ratione cum BD,DC,nominibus ipſius BC,quæ eſt ex binis nominibus. Quod eſt tertium.

POSTREMO vel BD, plus poteſt,quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,vel incommenſurabilis. Si plus poteſt BD,quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit
o 15. dec. vt BD,ad DC,ita FK,ad BK; [o] poterit quoque FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: Et ſi BD,plus poteſt quam DC, quadrato rectæ ſibi lougitudine incommenſurabilis; poterit & FK, plus quam BK,quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et ſi quidem BD,expoſitæ Rationali fuerit longitudine commenſurabilis; erit & FK, quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Si vero DC,ſit Rationali commenſurabilis longitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine com-
p 14. dec. menſurabilis. Si denique neutra ipſarum BD, DC, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; [p] erit quoque neutra ipſarum FK, BK,commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome BF, ipſi BC, ex binis nominibus, vt conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertijs. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

cxiij. THEOR. 90. PROPOS. 114.

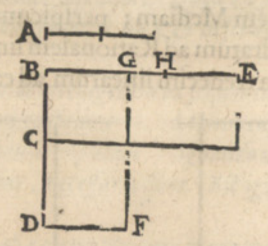
Q. QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus ſit, eundem habet ordinem, quem ipſa Apotome.

a 45. pri. SIT rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD, [a] & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A,latitudinem faciens BE. Dico BE,eſſe ex binis nominibus,cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus BD,CD,Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc ipſam BE, ex binis nominibus, eſſe ipſi
b 45. pri. BC,Apotomæ ordine eandem. [b] Applicetur enim rurſus ad BD, totam,rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc eſt, ipſi CE, latitudinem fa-
c 14. vel 16. ſexti. ciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia ſunt; [c] erit vt BE, ad BG,ita BD,ad BC; & per conuerſionem rationis, vt BE,ad GE,ita BD,ad CD. Secetur quoque EG, ad H, ſecundum proportionem BE, ad GE, ex ijs, quæ in ſchol. propoſ.10. lib. 6. conſcripſimus; vt ſit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur eſt vt BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam, erit quoque BH, reliqua ipſius BE,ad HE, reliquam ipſius GE, vt tota BE, ad totam GE: Erat autem vt BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoq; vt BH, ad HE,ita EH, ad GH; atq; adeo HE,media proportionalis eſt inter BG,GH. Quare erit vt BH, prima ad GH,tertiã,ita quadratum ex BH,prima ad quadratũ ex HE,ſecunda,per coroll.propoſ.20.lib.6. Quia vero fuit vt BD,ad CD,ita BE, ad GE,hoc eſt,BH,ad HE:& ſunt BD,CD,cũ ſint nomina Apotomę BC.Rationales potentia tantũ commen-
d 10. dec. ſurabiles.[d] Erunt quoq; BH,HE,potentia ſolũ commẽſurabiles;Ac propterea quadrata ex BH,HE,commẽſu-
e 10. dec. rabilia.Igitur rectę BH,GH,eandẽ habentes rationẽ cũ quadratis ex BH,HE,vt demonſtrauimus,[e] lõgitudine ſunt commẽſurabiles; Ac proptcrea tota *BH*,lõgitudine commẽſurabilis exiſtẽs parti GH, cõmẽſurabilis quoq; longitudine erit parti reliquæ *BG*,ex coroll.propoſ.16.huius lib. At vero cũ *BD*,Rationalis ſit,nẽpe maius nomẽ
f 21. dec. Apotomæ *BC*; & rectangulũ *BF*,quadrato ex Rationali linea A,æquale,Rationale; [f] erit latitudo *BG*,Rationalis commen-



menſurabilis longitudine ipſi BD. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & BH, eidem BD, Rationali commenſurabilis eſt longitudine, atque adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem BH, BG, longitudine commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero BH, HE, oſtenſæ ſunt commenſurabiles potentia tantum, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles: [h] Ac propterea BE, ex binis nominibus eſt. Quod eſt primum. h 37. dec.

QVONIAM vero oſtendimus eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD, atque adeo permutando BH, ad BD, vt HE, ad CD; Oſtenſa eſt autem BH, ipſi BD, longitudine commenſurabilis; [i] erit quoque HE, ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominihus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum. i 10. dec.



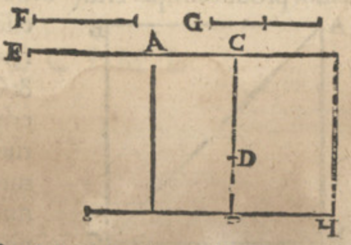
IMMO & in eadem proportione, cum demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertium.

POSTREMO vel BD, plus poteſt quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, [k] poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem BD, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si vero CD, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ; [l] erit quoque neutra ipſarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis, atque tertijs definitionibus, ipſa BE, ex binis nominihus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ BC. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum. k 15. dec. l 14. dec.

THEOR. 91. PROPOS. 115. cxiv. o.

SI ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

CONTINEATVR ſpatium AB, ſub Apotama AC, & ſub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, commenſurabilia ſint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Poſſit autem recta F, ſpatium AB. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, [a] applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [b] Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commenſurabilia ſunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB, atque adeo vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. [c] Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE; [d] Commenſurabilis autem eſt longitudine HI, ipſi CE, quod vtraque HI, CE, commenſurabilis fuerit longitudine ipſi CD. [e] Igitur & BH, ipſi AC, longitudine eſt commenſurabilis; [f] Atque idcirco & HC, ipſi BA, commenſurabile erit, [g] cum ſit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale Rationale eſt. Igitur & BA, illi commenſurabile, Rationale erit, proptereaque & recta F, ipſum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter ſi ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis. Quod erat demonſtrandum. a 45 pri. b 113. dec. c 19. quin. d 12. dec. e 10. dec. f 10. dec. g 1. ſexti.



COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, fieri poſſe, vt ſpatium Rationale contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus. Nam ſpatium AB, contentum ſub AC, CE, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales ſunt, oſtenſum eſt Rationale eſſe.

SCHOLIVM.

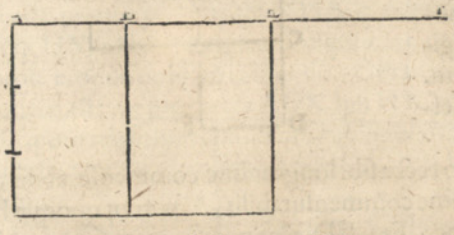
IN proximis autem tribus propoſitionibus intelligenda ſunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commenſurabilia eſſe longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine oſtenſa ſunt eſſe commenſurabilia; In poſteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, ſi nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commenſurabilia ponantur. Id quod facile ex demonſtrationibus harum trium propoſitionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116. cxv. cvij.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicubi antecedentium eſt eadem.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem ſit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propoſ. 112. huius lib. Expoſita enim Rationali AC, contineatur ſub AB, Media, & Rationali AC, ſpatium AD. Eſt ergo AD, ſpatium ſub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Poſſit ipſum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE,

non eſſe eandem alicui tredecim illarum quas in coroll. propoſ. 112. huius libri collegimus. Nam cum quadra-
a 23. dec. tum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum [a] latitudinem faciat Rationalem ipſi A C, longitudine incommenſurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt conſt ex propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 101. 102. 103. huius libri. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam adplicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



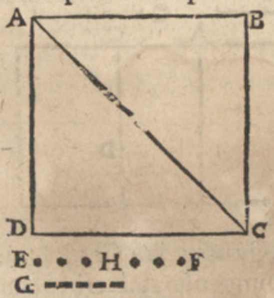
Quod ſi compleatur rectangulũ DE; erit & hoc contentum ſub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale ex dicto lẽmate propoſ. 38. Poſſit ergo ipſum recta E F, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rurſus EF, non eſſe eandẽ alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi BE. Hoc autem manifeſtum eſt, cum quadratũ E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius BE, latitudines faciãt, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, vt demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inueniẽtur & inter ſe, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

Cxviij.
vij.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

SIT quadratum A B C D, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommenſurabi-
a 5. decim. lem eſſe lateri AB. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; [a] ac propterea AC, AB, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G, ſintq; numeri EF, & G, minimi omnium eandẽ proportionem habentium. Quoniam ergo eſt vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G. Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex
b 20. ſexti. AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratũ numerum ex G. ([b] Cum n. quadrata habeãt ſuorũ laterum pro-
& 11. octaui. portionem duplicatã; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cũ ſint æqualiũ duplicatæ.) Sed quadratũ ex AC, duplum eſt quadrati ex AB, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. libri 1. oſtendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus ex EF, cum dimidiũ habeat, atq; adeo bifariam poſſit diuidi, par erit ex definitione. Igitur & ipſe EF, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cum ſe ipſum multiplicans producat ſuum quadratum,
c 29. noni. eſſet & quadratus ipſe imoar; [c] eo quod impar imparẽ multiplicans, imparem procreat. Quod eſt abſurdum. Oſtenſus enim par.) Quia vero E F,
d 24. ſept. & G, in ſua proportione minimi, [d] inter ſe primi ſunt; & EF, oſtenſus eſt par, erit G, impar. (Si enim par etiam eſſet, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus eſt numeri E H, [e] & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit
e 11. octa. quadratus ex E F, quadruplus quadrati ex E H. (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cũ quadratus ex EF, duplus ſit quadrati ex C; & quadruplus quadrati ex EH, æqualium partium 4. eſt quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt ſupra de numero EF, diximus, erit quadratum ex G, dimidium habens par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus. Quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter AC, lateri AB. Igitur incommenſurabilis longitudine.



ALITER. Sit, ſi poteſt fieri, diameter AC, commenſurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, A B, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum ſit quadrati ex AB; ſit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonſtratione diximus; erit quoque quadratus ex E F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atque adeo & quadratus ex ea vnitas; erit quadratus ex E F, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam eſt demonſtratum, quadratus ex EF, duplus eſt quadrati ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex EF,
f 14. octa. [f] ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cum ergo & G, ſeipſum metiatur, erunt numeri EF, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum G: Sed & inter ſe primi ſunt. Quod eſt abſurdum. Non ergo commenſurabilis eſt diameter A C, longitudine lateri A B. Quare oſtendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

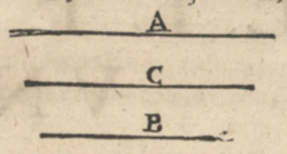
SED & affirmatiue hoc idem theorema demonſtrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrata à nobis ſunt, quadratum diametri duplum eſt quadrati ex latere deſcripti, habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia ſumptis in proportione dupla quotcunq; numeris ab vni-

ab vnitate 1.2.4.8.16.32.64.&c.[g] ſolum tertius ab vnitate quadratus eſt, & cæteri omnes vnum intermittentes, quod primus g 10. noni. ab vnitate, nempe 2. quadratus non ſit; erunt ſolum hi numeri 4.16.64. quadrati; reliqui verò 2.8.32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus ſit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum ([h] alias & 2. h 24. oct. quadratus eſſet.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [i] Incommenſurabilis ergo eſt diameter longitudine ipſi lateri. Quod eſt propoſitum. i 9. dec.

HOC etiam theorema aliter demonſtrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. & in ſcholio propoſ. 9. huius libri.

CÆTERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex ſequentibus Stereometriæ libris pendet, vt merito omitti poſſet. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commenſurabilitatem omnium magnitudinum, & incommenſurabilitatem pertinens: viſum eſt eam paucis explicare, aſſignando more noſtro ſolito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt. Eſt igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A C, longitudine inter ſe incommenſurabiles, inter quas media proportionalis ſit B. Quoniam igitur ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad C; ita eſt figura rectilinea quæuis ſuper A, conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilem, ſimiliterque poſitam ſuper B, & ſunt A, & C, longitudine incommenſurabiles; [k] erunt rectilineæ illæ figuræ ſuper A, & B, incommenſurabiles. k 10. dec.



RVRSVS [l] quoniam circuli, quorum diametri A, B, proportionem habent quam quadrata ex A, & B, deſcripta: l 2. duode. Quadrata autem hæc, cum ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque poſitæ, proportionem habent, quam rectæ A, & C, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. [m] Habebunt quoque circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam rectæ A, C. Sed rectæ A, C, m 11. quin. incommenſurabiles ſunt longiudine. [n] Igitur & circuli diametrorum A, B, incommenſurabiles ſunt. n 10. dec.

IAM vero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel priſmata eiuſdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ ſuper A, B, [o] habebunt pyramides, atque priſmata eandem proportionem, quam baſes, hoc o 5. 6. vel 7. duodec. eſt, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ figuræ incommenſurabiles ſint, vt modo eſt demonſtratum: [p] incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides, & priſmata. p 10. dec.

QVOD ſi coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum baſes circuli ſint diametrorum A, B, [q] habebunt huiuſmodi q 11. duodecimi. coni, & cylindri eandem proportionem cum baſibus, hoc eſt, cum illis circulis. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles, [r] Erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta ſunt igitur non ſolum lineæ, & ſuperficies incommenſura- r 10. dec. biles, verum etiam & corpora, ſiue ſolida incommenſurabilia. Quod eſt propoſitum.

EADEM autem ratione, ſi recta A, & B, longitudine commenſurabiles ſint, [s] oſtendemus earum figuras recti- s 10. dec. lineas ſimiles, ſimiliterq; deſcriptas, necnon & ipſarum circulos commenſurabiles eſſe, [t] atq; adeo t 5.6.7.& 11. duodec. & earundem pyramides, & priſmata; ac denique conos, & cylindros; ſi modo eandem habeant altitudinem, vt perſpicuum eſt.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM,

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus ſex libris abunde de ea Geometriæ parte diſſeruit, quæ circa plana verſatur, ſibique nomen Geometriæ, tanquam proprium, vſurpauit; In ſubſequentibus vero tribus diligenter ea de paſſionibus numerorum docuit, quæ neceſſaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commenſurabilium, atque incommenſurabilium, quas idcirco luculentiſſime in libro decimo deinde expoſuit, vt conſtructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in poſtremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. ſubtiliſſime diſſeritur, perfectius poſſet cognoſci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſiue ſolida conſiderat, proprioque vocabulo Stereometria eſt appellata.

EXPLICAT autem prius, more ſuo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima eſt: Solidum, ſiue corpus: nempe tertium genus quantitatis, Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem, ita vt tres dimenſiones poſſideat, vnam quidem ſecundum longitudinem, aliam vero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſſitudinem, altitudinemue, appellari ſolidum, ſiue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adiicit, ſuperficies vocatur, vt in primo lib, diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt recte intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hæc enim deſcribit veſtigium quoddam longum tantum, hoc eſt, lineam, propterea quod punctum omnis eſt magnitudinis expers; vt autem percipiamus ſuperficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri; hæc enim deſcribet veſtigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in tranſuerſum eſt factus; carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditam, conſulūt, vt concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter eleuari, ſiue in tranſuerſum moueri; hac enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundum vero ſeu craſſum, propter eleuationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hæc ergo quantitas, ſolidum, ſiue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta diſtincta à linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quod triplex tantum dimenſio poſſit aſſignari, vt perſpicue in commentarijs, quos in ſphæram Ioannis de Sacro Boſco conſcripſimus, à nobis fuit demonſtratum ex Ptolemæo in libello de Anatemmate.

II.

SOLIDI autem extremum, eſt ſuperficies.

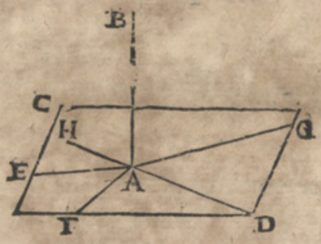
QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, ſuperficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum eſſe ſuperficiem. Cùm enim ſolidum, ſiue corpus efficiatur ex illo motu imaginario ſuperficiei; perſpicuum eſt extremas partes illius eſſe ſuperficies.

III.

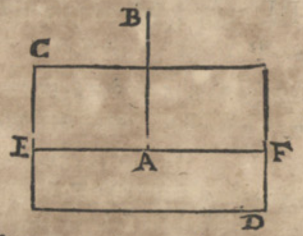
LINEA recta eſt ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

VT li-

VT linea recta AB, plano CD, inſiſtens, ita vt B, punctum ſit in ſublimi extra planum CD, at punctum A, in ipſo plano, tum demum dicetur recta ſeu perpendicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus alijs, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt AB, æqualiter inſiſtat plano CD, & non magis in vnam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque deinceps BAH, rectus, ideoque illi æqualis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quod ſi fieri poſſet, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, educta non efficeret angulum rectum, etiamſi cum alijs omnibus rectum angulum conſtitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos conſtituere angulos. Et è contrario, vt recte concludatur, lineam quampiam eſſe ad planum datum rectam demonſtrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos angulos conficere.



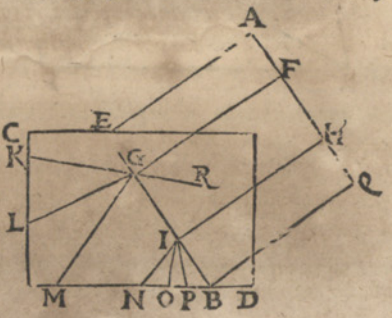
VT autem recta quæpiam plano cuicunque inſiſtens rectos conſtituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipſamque tangentibus, ſatis eſt, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, ſed ſe mutuo ſecantibus, ſi producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perſpicuum fiet ex propoſ. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia ſi duæ lineæ componant vnam rectam lineam, non neceſſario efficitur, lineam, quæ cum ipſis rectos angulos conſtituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim AB, inſiſtat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam vnam lineam componant. Dico AB, non propterea cum omnibus alijs rectos angulos conſtituere; atque idcirco non eſſe rectam ad planum CD. Hoc autem perſpicuum eſt, cum AB, circa EF, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo ſit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipſa cum EF, ſemper eoſdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod ſi eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales ſunt AG, AD, in priori figura, rectos conſtituat angulos, tum demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucide demonſtrabitur propoſ. 4. huius lib.



I V.

PLANVM ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

INSISTAT planum AB, plano CD, ita vt linea AQ, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum ſubiectum CD, at EB, in ipſo eodem plano. Sit autem horum planorum communis ſectio EB, quæ, vt demonſtrabitur propoſ. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem ſumptis punctis quotcunque punctis G, I; ex ipſis in plano AB, ducantur GF, IH, perpendiculares ad communem ſectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum alijs omnibus in plano CD, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quam in alteram, ſed æquabiliter illi inſiſtet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis: Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique à lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoq; eſſe ad alterũ planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem ductas, rectas eſſe ad reliquum planum.

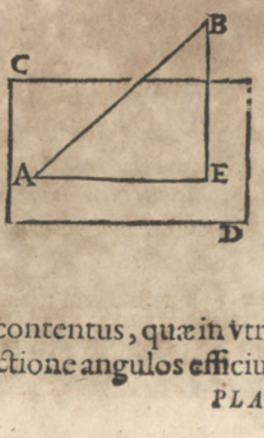


V.

RECTÆ lineæ ad planum inclinatio eſt, cum à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam angulus acutus inſiſtente linea, & adiuncta comprehenſus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B termino ſublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritque neceſſario angulus BAE, acutus, [a] cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus linea inſiſtente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur eſſe inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus eſt dictus angulus acutus BAE.

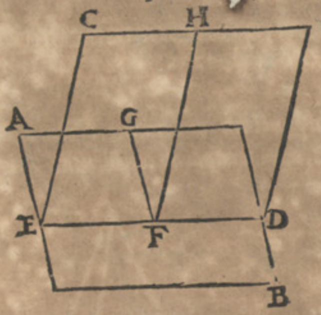
a 17. pri.



V I.

PLANI ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroq; planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cũ ſectione angulos efficiunt.

PLANO *namque AB, inſiſtat planum CD, ita vt pars ad C, ſit in ſublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipſo plano AB, ſitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum ſectio ſit DE. Si igitur ad DE, communem ſectionem ex eius puncto F, duæ perpendicalares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehenſus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta eſſe dicatur inclinatio plani ad planum, quantus eſt dictus angulus acutus.*



INTERDVM *Geometræ angulum GFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, ſiue is acutus ſit, ſiue rectus, obtuſusue: quamquam proprie ſolum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum oſtendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani ſupra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtuſus vero receſſum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorũ commonſtrat ſitum, ſeu eleuationem vnius plani ſupra alterum, generaliter dici conſueuit à plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum ſectionis ducuntur perpendiculares, cuiuſmodi eſt angulus GFH, ſiue is rectus ſit, ſiue acutus, ſiue obtuſus.*

VII.

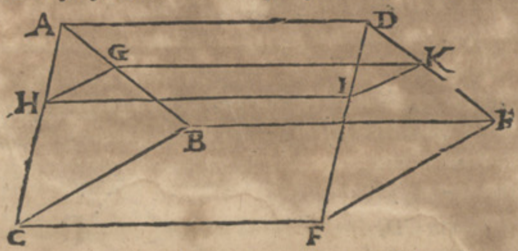
PLANVM ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

NON *obſcura eſt hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis receſſerit.*

VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

INTELLIGE, *in quamcunque partem, etiam infinite, producantur: hoc eſt, ſiue ad dexteram, ſiue ad ſiniſtram: & ſiue ſurſum, ſiue deorſum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad ſiniſtram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſum, remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad ſiniſtram: Sed tamen quia ſurſum protenſa coeunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcirco non dicentur parallela.*



SIT *enim tectum quodpiam ABCDEF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius baſis BCFE, auferaturque faſtigium AGHDKI. Quo facto perſpicuum eſt, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter ſe, ſi ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes GH, KI, conueniant in faſtigio AD. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, vt in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autem lineæ in eodem plano exiſtentes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtram, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum, atque deorſum. Itaque duo plana quæcunque, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero rectæ, vel ſunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtant plano, vel tandem nec ſunt parallelæ, neque vnquam conueniunt, ſi videlicet in diuerſis ſint planis, & intranſuerſum poſitæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem ſint plano: Hic autem ſimpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.*

IX.

SIMILES ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET *Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit, vt breuitati conſulens eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quod ex ſimilitudine planorum ſtatim conſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cum illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.*

X.

ÆQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

Quod ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolum ſimiles, verum etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuo huiuſmodi ſolida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuo congruent; ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.

XI. SO-

XI.

SOLIDVS angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingant, nec in eadem ſunt ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVÆ lineæ in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſiue corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes non debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniã videlicet, ſi tres lineæ AB, AC, AD, in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compoſitus. Quod ſi AD, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli BAD, DAC, CAB, qui vt mox dicetur, ſolidum conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.



ALITER.

SOLIDVS angulus eſt, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

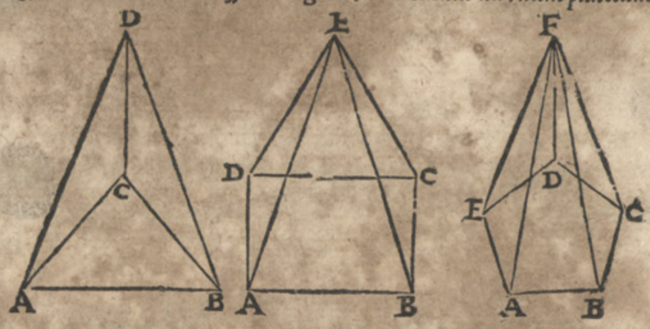
HÆC definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti recte intellecta. Cum enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur, vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano eſt, in quo rectæ AB, AD, & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB, atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus ſolidus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſupra diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diuerſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his vero perſpicuum cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuo congruent, ſi ſeſe penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis ſolum rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica ſuperficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus ſuperficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis eſt, qui fit, ſi conus per verticem ſecetur.

XII.

PYRAMIS eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum conſtituta.

VIDELICET figuræ ſolidæ à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, conſtitutæ appellantur pyramides. Perſpicuum autem eſt, omnia plana, quibus pyramis continetur, eſſe triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant, excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitum. Hoc enim poteſt eſſe vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem ſumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiuſmodi, baſis pyramidis nuncupari ſolet. Vt pyramidis triangularis, præter baſin, triangula ſunt ABD, ACD, BCD: Quadrangulæ vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagonæ denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.



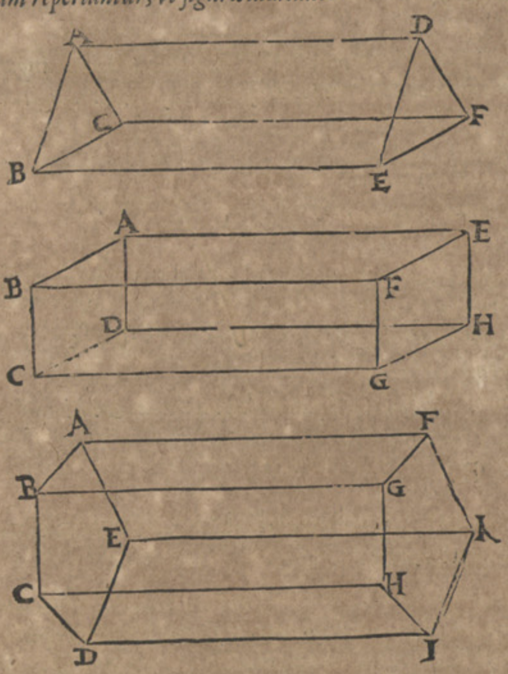
XIII.

PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum aduerſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRÆ ſcilicet ſolidæ, quarum plana aduerſa & æqualia, & ſimilia, & parallelæ ſunt triangula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur priſmata. Itaque priſma nil aliud erit, quam columna quadam laterata

æqua-

æqualis craſsitudinis, cuius baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles, & parallelæ, ſiue hæ ſint triangula, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit priſma quodlibet, quot latera, ſiue anguli, in vnoquoque oppoſitorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.



EX his manifeſtum eſt, quantum hallucinentur ij, inter quos eſt & Campanus, qui priſma intelligunt eſſe eam figurã ſolidam duntaxat, cuius duo plana aduerſa parallela æqualia, ſimiliaque, triangula ſunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram ſolidam Campanus vocat Corpus ſerratile. Cum enim hæc figura ſit ſolum vna ſpecies priſmatis, definitio autem tradita infinita alia genera priſmatis amplectatur, vt conſtat; præſertim quod plurimæ demonſtrationes in hoc lib. & 12. ſequenti, ex æquo omnibus priſmatibus conueniunt; perſpicuum eſt eos hallucinari, qui vnum tantum priſmatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpſerunt autem fortaſſe hi auctores occaſionem errandi, quod Euclides & in propoſ. vltima huius lib. & in 3.4.& 5. propoſ. lib.12. ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib.12. illis aduerſari, in qua Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorum triangulorum oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolum demonſtratio illa conuenit. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi volunt, priſma appellaretur ab Euclide, fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Immo in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eandem cum illa baſin habentis, altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecundum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidem, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib.12. apertiſsime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIV.

SPHÆRA eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumaſſumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum: ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſsignatur, extremum videlicet illud quieſcens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes ſunt æquales; propterea quod omnes æquales exiſtunt illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt, centrum ſemicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinem definitionis circuli, ſphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHÆRA eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

CICERO in libro de Vniuerſitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expreſsit his verbis. Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radijs attingitur.

XV.

AXIS autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

XVII.

DIAMETER autem ſphæræ, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

HÆ tres definitiones non egent expoſitione, dummodo hoc ſolum notetur, omnem diametrum ſphæræ poſſe eſſe axem, ſi nimirum circum eam ſphæra reuoluatur. Vnde quia in deſcriptione ſphæræ circa diametrum ſemicirculi factus eſt motus ipſius ſphæræ; propterea eam ſolam Euclides axem ſphæræ nominauit.

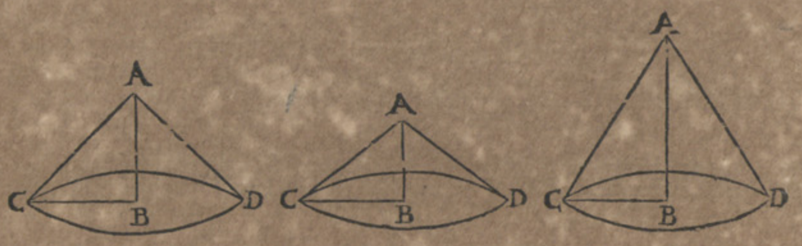
CONVS

XVIII.

CONVS eſt, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumaſſumpta figura.

ATQVE ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum con, uertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT ſi triangulum rectangulum ABC, circa latus quieſcens AB, quod eſt circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, deſcribetur ſolida quædam figura, quæ continetur duabus ſuperficiebus, circulari vna ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit: & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



QVOD ſi latus quieſcens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus eſt. Cum enim latera AB, BC, ponuntur æqualia; [a] erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus eſt, erit angulus BAC, ſemirectus. a 5. pri.
Eademque modo angulus BAD, ex parte oppoſita ſemirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quieſcens latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet angulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cum enim BC, latus latere AB, ſit maius; [b] erit angulus BAC, b 18. pri.
maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, ſemirecto maior. Similiter BAD, maior erit ſemirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quieſcens latus AB, maius fuerit circumducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cum enim latus AB, maius ſit latere BC, [c] erit angulus BCA, angulo BAC, maior. Qua- c 18. pri.
propter cum hi duo vni recto æquiualeant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, ſemirecto maior, ideoque reliquus BAC, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus BAD, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

XIX.

AXIS autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono ſuperius deſcripto axis eſt recta quieſcens AB.

XX.

BASIS vero coni eſt circulus, qui à circumducta linea recta deſcribitur.

NIMIRVM circulus, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt BC, in ſuperioribus conis. Itaque huius circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides ſolum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin. Non autem inclinatum, cuius axis ad baſim rectus non eſt; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, vt ibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: Superficiem à recta linea deſcriptam, conſtantemque ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſeſe aptatis, quarum vtraq; in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, voco conicam ſuperficiem.

VERTICEM ipſius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

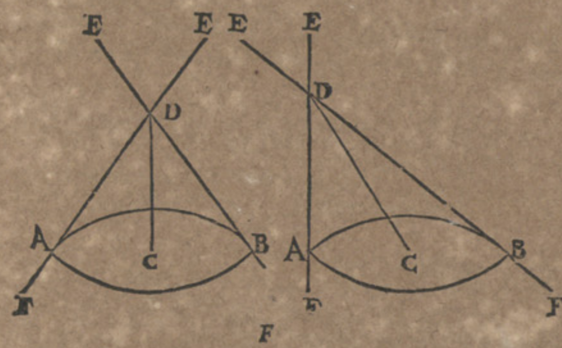
BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.

SIT circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea DB, feratur euſque in circuli AB, circumferentia, quouſque punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cœpit moueri: deſcribet ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctum ſeſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea ſuperficie, quam DB, ſola deſcribit. Coni verticem punctum D. Axem DC. Baſim AB, circulum. Quod ſi DC, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.



XXI.

CYLINDRVS eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cœperat moueri, circumaſſumpta figura.



VELVTI ſi rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quieſcens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, quæ quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, deſcribunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

AXIS autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri ſunt circuli à duobus aduerſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

QVALES ſunt circuli à lateribus AD, BC, oppoſitis deſcripti.

EVCLIDES porro ſolum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus eſt ad vtramque baſim; atque de hoc ſolum in lib. 12. eſt diſputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris ſimus propoſituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonſtrauit, viſum eſt prius ex Sereno Antinſenſi definire cylindrum vniuerſe, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur ſcribit Serenus ad initium primi libri de ſectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſeſe æquidiſtantes & ipſę in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & ſimul circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit: Superficies, quæ à circumlata recta linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta.

CYLINDRVS eſt figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.

CYLINDRI baſes ſunt circuli ipſi.

AXIS recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

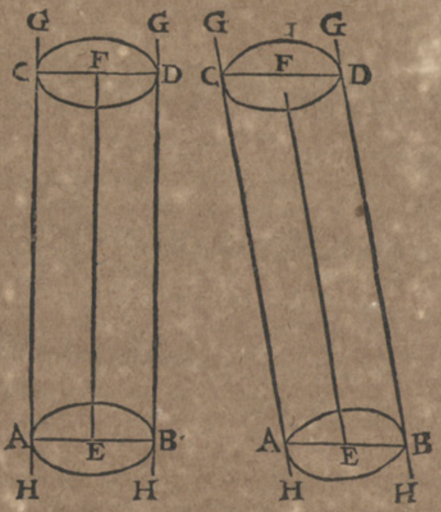
LATVS autem cylindri linea, quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes vtraſque contingit; quam & circumlatam, cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

SINT

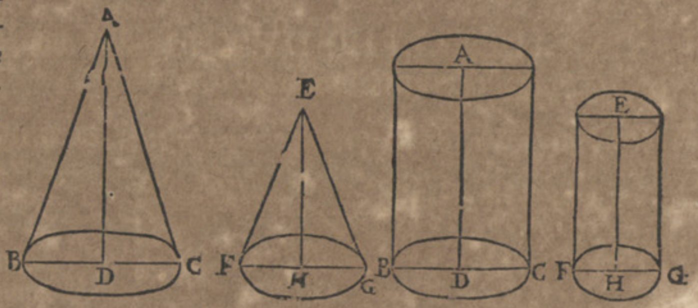
SINT duo circuli æquales, & æquidiſtantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidiſtantes quoque AB, CD: Iunctaque recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra EF, in planis circulorum ſemper æquidiſtantes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum reſtituantur, vnde moueri cœperunt; deſcribetur à linea AC, ſuperficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipſam deſcribens in infinitum, producitur. Cylindrum vero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta, quam videlicet ſola AC, deſcribit, comprehenſam. Baſes cylindri dicit eſſe circulos AB CD. Axem, rectam EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod ſi axis EF, perpendicularis fuerit ad baſes, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.



XXIV.

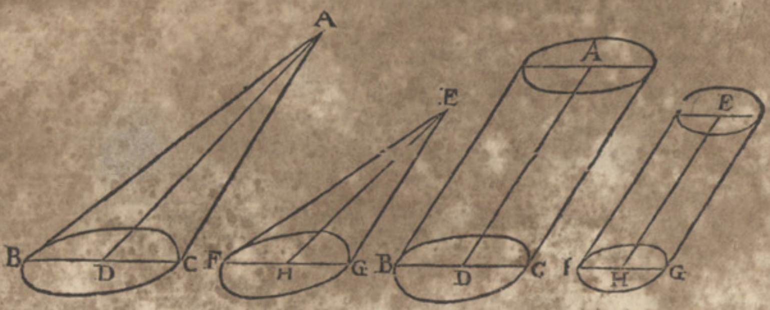
SIMILES coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

RECTE Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & baſium diametris ſumit. Diametri enim baſium indicant conos & cylindros ſecundum duas dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinem; Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinem ſimiles eſſe demonſtrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis autem axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triãgula ADB, EHF, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim ſit vt AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem vt



BC, ad FG, [a] ita dimidia BD, ad dimidiam FH: erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita a 15. quin.
EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectangula ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, [b] propterea quod triangula vnum angu- b 6. ſexti.
lum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, [c] ideoque latera omnia c 5. ſexti.
circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula vero, [d] eo quod reliqua duo d 34. pri.
latera duobus lateribus AD, DB, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.

QVOD ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, & diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in definitione quinta dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri ABC, EFG: In conis autem axes ſint



AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterintque anguli inclinationum ADB, EHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter ſe; dicentur & coni inter ſe, & cylindri quoque inter ſeſe ſimiles; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſupra diximus, & rurſus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindriſque demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non ſint recti.

XXV.

CVBVS eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

 OCTA-

XXVII.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

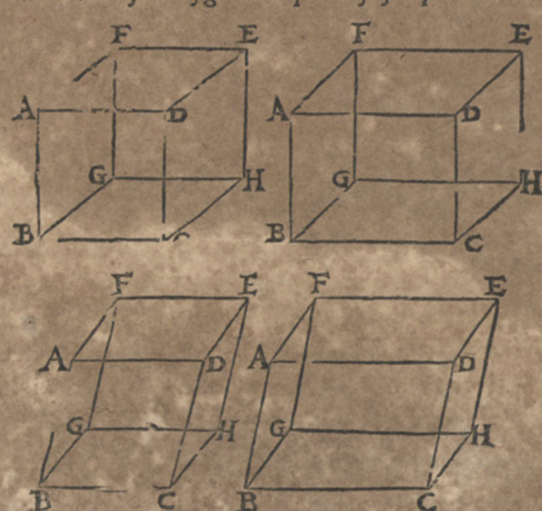
ICOSAEDRVM eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HÆC ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia ſint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus conſtat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ ſimplicia à Philoſophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hiſce corporibus aſſimilat, vt in ſphæra Ioannis à Sacro Boſco latius explicauimus. Horum omnium conſtructio traditur lib. 13. Cubi quidem propoſ. 15. Tetraedri vero propoſ. 13. Octaedri deinde propoſ. 14. Dodecaedri autem propoſ. 17. Icoſaedri denique propoſ. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum eſt, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet ſecundum eorum ſoliditatem poſſit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari poteſt, vt demonſtrabimus ad finem lib 13.

QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inſcriptione, circumſcriptioneq; corporum regularium; neceſſariũ eſſe duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam ſit parallelepipedum, quidque ſit figuram ſolidam in figura ſolida inſcribi, vel circa eandem deſcribi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerſo, parallelæ ſunt contenta.



VELVTI ſolida figura comprehenſa ſex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppoſitæ AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, ſunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quaſi parallelis planis comprehenſa, quæ quidem plana parallela oppoſita, ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallelogramma, vt demonſtrabitur propoſ. 24. huius lib.

SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim ſex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc eſt, quadrata, dicetur parallelepipedum illud cubus, reſpondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem ſex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, ſed altera parte longiora, quamuis duo ſint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod ſi ſex parallelogrāma extiterint, æquilatera quidem, ſed non omnia rectangula, quamuis duo ſint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique ſex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo ſint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerſo æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Priſma, vt ex definitione priſmatis conſtat.

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.

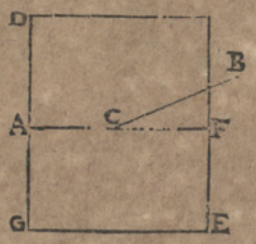
NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

VERVM duæ hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibusq; mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

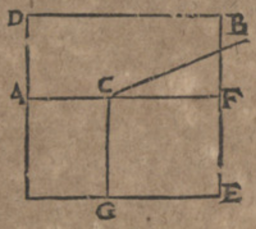
RECTÆ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. Quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



S C H O L I V M.

HÆC eſt communis demonſtratio interpretum, Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, rectæ AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directum, & continuum poſitam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi AC. Veruntamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, quæ ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ recte & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem ſi AC, in plano DE, producatur vſque ad F, erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam id ipſum Geometrice, in plano videlicet DE, ipſi AC, dari poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa vnam rectam lineam conſtituat, quamuis quis dicat, AB, eſſe quoque rectam, eiuſque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in ſublimi eſſe poſitam. [a] *Ducatur enim in plano DE, ipſi AC, perpendicularis CG; & in eodem plano ipſi CG perpendicularis CF. Dico CF, eſſe ipſi AC, poſitam in continuum & rectum. Cum enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos conſtituant ACG, FCG, ex conſtructione;* [b] *erunt AC, & FC, in directum & continuum poſitæ. Quamobrem etiamſi quis contendat, AB, eſſe rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, ſubiecto, pars autem CB, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam conſtituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, ſegmentum commune habebunt AC. Quod eſt abſurdum.*



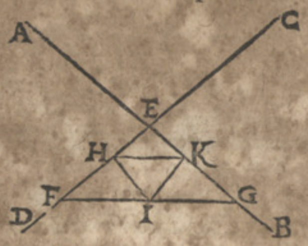
a 11. pri.
b 14. pri.

HINC fit omnes partes cuiuſuis rectæ lineæ, hoc eſt, totam rectam lineam, in vno exiſtere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano.

RECTÆ lineæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in vno quoque plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra; Exiſtent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in ſublimi, vel contra quod fieri non poſſe, iam ſupra [a] demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur eſſe, pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero *KG*, IG, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidem *FHKG*, in vno concedatur eſſe plano, pars vero *EHK*, in ſublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, *GK*, in vno plano, partes autem HE, *KE*, in ſublimi, vel contra. Quæ omnia abſurda ſunt, [b] vt eſt demonſtratum. Quare triangulum EFG, in vno plano exiſtit; eademque eſt ratio in omni alio triangulo.



a 1. vndecimi.
b 1. vndecimi.

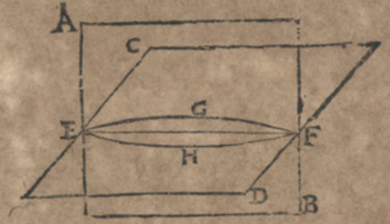
QVIA vero, in quo plano eſt triangulum EFG, in eodem exiſtunt eius latera EF, EG: In quo autem ſunt rectæ EF, EG: [c] in eodem ſunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in ſublimi dicantur eſſe; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, conſiſtere demonſtrauimus. Quocirca ſi duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano. Quod erat demonſtrandum.

c 1. vndecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta.

SECENT ſe mutuo plana AB, CD, ſitque communis eorum ſectio EF. Dico EF, eſſe lineam rectam. Si enim non credatur eſſe recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eoſdem habeant terminos E, & F, ſuperficiem includent. Quod fieri non poteſt, vt in 14. pronun-



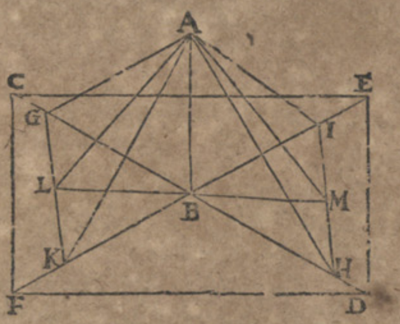
pronunciato 1.lib.oſtendimus. Communis ergo ſectio EF, recta erit linea; Ac proinde ſi duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. Quod erat oſtendendum.

ALITER. Secent ſe rurſus plana AB, CD, ſintque termini ſectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano exiſtit, conſtat propoſitum: Ipſa enim erit communis ſectio. Si vero EF. recta in neutro eorum dicatur eſſe, tunc ſi in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rurſus duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem, cum eoſdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano eſſe credatur, tunc ſi in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem. Quod eſt abſurdum. Eſt ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum ſectio eſt.

iv.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat. Illa ducta etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit.



RECTA linea AB, inſiſtat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum ſectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos eſſe plano, quod per ipſas ducitur, ſeu in quo exiſtunt. Cum enim ſe mutuo ſecent in B; [a] erunt ipſæ in vno plano, quod ſit CEDF. Sumantur inter ſe æquales rectæ BG, BH; item rectæ BI, BK; ducanturque rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, ſecans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in ſublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex conſtructione ſunt æqualia; [b] & anguli quoque ipſis contenti GBK, HBI, cum ſint ad verticem B, oppoſiti, æquales: [c] Erunt baſes GK, HI, inter ſe, & anguli BKG, BIH, inter ſe quoque æquales.

a 2. vndecimi.
b 15. pri.
c 4. pri.

d 15. pri. RVRSVS [d] cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppoſiti ſint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL; trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent

e 26. pri. æqualia, ex conſtructione. [e] Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

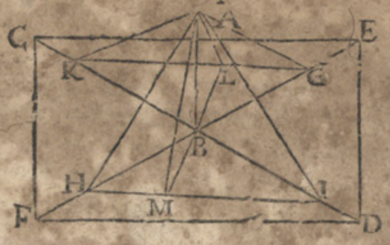
PRÆTEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex

f 4. pri. conſtructione; & anguli ipſis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypotheſi, [f] erunt & baſes AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

g 8. pri. AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia ſunt; & baſis AH, baſi AG, ex hactenus demonſtratis; [g] erunt etiã anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehenſi, æquales.

h 4. pri. ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia ſint lateribus AI, IM, triãguli AIM; & anguli ipſis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonſtrauimus; [h] erunt quoque baſes AL, AM, æquales.

i 8. pri.

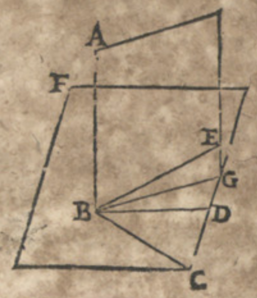


QVONIAM denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia ſunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & baſis AL, baſi AM, ex demonſtratis; [i] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehenſi, æquales; qui cum ſint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano ſubiecto ipſam tangit in B. Eademque ratione oſtendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipſam tangent in B, angulos rectos conſtituere, etiamſi inter puncta GI, & KH, ductæ ſint, dummodo rectæ GI, KH, iungãtur; vel certe literæ diſponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem ſunt literæ, & tamen LM, non ducitur à ſiniſtra in dexteram, vt in priori figura, ſed à ſuperiori parte verſus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, &c. Quod demonſtrandum erit.

v.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in vno ſunt plano.



a 2. vndecimi.
b 2. vndecimi.
c 3. vndecimi.
d 4. vndecimi.

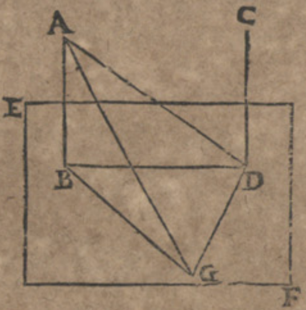
INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, ſe tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum ſectione, ſeu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano eſſe. [a] Cum enim quælibet duæ in vno ſint plano, propterea quod productæ ad partes B, ſe mutuo ſecent in B; ſint BC, BD, in plano FC; Et ſi fieri poteſt, recta BE, non ponatur in eodem plano, ſed in ſublimi. [b] Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno ſunt plano, cum ſe mutuo ſecent in B, ſint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, ſibi mutuo occurrunt in B; neceſſario producta ſe mutuo ſecabunt. [c] Sit ergo eorum communis ſectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, per ipſas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit

rectæ BG, quæ ipſam in B tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli ABE, ABG, exiſtentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter ſe erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, exiſtentibus, non erit BE, in ſublimi, ſed in eodem cum ipſis plano. Quocirca ſi recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vj.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas eſſe parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano E F, ducatur D G, ad BD, perpendicularis, ponanturq; æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera A B, B D, trianguli B A D, æqualia ſunt lateribus G D, D B, trianguli G D B, ex conſtructione; & anguli quoque ipſis contenti A B D, G D B, æquales, nempe recti; [a] erunt baſes æquales AD, GB. Rurſus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſunt lateribus G D, D A, trianguli G D A. Eſt autem & baſis communis AG, [b] erunt anguli ABG, GDA, æquales: Eſt autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus eſt; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. [c] Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erit plano, hoc eſt, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: [d] Eſt autem A B, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, ſint recti; [e] erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

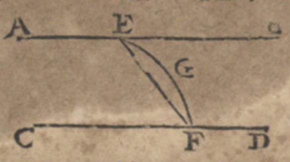


a 4. pri.
b 8. pri.
c 5. vndecimi.
d 2. vndecimi.
e 28. pri.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

IN parallelis *AB*, CD, ſumantur vtcunq; duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectã EF, in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum, ſunt parallelæ *AB*, CD. Si enim recta EF, non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra; ſecet iam aliud planum ſuperficiem parallelarum per puncta E, & F, ſitque communis ſectio horum planorum EGF, [a] quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eoſdẽ terminos E, & F, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum parallelarum *A B*, CD, erit recta EF. Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraq; ſumpta ſint quælibet puncta: illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrandum.



a 3. vndecimi.

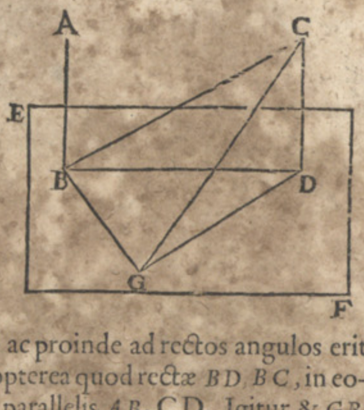
SCHOLIVM.

HÆC eadem propoſitio vera eſt, etiamſi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ *A B*, CD; ſitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & *A B*, eidem plano EF, eſſe ad rectos angulos. Ducta enim recta B D, in plano E F, erit per defin. 3. huius lib. angulus C D B, rectus: [a] Sunt autem duo CDB, *ABD*, duobus rectis æquales. Igitur & *ABD*, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturque æquales BG, CD. Coniungantur deinde rectæ DG, GC, *CB*. Quoniam igitur latera CD, *DB*, trianguli *CDB*, æqualia ſunt lateribus *GB*, *BD*, trianguli *G B D*, ex conſtructione, & anguli quoque ipſis contenti *C D B*, *G B D*, æquales, nimirum recti: [b] Erunt baſes *CB*, GD, æquales; Rurſus quia latera CD, D G, trianguli *C D G*, æqualia ſunt lateribus *G B*, *B C*, trianguli *G B C*, & baſis eſt communis CH; [c] Erunt anguli C D G, *G B C*, dictis lateribus comprehenſi æquales. Eſt autem C D G, rectus ex definitione 3. huius lib. Igitur & *G B C*, rectus erit. Quare recta *G B*, duabus rectis *B D*, *B C*, ſe mutuo ſecantibus in *B*. (Si namque producerentur *D B*, *C B*, ſecarent ſeſe in *B*, ob angulum *C B D*.) ad rectos angulos exiſtent; [d] ac proinde ad rectos angulos erit plano per *B D*, *B C*, ducto: Eſt autem in hoc eodem plano recta *A B*; [e] propterea quod rectæ *B D*, *B C*, in eodem ſunt plano, in quo parallelæ *A B*, CD; cum puncta *B*, C, D, exiſtant in parallelis *A B*, C D. Igitur & *G B*, rectæ *B A*, ad rectos erit angulos ex definitione 3. huius lib. Quare cum *A B*, recta ſit ad rectis *B G*, *B D*; [f] erit quoque *A B*, recta ad planum per *B G*, *B D*, ductum, hoc eſt, ad planum E F. Si duæ igitur ſint parellelæ



a 29. pri.
b 4. pri.
c 8. pri.
d 4. vndecimi.
e 7. vndecimi.
f 4. vndecimi.

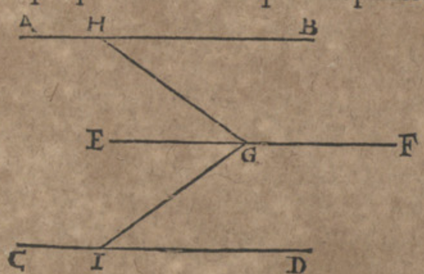
rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat oſtendendum.

ix.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoq; ſunt inter ſe parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eodem cum EF, plano, Dico AB, CD, parallelas quoque eſſe. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipſam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano parallelarum CD, EF. Quoniam igitur EG, recta eſt ad duas rectas GH, GI, ſe tangentes mutuo in G; [a] erit recta quoque ad planum per ipſas GH, GI, ductum. Quamobrem cum ſint parallelæ AB, EF, & EF ſit recta ad planum per GH, GI, ductum; [b] erit quoq; AB, ad idem planum recta: ſimiliter cũ ſint parallelæ CD, EF, ſit autem EF, recta ad planũ per GH, GI, ductum; [c] erit etiam CD, recta ad idem planum; [d] Atque proinde rectæ AB, CD, cũ rectæ ſint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.



a 4. vndecimi.
b 8. vndecimi.
c 8. vndecimi.
d 8. vndecimi.

SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non eſſe in eodem plano cum recta EF, cui ſunt parallelæ. Nam ſi forent in eodem plano cum ipſa EF,; eſſent AB, CD, inter ſe parallelæ, ex 30. propoſit. 1. lib. Superuacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

x.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

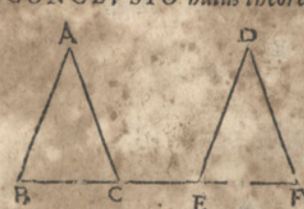


SINT rectæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ rectis DE, EF, ſe tangentibus in D; non ſint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponantur enim AB, DE, inter ſe æquales, & AC, DF, inter ſe; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ ſunt & æquales; [a] erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales ſint eidem AD, [b] erunt etiam BE, CF, inter ſe parallelæ & æquales; [c] Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex conſtructione; & baſis BC, baſi EF, æqualis, vt modo demonſtrauimus; [d] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehenſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.

a 33. pri.
b 9. vndecimi.
c 33. pri.
d 8. pri.

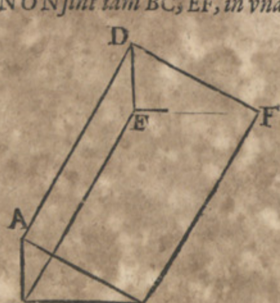
SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam eſt, quando priores duæ rectæ in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodem plano, ſitque AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, eſſe æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducanturq; rectæ EC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt conſtituta, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniam igitur parallelæ ſunt AB, DE, [e] *æquales erunt anguli ABC, DEF, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC, æquales ſunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF.* [f] *Igitur anguli quoq; reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.*



e 29. pri.
f 32. pri.

NON ſint iam BC, EF, in vna recta linea conſtitutæ. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, ſint parallelæ & æquales; [g] *erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem AD, parallelæ exiſtentes & æquales,* [h] *inter ſe parallelæ erunt & æquales;* [i] *Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC, EF. Itaque cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, & baſis BC, baſi EF,* [k] *erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.*

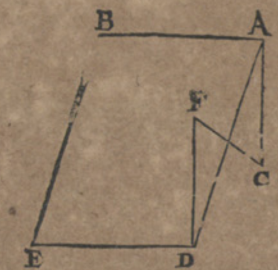


g 33. pri.
h 30. pri.
i 33. pri.
k 8. pri.

CÆTERVM vt concluſio huius theorematis recte ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas, (ſiue omnes ſint in eodem plano, ſiue non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione ſe mutuo ſecent; vt ex prima & vltima figura apparet. Nam alias concluſio vera non erit.

SVNT

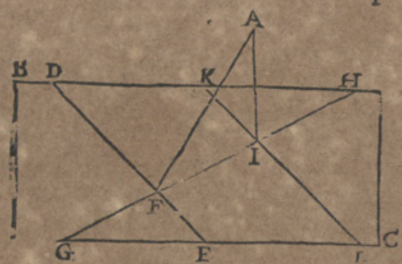
SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non ſunt æquales, cũ ille ſit acutus, hic vero obtuſus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, ſe mutuo ſecant. Vnde quamuis AC, DF, ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.



PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT à puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunque D E, [a] ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F: Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur G H, [b] ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum BC. [c] Ducta enim in plano BC, per I, ipſi DE, parallela KL, [d] cũ DF, ad rectos angulos ſit duabus F A, FH, ex conſtructione, [e] ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum, [f] erit quoque KI, ad idem planum per FA, FH, ductum recta. [g] Quoniam vero AI, in eodem eſt cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam K I, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA: rectus; atque adeo A I, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. [h] Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.



a 12. pri.
b 11. pri.
c 12. pri.
d 31. pri.
e 4. vndecimi.
f 1. vndecimi.
g 12. vndecimi.
h 4. vndecimi.

SCHOLIVM.

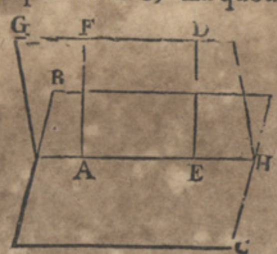
QVOD ſi quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem ſit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis, [i] erit ipſa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis, ad ſubiectum planum BC, perpendicularis, cum perpendicularis ſit ad vtramque DE, GH.

i 4. vndecimi.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

DATO plano à puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT à dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendicularis ad datum planum B C, [a] Ex quouis puncto D, in ſublimi demittatur ad planum B C, perpendicularis DE, quæ ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extenſa recta per E, & A, [b] ducatur per A, ipſi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectã eſſe ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallelæ ſint; & DE, recta ad planum BC, ex conſtructione: [c] erit quoque A F, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod faciendum erat.

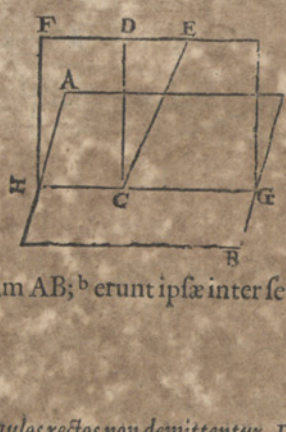


a 11. vndecimi.
b 31. pri.
c 8. vndecimi.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiij.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.

SIT datum planum A B. Dico à dato eius puncto C, ad eaſdem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum A B. Ducantur enim ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE, [a] quæ in vno, eodemque plano ſunt, ducatur planum FG, ſecans planum A B, per rectam lineam G H. Cum igitur EC, DC, rectæ ſint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales pars, & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes. Quod erat demonſtrandum.



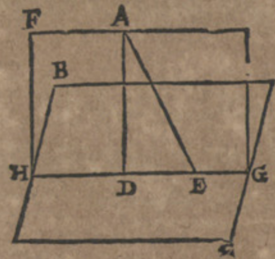
a 2. vndecimi.

ALITER. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ ſint ad idem planum AB; [b] erunt ipſæ inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod eſt abſurdum.

b 6. vndecimi.

SCHOLIVM.

EODEM modo à puncto in ſublimi ad ſubiectũ planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim

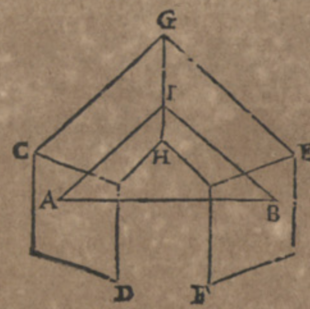


c 2. vndecimi. *enim ex A, puncto in ſublimi ad ſubiectum planum B C, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, [c] quæ in vno plano ſunt, planum FG, ſecans planum B C, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ ſint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod eſt abſurdum:* d 17. pri. *[d] cum ſint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis aſſumpti.*

e 6. vndecimi. *ALITER. Si AD, AE, rectæ ſunt ad planum BC, [e] ipſæ erunt inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod eſt abſurdum.*

xiv. THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela.



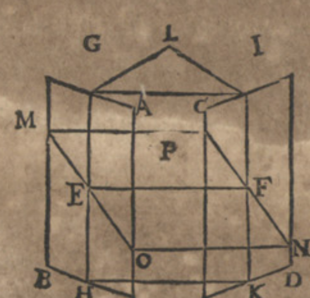
a 3. vndecimi. SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela eſſe plana CD, EF. Si enim non credantur eſſe parallela, producta inter ſe conuenient. Conueniant ad partes C, E, [a] & faciant communẽ ſectionem rectam lineam GH; In qua ſumpto puncto vtcunque I, ducãtur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. b 17. pri. [b] Sed & minores duobus rectis ſunt. Quod eſt abſurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter ſe conueniunt. Parallela ergo ſunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonſtrari poterit conuerſum huius, Videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

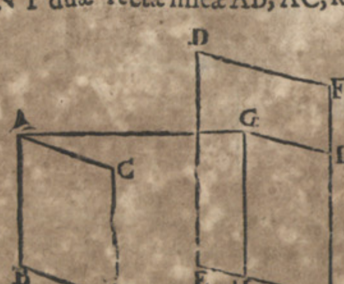
SINT duo planæ parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta ſit linea recta EF. Dico EF, rectam quoque eſſe ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatque communes ſectiones cum dictis planis rectas GH, IK. eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus exiſtunt, ad eaſdem partes conuenient ad punctum L; c 1. vndecimi. *[c] cum tota recta HGL, ſit in vno plano, nempe in AB, producto: Item tota recta KIL, in vno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod eſt abſurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo ſunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo ſi aliud planum, videlicet MN, eadem plana ſecet per EF, faciens alias rectas communes cum ipſis ſectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti.* d 4. vndecimi. *Itaq; cum EF, ſit recta ad duas rectas IK, PN, recta; [d] quoq; erit EF, ad planum CD, per ipſas ductum. Quod eſt propoſitum*



xv. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano: Parallela ſunt, per quæ illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, ſe tangentibus in D, exiſtentibusque in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipſas ducta, eſſe parallela. a 11. vndecimi. Ex [a] A, enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. b 31. pri. [b] Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipſis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur c 9. vndecimi. rectæ AB, GH, parallelæ ſunt ipſi DE; [c] erunt & AB, GH, inter ſe parallelæ; d 29. pri. [d] Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum eſſe. Itaque cum recta GA, ſit recta duabus AB, AC, e 4. vndecimi. [e] recta quoq; erit GA, ad planum BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione. f 14. vndecimi. [f] Igitur parallela ſunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

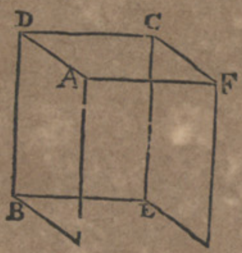
QVOD ſi perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipſummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod

quod in plano EF, non ſunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt ſi lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC; ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; oſtendemus, vt prius, GA, eſſe rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

DATVM planum ſit AB, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunque duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, [f] agatur CE, ipſi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum eſſe plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibusque in alio cum illis plano parallelæ ſint, [g] parallelæ erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.



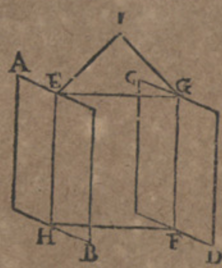
f 31. pri.

g 15. vndecimi.

THEOR. 14. PROPOS. 16. xvj.

SI duo plana parallela plano quopiam ſecentur: communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes ſectiones eorum EH, GF, eſſe lineas parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, productæ inter ſe conuenient, cum ſint in plano EF, ſecante. Conueniant igitur in puncto I. [a] Quia ergo tota recta HEI, in vno eſt plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in vnoquoque eſt plano, videlicet in CD, producto; conueniens etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod eſt abſurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare ſi duo plana parallela plana quopiam ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 1. vndecimi.

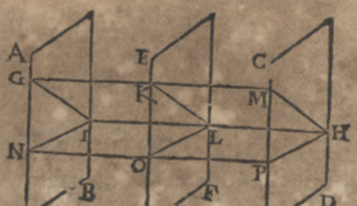
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione poteſt conuerti. Quamuis enim communes ſectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano ſecante ſint parallelæ, vt hic demonſtratum eſt; Non tamen omnia illa plana, quorum communes ſectiones factæ ab alio plano ſecante ſunt parallelæ, parallela ſunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana poſſint duci, quorum duo tantum ſunt parallela, alia vero in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud ſimile theorematì 30. lib. 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela.

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela eſſe. Secentur enim omnia tria plana plano GH, ſintque communes eorum ſectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rurſus alio plano NH, ſintque communes eorum ſectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana ſecantia GH, NH, ſe quoque mutuo ſecent, quorum ſectio communis ſit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, ſecantur plano GH, [b] erunt communes ſectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL, [c] atque adeo parallelæ erunt inter ſe GI, MH. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe NI, PH. Itaque cum IG, IN, ſe mutuo tangentes in I, parallelæ ſint rectis HM, HP, ſe tangentibus in H, exiſtentibusque in alio plano; [d] erunt plana AB, CD, per ipſas ducta parallela. Quod eſt propoſitum.

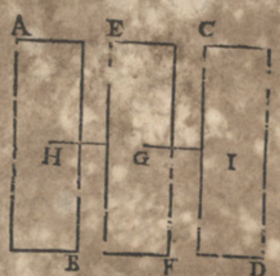


b 16. vndecimi.

c 9. vndecimi.

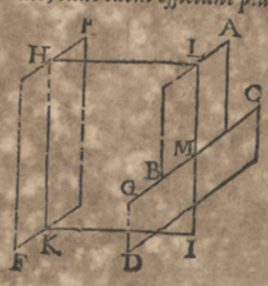
d 15. vndecimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta eſt ad planum EF, recta quoque erit ad planum AB, ſibi parallelum, per ea, quæ in ſcholio propoſitionis 14. huius lib. demonſtrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, ſit recta ad plana AB, CD; [e] parallela inter ſe erunt plana AB, CD. Quod eſt propoſitum.



e 14. vndecim.

QVOD ſi duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter ſe, ſed conueniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ ſunt parallelæ, ſi conueniant, vnam rectam conſtituunt lineam, veluti ad propoſ. 30. lib. 1. demonſtrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantque producta ſecundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum conſtituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela ſunt plana AB, EF, [f] erunt & communes ſectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quam ob rem cum rectæ LM, IM, parallelæ ſint ipſi HK, exiſtantque in eodem plano ſecante HI, & conueniant in M; ipſæ erunt in rectum & continuum poſitæ, per ea, quæ ad 30. propoſ. lib. 1. oſtendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient; [g] propterea quod recta LI, in vno iaceat plano. Quod eſt propoſitum.



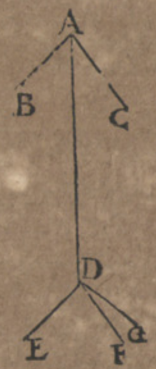
f 16. vndecimi.

g 1 vndecimi.

ITAQVE

ITAQVE *duo plana, quæ parallela ſint alteri plano, vel inter ſe parallela erunt, vel certe, ſi producta conueniant, vnum planum conficient.*

PORRO *conuerſum quoque propoſ. 10. facile demonſtrabimus hoc loco, videlicet.*



SI in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.

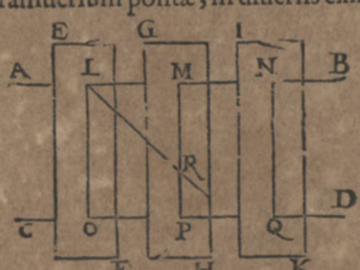
IN *planis enim parallelis ſint anguli æquales* BAC, EDF, *ſitque* AB, *ipſi* DE, *parallela;* & AC, DF, *ſint ad eaſdem partes plani per* AB, DE, *ducti. Dico* AC, DF, *parallelas quoque eſſe: hoc eſt, ducta recta* AD, *planum per* AC, AD, *ductum tranſire etiam per rectam* DF; *ita vt* AC, DF, *ſint communes ſectiones factæ à plano per* AC, AD, *ducto, in planis parallelis per* AB, AC, & DE, DF, *ductis.* h 16. vndecimi. [h] *Hinc enim efficitur, ſectiones* AC, DF, *parallelas eſſe. Quod eſt propoſitum. Si namque planum per* AC, AD, *ductum non facit in illis planis parallelis ſectiones* AC, DF, *faciat ſectiones* AC, DG, i 16. vndecimi. [i] *quæ parallelæ erunt.* k 10. vndecimi. [k] *Igitur angulus* EDG, *angulo* BAC, *hoc eſt, angulo* EDF, *æqualis erit. Quod eſt abſurdum, cum vnus ſit totum, & alter pars.*

xvij.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; In eaſdem rationes ſecabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (ſiue eæ parallelæ ſint, vt in figura, ſiue non, exiſtentes tamen in eodem plano; ſiue in tranſuerſum poſitæ, in diuerſis exiſtentes planis) ſecentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas ſecari proportionaliter, hoc eſt, ſegmenta earum inter dicta plana intercepta eſſe proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita eſſe OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH. a 2. vndecimi. [a] Eritque triangulum LNQ, in vno plano: ſimiliter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, ſecantur b 16. vndecimi. plano triangli LNQ, [b] erunt communes ſectiones eorũ MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. c 2. ſexti. [c] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.

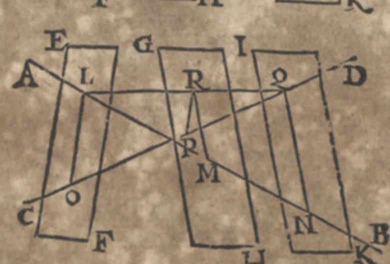


SCHOLIVM.

QVOD, *ſi datæ rectæ* AB, CD, *ſint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ* RM, RP, *vnam lineam rectam, vt in ſuperiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas* AB, CD, *ductum ſecabit tria plana parallela in punctis* L, O, M, P, N, Q; & *per rectas* LO, MP, NQ, d 16. vndecimi. [d] *quæ inter ſe parallelæ erunt, punctumque* R, *in recta* MP, *exiſtet, cum ſit & in plano per rectas* AB, CD, *ducto (propter puncta* L, Q, *in eodem illo plano exiſtentia, vt in ſcholio propoſitionis 7. huius lib. diximus) & in plano* GH, *atque adeo in* MP, *communi eorum planorum ſectione. Quare* RM, RP, *vnam rectam lineam* MP, *conſtituent, nimirum communem ſectionem planorum* LO, QN, GH.



SI *vero duæ rectæ* AB, CD, *non ſint in eodem plano, non efficient* RM, RP, *vnam rectam lineam, vt in hiſce duabus figuris apparet: quia* e 2. vndecimi. [e] *cum triangulum* LOQ, *ſit in vno plano, & triangulum* LNQ, *in vno etiam plano, quod ab illo plano diuerſum eſt, (Si namque duo illa triangula in vno eodemque plano exiſterent, eſſent duæ rectæ* AB, CD, *in eodem illo plano, quod ex ipſis conſtituitur, quod eſt contra hypotheſim.) erunt rectæ* RM, RP, *in diuerſis illis planis triangulorum; ac proinde vnam rectam non conſtituent;* f 1. vndecimi. [f] *alias in vno eſſent plano. Quod eſt abſurdum.*



EADEM *hæc propoſitio locum habet, ſi duæ rectæ* AB, CD, *in eodem plano exiſtentes, non ſint parallelæ, vt in eiſdem hiſce duabus figuris apparet: ſed tunc* MRP, *ſemper erit vna linea recta, vt ad initium huius ſcholij demonſtratum eſt, quando* AB, CD, *in vno plano ponebantur. Eadem enim demonſtratio hic adhiberi poteſt.*

NON *ſecus ſi plura plana parallela, quam tria, rectas* AB, CD, *ſecent, erunt earum partes proportionales, & communes ſectio-*

ſectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas conſtituent, ſi rectæ AB, CD, in vno ſint plano, non rectas autem ſi non ſint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum eſt.

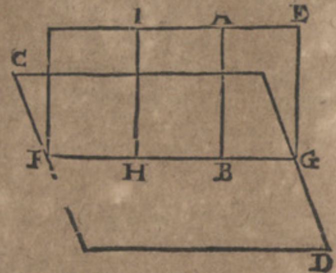
EX demonſtratione porro perſpicuum eſt, ſi quotlibet lineæ in vno plano exiſtentes ſecentur quotuis lineis parallelis, ſegmenta illarum linearum inter parallelas eſſe proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in poſtrema figura quomodocunq; in vno plano diſpoſitæ, quæ ſecentur tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad interſectionem rectarum CD, RM, pertineat) QN. Dico ſegmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam ſegmenta OP, PQ. Iuncta enim recta LQ,[a] erit vt LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum LOQ, quam LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitur erit, vt OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademq; ratio eſt de pluribus. Vt autem recte demonſtratio procedat in quibuſuis duabus rectis, ducenda eſt recta à primo puncto ſectionis vnius rectæ ad vltimum ſectionis punctum alterius. Ita vides in duabus AB, CD, ductam eſſe rectam ex L, primo puncto rectæ AB, ad Q, vltimum punctum rectæ CD. Idemq; ſeruatum eſt in figuris huius propoſ. 17. a 2. *ſext.*

THEOR. 16. PROPOS. 18. xviii.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, eſſe recta ad idem planum CD. Ductum enim ſit per AB, planum EF, ſecans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG,[a] ducatur in plano EF, ipſi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ ſunt; & AB, ponitur recta ad planum CD;[b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defi. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipſi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta ad planum CD, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 31. *prim.*
b 8. *vndec.*

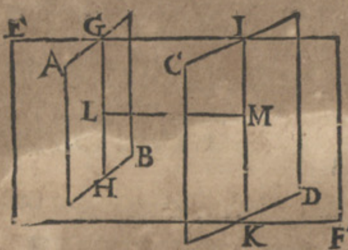


SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia ſectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela eſſe. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit:[c] eademque perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoq; CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumq; planum AB, CD, recta eſt,[d] ipſa parallela erunt. c 29. *prim.*



d 14. *vnde.*

SED iam parallela ſint plana AB, CD; ſitq; AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum eſſe ad idem planum EF. Sint enim communes ſectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK;[e] quæ parallelæ erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoq; erit:[f] Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque viciſſim planum CD, ad planum EF, erit quoq; rectum. Quod eſt propoſitum.

e 16. *vnde.*
f 18. *vnde.*

HINC etiam problema hoc abſoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propoſ. oporteatque per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum ſit. Ex quouis puncto B, rectæ FG,[g] erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF,[h] quod ad planum CD, rectum erit. Quod eſt propoſitum.

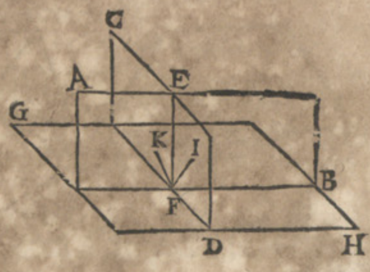
g 12. *vnde.*
h 18. *vnde.*

THEOR. 17. PROPOS. 19. xix.

SI duo plana ſe mutuo ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.

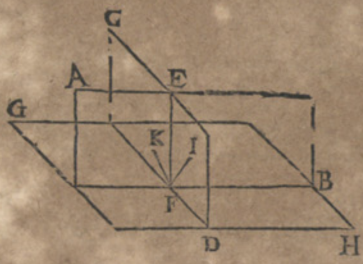
SINT duo plana AB, CD, ſe mutuo ſecantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum ſectionem EF, rectam quoque eſſe ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes ſectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta eſt, aut non. Si recta eſt EF, ad BF, DF,[a] recta quoque erit ad planum GH, quod per ipſas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum ſit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defi. huius

a 4. *vndec.*



 lib. Idem

lib. Idem concludes ſi EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem ſectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, eſſe



b 11. prim. credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cũ plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum

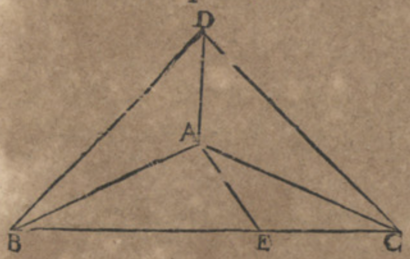
c 13. vnde. GH, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fieri non poſſe ſupra [c] demonſtratum eſt. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

xx.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vt vt aſſumpti tertio ſunt maiores.

CONTINEATVR angulus ſolidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo eſſe maiores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuum eſt, quoſuis duos maiores eſſe reliquo: Si vero duo tantum ſint æquales, & tertius vtrouis minor, conſtat quoque quoslibet duos reliquo maiores eſſe. Quod



ſi vnus, videlicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſiue æquales, ſiue inæquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo eſſe maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque eſſe angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB,

a 23. prim. AC, ducto [a] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE æqualis rectæ, AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, ſecans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturq; rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipſis contenti, per conſtructionẽ,

b 4. prim. æquales; [b] erũt baſes BD, BE, æquales. [c] Quia vero latera DB, DC, maiora ſunt latere BC; ſi demãtur æquales re-

c 20. primi. ctæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quã CE. Cũ igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia ſint lateribus

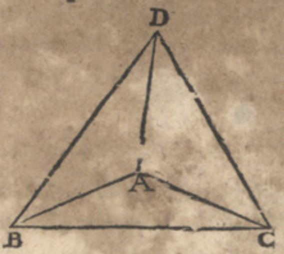
d 25. prim. AE, AC, trianguli EAC; & baſis CD, maior baſe CE; [d] erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc eſt toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca ſi ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat oſtendendum.

xxj.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus ſolidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores eſſe quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt conſtituti tres anguli ſolidi B, C, D, quorum quilibet ſub tribus angulis planis continetur, nempe B, ſub CBA, ABD, DBC. At C,



a 20. vnde. ſub BCA, ACD, DCB: D, vero ſub CDA, ADB, BDC. [a] Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores ſunt angulo CBD; ſimiliterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD: & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt ſex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB,

b 32. primi maiores. [b] Hi autem tres æquales ſunt duobus rectis. Illi ergo ſex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur ſex illi, vna cum tribus ad A, æquales ſint ſex rectis pro-

c 32. prim. pter triangula tria BAC, CAD, DAB, ([c] ſunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales) ſi auferantur ſex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, ſolidum angulum conſtituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo ſolidus angulus, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonſtratio ab interpretibus accommodatur ſoli illi angulo ſolido, quem tres plani anguli conſtituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos ſolidos extendemus hoc modo.

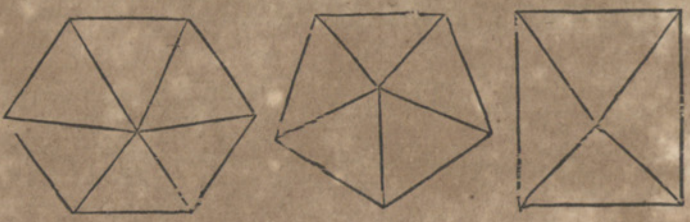


SIT angulus ſolidus quicunq; contentus quotcunq; angulis planis. Dico omnes illos eſſe quatuor rectis quoq; minores. Nam ſi omnibus angulis planis rectæ ſubtendantur ordine in eodem plano exiſtentes; conſtituetur pyramis, cuius vertex datus angulus ſolidus, tot laterum, angulorumue, ſub quot angulis planis ſolidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangu-

triangulorum, ([d] cum anguli cuiuslibet trianguli duobus ſint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet baſis: Sed omnes anguli baſis æquales ſunt quoq; bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propoſ. 1. lib. demonſtrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum ſuperabunt omnes angulos baſis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (propterea, quod prope baſin conſtituantur anguli ſolidi, quorū quilibet tribus planis angulis continetur, [e] & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in baſi, ſint maiores) ſuperabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem prope baſin, minoribus quam quatuor rectis. Cū ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.

d 32. prim.

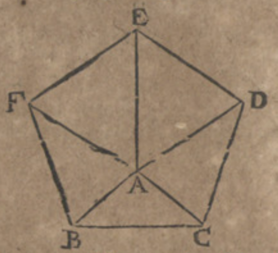
e 20. vnd.



VERVM vt res melius percipiatur; ſit gratia exempli angulus ſolidus A, contentus quinq; angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus ſubtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno, eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, ſecat in punctis B, C, D, E, F; ita vt conſtituatur pyramis pentagona, habens videlicet baſin pentagonam, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum ſolidum A. [f] Quia vero omnes anguli quinq; triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinq; baſis BCDEF, æquales ſunt ſex rectis, nempe decem minus quatuor; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cum enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; [g] erunt duo CBA, ABF, qui ſunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui eſt in baſi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinq; angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, vt dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in aliis omnibus angulis ſolidis.

f 32. primi.

g 20. vnde.



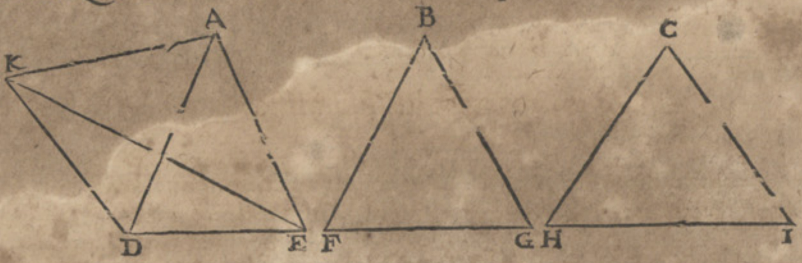
THEOR. 20. PROPOS. 22.

xxij.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales; fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.

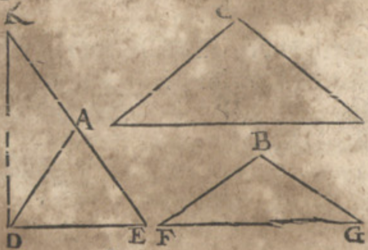
SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito, [a] ex ipſis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, maiores ſint, quā HI, ita oſtendetur. [b] Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compoſitus; quod quidem continget, quādo duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur AK, ipſi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE,. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales; [c] erunt & baſes KD, FG, æquales. Rurſus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia ſunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, maior angulo C, propterea quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & baſis EK, maior baſe HI: [e] ſunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis rectę FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

a 22. prim.
b 23. primi.



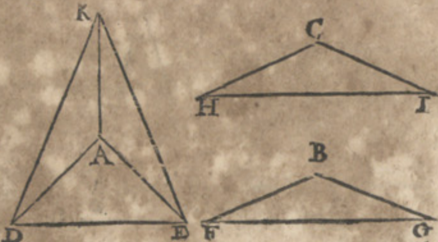
c 4. primi.
d 24. prim.
e 20. primi.

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipſi AE: quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturque AK, ipſi AD, æqualis rurſum, & connectatur recta KD. [f] Erit, igitur vt prius KD, ipſi FG, æqualis. [g] Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores ſunt recta KE, & KE, æqualis eſt rectis CH, CI, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoq; ED, DK, maiores duabus CH, CI: [h] Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoq; DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.



f 4. primi.
g 20. primi.
h 20. prim.

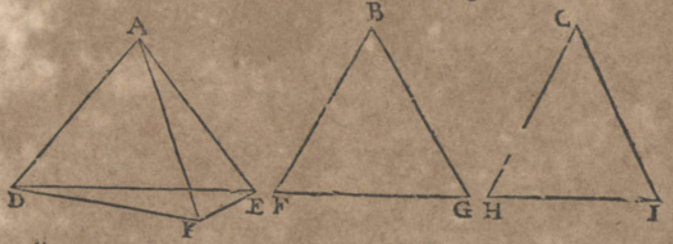
CADAT poſtremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta ſit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturq; rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. [i] Erit igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. [k] Quoniam vero duæ DE, DK, maiores ſunt duabus AE, AK, & AE, AK, ęquales duabus CH, CI, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: [l] Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur



i 4. primi.
k 21. primi.
l 20. primi.

multo erunt maiores DE, DK, quã HI. Cũ ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoq; DE, FG, maiores quã HI, quod eſt propoſitũ. Eodẽ modo concludemus DE, HI, maiores eſſe, quã FG, ſi angulus DAK, angulo
m 22. prim. C, fiat æqualis; Itẽ FG, HI, maiores, quã DE, ſi angulo C, ad FB, conſtituatur angulus æqualis, &c. [m] Quare ex trib. rectis DE, FG, HI, triangulũ cõſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonſtrãdũ erat.

n 4. primi. ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; [n] erunt quoque baſes DE, FG, HI, æquales; Ac proinde
o 4. primi. quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & tertius minor; [o] erunt quoque duæ il-
p 24. prim. lorum baſes æquales, [p] & baſis tertii vtraque minor: Quare rurſus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod ſi
q 24. prim. vnus eorum, nempe A, ſit maximus, ſiue reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſiue inæquales; [q] erit quoque baſis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores quã
r 23. primi. FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores eſſe recta DE, [r] Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturq; AK, ipſi AD, æqualis. Cadet ergo pũctum K, infra DE: propterea quod per puncta D, K, E, tranſit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, deſcripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE.

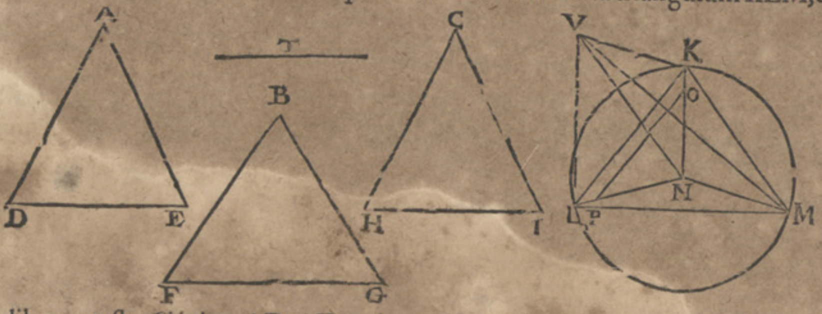


Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponũtur angulo DAE & B, æqualis eſt angulo DAK, per conſtructionẽ; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, triãguli AK, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contẽ-
s 4. primi. ti DAK, & B, æquales; [s] erit baſis DK, baſi FG, æqualis. Rurſus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia ſunt
t 24. primi. lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, oſtenſus maior angulo KAE; [t] erit & baſis HI, maior baſe KE.
u 20. prim. Quare cum DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: [u] Sed DK, KE, maiores ſunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod eſt propoſitum.

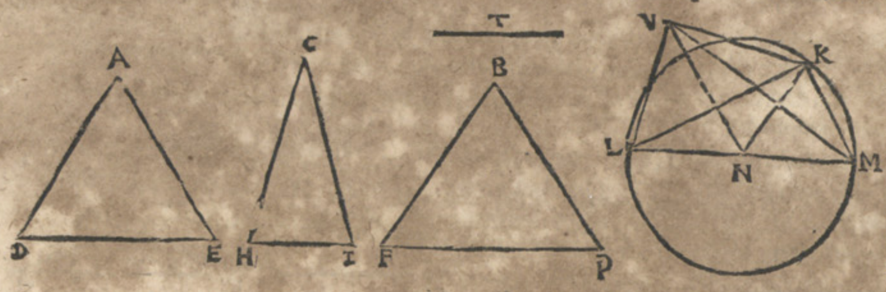
xxiij. PROBL. 3. PROPOS. 23.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunq; aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo ſint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum ſolidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis ſint æquales. Ponantur ſex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD,
a 22. vnde. AE, BF, BG, CH, CI, æqũales; ſubtendanturque baſes DE, FG, HI. [a] Fieri ergo poteſt, vt ex DE, FG, HI, triangulum conſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triangulum KLM, ſitque latus KL, rectæ DE; latus LM, re-
b 5. quarti. ctæ FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. [b] Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrum N, à quo ducantur rectæ NK, NL, NM, Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidẽ fiet, quando triangulum eſt oxygonium, vt ex coroll. propoſ.

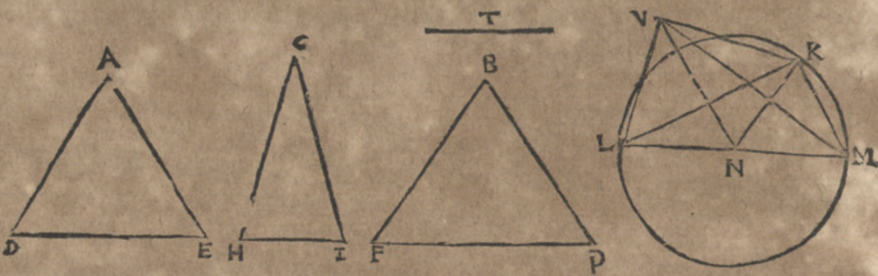


5. lib. 4. conſtat. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, trianguli NKL;
c 8. prim. & baſis DE, baſi KL, æqualis: [c] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, ęquales ſint quatuor rectis ex corol. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neq; minores. Si enim minores ſint AD, AE, quam NK, NL, abſcindantur NO, NP. ipſis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur eſt vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter ſe, & conſequentia ſint inter ſe æqualia;
d 2. ſexti. erunt latera NK, NL, trianguli NKL, ſecta proportionaliter; [d] ac proinde OP, ipſi KL, parallela erit. [e] Quare an-
e 29. prim. f 4. ſexti. guli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulum. [f] Igi-
g 14. quin. tur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Eſt autem NK, maior quam NO. [g] Igitur & KL, hoc eſt, DE, quæ æqualis eſt ipſi KL, maior erit, quam OP. Quocirca cum latera AD, AE, trianguli ADE, ſint æqualia lateribus NO, NP,
h 25. primi. trianguli NOP, & baſis DE, maior baſe OP, [h] erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior eſſe oſtendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor ſint rectis æquales, ex corol. prop. 15 lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod eſt abſurdum. ponũtur n. quatuor rectis minores. Non igitur minores ſunt AD, AE, quã NK, NL; ſed neq; æquales. Igitur maiores

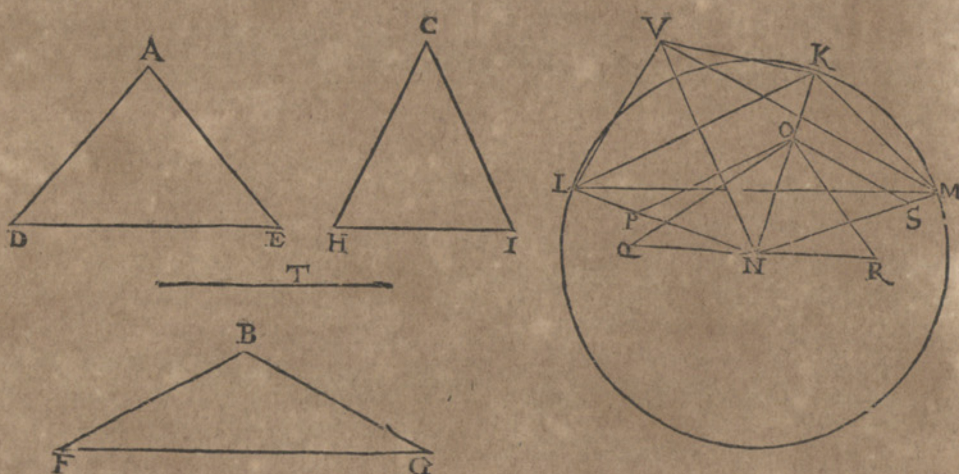


CADAT deinde centrum N, in latus LM, quod tũ continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propoſ. 5. lib. 4. manifeſtũ eſt. Si igitur AD, AE, dicantur eſſe æquales ipſis NK, NL; erũt quoque BF, BG, æquales eiſdem

eiſdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Poſita autem fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque ſunt rectæ FG. [i] Sũt autem & maiores BF, BG, quã FG. Quod i 20.prim.
ſit abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quã NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; minores erunt BF, BG, quã recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt recta FG. Quod eſt abſurdum, [k] cum ſint maiores. k 20.prim.
Non ergo minores ſunt AD AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores.



CADAT poſtremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtuſus, vt ex coroll. dicto propoſ. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD, AE, eſſe æquales ipſis NK, NL; cum & baſis DE, baſi KL, ponatur æqualis; [l] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione l 8.primi.
angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æqualis; [m] erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem oſtẽdimus eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, credantur eſſe m 8.prim.
minores, quam NK, NL; ſi abſcindantur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP, demonſtrabitur, vt in primo caſu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. [n] Fiat n 23.prim.
angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipſis AD, AE, & connectantur OQ, OR, cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, tranſit circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, deſcripta, cum æquales ſint rectæ NO, NP, NQ. [o] Quare cum angulus PON, o 29.primi
æqualis ſit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Cadet enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Eſt autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem; [p] erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, p 4.prim.
cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR, & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus: [q] erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & baſis FG, maior baſe QR; [r] erit angulus B, q 24.prim. r 25.prim.
maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod eſt abſurdum, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores.



IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, exiſtat; poſſit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. [s] Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ s 12.vndec.
T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli KLM, recta quoq; eadem erit, ex defi. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM, [t] ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis re- t 47.primi.
ctarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale ſit ex conſtructione, eiſdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter ſe quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rurſus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia ſunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipſis contenti VNK, VNL, recti; [u] erit baſis VK, æqualis baſi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ u 4.prim.
VK, VL, VM, æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales ſunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem, cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia ſint lateribus AD, AE, trianguli ADE; & baſis KL, baſi DE; [x] erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non ſecus demonſtrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, eſſe æqualem. Quare x 8.prim.
angulus ſolidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

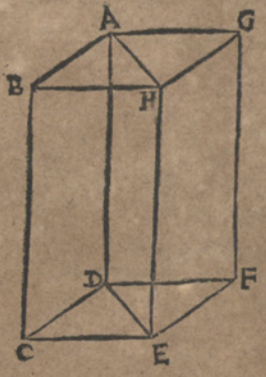
 THEOR.

xxiv.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt ſimilia & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda eſt propoſitio) contentum iuxta defin. 30. huius lib. ſex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduerſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quæuis oppoſita plana eſſe parallelogramma ſimilia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, ſecentur plano AC;
a 16. vnde. [a] Erunt communes ſectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, ſecentur plano AC; erunt communes ſectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum eſt figura quadrilatera ABCD. Nõ aliter oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico iam oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ ſint rectis DC, CE, & non in eodem plano, ſed in oppoſitis;
b 10. vnde. [b] erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF,
c 34. primi. [c] Quoniam vero AB, ipſi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipſi CE, in parallelogrammo BE, æqualis eſt; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c, eadem de cauſa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, çirca angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipſa ſimilia.
d 34. prim. Ductis iam diametris AH, DE, [d] cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia ſint lateribus DC, CE, trianguli DCE;
e 10. vnd. [e] & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt oſtenſum eſt, [f] erunt triangula
f 4. prim. ABH, DCE, æqualia inter ſe. [g] Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia ſint parallelogrammorum BG, CF,
g 34. prim. inter ſe ęqualia. Similiter demonſtrabimus ſimilia & æqualia eſſe parallelogramma oppoſita AC, GE; & AF, BE. Si ſolidum ergo parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia, & æqualia, &c. Quod erat demonſtrandum.

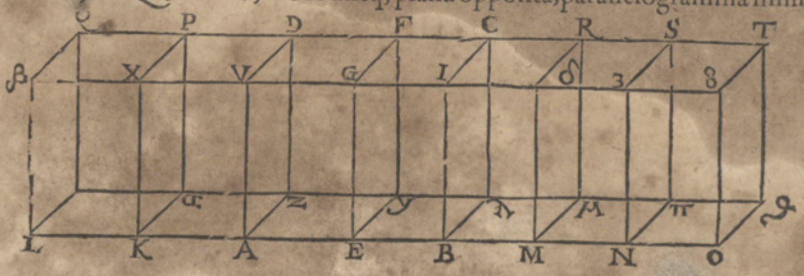


xxv.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppoſitis planis AD, BC. Dico vt eſt baſis AG, ad baſin BG, ita eſſe ſolidum AEFD, ad ſolidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productũ in vtramq; partem quantumlibet, ſumanturq; in AB, protracta quotcunq; rectæ AK, KL, ipſi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipſi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur ſolidum AEFD, contine-
a 24. vnd. tur planis parallelis ex hypotheſi; ipſum parallelepipedum erit, ex definitione, [a] habebitque plana oppoſita, parallelogramma ſimilia, & æqualia. Eodem modo erũt parallelepipeda AKPD, KLQP, EBCF, BMRC, MNSR,
b 36. primi NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana oppoſita, parallelogramma ſimilia, & æqualia. [b] Quoniam vero parallelogramma AG, KV, LX, cum ſint ſuper æquales baſes AE, AK,
c 29. prim. KL, æqualia ſunt; & ſimilia quoq; [c] cũ anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia laterib. circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione æqualia & ſimilia ſunt parallelogramma AY, KZ, Lα. Cum igitur æqualia quoque ſint, & ſimilia parallelogrãma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY,
d 24. vnde. AD, ſolidi AE, FD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD, & tribus planis LX, L, LQ, ſolidi KLQP: [d] Sunt autem tria in vnoquoque ſolido æqualia, & ſimilia trib. reliquis oppoſitis in eodem, nempe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VF; & AD, ipſi EF, &c. Igitur per defin. 10. huius lib. æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG, (multiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod baſibus LG, OG, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT: Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidum quoque ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG; prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinẽ, ita ſolidum AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidũ BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonſtrabitur eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis DY, ad baſin CY, & vt baſis AY, ad baſin BY, & vt baſis DG, ad baſin, CG. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

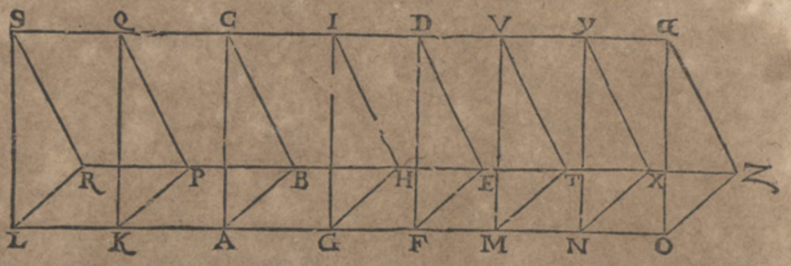


S C H O L I V M.

HÆC propoſitio accommodari etiam poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunq; plano ſecetur aduerſis planis parallelo: erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF, ſeceturque plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur enim priſma ABCDEF, in vtramque partem quantumlibet productum

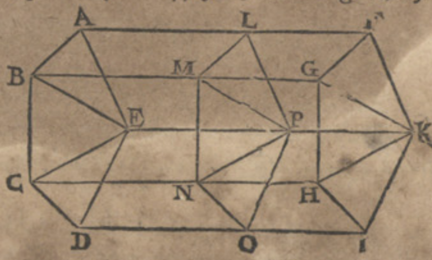
& ex AF,

& ex AF, protracta vtrinque capiantur quotcunq; rectæ AK, KL, ipſi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipſi FG, æquales
Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS, MTV, NXY, OZα; parallela planis ABC, GHI, FED,
per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI, [c] *erunt communes ſectio-* c 16. vnde.
nes AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum
eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH; [f] *erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt* f 16. vnde.
autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum eſt AH. Eodem modo parallelogrammum
oſtendetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus GI, GH, trianguli GHI; [g] *cum AC, ipſi* g 34. prim. h 10. vnd.
GI, & AB, ipſi GH, ſit æquale: [h] *& anguli CAB, IGH, ſunt quoque æquales, eo quod rectæ CA, AB, parallelæ ſunt rectis* i 4. primi.
IG, GH, & non in eodem plano; [i] *Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter ſe, & æquiangula.* [k] *Quare latera circa æ-* k 4. ſexti.
quales angulos proportionalia habebunt: Atque idcirco ſimilia erunt. Igitur ſolidum ABCIHG, contentũ duobus planis oppoſitis ABC, CHI, æqualibus & ſimilibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, priſma eſt. Eadem arte priſmata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniam vero pa-



rallelelogramma AI, KC, LQ, æqualia ſunt, & ſimilia; necnon AH, LB, LP, & CH, QB, SP, erunt omnia plana priſmatis AB-
CIHG, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatum ABCQPK, KPQSRL. Quare per def. 10. huius lib. æqualia erunt priſma-
ta ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt priſmata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Qua-
re quam multiplex eſt baſis LI, baſis AI, tam multiplex erit priſma LRSIHG, priſmatis ABCIHG, & quam multiplex eſt ba-
ſis OI, baſ. FI, tam multiplex erit priſma PZαIHG, priſmatis FEDIHG. Quia vero ſi baſis LI, (multiplex baſis AI, primæ ma-
gnitudinis) æqualis eſt baſi OI, (multiplici baſis FI, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt priſma LRSIHG, (multiplex
priſmatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) priſmati OZαIHG, (multiplici priſmatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) pro-
pterea q; baſibus LI, OI, exiſtentib. æqualibus æqualia quoq; ſunt & ſimilia omnia plana priſmatis LRSIHG, omnib. planis priſ-
matis OZαIHG: Si autem baſis LI, maior eſt baſe OI, prima quoque priſmate maius eſt, & ſi minor, minus, in quacunq; mul-
tiplicatione hoc fiat: Erit, per def. 6. lib. 5. vt baſis AI, priſma magnitudo ad baſin FI, ſecundam magnitudinem, ita priſma
ABCIHG, tertia magnitudo ad priſma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, vt
eſt baſis AH, ad baſin FH, & vt baſis CH, ad baſin DH. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde priſma ABCDEFGHIK, cuius oppoſita plana ſit polygona, nempe pentagona, ſeceturque plano LMNOP.
Dico rurſus vt eſt, baſis CM, ad baſin NG, ita eſſe ſolidum ABCDELMNOP, ad ſolidum LMNOPFGHIK. Si enim plana oppo-
ſita parallela reſoluantur in triangula, erit quoque priſma in totidem priſmata, quorum plana oppoſita ſunt triangula, reſo-
lutum. Quare erit vt baſis BP, ad baſin MK, ita priſma ABEPML, ad priſma LMPKGF, per ea, quæ demonſtrata ſunt. Eodem modo erit vt baſis CP, ad baſin NK, ita priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH, & priſma CDEPNO. ad priſma NOPKHI. [l] *Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita eſt, recta EP, ad rectam PK, hoc eſt, vt CN, ad NH: & vt CN, ad NH, ita eſt CM, ad NG. Igitur priſmata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad priſmata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandẽ habent ꝓportionẽ ei, q̃ habet CM, ad NG, ac proinde eandem inter ſe.* [m] *Vt autem vnum ad vnum, ita ſe habent omnia ad omnia. Igitur erit vt priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH, hoc eſt, vt baſis* l 1. ſexti. m 12. quin.



CM, ad baſin NG, ita priſma ABCDELMNOP: ex tribus compoſitum ad priſma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod
eſt propoſitum. Eadem prorſus erit demonſtratio in quocunq; alio priſmate.

POTEST tamen hoc idem in omni priſmate oſtendi demonſtratione, qua vſi ſumus in priſmate habente plana oppoſita,
triangula ſimilia, Si enim eadem fiat conſtructio, producto priſmate in vtramq; partem, erunt omnia plana parallela ſecan- n 16. vnd.
tia, inter ſe æqualia, & ſimilia, [n] *propterea quod latera eorum ſunt parallela, nempe communes ſectiones parallelorum pla-* o 10. vnd.
norum, [o] *ac proinde angulos æquales comprehendunt, &c. Vnde, vt prius, oſtendetur priſmata ex vna parte inter ſe æqua-*
lia, necnon & priſmata ex altera parte, &c.

COROLLARIVM.

EX his infertur, ſi priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectionem eſſe figuram æqualem & ſimilem planis oppoſitis: Veluti demonſtratum eſt in priori priſmate, triangulam GHI, æquale eſſe & ſimile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus eſt demonſtratio. Idem dices de parallelepipedo.

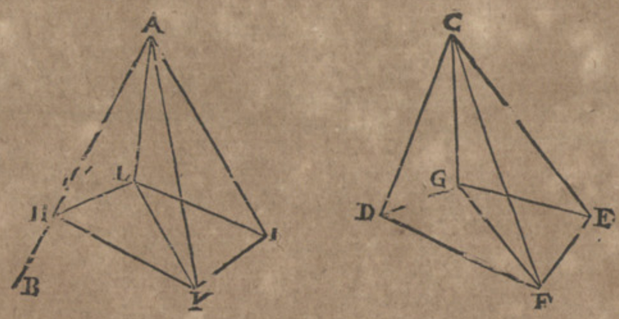
PROBL. 4. PROPOS. 26. xxvi.

AD datam rectam lineã, eiuſq; punctũ angulum ſolidũ conſtituere ſolido angulo dato æqualẽ.

SIT ad punctum A, in data recta AB, conſtituendus angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, contento
tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodẽ plano exiſtentibus. [a] Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, a 11. prim.
ductũ perpendicularis FG, connectanturq; rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abſcindatur AH, æqualis ipſi
CD, [b] fiatq; angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rurſus in plano per AH, AI, du- b 23. vnde.
ctũ conſtituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto exiſtit; & recta AL, rectæ
CG, æqualis. [c] Ex L, vero ad planũ, in quo ſunt tres AH, AL, AI, erigatᷣ perpendicularis LK, quæ ipſi FG, æqua- c 12. vnd.
lis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulũ ſolidũ A, contentũ tribus planis angulis HAI, HAK, KAI,
æqualẽ eſſe dato angulo ſolido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cum latera AH, AL, trianguli AHL, æ-
qualia ſint laterib. CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per cõſtructionẽ; [d] Erũt baſes HL, d 4. primi.
DG, æquales. Rurſ⁹ q a ablatis angulis æqualib. HAL, DCG, ab æqualib. HAI, DCE, reliqui æquales ſunt LAI,
GCE: Cũ igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia ſint lateribus CG, CE, trianguli CGE, ꝑ conſtructio-

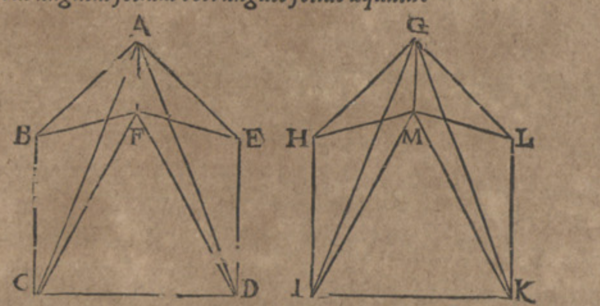
 nem;

e 4. primi. nem; [e] æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia ſunt lateribus GD, GF; & anguli,
f 4. prim. li, HLK, DGF, recti ex defin. 3. huius lib. [f] erunt & baſes HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, ſint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex conſtructione. (cum enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos, ex defi. 3. huius lib. [g] erunt baſes AK, CF,
g 4. pri.
h 8. prim.
æquales.) [h] Erunt quoq; anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF, recti ex def.
i 4. primi. 3. huius lib. [i] Erunt baſes IK, EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex con-
k 4. prim. ſtructione; [k] erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus; Atq; proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaq; rectam lineam, eiuſq; punctum, angulum ſolidum conſtituimus ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.



SCHOLIVM.

QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in vno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramiſque quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilateræ, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, conſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.

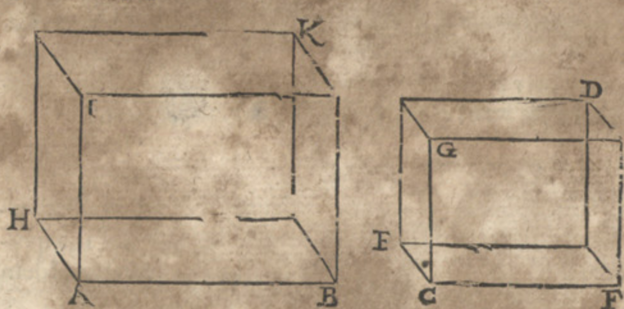


VT ſi angulo ſolido A, contento quinq; angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendendæ ſunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triãgula reſoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et deniq; angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atq; in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.

xxvii.

PROBL. 5. PROPOS. 27.

A DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.



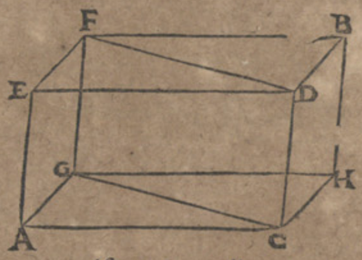
a 26. vnd. SIT à data recta AB, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterque poſitum parallelepipedo CD. [a] Fiat ad rectam AB, eiuſq; punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales ſint tribus angulis planis, ECG, GCE, FCE. Deinde vt
b 12. ſexti. eſt CF, ad CG, [b] ſic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritq; ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH, Poſt hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterq; poſitum. Cum enim anguli BAH, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione, erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterq; poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimilterq; poſita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, ſolidi AK, ſi-
c 24. vnd. milia ſunt, ſimiliterq; poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. [c] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita ſex planis ſolidi CD; Ac proinde ex def. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita ſolida AK, CD. A data ergo recta linea dato ſolido parallelepipedum ſimile, & ſimiliter poſitum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

xxviii.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana oppoſita ſint AH, EB, quorum diagonii, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela eſt, [a] & æqualis ipſi AE, cum ſint parallelogramma CE, GE; [b] erunt & inter ſe parallelæ, & æquales CD, GF, [c] Ac proinde, quæ ipſas coniungunt CG, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, ſecare bifariam parallelepipedum AB. [d] Cum enim plana AH, EB, ſint parallelogramma æqualia, & ſimilia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter ſe: ſunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG, FED, DBF, proportionalia. [e] Igitur ſimilia quoque erunt dicta triangula. [f] Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale ſit & ſimile parallelogrammo CB; & AD, ipſi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, priſmatis ACGFED, æqualia & ſimilia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, priſmatis HGCDBF; proptereaq; priſmata æqualia erunt, ex defi. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, ſectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

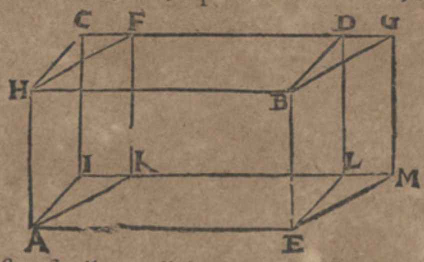


a 34. prim.
b 9. vnde.
c 33. prim.
d 24. vnde.
e 6. ſexti.
f 24. vnd.

THEOR. 24. PROPOS. 29. xxix.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

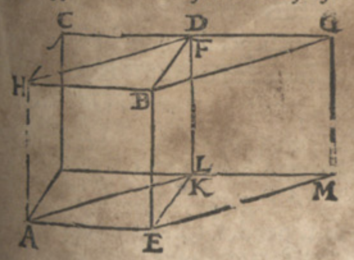
SVPER baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes in iiſdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, eſſe inter ſe æqualia. [a] Cum enim æqualia ſint parallelogramma AL, AM, ſuper eadem baſi AE, & in eiſdem parallelis conſtituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoq; triangula AIK, ELM. [b] Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia ſunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propoſ. lib. 1. oſtendimus; [c] Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoq; inter ſe erunt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & ſimile. [d] Rurſus parallelogrammum AC, æquale eſt & ſimile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: [e] Sed & IF, ipſi LG, cum baſes IK, LM, ſint æquales. ([f] Nã cum rectæ, IL, KM, æquales ſint ipſi AE, erunt quoque inter ſe æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana priſmatis AIKFCH, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

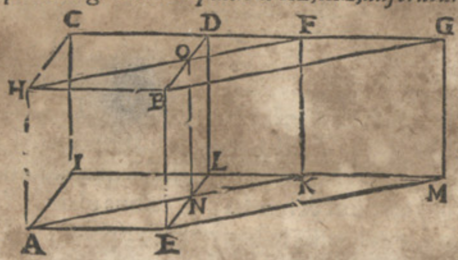


a 35. prim.
b 34. pri.
c 4. ſexti.
d 24. vnd.
e 20. primi.
f 34. primi.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio perſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem fere medijs, dummodo loco triangulorum aſſumantur priſmata, vt ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit; vel vltra L, eodem modo demonſtrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt





reliqua triangula AIK, ELM, æqualia. Vnde vt prius, æqualia erũt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.

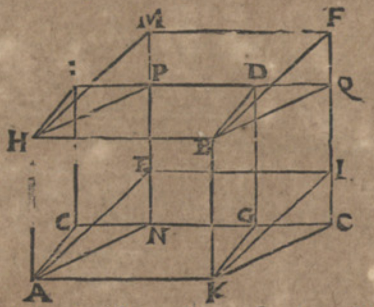
IN tertio vero caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dematur triangulũ commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus ſi addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB, à quibus ſi auferatur priſma commune KLNODF, (Nam communis ſectio planorum AF, DE, eſt recta NO.) remanebit ſolidum comprehenſum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale ſolido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur Addatur vtriq; priſma commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter ſe æqualia.

THEOR. 25. PROPOS. 30. xxx.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

SVPER baſin AB, in eadẽ altitudine, hoc eſt, inter eadẽ plana parallela, ſint cõſtituta parallele. AIDK, AMFK, quorũ inſiſtẽtes lineę ex quatuor angulis baſis exeũtes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, nõ ſint in eiſdẽ rectis, hoc eſt, neq; CI, GD, ꝓtractę trãſeãt ꝑ pũcta M, E, F, L, neq; CG, ID, ꝓductę; &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, eſſe æqualia. Cũ enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eodẽ plano, ob eandẽ altitudinẽ parallelepipedorũ; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarũ CG, ſeçet EM, LF, protractæ in punctis N, O; Et ID, eaſdem

a 34. pri. eaſdem in punctis P, Q; adiunganturque rectæ AN, KO, HP, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, ſunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipſi HB, eſt æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem
b 33. prim. & parallelæ, propter parallelogrammum HDB. [b] Igitur & HP, BQ, parallelæ ſunt & æquales, ideoque parallelogrammum eſt HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Eſt autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum
c 29. prim. eſt APQR. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale eſt parallelepipedo APQK, cum vtriuſq; eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineę ſunt in rectis eiſdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, quum vtriuſq; eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter ſe ſunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſim, &c. Quod erat demonſtrandum.



S C H O L I V M.

CONVERTETVR hæc propoſitio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſin, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine.

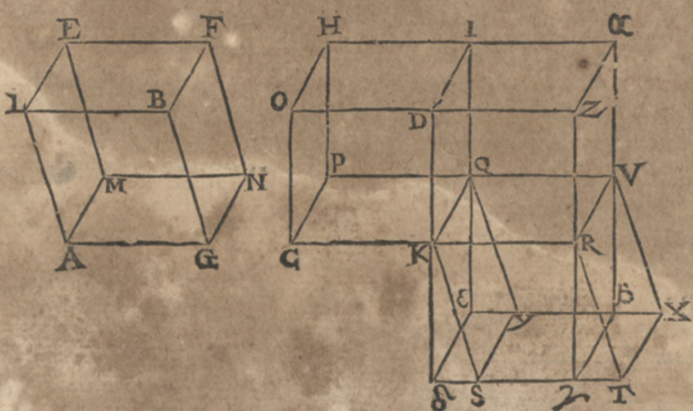
d 29. vel 30. vndec. *NAM ſi vnum dicatur altius; ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abſciſſum, & reliquum.* [d] *Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.*

xxxi.
xxxii.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

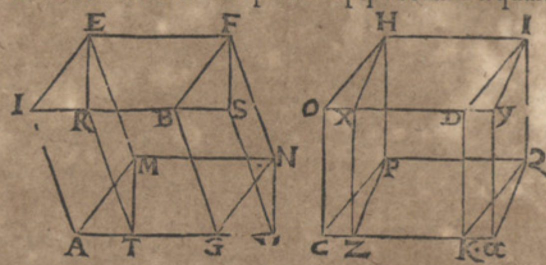
SVPER æquales baſes AB, CD, in eadem altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtentes CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter ſe æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, ſitque KR, æqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia; Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defi. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. [a] Quare cum tria plana, KT,
a 24. vnde. QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia; à tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, [b]
b 24. vnde. tam autem illa, quam hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis: Erunt, per def. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter ſe æqualia.



CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ, & IQ, XY, in ε, compleaturq; parallelepipedum QδγV. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, QδγV, eandem habent baſin KV, ſuntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & inſiſtentes ipſorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ, QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eiſdem
c 29. vnde. rectis δTεX, [c] ipſa inter ſe æqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum QδγV.

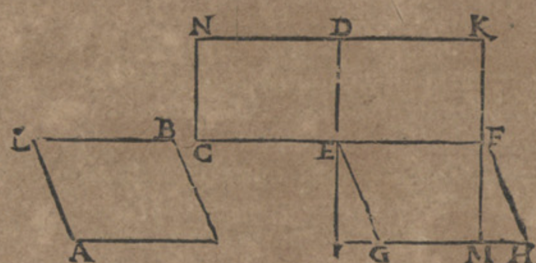
d 35. prim. [d] QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia ſunt inter ſe; & KT, æquale eſt ipſi LG, erit & Kγ,
e 7. quinti. ipſi LG, hoc eſt, ipſi CD, æquale; cum baſes LG, CD, ponantur æquales. [e] Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ ad
f 25. vnde. DR: [f] Vt autem CD, baſis ad baſin DR, ita eſt ſolidum CHIK, ad ſolidum KIαR; cum parallelepipedũ CHαR, ſecetur plano IK, planis oppoſitis CH, αR, parallelo. Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita eſt ſolidum QδγV, ad ſolidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, ſecetur plano KV, oppoſitis planis Dα, δβ, parallelo. [g] Igitur æ-
g 9. quinti. qualia erunt parallelepipeda CHIK, QδγV, cum eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKRα, nimirum eandem, quam habent baſes æquales CD, Kγ, ad eandem baſin DR. Quare cum parallelepipedum QδγV, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo AEFG; æqualia quoq; erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitum.

SINT iam neque inſiſtententes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB, neque CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares: [h] Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo baſis AB, h 11. vnde. perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis, CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter ſe æquales, cum ſint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum ſint eiuſdem altitudinis, habeantque inſiſtentes lineas perpendiculares, erunt inter ſe æqualia, vt oſtenſum eſt. [i] Sed parallelepipedum ETVF, æquale eſt parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat baſin i 29. vel 30. vndec. EN, eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo baſin HQ, eandemq; altitudinem poſſideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque oſtendetur, ſi vnius parallelepipedi inſiſtentes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, &c. Quod demonſtrandum erat.



SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortaſſe demonſtrari, duo parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine, quorũ inſiſtentes lineæ ad baſes ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia; Nimirum ex ſolis baſibus, ſine cõſtructione parallelepipedorum, quamuis eadem ſit demonſtratio, quæ noſtra. Sint enim duæ baſes æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda ſuper ipſas conſtituta, in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes AB, CD, ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L; & recta EF, rectæ LB, & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturq; parallelogrammum EH, quod æquale erit, & ſimile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur ſuper baſes EH, IF, EK, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper AC, CD, conſtructis; ſintq; inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper EH, æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper AB, ex defi. 10. huius lib. cum plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem:



[k] Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper EH, IF, cum habeant baſin eandem, cuius infimum latus EF, erectam ſuper planum IK; Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cuius infimum latus IH, atq; inſiſtentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eiſdem rectis lineis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper IF, parallelepipedo ſuper AB. [l] Quoniam vero parallelogramma EH, IF, æqualia ſunt; & EH, æquale eſt ipſi CD: æqualia erunt IF, CD. [m] Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK; [n] Eſt autem vt IF, ad EK, ita ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper EK, quod ſolidum ſuper IK, ſecetur plano ſuper EF, erecto parallelo planis ſuper DK, IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad EK, ita ſolidũ ſuper CD, ad ſolidum ſuper FK, cum ſolidum ſuper CK, ſecetur plano ſuper DE, erecto parallelo planis ſuper CN, FK, erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper EK, ita ſolidum ſuper CD, ad ſolidum ſuper EK, [o] Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper IF, & CD. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper IF, æquale parallelepipedo ſuper AB. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper AB, CD. Quod eſt propoſitum.

k 29. vnd. l 35. prim. m 7. quint. n 25. vnde. o 9. quinti.

CONVERTETVR quoq; hæc propoſ. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin.

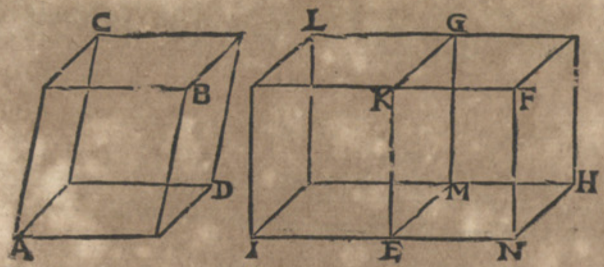
SI enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſciudatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine [p] fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum. p 31. vnd.

QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

THEOR. 27. PROPOS. 32. xxxiii.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiuſdem altitudinis ſuper baſes AB, EF. Dico eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis ad baſin. [a] ſuper rectam enim EK, conſtruatur parallelogrammum IK, æquale parallelogram- a 45. prim.



lelogrammo AB, in angulo IEK, qui ſit æqualis angulo ENF. Conſtituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propoſ. libr. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum vnum parallelepipedum IFLH; [a] erunt parallelepipeda ABCD, IKLM,
a 31. vnde. æqualia, cum habeant æquales baſes, per conſtructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex hypo-
b 7. quinti. theſi. [b] Quare erit vt ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ita ſolidum ABCD, ad idem ſolidum EFGH: [c] Eſt
c 25. vnde. autem ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, vt baſis IK, hoc eſt, illi æqualis baſis AB, ad baſin EF. Igitur & ſolidum ABCD, erit ad ſolidum EFGH, vt baſis AB, ad baſin EF. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

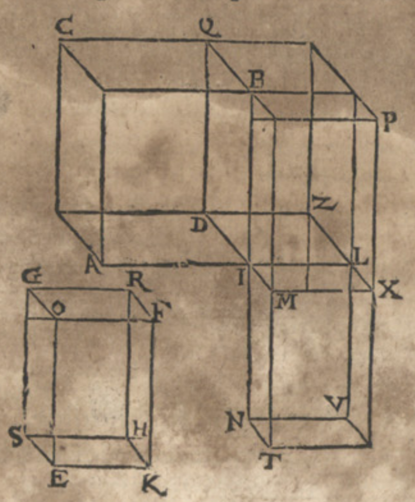
CONVERSO modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non
d 32. vndec. *eadem credatur altitudo; ex maiori abſcindatur minori æqualis, & ducatur planum baſi parallelum, [d] erit q; vt baſis ad*
e 9. quinti. *baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abſciſſum: ſed ſic quoque erat ad totum. [e] Abſciſſum ergo æquale eſt toti. Quod eſt abſurdum.*

xxxvi.

THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT ſimilia parallelepipeda ABCD, EFGH, ſuper baſes ſimiles AB, EF, in quibus latera homologa ſint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum EFGH, eſſe triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & ſit IL, æqualis ipſi EK, vel GR; Item DI, ad M, & ſit IM, æqualis ipſi HK, vel GO; Item BI, ad N, & ſit IN, æqualis ipſi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia ſunt late-
a 15. prim. ribus GR, GO; [a] & anguli contenti æquales, cum angulus LIM; ſit æqualis angulo AID, qui ob ſimilitudinẽ parallelepipedorum æqualis eſt angulo EKH, ſeu RGO; erunt parallelogramma IX, GF, ſimilia, & æqualia. Eadẽ ratione ſimilia erunt, & æqualia LN, RS; item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, ſi-
b 24. vnde. milia ſunt, & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: [b] Sunt autem tria cuiuſque ſimilia & æqualia tribus reliquis oppoſitis. Igitur æqualia ſunt & ſimilia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defi. 10. huius lib. Rurſus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem parallelepipedorum ABCD,
c 1. ſexti. EFGH, eſt vt AI, ad EK, hoc eſt, ad IL, ita DI, ad HK, hoc eſt, ad IM; & BI, ad FK, hoc eſt, ad IN. [c] Vt autem AI, ad IL, ita eſt parallelogrammum AD, ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & vt BI, ad IN, ita parallelogr. BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad LM;
e 32. vnde. & BL, ad LN. [d] Sed vt AD, baſis ad DL, baſin, ita eſt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & vt baſis DL, ad baſin LM, ita parallelepipedum DLYQ ad parallelepipedum LMBP; & vt baſis BL, ad baſin LN, ita parallelepipedum LMBP ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, vt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ,



ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates ſunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoque proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc eſt, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB,
e 32. vnd. ad ſecundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. [e] Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita eſt baſis AD, ad baſin DL; [f] Et
f 1. ſexti. vt AD, ad DL, ita eſt recta AI, ad IL, hoc eſt, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, eſt triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter ſimilia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continuæ proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedum ſuper primam deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundum. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonſtratum eſt, quam prima linea ad quartam, ex defin. 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad ſecundam, nimirum laterum homologorum.

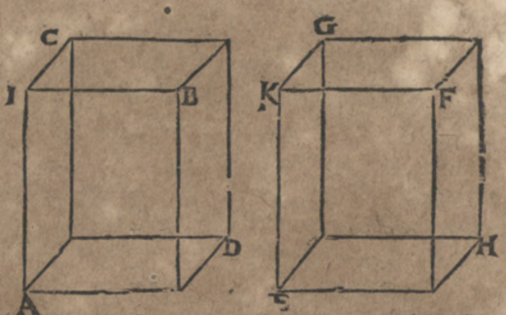
THE-

THEOR. 29. PROPOS. 34.

xxxiv.
xxxv.

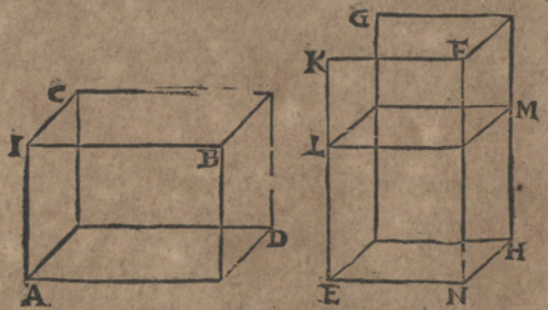
ÆQVALIVM ſolidorum parallelepipedorum baſes,& altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes,& altitudines reciprocantur; illa ſunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB,EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB,EHGF,eſſe reciprocas,hoc eſt,eſſe AD,vt ad EH,ita altitudinẽ ſolidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AI,EK,perpendiculares ad baſes AD; EH,ita vt AI,EK, ſint per defin. 4.lib. 6.altitudines parallelepipedorum.Si igitur altitudines AI,EK,ſunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD,EH,æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius libr. oſtendimus. Quare erit,vt baſis AD,ad baſin EH,ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



QVOD ſi altitudines AI, EK,inæquales fuerint; ſit EK,maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI,æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH,per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB,EHGF; [a] erit vt ADCB,ad ſolidum EHML,ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI,EL,vt ſolidum EHGF,ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione baſis KM, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem,ſi nimirum baſes ponantur KN,LN;erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD,ad baſin EH,ita baſis KN,ad baſin LN: [c] Sed vt KN,ad LN,ita eſt recta EK,ad rectam EL,hoc eſt,ad AI,ipſi EL,æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK,ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes,& altitudines.

a 7. quint.
b 32. vndec.
c 1. ſexti.



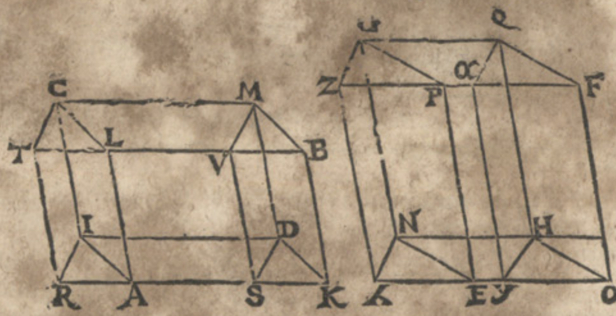
SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH,æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB,EHGF,cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem,inter ſe æqualia erunt.

d 31. vnde.

QVOD ſi altitudo EK,maior fuerit, abſcindatur EL,ipſi AI,æqualis,& per L,ducatur planũ LM,parallelũ baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt,vt baſis AD,ad baſin EH,ita altitudo EK,ad altitudinẽ AI,hoc eſt,ad EL, ipſi AI,æqualem; [e] Vt autem baſis AD,ad baſin EH,ita eſt ſolidũ ADCB,ad ſolidũ EHML,cum altitudines AI, EL,æquales ponantur, [f] Et vt EK,ad EL,ita eſt,KN,ad LN; [g] Vt autem baſis KN,ad baſin LN,ita eſt ſolidum EHGF,ad ſolidum EHML, cum ſolida EHGF,EHML,eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN,GH; Erit vt ſolidum ADCB,ad ſolidum EHML,ita ſolidum EHGF,ad idem ſolidum EHML; [h] ideoque æqualia erunt ſolida ADCB,EHGF.

e 32. vnde.
f 1. ſexti.
g 32. vnde.
h 9. quin.

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH,æqualia,quorum inſiſtentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN,OH,FQ,PG,non ſint perpendiculares ad baſes AB,EF. Demittantur autem à punctis I,D,M,C,ad planũ baſis AB,perpendiculares IR, DS,MV,CT; itẽ punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF; perpendiculares NX,HY,Qα,GZ: connectanturque rectæ RS,TV,AT,SV; XY,Zα,XZ,Yα: Eruntque perpendiculares RI,XN, parallelepipedorũ altitudines,ex defin. 4.lib.6. Dico rurſus,vt baſis AB,ad baſin EF,ita eſſe altitudinem XN, ad altitudinem RI. [i] Cum enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH,ex hypotheſi, [k] ſit autem ABCD,æquale ſolido RVCD, quod habeant eandem baſin CD, eandemque altitudinẽ RI; & EFGH,eadem ratione,æquale ſolido XαGH: Erunt & parallelepipeda RVCD,XαGH,æqualia. Quare cum habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD,GH;erit,vt iam demonſtratum eſt,vt baſis CD,ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB,ad baſin EF,ita altitudo XN,ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



i 29. vel 30. vndec.
k 24. vnd.

SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ.Dico parallelepipeda eſſe æqualia.Conſtructa enim figura,vt prius; Cum ſit vt baſis AB,ad baſin EF,ita altitudo XN,ad altitudinem RI; [l] Sit autem AB,ipſi CD,& EF,ipſi GH,æqualis; erit quoque vt baſis CD,ſolidi RVCD ad baſin GH,ſolidi XαGH,ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cum XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ perpendiculares ad baſes CD, GH; erunt,vt iam oſtenſum eſt,æqualia parallelepipeda RVCD,XαGH. [m] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH,æqualia. Igitur quoq; æqualia erunt parallelepipeda ABCD,EFGH: Idemque oſtendetur, ſi inſiſtentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quam ob rem,Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur,&c. Quod erat oſtendendum.

l 24. vnd.
m 29. vel 30. vnd.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirũ 29.30.31.32.33.& 34. conueniunt quoq; priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædictæ hypotheſes ſeruentur. Nam ſi duobus priſmatis eiuſmodi
m 29.30. *eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis, apponantur duo alia priſmata illis æqualia &*
vel 31. vn- *ſimilia, conficientur duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exiſtentia. [m] Quare æqua-*
dec. *lia erunt eiuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia.*

n 32. vnd. *RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis eiuſdem altitudinis, & ſuper diuerſas baſes conſtitutis adiiciantur duo alia priſ-*
o 15. quin. *mata illis æqualia & ſimilia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis. [n] Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt baſis ad baſin; [o] Atq; adeo priſma ad prima, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet vnius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.*

PRÆTEREA, ſi duobus priſmatis præfatis ſimilibus addantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, conſtituentur duo
p 33. vnde. *parallelepipeda ſimilia, [p] quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & priſ-*
q 15. quint. *mata, eorum nimirum dimidia, [q] cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundum laterum homologorum, quæ quoq; ſunt latera homologa priſmatum.*

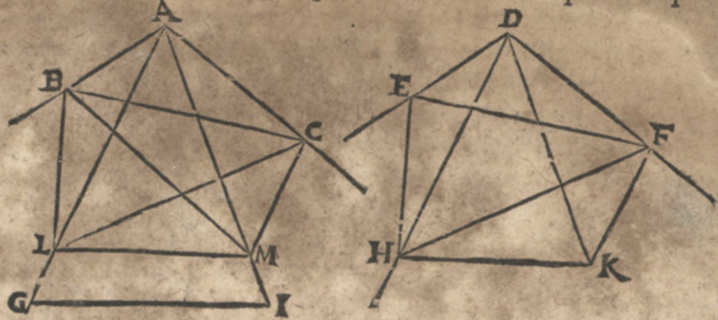
DENIQVE ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adiungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur
r 34. vnd. *duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum priſmatis. [r] Quare cum baſes, & altitudines parallelepipedorum*
s 15. quinti. *ſint reciprocæ; & baſes priſmatum eædem ſint, vel certe triangula earum dimidia [s] eandem habentia proportionem; Erunt quoq; baſes priſmatum & eorum altitudines reciprocæ.*

xxxvii.

THEOR. 30. PROPOS. 35.

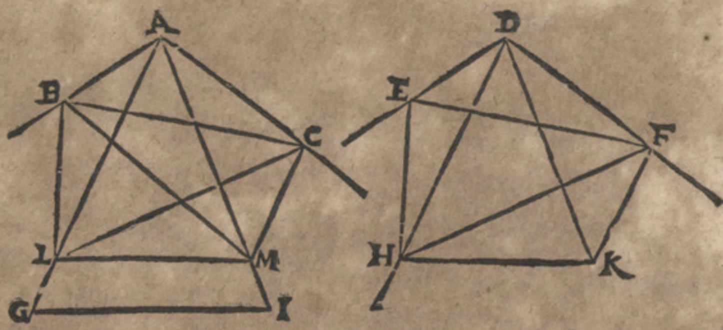
SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumq; vtrique; In ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendunt.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D. inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lineæ, AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, ſit æqualis: à ſumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, exiſtunt, perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, eſſe æquales inter ſe. Nam ſi AG, DH, ſunt inæquales auferatur à maiori AG, ipſi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipſi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ ſunt GI, LM, & eſt GI, ad pla-
a 8. vnde. num anguli BAC, recta; [a] erit quoque LM, ad idem planum recta: ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, penpendiculares MB, MC, KE, KE, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta eſt ad planum anguli BAC, ipſa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per
b 47. pri. defin. 3. huius lib. [b] Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; [c] Eſt autem qua-
c 47. prim.



dratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus ſit, ex conſtructione. Quadratum ergo re-
d 47. prim. ctæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CM, ML: [d] At quadratis rectarum CM, ML, æquale eſt quadratum rectæ CL, cum
e 48. prim. angulus CML, rectus ſit per defin. 3. huius
f 47. prim. lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CL; [e] Ac proinde angulus ACL, rectus erit. [f] Rurſus quia quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis
g 47. prim. rectarum AM, ML: [g] Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarũ AB, BM, cum angulus ABM,
h 47. prim. per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BM, ML: [h] At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, ſit rectus ex defin. 3. huius
i 48. prim. lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; [i] propterea q; angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales
k 26. prim. ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntq; latera AL, DH, æqualia; [k] Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC,
l 4. primi. EDF, æquales, ex hypotheſi; [l] erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales; cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, ſint
m 26. prim. oſtenſa æqualia; [m] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, ſunt recti; [n] erunt & baſes
n 4. prim. AM, DK, inter ſe æquales. Cum autẽ æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erũt etiã earũ quadrata: æqualia [o] Quia
o 47. prim. vero quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML, & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti ſint, ex def. 3. huius libr. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadra-

quadratis rectarum EK,KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM,EK, quæ æqualia ſunt, quod rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL,AM, trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH,DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, æqualis; p erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat. p 8. primi.



COROLLARIVM.

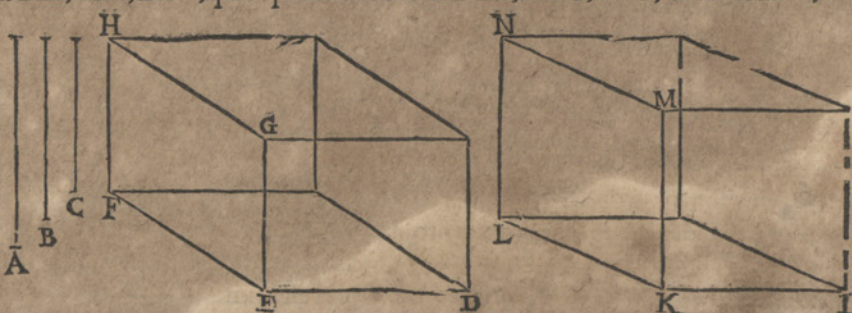
ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quę cum lineis primo poſitis angulos contineant ęquales, vtrumq; vtriq;. Erunt à punctis extremis linearum ſublimium ad planam angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales DAB, HDE. Item LAC, HDF: demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

THEOR. 31. PROPOS. 36. xxxviii.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A,B,C. Conſtituaturque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunq; DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipſi A; & EF, ipſi B; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Cõpletis autẽ parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A,B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. a Deinde ad rectam IK, eiuſque punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG, ita vt rectæ IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Cõpletis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedũ IN, quod contineri dicitur ſub linea B, ſe ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cum enim ſit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales B: b Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales, quorum verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo poſitis, ex conſtructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſint DG, IM, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. præcedentis. c Quare parallelepipeda DH, IN, Cum habeant baſes DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 26. vnde.



b 14. ſexti

c 31. vnd.

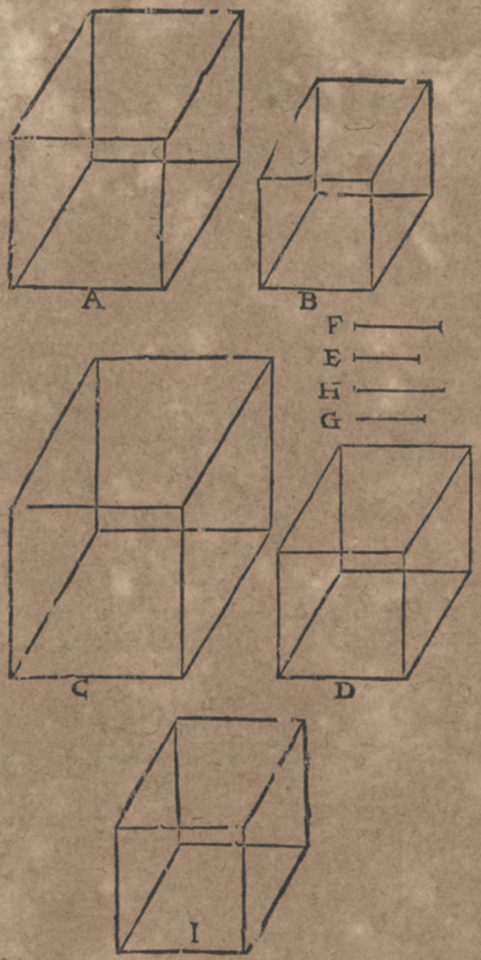
SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, ſi parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo à media linea deſcripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedũ DH, deſcriptum ex rectis A,B,C, vt dictum eſt, æquale ſibi æquiangulo parallelepido IN, deſcripto à media B. Dico tres A, B, C, eſſe continue proportionales. Nam veluti prius, oſtendentur eorum altitudines ex F, L, demiſſæ eſſe æquales. Quare cum & ipſa ponantur æqualia; erunt eorum baſes DG, IM, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. demonſtrauimus. Quæ baſes cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex conſtructione: d *habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc eſt, vt DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cum DE, ipſi A; IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.* d 14. ſexti.

THEOR. 32. PROPOS. 37. xxxix.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A,B,C; vt quidem A,ad B, ita C,ad D; conſtituanturque ſuper A,& B, duo parallelepipeda A,& B,ſimilia, ſimiliterque deſcripta; item ſuper C,& D, alia duo C,& D,ſimilia ſimiliterque poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia,ſiue non. Dico eſſe quoque ſolida A,B,C,D, proportionalia; Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B,ita ſolidum C,ad ſolidum D. Inueniantur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continue proportionales E,F. Item duabus C,D, aliæ G,H. Quoniam igitur ſunt quatuor lineæ A,B,E,F,& quatuor lineæ aliæ C,D, G, H, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur; erit ex æquo, vt A,ad F,ita C,ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B, & vt C, ad H, ita ſolidum C,ad ſolidum D,ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A,ad ſolidum B,ita ſolidum C,ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.



a 12. ſexti. b 27. vnde. SINT iam è contrario ſolida A,B,C,D, proportionalia. Dico rectas A,B,C,D, eſſe quoque proportionales: [a] Tribus enim rectis A,B,C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] ſuper quam deſcribatur parallelepipedum ipſi D, vel C, ſimile, ſimiliterque poſitum. Quoniam igitur eſt, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoq; , vt iam eſt oſtenſum, vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum I. Vt autem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ponitur quoque ſolidum C, ad ſolidum D: Igitur erit vt ſolidum C, ad ſolidum I, ita idem ſolidum C, ad ſolidum D. [c] Atque idcirco æqualia erunt ſolida I, & D. Quæ cum ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & ſimilia habent latera homologa æqualia, per lemma propoſ. 22. libr. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales ſunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Poſita eſt autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 9. quin.

BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico eſſe quoque vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. [d] Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones ſolidi A, ad ſolidum B, & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ ſunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundo eſſe vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D, Dico eſſe quoque, vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [e] Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum ſolidi A, ad ſolidum B; & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.

d 33. vnd. e 33. vnde.

S C H O L I V M.

EODEM modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda ſimilia ſimiliterq; deſcripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiuſq; ſolidum ſumatur bis habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor ſolida proportionalia, vt demonſtratum eſt. Cum igitur ſolidum ſecundæ lineæ æquale ſit ſolido tertiæ lineæ; & linea ſecunda æqualis tertiæ lineæ; perſpicuum eſt, quod proponitur.

TOTA vero hæc propoſitio conuenit etiam priſmatis, quorum duo plana aduerſa æqualia ſunt triangula, vt Campanus ait. Nam additis priſmatis, quæ ſingula ſingulis ſint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic eſt demonſtratum, proportionalia erunt. [f] Cum igitur priſmata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipſis proportionem; perſpicuum eſt, quod proponitur.

f 15. quint.

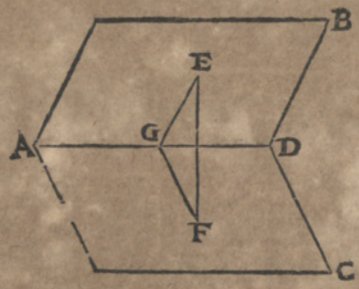
xl.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

PLANVM enim AB, rectum ſit ad planum AC, ſitque eorum communis ſectio recta AD; & ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem ſectionem AD. a 12. prim. Nam ſi fieri poteſt, cadat extra ad punctum F, [a] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; con-

FG; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis eſt ad communem ſectionem AD, erit quoq; perpendicularis ad planum AB, ex defi. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3. def. huius lib. Eſt autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. def. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti ſunt, quod eſt abſurdum, [b] cum duobus rectis ſint minores. Perpendicularis ergo ex E, demiſſa ad planum AC, non extra communem ſectionem AD, cadet, ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum. b 17. primi.



SCHOLIVM.

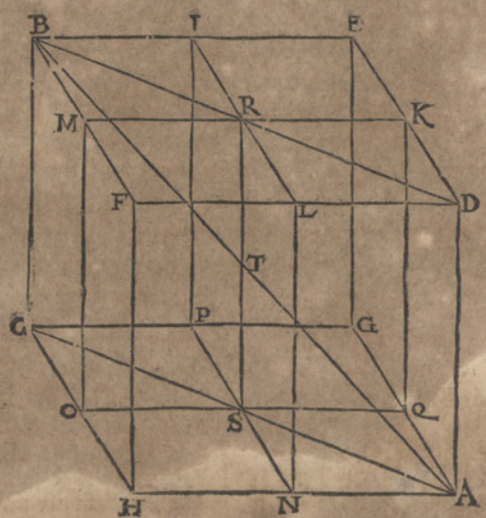
HÆC eſt demonſtratio Theonis. Nos tamen idem demonſtrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demiſſa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem ſectionem AD, ſed in punctum F, extra ſectionem, [c] *ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. huius lib. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ ſunt ad ipſum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.* c 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

xxxx.

SI ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, planorum latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariam ſe mutuo ſecabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana oppoſita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta ſint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q. per quæ extenſæ ſint duo plana IN, KO, quorum ſectio communis ſit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, ſe mutuo ſecare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; conſiderentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur laaera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia ſunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH, [a] & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum ſint parallelogramma AS, HS,) [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & baſes AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus ſunt rectis æquales: [e] Ac propterea AS, CS, vnã rectam lineam conſtituent. Eodẽ modo oſtendentur eſſe æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rurſus quia vtraque AD, BC, parallela eſt, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, [f] ipſæ quoque inter ſe parallelæ erunt, & æquales. [g] Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ ſunt & æquales; Ac proinde ipſarum dimidiæ AS, BR, æquales ſunt. Quia vero AC, BD, parallelæ ſunt; [h] erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipſis plano, ideoque ſe mutuo ſecabunt, in puncto videlicet T. [i] Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales ſint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: [k] Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, ſe mutuo ſecant bifariã in T. Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, &c. Quod erat oſtendendũ.



a 34. prim.
b 29. prim.
c 4. prim.
d 13. prim.
e 14. prim.
f 9. vnde.
g 33. primi.
h 7. vnd.
i 29. & 15. primi.
k 26. prim.

COROLLARIVM.

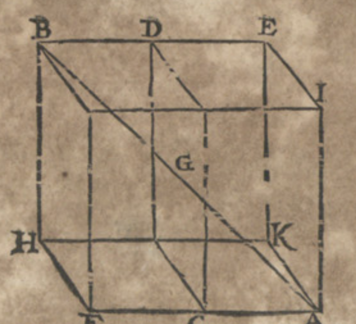
HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuo bifariam ſecare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonſtratum eſt, rectam RS.

SCHOLIVM.

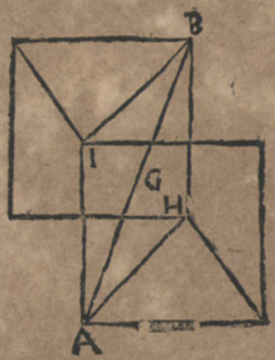
HVIC theoremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad propoſ. 34. primi lib. demonſtrauimus, videlicet.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.

SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum hoc eſt, per punctum medium diametri AB, quod ſit G. Dico parallelepipedum bifariam ſecari. Sit enim primo planum CD, oppoſitis planis AE, BF, parallelum. [l] *Et quia plana parallela BF, DC, EA, ſecant rectas quaſcunque proportionaliter; ſecatur autem BA, bifariam in G; ſecabuntur quoq; latera aduerſorum planorum AH, BI, atque adeo & baſes AH, BI, bifariam.* [m] *Cum igitur ſit vt baſis KC, ad baſim CH, ita ſolidum AD, ad ſolidum CB, erit parallelepipedum AB, ſectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*

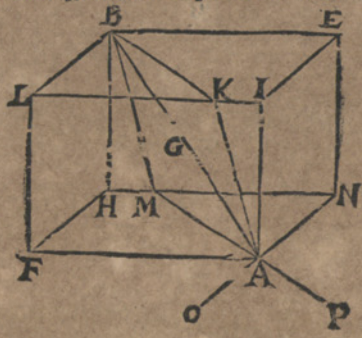


l 17. vnde.
m 25. vnd.



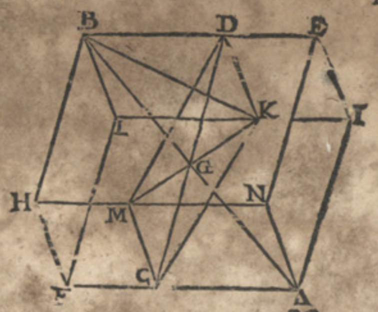
TRANSEAT ſecundo planum ſecans AI,BH, per diametros BI,A-
n 7. vnde. H,planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelepipedum per
o 28. vnde. centrum G, immo per totum diametrum AB; [n] cum AB, in plano ſit
parallelarum AH,BI. [o] Demonſtratum autem eſt antea, parallelepi-
pedum ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto biſa-
riam.

TERTIO planum ſecans AKBM,neq; ſit aduerſis planis paralle-
lum,neq; per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantum per
angulos A,& B,planorum AH,BI. Quoniam igitur plana parallela AH,
p 16. vnde. BI, ſecantur plano AKBM; [p] erunt communes ſectiones AM, BK, pa-
rallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum ſint communes ſectiones
q 34. prim. planorum parallelorum AL,BN,factæ à plano AKBM. Quare parallelo-
grammum eſt AKBM; [q] ideoq; tam rectæ AK, BM, quam rectæ AM,
r 10. vnde. BK,inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera BK,BL,trianguli BKL,æqualia ſunt lateribus AM,AN,trianguli AMN; & an-
s 15. primi. gulus KBL,angulo MAN,æqualis. (Productis enim NA,MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL,BK,parallelæ; [r] ac proinde
t 4. prim. æquales anguli erunt OAP,LBK. [s] Cum igitur OAP,æqualis ſit angu-
lo MAN; æquales quoq; erunt anguli KBL, MAN.) [t] Erunt baſes KL,
MN,inter ſe, & anguli BKL,BLK,angulis AMN,ANM,æquales;& tri-
u 4. ſext. angulũ triangulo æquale.Quare & ſimilia erunt triangula BKL,AMN,
[u] cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam
vero recta KL,rectæ MN; & angulus BKL,angulo AMN;& angulus K-
BL,angulo MAN,eſt æqualis,vt oſtendimus; erit & reliqua IK,reliquæ
HM; & reliquus angulus BKI,reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo
MAF,æqualis. (Eſt enim tota LI,toti NH,æqualis, & tam anguli BKL,
BKI,quam anguli AMN,AMH,duobus rectis æquales; & totus angulus
LBE,toti angulo NAF,æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum



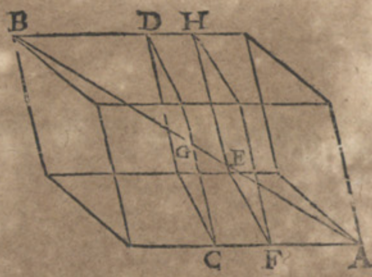
LE, FN.) Sunt autem & latera BE,EI,lateribus AF,FH,æqualia; & anguli BEI,EIK,angulis AFH,FHM,ob parallelogram-
ma LE,FN. Igitur quadrilaterum BKIE,& æquilaterum, & æquiangulum eſt quadrilatero AMHF; Ac propterea æquale &
ſimile, cum ſingula ſingulis conueniant, latera nimirum lateribus,& anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & ſimilia
triangula BHM,AIK; & quadrilatera AKLF,BMNE; cum inter ſe ſint & æquilatera & æquiangula. Quopropter ſolidum
contentum planis AKLF,FHMA,AKBM,MHB,BKL,LBHF,æquale erit ſolido contento planis BMNE,EIKB,BMAK,KIA,A-
MN,NAIE,per 10. defin. huius lib. cum his planis illa ſint ſimilia & æqualia,vt demonſtratum eſt.Parallelepipedum ergo AB,
ſectum eſt plano AKBM,per centrum G,biſariam.

POSTREMO planum ſecans CD,neq; aduerſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum oppoſitorum,neq;
per vllos angulos eorum ductum,ſed vtcunq; ſecet plana oppoſita AH,BI. Oſtendemus autem,vt prius, planum ſecans CD,eſſe
parallelogrammum, & tam rectas CK,DM,quam rectas CM,DK,eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo CD,diametri
x 9. vnde. CD,KM; connectanturq; rectæ AM,BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipſi LI, ob parallelogramma AL, LE, [x] inter ſe
y 7. vnd. ſunt parallelæ; [y] Erunt AB,CD,in eodẽ cum illis plano; ac propterea ſe mutuo ſecabunt in centro G. In ſolo enim centro G,re-
z 29. prim. cta AB,per hypotheſim,ſecat planum CD,in quo exiſtit recta CD. [z] Et quoniam angulus BDC,angulo alterno ACD,æqua-
a 15. prim. lis eſt: [a] Eſt autem & angulus BGD,angulo AGC,ad verticem æqualis; & latus BG, lateri AG, æquale, quod AB, biſari-
b 26. prim. am ſecetur in G,centro;[b] Erit & latus DG,lateri CG,æquale.Cum ergo per ea,quæ ad propoſ.34.lib.1.oſtendimus,diametri C-
D, KM, ſe mutuo biſariam ſecent, tranſibit KM, per
punctum G, ibiq; diametrum AB, ſecabit. Quia ergo
latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia ſunt lateri-
c 15. prim. bus AG,GC,trianguli AGC; [c] & angulus BGD,æ-
d 4. prim. qualis angulo AGC; [d] erit & baſis BD, æqualis baſi
AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM.
Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli B-
DK, æqualia ſint tribus lateribus AC,CM,MA,trian-
guli ACM; Erunt,per ea,quæ ad propoſ. 8. lib.1.docui-
mus,anguli illius angulis huius æquales: Eſt autem to-



tus DBL,toti CAN,æqualis,ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI,AH.Igitur & reliquus KBL,reliquo MAN,erit æqua-
lis. Quoniam igitur latera BK,BL,trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN, & angulus KBL, angu-
e 4. prim. lo MAN, æqualis; [e] Erit & baſis KL, baſi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis B-
KL,AMN,æquales addantur anguli BKD,AMC,fient toti anguli DKL,CMN,æquales. Quare quadrilaterum BDKL, qua-
drilatero ACMN,& æquilaterum eſt, & æquiangulum; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula conueniant ſingulis,
nempe latera lateribus,& anguli angulis.Rurſus quia tota LI,toti NH, eſt æqualis,erit & reliqua IK,reliquæ HM, æqualis.
Eademq; ratione reliqua DE,reliquæ CF,æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum eſt quadrilatero C-
FHM: Sed & æquiangulum; cum anguli DEI,EIK,æquales ſint angulis CFH, FHM, propter ſimilitudinem parallelogram-
morum BI,AH; & anguli: EDK,IKD, angulis FCM, HMC, æquales,quod æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni LKD,
BDK,angulis NMC,ACM. Igitur quadrilatera DEIK,CFHM,æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe
& ſimilia quadrilatera ACKI,BDMH; Item DENM, CFLK,cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant,vt per-
ſpicuum eſt.Quamobrem ſolidum contentum planis CKLF, FHMC,CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib.
æquale eſt ſolido contento planis DMNE,EIKD,DMCK,KIAC,CMNA,AIEN;cum hiſce illa ſint demonſtrata & æqualia &
ſimilia. Parallelepipedum igitur AB,ſectum eſt per centrum G,plano CD, biſariam.

SED ſecetur iam parallelepipedum AB,plano CD, biſariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi tranſire,
hoc

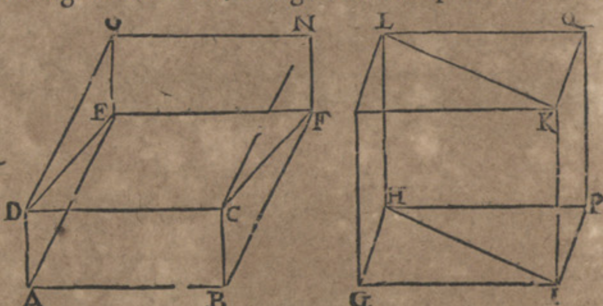


hoc eſt, punctum G, in quo planum CD, ſecat diametrum AB, diuidere diametrum AB, biſariam. Si enim diameter AB, in G; non diuiditur biſariam, diuidatur biſariam in E, vt ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, ſecabitur parallelepipedum AB, biſariam plano FH, vt demonſtratum eſt. Ponitur autem & biſariam ſecari plano GD; Igitur ſolida CB, FB, cum ſint dimidia parallelepipedi AB, inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, biſariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40. xxxxj.

SI fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipſa priſmata.

SINT duo priſmata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud baſim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; ſitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc priſmata eſſe æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, ſi plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, conſtituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis cum priſmatis. Nam plana horum ſolidorum oppoſita eſſe parallela, facile colligetur ex propoſ. 15: huius lib. [a] Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum eſt trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiuſdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. [b] Quare parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes AC, GP, inter ſe ſunt æqualia; Atq; propterea eorum dimidia, nimirum priſmata ABCDEF, GHIKLM, ([c] Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduerſorum ſecantur biſariam, in bina ſcilicet priſmata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaq; ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 34. primi.
b 31. vnd.
c 32. vndec.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; cum imperet parallepipeda compleri; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM,

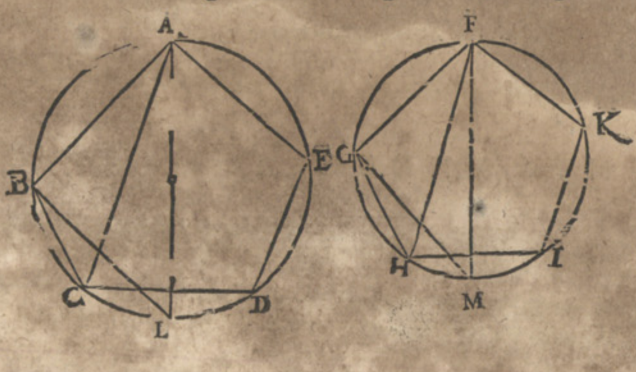
Et Solidorum ſecundum.

i. ### THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH. & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt, vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [a] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: [b] Eſt autem angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, [c] nempe recti in ſemicirculis exiſtentes; [d] erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. [e] Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. [f] Igitur eſt vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum.

a 6. ſexti.
b 21. tertij.
c 31. tertij.
d 32. prim.
e 4. ſexti.
f 22. ſexti.

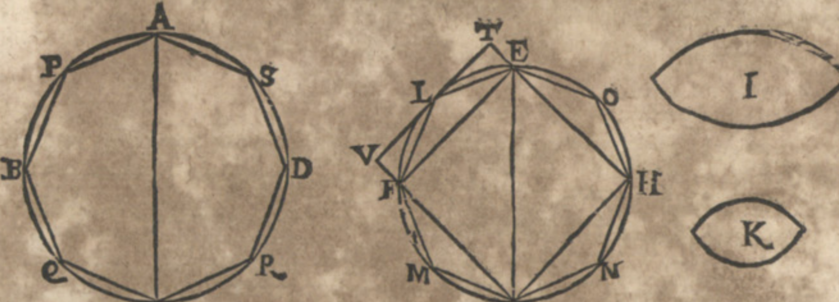


ij. ### THEOR. 2. PROPOS. 2.

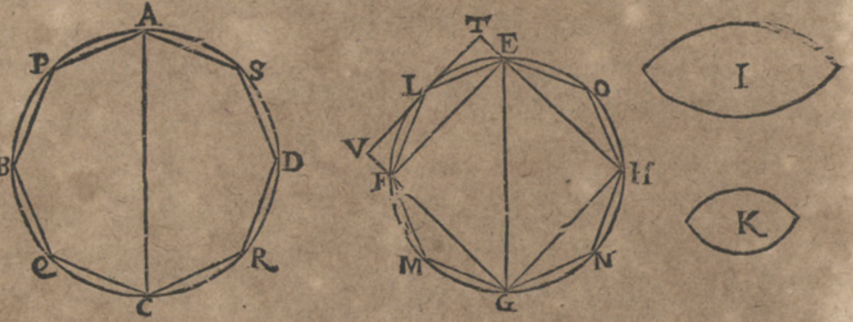
CIRCVLI inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita ſe habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quę vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim eſſet æqualis, [a] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea eſſet circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Si ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine ſcilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis ſit magnitudinibus I, & K, ſimul. Inſcribatur.

a 7. quinti.



batur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium eſt quadrati circa eundem circulum deſcripti, vt ad propoſ.9.lib.4.oſtendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L; M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipſi EF, vt ad propoſ.27.lib.3. oſtendimus, occurratq; rectis HE, GF, productus in T, & V.[b] Quia ergo triangulum ELF, dimidium eſt parallelogrammi TEFV; ma- b 41. primi.
ius erit triangulum ELF, quam dimidium ſegmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia ſegmentorum, in quibus ſunt. Omnia igitur triangula ſimul maiora ſunt, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ EL, LF, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidium omnium ſegmentorum



ſimul, in quib. ſunt; & ſic deinceps. Quoniã vero, ſi à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidiũ, nempe quadratum EFGH; & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG, &c. atq; in hunc modum ſemper fiat detractio; c 1. dec.
[c]relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, exceſſus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli ſegmenta relicta EL, LF, FM, &c. ſimul ſumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta, & ex I, & K, ipſa magnitudo K, quæ maior eſt præfatis circuli ſegmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonũ APBQCRDS, ſimile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi ABC, ADC, bifariam ſecentur in B, & D; & rurſus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot partes æquales diuiſa ſit circumferentia ABCD, in quot diſtributa eſt circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inſcripta ſimilis figuræ ELFMGNHO, vt patet. [d] Quoniam igitur eſt poly- d 1. duode.
gonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc eſt, per hypotheſim, vt circulus ABCD, ad I: Eſt autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo e 14. quint.
ABCD. [e] Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Oſtenſum autem eſt & maius. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo I, circulo EFGH.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonſtrabimus, minorem circulum EFGH, non poſſe ad magnitudinem, quæ minor ſit, quam maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & vniuerſe demonſtratum ſit, nunquam quadratũ diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, eſſe vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinẽ aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH. [f] maior quoque erit circulus ABCD, magnitu- f 14. quint.
dine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor eſt circulo ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam in priori parte generaliter, non poſſe eſſe vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor. Quamuis autem circulus ABCD, maior eſt, & EFGH, minor; eadem tamen ratione oſtendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non poſſe habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (ſi illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem, quod falſum eſſe iam in priori parte generaliter demonſtratum eſt: Ita vt generaliter & vniuerſe quoque demonſtratum ſit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo maiorem ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor. Non ergo maior eſt magnitudo I, circulo EFGH: Sed neq; minor eſt oſtenſa, æqualis igitur eſt. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; [g] ſit autem vt circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, g 7. quint.
qui æqualis eſt magnitudini I; Erit quoque vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, ſiue circulus ABCD, circulo EFGH, maior ſit, ſiue minor. Circuli igitur inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

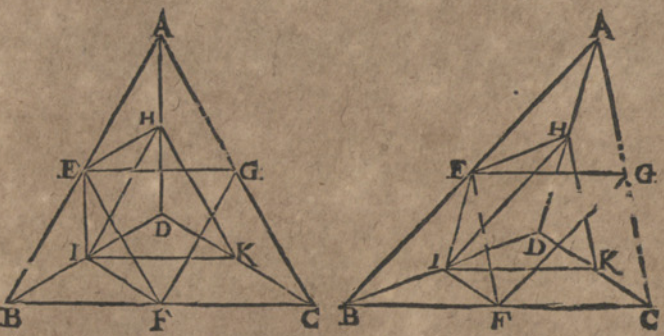
HINC fit, ita eſſe circulum ad circulum, vt polygonum in illo deſcriptum ad polygonum ſimile in hoc deſcriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum eſt, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonſtratum eſt.

THEOR.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens baſim, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis,cuius baſis triangulum ABC,vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F,G,H,I,
K,connectanturque rectæ EF,FG,GE,HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides
AEGH,HIKD,quarum baſes triangula AEG,HIK, & vertices H, D; nec non in duo ſolida EBFGHI, CFG-
HIK,quæ mox oſtendemus eſſe priſmata,quorum illius baſis eſt parallelogrammum EBFG,&triangula oppo-
ſita EHG,BIF;huius vero baſis eſt triangulum CFG,cui opponitur triangulum FIH, habentque hæc priſmata
terminum communem,parallelogrammum FGHI;& cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyra-
midem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D, in ſublimi, necnon eius triangula circumiacentia.
Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales,& ſimiles inter ſe,& ſimiles toti; Item duo hæc priſmata eſſe inter
ſe æqualia,& maiora dimidio totius pyramidis.Cum enim latera AD,BD,trianguli ADB,ſecta ſint bifariam,ac



a 2. ſext. proinde proportionaliter, [a] erunt HI, AB,
parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK,
BC,& HK,AC;& EG,BC;& EF,AC;&FG,
b 9. vnde. AB;& EH,BD;& EI,AD;&IF,DC;& HG,
DC. [b] Sunt autem & rectæ FG, HI, cum pa-
rallelæ ſint ipſi AB, inter ſe parallelæ; Atque
eadem ratione parallelæ ſunt GH FI, cum
ſint parallelæ ipſi DC. Quare parallelogram-
ma ſunt AEIH,HEBI,IDHE, EBFG, GH-
KC,CKIF,FGHI.Quoniam vero rectæ HE,
c 10. vnde. HG, rectis DB, DC, ſunt parallelæ; [c] erunt
anguli EHG,BDC,æquales: Ac eadem ratio-
d 4. ſexti. ne æquales erunt anguli HEG,DBC;& HGE,DCB. [d] Proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG, lateri-
bus trianguli DBC,circa æquales angulos;ac proinde ſimile eſt triangulum HEG,triangulo DBC.Sunt autem
& triangula HAE,HAG,AEG,triangulis DAB,DAC, ABC, ſimilia per coroll.propoſ.4.lib.6.Pyramis ergo
AEGH,pyramidi ABCD ſimilis eſt,per defin.9.lib.11. Rurſus quia rectæ HI, HK, rectis AB,AC, ſunt paralle-
e 10. vnde. læ; [e] erunt anguli IHK,BAC,æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK,ABC; & HKI; ACB. [f] Quare
f 4. ſext. latera trianguli HIK,lateribus trianguli ABC,circa æquales angulos ſunt proportionalia;ac propterea triangu-
lum HIK,triangulo ABC, ſimile eſt:Sunt autem & triangula DHI, DIK,DKH, triangulis DAB,DBC, DCA,
ſimilia, per idem coroll. propoſ.4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, ſimilis eſt quoque eidem pyramidi ABCD, per
defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE,HDI, ſimilia ſunt triangulo ADB,vt oſtenſum eſt ex coroll.
g 21. ſexti. propoſ.4.lib.6. [g] ipſa quoque inter ſe ſimilia erunt. Cum igitur ſint ſuper rectas æquales AH, HD, conſtituta;
ipſa erunt æqualia,per lemma propoſ. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & ſimilia triangula AHG,
HDK,cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo ADC, & conſtituta ſuper æquales rectas AH,HD. Pari ratione æqua-
lia,& ſimilia erunt triangula AEG,HIK, cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo ABC, & ſuper rectas poſita AE,
h 34. prim. HI, [h] quæ æquales ſunt,ob parallelogrammum AEIH. Non ſecus æqualia erunt & ſimilia triangula EHG,
i 34. primi. IDK,cum ſint oſtenſa ſimilia triangulo BDC,& habeant rectas HE, DI, [i] quæ æquales ſunt,ob parallelogram-
mum HEID. Pyramides igitur AEGH,HIKD,æquales ſunt & ſimiles,per 10.defin.lib.11. quandoquidem o-
mnia triangula vnius æqualia ſunt & ſimilia omnibus triangulis alterius,vt demonſtratum eſt.

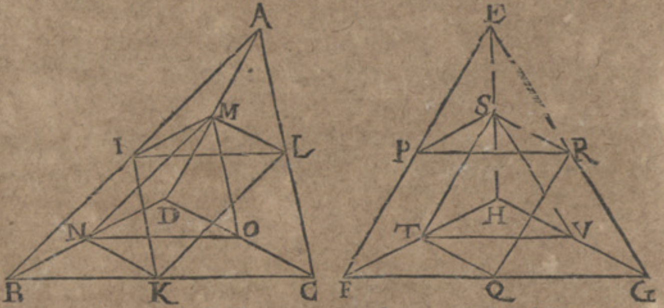
k 34. prim. RVRSVS, [k] quia rectæ EH,HG,GE,æquales ſunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma E-
HIB,FGHI,BFGE;erunt triangula EHG,BIF,æquiangula inter ſe,& æqualia,per coroll. propoſ. 8. lib. 1. Ac
l 15. vnde. propterea & ſimilia: [l] Sunt autem & parallela; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG,parallelæ ſint re-
ctis BI,IF,per quas planum BIF,ducitur. Igitur ſolidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG,BIF,
ex aduerſo æqualibus & ſimilibus,& parallelis ; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, priſma
m 34. pri. eſt,ex defin. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum CFGHIK. [m] Cum enim rectæ FC, CG, GF, æqua-
les ſint,& parallelæ rectis IK, KH,HI,ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI ; erunt triangula CFG,
n 15. vnde. HIK,æqualia, & æquiangula inter ſe, ac propterea ſimilia: [n] Sunt autem & parallela, quod rectæ CF, CG,
per quas ducitur planum CFG, parallelæ ſint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur ſolidum
CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus,& parallelis;
atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, priſma eſt. Quoniam vero priſmata
EBFGHI, CFGHIK, ſunt eiuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK, & parallelogram-
o 40. vnd. mum EBFG,baſis illius,duplum eſt trianguli CFG,baſis huius,per ſcholium propoſ.41.lib.1. [o] Ipſa inter ſe æqua-
lia erunt.

DENIQVE quia priſma EBFGHI, maius eſt pyramide EBFI, totum parte; Eſt autem pyramis EBFI, æqua-
lis & ſimilis pyramidi AEGH, necnon pyramidi HIKD, vt perſpicuum eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulo-
rum:Maiora erunt priſmata EBFGHI,CFGHIK,pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium py-
ramidis ABCD, excedent, hæ vero à dimidio eiuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales
ſecatur,maior dimidium eius ſuperat, minor vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem ha-
bens baſin,&c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraque diuiſa & in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diuiſa ſit vtraque pyramidum, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idque ſemper fiat; erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

SINT ſuper baſes triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, eiuſdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propoſitio præcedens: eodemque modô intelligantur eſſe diuiſæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH, & ſic deinceps. Dico ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD, ad omnia priſmata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Cum enim ſit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraque linea diuiſa eſt bifariam, ſint autem triangula ABC, LKC, ſimilia ſimiliterque poſita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6.[a] Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, vt mox oſtendemus, atque adeo ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia: Et vt vnum priſma, videlicet IBKLMN, ad vnum priſma PFQRST.[b] ita ſunt duo priſmata IBKLMN, CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita duo priſmata in pyramide ABCD, ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt ſunt baſes AIL, MNO, illarum pyramidum ad baſes EPR, STV, harum pyramidum; & ſic deinceps eadem ſemper facta diuiſione. Sed vt illæ baſes ad has, ita eſt LKC, baſis quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQG, quæ his eſt æqualis, & ſimilis, vt in præcedenti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Igitur erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt priſmata pyramidis ABCD, ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſmata pyramidis EPRS, quam priſmata pyramidis MNOD, ad priſmata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum ſint, vt duo priſmata pyramidis ABCD, ad duo priſmata pyramidis EFGH,[c] ita omnia priſmata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul ad omnia priſmata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, ſi hæc illis multitudine ſint æqualia; Erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 12. ſexti.

b 12. quint.

c 12. quint.

L E M M A.

QVOD autem ſit LKC, ad RQG, ita priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſes ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO,[d] ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoq; perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur à plano STV, Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus.

d 17. vnde.

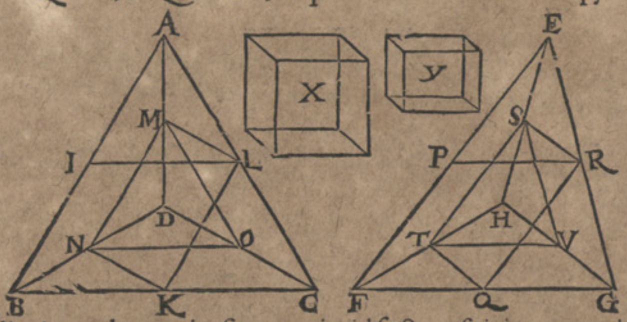
THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidẽ, vt eſt baſis, ad baſin. Si enim non ita ſit, ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y.

Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ.3.huius lib. Rurſus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi à pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo priſmata
a 3. duodec. PFQRST, GQRSTV; [a] quæ maiora ſunt dimidio pyramidis EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps; [b] relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iã relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqua-

b 1. deci.



c 4. duode. lia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. [c] Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; [d] erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quam ſolidum X. Oſtenſa vero ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.

d 14. quin.

SIT deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG: Erit conuertendo ſolidum X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidum X, maius
e 14. quin. ponitur pyramide FFGH, [e] erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit, vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iã, non poſſe eſſe, vt eſt, baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum X, pyramide EFGH, ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur vt baſis ABC, ad baſin
f 9. quint. EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; [f] ſit autem pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt ad pyramidem EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoque vt baſis ABC, ad baſin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abſciſsionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ;
g 9. quint. *Eritq; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modo conſtitutam: Sed ſic quoque erat ad totam pyramidem.* [g] *Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.*

COROLLARIVM.

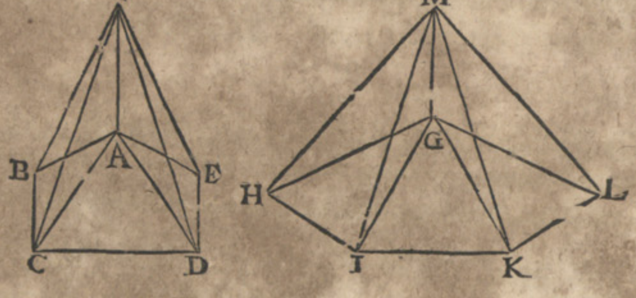
HINC fit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM ſequitur è conuerſo, pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ.36.& 31.lib.11.demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

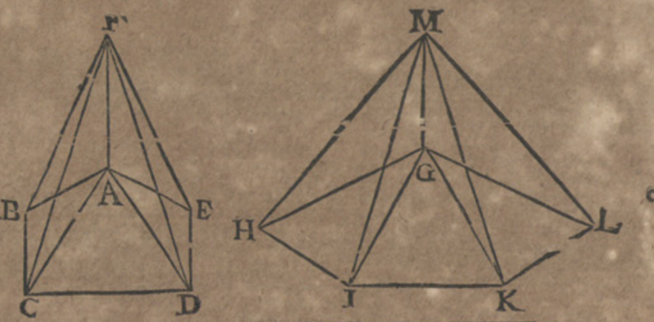
vj.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.



SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſib. in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. [a] Quia vero eſt, vt baſis ABC, ad
a 5. duodec. baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem A-
b 5. duodec. CDF: [b] Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt baſis

vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABC-
DE, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo
erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis
ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argu-
mento erit vt baſis GHIKL, ad baſim GKL, ita py-
ramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & con-
uertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita py-
ramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. [c] Rur- c 5. duodec.
ſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita
pyramis AD, EF, ad pyramidem GKLM; Erunt
quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in
eiſdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF,
ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manife-
ſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit vt baſis AB-
CDE, ad baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem
GHIKLM: Ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyrami-
des, &c. Quod erat demonſtrandum.

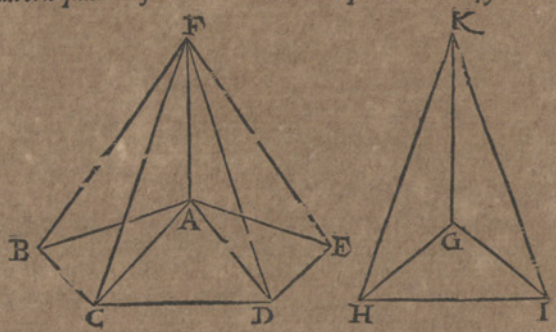


ABCDE	ABCDEF
ADE	ADEF
GKL	GKLM
GHIKL	GHIKLM

SCHOLIVM.

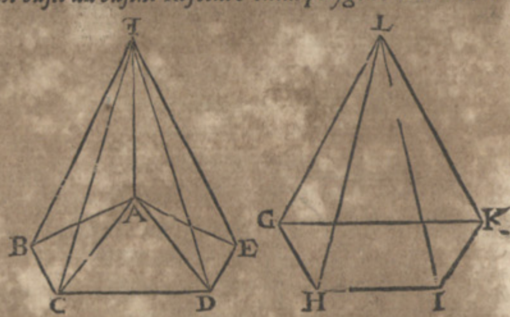
QVAMVIS *huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quarum baſes polygonæ latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera quam baſis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiuſdem altitudinis* ABCDEF, GHIK, *quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa.* [d] *Quoniam vero eſt, vt baſis* ABC, *prima quantitas, ad baſin* GHI, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ABCF, *tertia quantitas ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem; & eodem modo, vt baſis* ACD, *quinta quintitas, ad baſin* GHI, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ACDF, *ſexta quantitas, ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem:* [e] *Erit vt baſis* ABCD, *prima quantitas cum quinta, ad baſin* GHI, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ABCDF, *tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis* ABCD, *prima quantitas, ad baſin* GHI, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ABCDF, *tertia quantitas, ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem, vt modo eſt oſtenſum:* [f] *& vt baſis* ADE, *quinta quantitas ad baſin* GHI, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ADEF, *ſexta quantitas ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem;* [g] *Erit etiam baſis* ABCDE, *prima quantitas cum quinta, ad baſin* GHI, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ABCDEF, *tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem* GHIK, *quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem, vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona* ABCDE, *ad baſin triangularem* GHI, *ita pyramis* ABCDEF, *ad pyramidem* GHIK; *Erit quoque conuertendo, vt baſis* GHI, *ad baſin* ABCDE, *ita pyramis* GHIK, *ad pyramidem* ABCDEF. *Quam ob rem duæ pyramides quælibet, quarum vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat à polygono, eiuſque pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoque ſumere à triangulo eiuſque pyramide, vt dictum eſt.*

d 5. duodec.
e 24. quin.
f 5. duodec.
g 24. quin.



SED *iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis* ABCDEF, GHIKL, *quarum baſes ſint polygonæ, ſintque plura latera in vna baſe quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono* ABCDE, *in triangula* ABC, ACD, ADE, *erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides. Quia vero, vt iam eſt demonſtratum, eſt vt baſis* ABC, *triangularis prima quantitas, ad baſin* GHIK, *polygonam, ſecundam quantitatem, ita pyramis* ABCF, *tertia quantitas ad pyramidem* GHIKL, *quartam quantitatem; & vt baſis* ACD, *quinta quantitas, ad baſin* GHIK: *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ACDF, *ſexta quantitas ad pyramidem* GHIKL, *quartam quantitatem;* [h] *Erit etiam vt baſis* ABCD, *prima quantitas cum quinta, ad baſin* GHIK, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ABCDF, *tertia quantitas cum ſexta ad pyramidem* GHIKL, *quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis* ABCD, *prima quantitas, ad baſin* GHIK, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ABCDF, *tertia quantitas, ad pyramidem* GHIKL, *quartam quantitatem, vt proxime demonſtratum eſt; Et eſt quoque, vt baſis* ADE, *quinta quantitas, ad baſin* GHIK, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ADEF, *ſexta quantitas, ad pyramidem* GHIKL, *quartam quantitatem, vt ante eſt oſtenſum;* [i] *Erit etiam vt baſis* ABCDE, *prima quantitas cum quinta, ad baſin* GHIK, *ſecundam quantitatem, ita pyramis* ABCDEF, *tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem* GHIKL, *quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi* ABCDE.

h 24. quin.
i 24. quin.



HANC *autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, conuertemus hoc modo.*

PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes: eandem habent altitudinem.

QVOD non ſecus oſtendemus, ac ea, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, oſtenſa ſunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandem conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; cum eandem habeant proportionem cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & ſuper æquales baſes, vt ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem Hæc autem duo demonſtrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.

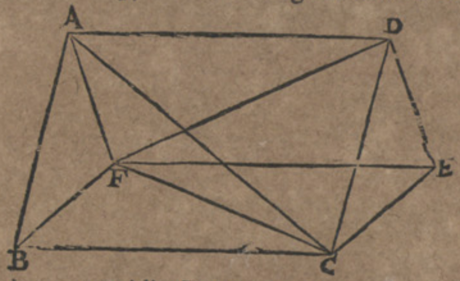
v.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares baſes habentes.

SIT priſma ABCDEF, cuius duo triangula oppoſita, æqualia, ac ſimilia ABF, DCE. Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri,

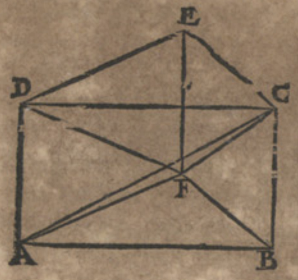
a 34. prim.
b 5. duode.



nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. [a] Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia ſunt; [b] eſtque vt baſis ABC, ad baſin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demiſſam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, ſuper æquales baſes ADF, EFD, conſtitutæ, & ſub eadem altitudine, nempe perdendiculari à vertice C, ad planum ADEF, demiſſa. Eſt autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ſeu CDEF, (quæ eadem eſt pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum priſma componentes, vt perſpicuum eſt, æquales ſunt inter ſe; Ac propterea priſma ABCDEF; in tres pyramides æquales eſt diuiſum. Quo circa omne priſma triangularem habens baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

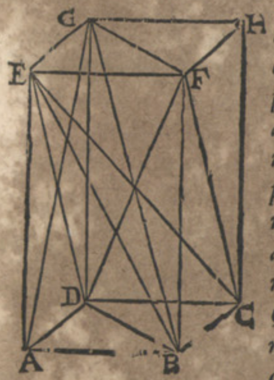
HINC colligitur, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Siue priſma quodlibet triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſin, & altitudinem.



c 7. duode.

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF, ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem ABF. Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis. Nam ſi ducatur recta DF, erit priſma diuiſum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, [c] vt demonſtratum eſt; Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hæc illi ſit æqualis, immo eadem, quod eiſdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis ſit cuicunq; alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. manifeſtum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem & altitudinem; ac propterea priſma è contrario eſſe pyramidis triplum.

SIT deinde pyramis ABCDE, cuius baſis rectilineum quodcunq; ABCD, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD,



d 12. quint.

& plano oppoſito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diuiſum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, vt demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit vt pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad priſma CDHGFB; [d] Ac propterea vt vna pyramis ad ſuum priſma; ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſuper eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt æquales, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſuper eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars priſmatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine & ſuper eandem baſim ABCD, conſtituta, per coroll. propoſ. 5. huius lib. perſpicunm eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD

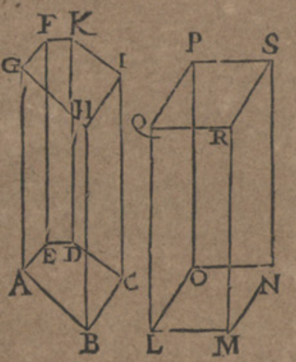
QVOD ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingulæ pyramides triangulares horum priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiuſmodi pyramis, æqualis eſt pyramidi illi, quæ eandem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem, per coroll. prop. 6. huius lib. Quam quidem iam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

SCHOLIVM I.

EX dictis facile demonſtrabimus hanc propoſitionem, videlicet.

SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſçunque habeant baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.



QVAMVIS enim hoc demonſtratum ſit in lib. 11. de priſmatis, quorum duo plana oppoſita, parallela, & æqualia, ſunt triangula, licet eorum baſes ſint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ: necnon de parallelepipedis, quæ nomine priſmatum contineri diximus: Nunc tamen idipſum demonſtrabimus vniuerſe de omnibus priſmatis, quorum duo plana aduerſa, ſiue baſes, ſunt polygona, quamuis plura latera, ſeu anguli in vnius baſe reperiantur, quam in baſe alterius. Sint igitur duo priſmata eiuſdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum baſes ſint figuræ multilateræ. Dico vt eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis vtriuſq; baſis ad vnum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes; Ac proinde per coroll. prædictum huius propoſ. quælibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis.[a] Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, vt baſis ad baſin, vt oſtenſum eſt propoſ. 6. eiuſque ſcholio. Igitur erit quoque vt baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitũ.

a 15. quint.

CONVERSO modo, ſi priſmata quarumcunq; baſium inter ſe ſint, vt baſes, ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.

COROLLARIVM II.

VNDE priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO. Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.

SCHOLIVM II.

CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelliguntur tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia, & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis æqualibus, ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo priſma dici ab Euclide, vt in defin. priſmatis diximus. Nam ſi in huiuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis vnum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis eiuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia pars ipſius priſmatis, vt in corollario 1. demonſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſin, vt in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tali baſis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice ſit linea recta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, ſed duæ tertiæ partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur aliud æquale & ſimile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars conſtituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum. 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeat altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiam partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, non habebit tale priſma ita conſtitutum ad aliud priſma eiuſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in vertice lineam rectam habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaq; ea, quæ oſtendimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis eiuſdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atq; ſimilia. Hac enim ratione, ſi vertices priſmatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiuſdemq; altitudinis, duæ tertiæ partes priſmatum, vt modo demonſtrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam priſmata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

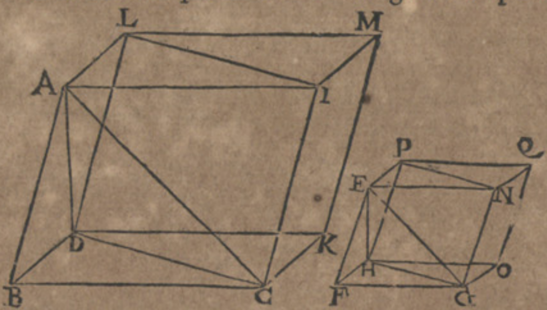
viij.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita vt baſes ABC, EFG, ſint ſimiles, & reliqua triangula vnius ſimilia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis,

 quam

quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulornm ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, eiuſdem cum pyramide altitudinis; cum plana ſolidi BM, ſint parallela, vt facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, ſunt æquales, eſtque vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, ſimilia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, ſint æquales, ſitq; vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & parallelogramma AL, BK, parallelogrammis FP, FO, ſimilia.[a] Sed tam tria BI, BK, BL, pa-



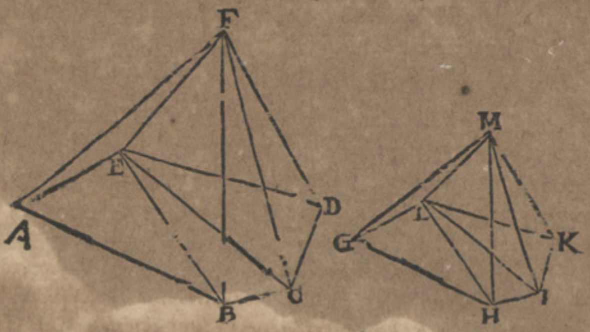
a 24. vnd. logrammis FP, FO, ſimilia.

rallelepipedi BM, reliquis tribus oppoſitis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis
b 24. vnd. oppoſitis tribus HQ, EQ, GQ,[b] ſunt æqualia, & ſimilia. Igitur ſex plana circumſcribentia ſolidum BM, ſimilia
ſunt ſex planis ſolidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex definit. 9. lib. 11. ſimilia ſunt parallelepida BM, FQ.
c 15. quint. Quoniam vero ductis rectis LI, PN,[c] priſmata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam
parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam priſmata dicta, earum tri-
d 11. quin. pla;[d] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepida.[e] Cum igitur proportio paral-
e 33. vnde. lelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ ſit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG, erit quoq;
proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaq; pyramides, quæ triangulares habent baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc quoq; eſt manifeſtum, ſimiles pyramides, quarum baſes plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

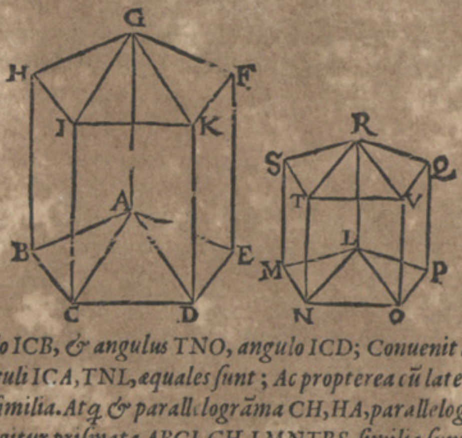
*SINT pyramides ſimiles, quarum baſes rectilinea ſimilia plurium laterum ABCDE, GHIkL. Dico proportionem pyra-
ramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam ſi ex angulis E, L, ducantur ad angulos*
f 20. ſexti. *oppoſitos rectæ EB, EC, LH, LI,[f] diuiſæ erunt baſes ſimiles in triangula numero æqualia, & ſimilia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, ſimilia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum ſimilitudinem, triangula AEF, GLM, ſimilia ſunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter ſimilitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EF, ita ML, ad LH. Rurſus quia eſt vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula ſimilia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum ſimilitudinem ſimilia ſint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum ſit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad EF, ita LH, ad*



g 5. ſexti. *HM, erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH.[g] Quare æquiangula, atq; adeo & ſimilia ſunt triangula FEB, MLH.
Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, ſimilia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9.*
h 8. duode. *lib. 11. ſimiles ſunt. Eadem ratione ſimiles erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM.[h] Quapropter, vt demonſtra-
tum eſt, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, ſingulæ ad ſingulas, triplicatam proportionem
habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, ſingulorum ad ſingula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK,
habeant vnam & eandem proportionem, ob ſimilitudinem baſium ABCDE, GHIKL; habebunt quoq; pyramides ABEF, EBCF,*
i 12. quint. *CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemq; proportionem, triplicatam ſcilicet illius;[i] Atque idcirco erit vt
vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimi-*
k 8. duod. *rum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem,[k] cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem
homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatã proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod eſt propoſitum.*

SCHOLIVM.

EADEM ratione priſmata ſimilia habebunt triplicatã proportionẽ homologorũ laterũ. Sint n. duo priſmata ſimilia ABCDEFGHIk, LMNOPQRSTV. Dico eorũ proportionẽ eſſe triplicatã proportionis homologorũ laterum. Nã ſi ex angulis A, &
l 20. ſexti. *L, ducãtur rectæ AC, AD; LN, LO,[l] erũt, vt de pyramidib. dictũ eſt, triãgula ABC, CAD, DEA, triãgulis LMN, NLO, OLP, ſimilia. Similiter, ſi ex angulis G, & R, ducãtur rectæ GI, Gk; RT, RV, erũt triãgula GHI, IGk, kFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triãgulis ante dictis, ſimilia, cũ omnia plana priſmatũ oppoſita ſimilia exiſtant, per definitionẽ priſmatis. Quoniã vero ob ſimilitudinẽ priſmatũ, parallelogrãma CH, NS, ſimilia ſunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM; Vt autem CB, ad CA; ita quoq; eſt NM, ad NL, ob ſimilitudinẽ triangulorũ BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rurſus quoniã angulus ſolidus N, æqualis eſt ſolido angulo C, ob ſimilitudinẽ priſmatũ; ſi ille huic ſuperponatur, omnia inter ſe conuenient, nimirũ angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angu-*



lo ICB, & angulus TNO, angulo ICD; Conuenit autẽ & recta NL, rectæ CA, eo q; anguli MNL, BCA sũt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales ſunt; Ac propterea cũ latera circa ipſos oſtenſa ſint eſſe proportionalia, erũt parallelogrãma CG, NR, ſimilia. Atq; & parallelogrãma CH, HA, parallelogrãmis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, ſimilia ſunt. Igitur priſmata ABCI, GH, LMNTRS, ſimilia ſunt, ex def. ſolidorũ ſimiliũ. Nõ aliter oſtẽdẽtur eſſe ſimilia priſmata CDAGIk, NOLRTV; nec nõ priſmata AEDkGF, LPOVRQ. Quapropter priſmata ABCIGH, CDAGIk, AEDkGF, ad priſmata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, pro ea, q̃ demonſtrauimus ad prop. 34. lib. 11. triplicatã habẽt proportionẽ, ſingula ad ſingula, laterũ homologorũ BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, ſingulorũ ad ſingula. Ac propterea eodẽ modo demonſtrabimus, priſmata ABCDEFGHIk, LMNO-

LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante vſi ſumus ad idem demonſtrandum in pyramidibus multangulis.

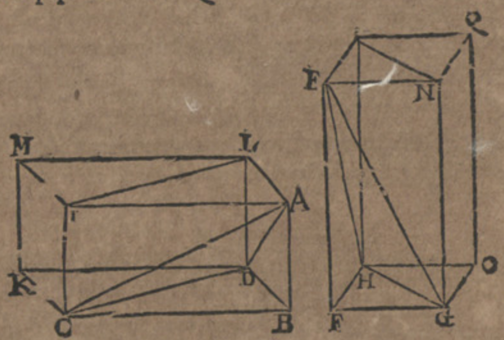
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas ſimiles diuidi in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifeſtum eſt ex demonſtratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, priſmata multangula ſimilia diuidi in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia: & homologa totis. Vt apparet ex huius ſcholij demonſtratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. vij.

ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum baſes ABC, EFG, & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propoſ. dictum eſt, parallelepipeda BM, FQ. earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt priſmata DBCILA, HFGNPE, cum ſint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter ſe æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ. cum ſint priſmatum dupla æqualia quoque



erunt.[a] Quare baſes eorum & altitudines reciprocabuntur, a 34. vnd.
hoc eſt, erit vt baſis BI, ad baſin FN, ita altitudo ſolidi FQ,
ad altitudinē ſolidi BM: [b] Vt autem baſis BI, ad baſim FN, b 15. quint.
ita eſt triangulum ABC, ad triangulũ EFG. Igitur erit quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem ſint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea baſes & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius;
[c] cum ſit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintq; eædem altitudines pa- c 14. quin.
rallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque baſes parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ;
[d] Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & priſmata DBCILA, HFGNPE, eo- d 34. vnde.
rum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

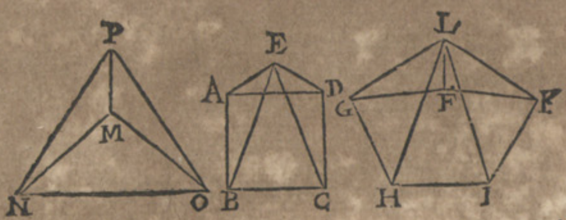
EADEM ratione Æqualium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes atq; altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentium reciprocantur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, baſin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat baſi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera reuocetur ad parallelogrammũ per propoſ. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 42. lib. 1. Deinde ſuper KLM, fiat pyramis KLMN, eiuſdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent baſes, & eandem altitudinem; ipſæ erunt



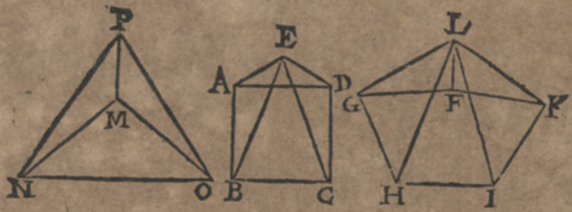
æquales, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 6. huius lib. oſtendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, baſes triangulares;
[e] erit vt baſis ABC, ad baſin KLM, hoc eſt, ad huic æqualem baſin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc eſt, altitudo py- e .9 duode.
ramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam harum pyramidum baſes atq; altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo; cum baſis KLM, æqualis ſit baſi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI, ponuntur autem eſſe vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoq; vt baſis ABC, ad
baſim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. [f] Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, f 9. duodec.
KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum baſes ſint multangulæ. Fiat rurſus triangulum MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritq́; ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt nunc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt, baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK; ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem py-



ramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIkL, baſes & altitudines reciprocantur.



SED reciprocentur iam baſes harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſis MNO, æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIk, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIk, ita altitudo pyramidis FGHIkL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIkL: Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIkL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

OMNIA hæc facile quoque demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cum ſint eorum tertiæ partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certæ duæ tertiæ, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, vt in ſcholio eiuſdem propoſ. oſtenſum eſt. Quare, vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atq; altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint, quæ priſmatum, reciprocabuntur quoq; baſes priſmatum atque altitudines.

RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoq; baſes, & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint tripla, vel certe ſeſquialtera, æqualia quoq; ſunt. Quod eſt propoſitum.

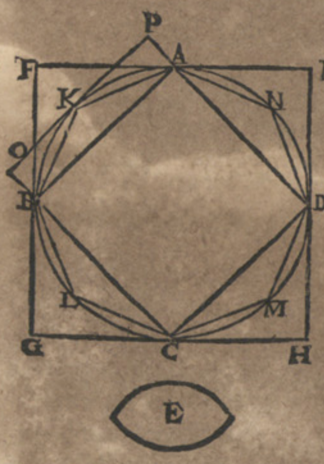
viij.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus baſin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, nõ erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quam triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundẽ, quadratum FGHI; intelliganturq; ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus;

a 32. vnd. [a] eſtque vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidium parallelepipedi baſis FGHI; Ac proinde parallelepipedum baſis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius baſis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, vt ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri.



b 41. prim. [b] Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis ABOP: cum ſit priſma ad priſma, vt baſis ad baſim, queadmodum, ad propoſ. 7. huius lib. demonſtrauimus; Ac propterea priſma baſis AKB, maius erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo priſmata eiuſdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidia omniũ ſegmentorum cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta, & ſic deinceps. Quoniam vero ſi à cylindro, cuius baſis circulus

a 1. dec. ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis ABCD; & à reliquis ſegmentis plus quã dimidium, nimirum priſmata baſium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [c] relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni: Sint iam ſegmenta cylindri relicta baſium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, ſimul; Si ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior eſt dictis cylindri ſegmentis, erit reliquum priſma baſis multangulæ AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſmatis ſit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipſo baſis & altitudo, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt cylindrus triplo coni.

SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior

maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis ſit tertiæ parti cylindri,& magnitudini E, ſimul. Inſcribatur rurſus in circulo quadratum ABCD,& circa eundem, quadratum FGHI;intelliganturq; ſuper hæc quadrata, pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI, vt ad propoſ.9. lib.4.demonſtrauimus, [d] eſtq; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidē eiuſdem altitudinis;Erit quoq; pyramis ſuper ABCD, dimidium pyramidis ſuper baſin FGHI;ac proinde pyramis ſuper baſin ABCD, maior erit dimidio coni, cuius baſis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K,L,M,N, adiunganturq; rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulū in K, quæ parallela erit ipſi AB, vt ad propoſ.27.lib.3.demonſtrauim⁹, occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O, & ſuper AKB, ABOP, intelligantur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. [e] Quia ergo triangulū AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP, erit quoq; pyramis ſuper baſin AKB, dimidiū pyramidis ſuper baſin ABOP, [f] cum pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin AKB, maior erit dimidio ſegmenti coni, cuius baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadē cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul maiores ſunt, quam dimidia omnium ſegmētorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt ſimul, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi à cono, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin ABCD, quam maiorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cuius baſis eſt circulus ABCD; & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium AKB, BLC, CMD, DNA; atq; in hunc modum ſemper fiat detractio; [g] relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri: Sint iam ſegmenta coni relicta baſium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahantur ſegmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior eſt præfatis coni ſegmentis; erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum priſma eandem habens baſim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cum cono & cylindro, triplum ſit ipſius pyramidis, vt ſupra in coroll. propoſ.7. huius lib. à nobis eſt demonſtratum, erit huiuſcemodi priſma maius cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum, Non ergo cylindrus minor eſt triplo coni: Sed neque maior triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, propterea que conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

d 6. duode.
e 41. prim.
f 6. duode.
g 1. dec.

SCHOLIVM.

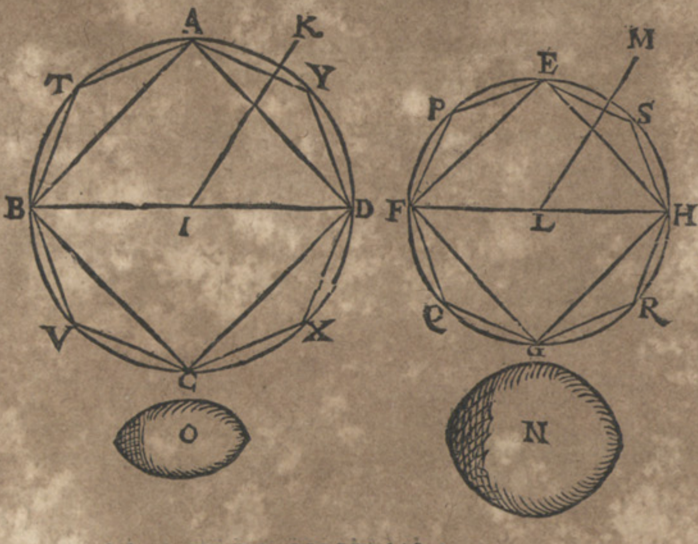
QVAMVIS propoſitio hæc ſolum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit libr. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis conuenit, vt perſpicuum eſt eius demonſtrationem diligenter intuenti. Itaq; propoſitio vniuerſe ita proponi poterit.

OMNIS conus ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuslibet cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni & cylindri.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

ix.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes.

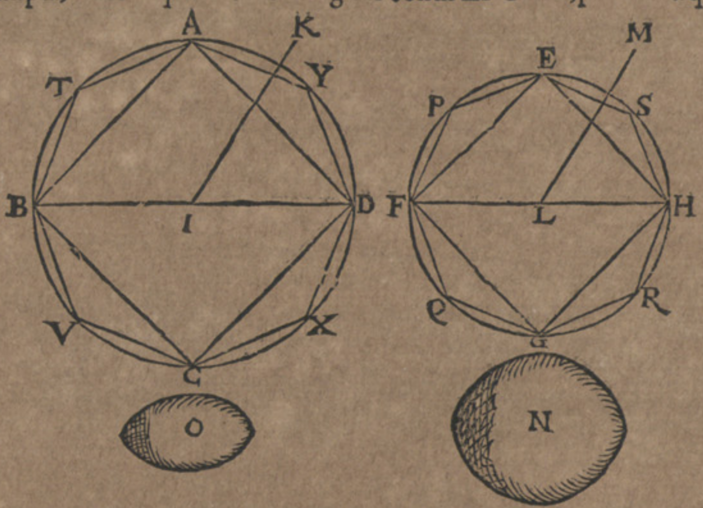


SINT ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico vt eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, ſit vt baſis ABCD, ad baſim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis. [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionē eandē; ac propterea eſſet conus ad conum, vt baſis ad baſin: quod non conceditur. Sit ergo primū N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis ſit magnitudinibus N, & O, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidanturq; peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungātur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniā igitur ſi ex cono EFGHM, detrahatur pyramis ſuper baſin EFGH, eiuſ-

a 7. quint.

dem

dem altitudinis,& à reliquis ſegmentis auferantur pyramides eiuſdem altiudinis baſium EPF, FQG,&c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio,ſemper plus dimidio ſubtrahitur,vt in poſteriore parte præcedentis pro-
b 1. dec. poſitionis oſtenſum eſt; [b] relinquetur tandem minor magnitudo, quam O,exceſſus coni EFGHM,ſuper N. Sint ergo iam ſegmenta coni relicta baſium EP,PF,FQ,&c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM,ponatur æqualis magnitudinibus N,& O, ſimul; ſi ex cono detrahantur dicta coni ſegmenta,& ex N, & O, ipſa magnitudo O,quæ prædicti coni ſegmentis maior eſt,erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum EPFQGRHS, eiuſdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, ſimile polygono EPFQGRHS, vt in propoſ.2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propoſ. 2. huius lib. eſt vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N. [c] & vt polygonum, ad



c 6. duod. polygonum, ita eſt pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, mi-
d 14. quin. nor ſit cono ABCDK, pars toto, [d] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Oſtenſa autem fuit & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

SIT Secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulũ EFGH, ita conus ABCDK,ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH,ad circulum ABCD,ita N,ad conum ABCDK. Ponatur vt N,ad conum ABCDK,ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDK,quam O. Quare erit vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM,ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono ABCDK, Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam,non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Non ergo maior eſt N,magnitudo cono EFGHM. Sed neque minor eſt oſtenſa; Æqualis igitur eſt. Quapropter cum ponatur,vt baſis ABCD,ad baſin EFGH,ita conus ABCDK,ad N; [e] Sit autem,vt conus ABCDK,ad
e 7. quint. N,ita idem conus ABCDK,ad conum EFGHM,erit quoque vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

[f] QVONIAM autem,vt conus ABCDK,ad conum EFGHM,ita eſt cylindrus ABCDK,(qui triplus eſt
f 15. quin. coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt coni EFGHM,) Erit quoque vt baſis ABCD,ad baſin EFGH,ita cylindrus ABCDK,ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodẽ modo confirmari poteſt,quo vſi ſumus in conis,ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri,& priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri,inter ſe ſunt,vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

PERSPICVVM quoq; eſt,hanc propoſitionem,quam Euclides de conis,& cylindris ſolis rectis propoſuit,ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos,vt eius demonſtratio manifeſte indicat, ita vt propoſitio vniuerſe proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri,ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus,& alter ſcalenus,inter ſe proportionem habent, quam baſes.

CONVERTETVR hæc propoſitio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter ſe ſint,vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonſtrabis eo modo,quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

C O R O L L A R I V M.

HINC fit,conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem,vel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni,ſiue vnus rectus,& alter ſcalenus,eſſe inter ſe æquales: propterea quod eandem proportionem habent,quam baſes,quæ æquales ponuntur,vel certe vna & eadem.

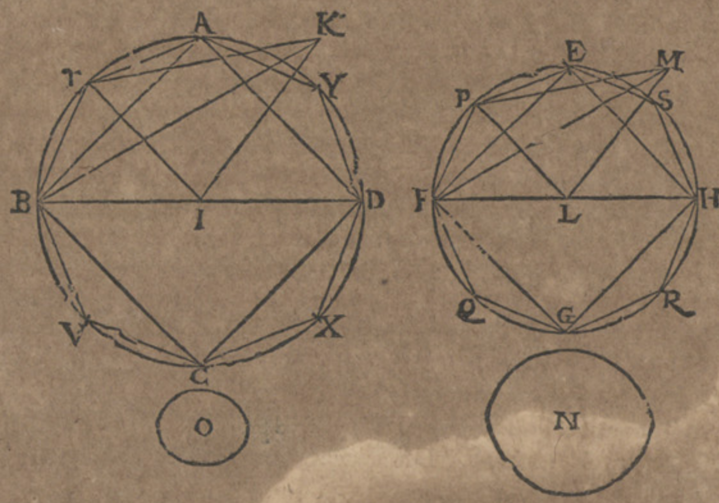
ITEM ſequitur,conos & cylindros æquales ſuper eandem,vel æquales baſes,in eadem eſſe altitudine: Et æquales in eadem altitudine,ſuper æquales baſſes eſſe, ſi non habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac conuerſum propoſ.31.lib.11.demonſtratum fuit.

x. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

SINT

SINT ſimiles coni, & cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, axes vero LK, LM, & diametri baſium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionē triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritq; N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, eſſet quoque triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorſus conſtructio figuræ, quæ in præcedenti propoſitione, ita vt rurſus pyramis EPFQGRHSM, maior oſtendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, vt habeantur duo triangula BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, ſimiles ponuntur; erit, ex 24. def. lib. 11. ad diameter BD, vt diametrum FH, [b] ac propterea vt ſemidiameter BI, ad ſemidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutando vt BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, proptereaque axes recti ad eorum baſes; [c] Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; [d] Ac propterea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP; inſiſtentes ſimilibus arcubus BT, FP, ſint æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtenſum eſt; ſitque vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, quam FL, LP; [e] erunt triangula BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rurſus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia ſunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehenſi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK, rectus ponatur, ad circulum ABCD, [f] erunt baſes KB, KT, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cum vtrobiq; ſit proportio æqualitatis. [g] Quoniam vero vt kB, ad BT, ita kT, ad eandem BT; Item vt MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem vt kB, ad BT, ita MF, ad FP: Erit quoq; vt kT, ad BT; ita MP, ad FP; Et conuertendo vt BT, ad Tk, ita FP, ad PM. Quare cum ſit vt Tk, ad kB, ita PN, ad MF, & vt kB, ad BT, ita MF, ad FP; Et vt BT, ad Tk, ita FP, ad PM, veluti oſtenſum eſt; habebunt triangula BkT, FMP, latera proportionalia, [h] ideoq; æquiangula erunt; Ac proinde ſimilia, ex definitione. Non aliter oſtendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYk, EPFQGRHSM inter ſe ſimilia eſſe: Quę cum ſint multitudine æqualia, erunt dictę pyramides ſimiles, ex def. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita eſt, BI, ad FL, ob ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP; [i] Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDk, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYk, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDk, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYk, minor ſit cono ABCDk, pars toto; [k] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Oſtenſa autem eſt & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt magnitudo N, cono EFGHM.



a 7. quinti. — b 15. quin. — c 6. ſexti. — d 4. ſexti. — e 6. ſexti. — f 4. prim. — g 7. quint. — h 6. ſext. — i 11. quint. — k 14. quin.

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDk, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYk, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime oſtendimus: Erit vt conus ABCDk, ad N, ita pyramis ATBVCXDYk, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDk, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYk. Quare cum ex coroll. propoſit. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYk, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoque N, ad conum ABCDk, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ABCDk, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHk, [l] erit quoque conus ABCDk, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDk, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum eſt enim, non poſſe conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent baſium diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono EFGHM, Sed neq; minor eſt oſtenſa. Æqualis igitur eſt; [m] ac proinde conus ABCDk, eandem habet proportionem ad conum EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDk, ad N, in triplicata proportione diametrorum BD, & FH; erit quoque conus ABCDk, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicatā.

l 14. quinti. — m 7. quin.

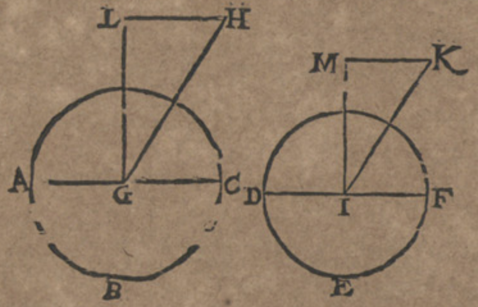
[n] QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo vſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Smiles igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

n 15. quin.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD ſi maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perſpicuum eſt, in ſecunda parte huius propoſ. Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8. huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri ſemper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.



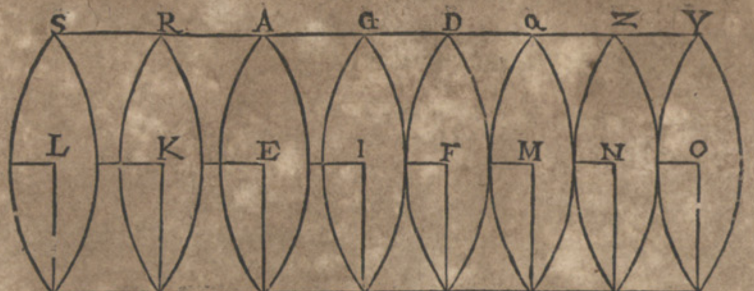
HÆC porro propoſitio, quamuis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cum in demonſtratione aſſumantur axes recti ad baſes. Quocirca etiam hac ratione oſtendemus in ſimilibus conis & cylindris ſcalenis. Sint ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorum baſes circuli ABC, DEF, axes vero GH, IK. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur enim ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti earundem cum ſcalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducanturq; per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana ſecantia baſes lineis rectis AC, DF, quæ diametri baſium erunt. Quo-
o 18. vnde. *niam igitur axes GL, IM, recti ſunt baſibus ABC, DEF, [o] erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad eaſdem recta. [p] Ac*
p 38. vnde. *propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad baſes demiſſæ cadent in AC, DF, communes ſectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter ſe erunt, cum coni & cylindri ſcaleni ſimiles ponantur: Sunt autem &*
q 32. prim. *anguli CGL, FIM æquales, nempe recti, ex defin 3. lib. 11. [q] Reliqui igitur, HGL, KIM, æquales quoq; erunt. Quoniam vero*
r 29. prim. *coni ABCH, ABCL ponuntur eſſe eiuſdem altitudinis erit recta HL, per axium vertices ducta ipſi AC, parallela; [r] ideoq; angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti ſint. Non aliter & reliqui anguli H, K,*
s 4. ſext. *æquales erunt, cum ſint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula ſunt; [s] atq; idcirco erit vt GH, ad GL, ita IK, ad IM; & permutando, vt GH, ad IK ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axem IK, ita eſt AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri ſcaleni ponantur ſimiles. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, vt diameter*
t 12. duode. *AC, ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, ſimiles erunt ex definitione. [t] Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant baſim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) eſt æqualis, vt conſtat ex coroll. propoſ. 11. huius lib Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; ideoq; proportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod eſt propoſitum.*

xi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

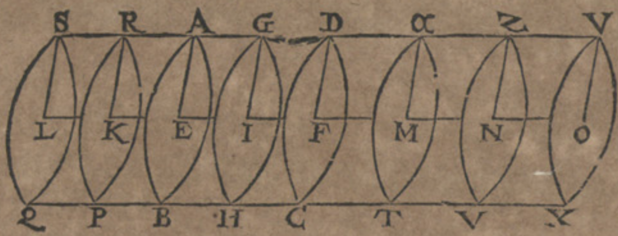
SI cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SECETVR cylindrus ABCD, plano GH, parallelo aduerſus planis AB, CD, quod quidem ſecet axem EF, in I. Dico vt eſt cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita eſſe axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantumlibet: Sumanturque in axe producto quotcunq; rectæ EK, KL, æquales ipſi EI; Item quotcunque rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, deſcribent circulos GH, PQ, QS, Tα, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum SQXY. Quoniam vero tam cylindri SP, PA, AH, ſuper baſes æquales QS, PR, BA, & ſub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales ſunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, ſuper æquales baſes XY, VZ, Tα, CD, & ſub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex eſt axis IL, ipſius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex eſt axis IO, ipſius axis IF. Quoniam autem ſi axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi IO, (multiplici axis IF, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) vt ex propoſ. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit per defin. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axem IF, ſecundam magnitudinem, vt cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.



SCHO-

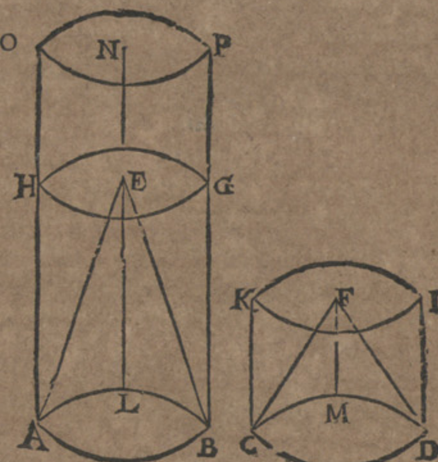
SCHOLIVM.



ETSI hanc propoſitionem Euclides de ſolo cylindro recto demonſtrat; tamen eius demonſtrationem cylindro ſcaleno facile accommodabis, ſi modo adhibeas deſcriptionem cylindri ſcaleni, ſicut in demonſtratione Euclidis aſſumpta fuit cylindri recti deſcriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quieſcens latus circumfertur, ſic quoq; in conis ſcalenis circumferantur ſemidiametri LS, KR, EA, &c. ſemper æquidiſtantes circa centra L, K, E, &c. vna cum recta SY, ſemidiametros coniungente. Hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, vt conſtat ex iis, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de ſectione cylindri.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xi.

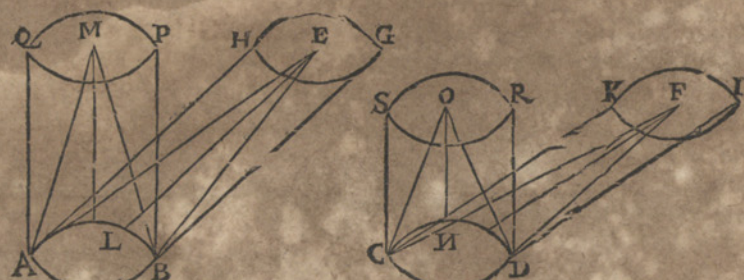
SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.



SINT ſuper baſes æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, ſeu altitudines. (Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines) LE, ME. Dico eſſe conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt eſt altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abſcindaturq; axis EN, æqualis axi ME, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiuſdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. [a] cylindrus AG, ad ipſos eandem habebit proportionem. [b] Eſt autem cylindrus AG, ad cylindrus HP, vt axis, ſeu altitudo LE, ad axem, ſeu altitudinem EN, hoc eſt, altitudinem MF, ſibi æqualem. Igitur & cylindrum AG, ad cylindrum CI, erit quoq;, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. a 7. quint. b 13. duode.

[c] QVIA vero coni ABE, CDF, ſunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; [d] ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat. c 10. duod. d 15 quin.

SCHOLIVM.



HOC idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales AB, CD, coni ABE; CDF, & cylindri ABGH, CDIK. ſcaleni, quorũ altitudines LM, NO. Dico conũ ABE, ad conũ CDF, & cylindrũ ABGH, ad cylindrũ CDIK, eſſe, vt eſt altitudo LM, ad altitudinem NO. Super baſin enim AB, conſtruatur cylindrus rectus ABPQ, ſub altitudine LM; Item ſuper baſin CD, cylindrus CDRS, ſub altitudine NO. [e] Quoniam igitur eſt cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo ad LM, altitudinẽ NO: Eſt autẽ cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Itẽ cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex cor. prop. 11. huius lib Erit quoq; cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum. e 14. duod.

QVONIAM autem coni, [f] cum ſint tertiæ partes cylindrorum, [g] eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoq; conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo vſi ſumus in cylindris, confirmari poteſt, vt perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylyndris ABPQ, CDRS. f 10. duode. g 15. quin.

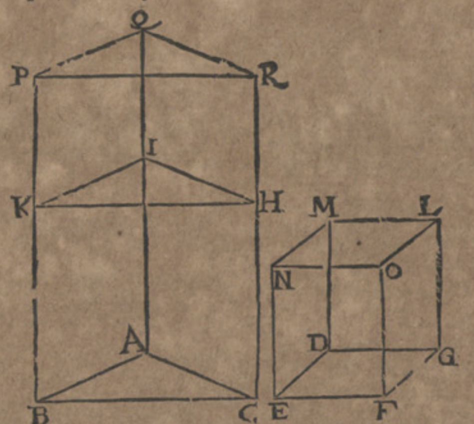
IDEM, concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit ſcalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus ſcalenus ABGH, æqualis ſit cylindro recto ABPQ; ſit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonſtrauit: Erit quoq; cylindrus ſcalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum,

[h] *QVONIAM vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri, [i] cum illi horum ſint tertiæ partes; Erit etiam conus ſcalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod nihilominus oſtendetur eadem ratione, qua vſi ſumus in cylindris, vt manifeſtum eſt.* h 15. quint. i 10. duode.

EADEM quoq; hæc propoſitio conuenit priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. Sint enim ſuper baſes æquales ABC, DEFG, priſmata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides ſub eiſdem altitudinibus. Dico eſſe

priſma

priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namq; inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, priſmatis ABCHIK, ad baſin ABC, perpendiculares, ita vt BK, ſit altitudo priſmatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, ſumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini priſmatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur priſma HIKPQR, eiuſdem altitudinis cum priſmate EL. Eruntq; priſmata HIKPQR, EL, cum habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll. 2. propoſ. 7. huius libr. k 7. quin. [k] *Ac propterea priſma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia vero ex ſcholio propoſ. 25. lib. 11. priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, eſt vt planum BI, ad planum KQ;* l 1. ſext. [l] *Et vt planum BI, ad planum KQ, ita eſt recta BK, ad KP; erit priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, hoc eſt, ad priſma EL, vt BK, altitudo priſmatis ABCHIK, ad KP, altitudinem priſmatis HIKPQR, hoc eſt, priſmatis EL. Quod eſt propoſitum.*



QVOD ſi inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, non ſint perpendiculares ad baſin ABC, conſtituendum erit ſuper baſin ABC, aliud priſma, cuius inſiſtentes ſint perpendiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis ABCHIK. Nam cum ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinem, & baſin, ſint æqualia, ſitq; priſma conſtitutum ad priſma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem; erit & priſma ABCHIK, ad priſma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.

m 15. quin. [m] *QVONIAM vero pyramides eandem habent proportionem cum priſmatis,* [n] *quod illæ ſint horum tertiæ partes:*
e 10. duode. *Perſpicuum eſt, ita quoq; eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem.*

EADEM prorſus eſt ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt; atq; ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

HÆC omnia eodem fere modo demonſtrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

OMNIA quoq; hæc facile conuerti poſſunt hoc modo.

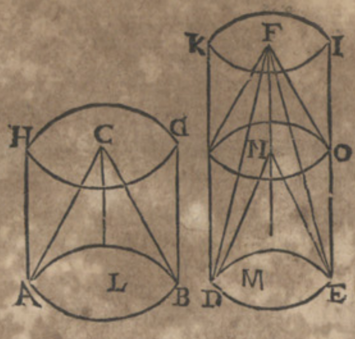
CONI & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales,

NAM alioquin pars æqualis foret toti, vt in conuerſo propoſ. 31. lib. 11. oſtenſum eſt.

xii.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

ÆQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.



SINT æquales coni ABCD, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes altitudinesve LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum cylindri ponantur quoq; æquales; erunt & baſes æquales, ex corollar. propoſ. 11. huius libr. Quare erit vt baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atq; altitudines ſunt reciprocæ.

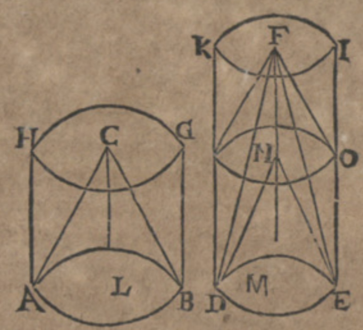
QVOD ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, vt in ſcholio propoſ. 15. libr. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK;
a 7. quint. [a] erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO.
b 11. duode. [b] Eſt autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines:
c 14. duod. [c] Item vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſint baſes & altitudines.

IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH,
d 10. duod. DEIK, æquales, [d] cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF, conſtituantur duo coni, vt in figura.

SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit vt baſis AB, ad baſin, DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſit. 11. huius lib.

QVOD

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN, [e] Eſt autem vt baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: [f] Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales: erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrũ DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; [g] Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIk, æqualis erit. e 11. duodecimi. f 14. duodecimi. g 9. quin.



AT vero in conis hæc erit demonſtratio. Si conorum ABC, DEF, baſes & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIk, cum eædem ſint baſes, altitudineſque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt oſtenſum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo conos eſſe æquales, quo oſtendimus cylindros æquales eſſe. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

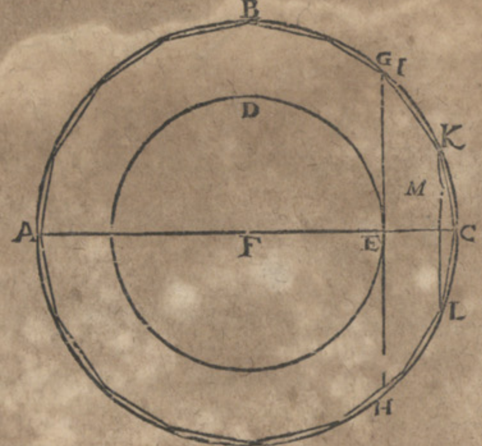
NON difficile erit idem oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoque recti eaſdem cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare vt oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eædem ſint baſes, & altitudines rectorum & ſcalenorum. Quare, vt demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. inter ſe quoque erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus.

PROBL. 1. PROPOS. 16. xiij.

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oporteatque in maiori ABC, inſcribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, ſecans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior eſt arcu GC, ſi ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex reſiduo BC, dimidium BI, & ex reſiduo IC, dimidium Ik, & ſic deinceps; [a] relinquetur tandem minor arcus quam CG. Sit igitur iam arcus Ck, arcu CG, minor, & ſubtendatur recta Ck. Dico rectam Ck, eſſe vnum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuiſus eſt quadrans BC; nec non ſemicirculus AHC, in totidem partes, quot continet ſemicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ ſubtendantur, [b] quę æquales quidem erunt ipſi rectæ Ck, eo quod arcus arcui Ck, æquales ſubtendant: Deſcriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita oſtendetur. Ex k, ad AC, demittatur perpendicularis kL, ſecans ipſam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, kME, recti ſunt; [c] erunt rectæ GH, kL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DE, in ſolo puncto E; recta kL, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipſum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta Ck, quæ longius à circulo DE, abeſt, quam kL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inſcripti, cum æqualia ſint lateri Ck, [d] ideoque æqualiter cum Ck, à centro F, diſtent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo, &c. Quod erat faciendum. a 1. dec. b 29. ter. c 29. pri. d 14. ter.



COROLLARIVM.

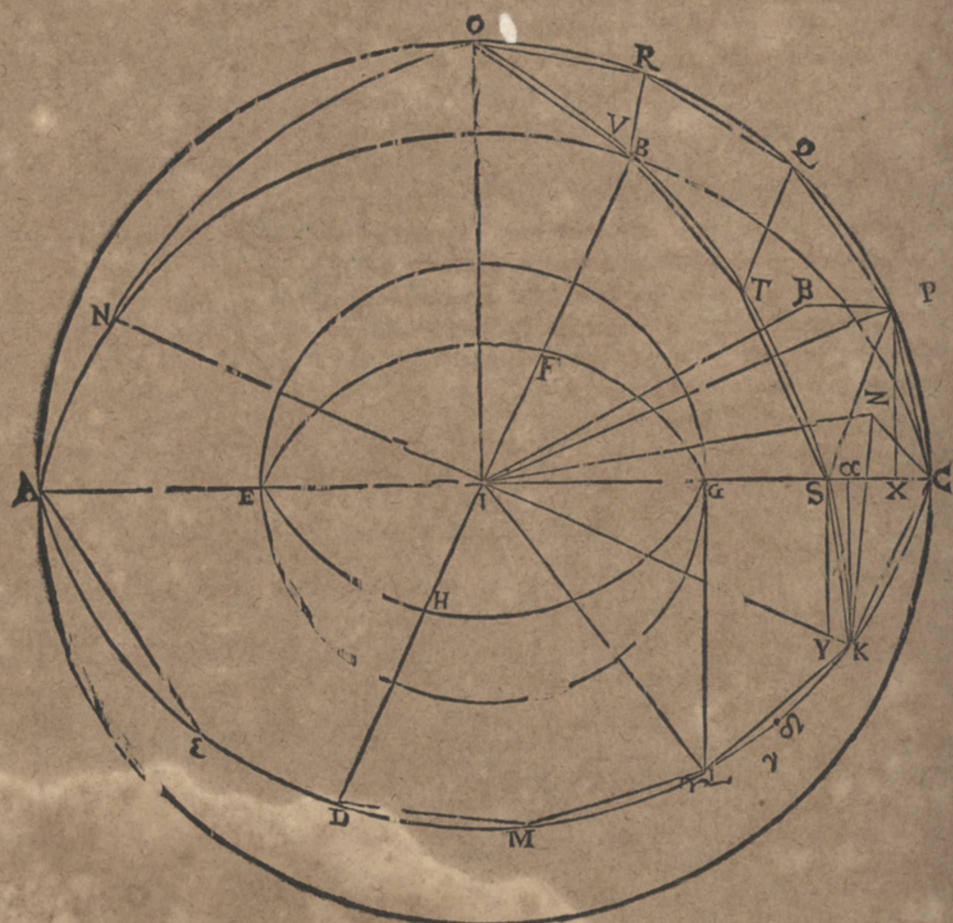
HINC eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed tota extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea kL, quæ cum ducatur ab extremo puncto k, lateris Ck, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum DE.

xiv.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſphærę ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inſcribere ſolidum polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorem ſphæram EFGH. Secentur ambæ ſphærę plano aliquo per centrum, ſintque communes ſectiones factæ in ſphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphærę, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphærę deſcribuntur, circumducti congruent ſectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias ſectionum ſunt æquales, cum ducantur ex



centro ſphærarum, ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, ſeſe in cētro I, ſecantes ad angulos rectos, vt ſint quadrātes A B, B C, C D, D A, &c. [a] Deinde in maiori circulo A B C D, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH.

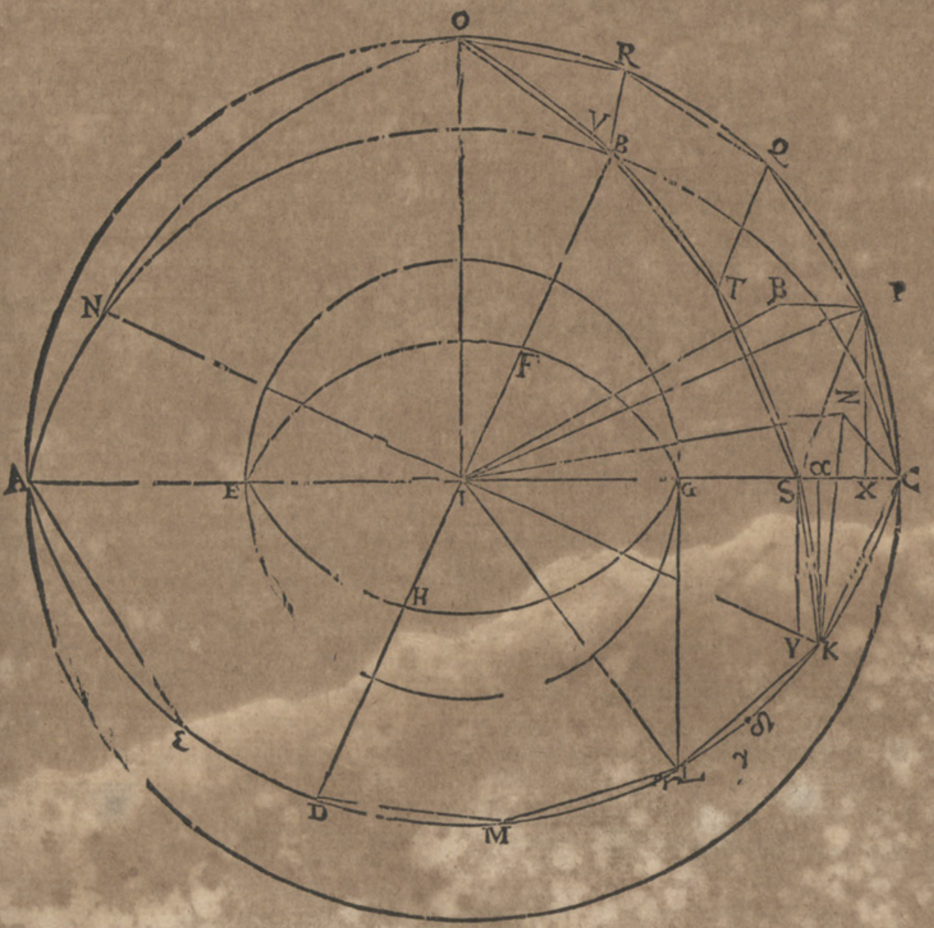
a 16. duodecimi.

Quod quidem vt facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis G γ, ad circumferentiam vſque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tanget in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectæ G γ, [b] applicetur in circulo ABCD, recta æqualis A ε. Quia vero ſi arcui C γ, intelligatur ſubtendi recta, vt fiat triangulum GC γ, [c] latus C γ, oppoſitum maiori angulo, nempe recto, maius eſt latere G γ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta C γ, maior recta A ε; ac proinde arcus C γ, arcu A ε, maior erit, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. Abſcindatur ergo arcus C δ, arcui A ε, æqualis. Quod ſi ex quadrante CD, dimidium auferatur DL & ex reliquo CL, dimidium LK, & ſic deinceps; [d] relinquetur tandem arcus minor arcu C δ, ſeu arcu A ε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritque recta C K, ſubtenſa minor quam recta A ε, hoc eſt, quam G γ, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, eſſe vnum latus polygoni æquilateri inſcribendi. Nam cum recta ſubtendens arcum C δ, minorem arcu C γ, non tangat circulum EFGH, vt ex demonſtratione præcedentis propoſ. patet; multo minus recta C K, ſubtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tanget. Rurſus ducta diametro K N, [e] erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH perpendicularis IO, occurrens ſuperficiei ſphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, [f] quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes ſectiones, circulos, vt iam dictū eſt, quorum ſemicirculi ſint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. [g] quadrantes erunt OC, OK; atque adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales ſint, quod eorum diametri ſint & ſphæræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales diſtribuatur, in quot diuiſus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; [h] Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus ſubtenſæ, nimirum CK, KL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittātur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, [i] quæ in cōmunes ſectiones AC, NK, cadēt; [k] eruntq; inter ſe parallelæ.

b 1. quar.
c 19 pri.
d 1. dec.
e 12. vndecimi.
f 18. vndecimi.
g ſchol. 21. ter.
h 29. ter.
i 38. vndecimi.
k 6. vndecimi.

QVO-

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti ſunt, ex deſin. 3. lib. 11. [l] & an- l 27. ter.
guli PCX, SKY, æquales, quod & æquales ſint peripheriæ AOP, NOS, quibus inſiſtunt; (Nam ſi ex ſemicircu-
lis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.)
Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem &
latera PC, SK, rectis angulis oppoſita, æqualia. [m] Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqua- m 26. pri.
lia erunt. Quare cum rectæ PY, SY, æquales ſint & parallelæ; ſi connectatur recta XY, [n] æquales quoque e- n 33. pri.
runt & parallelæ PS, XY, inter ſeſe. [o] At quia & rectæ CK, XY, parallelæ ſunt, quod latera IC, IK, proportionali- o 2. ſex.
ter ſecta ſint. (Si enim ex ſemidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CK, KY, relinquentur &
IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK. [p] Erunt parallelæ quoque PS, CK, inter ſe, cum p 9. duo-
vtraque parallela ſit ipſi XY, [q] ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS; in eodem cum ipſis plano exiſtent. To- decimi.
tum igitur quadrilaterum CKSP, in vno erit plano. Quod ſi ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, q 7. vnde-
perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, oſtendemus ſimiliter CK, QT, eſſe parallelas; atque adeo cimi.
ipſas PS, QT, inter ſe parallelas eſſe, cum eidem CK, ſint parallelæ, totumque quadrilaterum PSTQ, in vno eſ-
ſe plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum QTVR. [r] Eſt autem & triangulum RVO, in pla- r 2. vnde-
no. Si igitur eadem conſtructio exhibeatur ſuper reliqua latera KL, LM, MD, ductis ſcilicet quadrantibus OL, cimi.
MO, OD, necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemiſphęrio, vt tota ſphæra maior repleatur quadrilate-
ris, & triangulis, quæ ſimilia ſint prædictis inter quadrantes OC, OK, ſuper latus CK, conſtructis, inſcriptum e-
rit in ſphæra maiori ſolidum polyedrum circumſcriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico
non tangere ſphæram minorem EFGH.



DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Ca-
dere autem perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in ſcholio ſequenti oſtendemus. Quoniam igitur
ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; [s] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & qua- s 47. pri.
dratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia
ſint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto communi
quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoque & ipſæ rectæ ZC, ZK, æquales. Simi-
liter oſtendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales eſſe & inter ſe & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex
Z, ad interuallum ZC, deſcriptus per quatuor puncta C, κ, S, P, tranſibit. Eademque ratione circa reliqua qua-
drilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos deſcribi poſſe, demonſtrabimus. Quoniam vero, vt
poſtea oſtendemus, angulus CZκ, obtuſus eſt; [t] erit quadratum rectæ Cκ, maius quadratis rectarum ZC, ZK; t 12. ſec.
ideoque cum hæc quadrata æqualia ſint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis kα. Cum igitur AC, dupla ſit ipſius AI, & Aα, ma-
ior ſit, quam AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quam ob rem cum ſit, [u] vt AC, ad Aα, ita rectangulum ſub u 1. ſex.
AC, αC, ad rectangulum ſub Aα, αC, quod baſes horum rectangulorum ſint AC, Aα, & eadem altitudo
αC; erit quoque rectangulum ſub AC, αC, minus duplo rectanguli ſub Aα, αC. [x] Eſt autem rectangulum ſub x 17. ſex.
AC, αC, æquale quadrato rectæ CK, & rectangulũ ſub Aα, αC, æquale quadrato rectæ κα; quod recta Cκ, inter
AC, αC, ſit media proportionalis; & recta κα, inter Aα, αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi n. connecteretur

recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ $K\alpha$. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ $K\alpha$, maius quadrato rectæ ZC. [y] Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum $I\alpha$, αK; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum $I\alpha$, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, maius quadrato reliquo rectæ $I\alpha$; ideoque recta IZ, maior quam recta $I\alpha$. Quapropter cum punctum α non tangat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta $K\alpha$, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans eandem ſphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint à ſphæra EFGH, quam punctum Z, vt mox oſtendemus, non tanget planũ CKSP, ſphęram EFGH.

y 47. pri.

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta $I\gamma$, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta $C\gamma$: [z] Eſt autẽ CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtuſus ſit, vt mox demonſtrabitur; Multo maior erit $G\gamma$, quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ $G\gamma$, maius quadrato rectæ ZC. [a] Quia vero quadratum rectæ $I\gamma$, æquale eſt quadratis rectarum IG, $G\gamma$; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; ſunt autem quadrata rectarum $I\gamma$, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, $G\gamma$, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Dempto ergo illinc quadrato rectæ $G\gamma$, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, ſit ſphærę minoris EFGH, ſemidiameter, exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

z 19. pri. a 47. pri.

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis $I\beta$, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, vt demonſtratum eſt; Connexis autem rectis βP, IP, cum angulis $I\beta P$, rectus ſit, ex 3. defin. lib. 11. [b] erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum $I\beta$, βP. Quia vero & quadratum rectæ IC, (quod æquale eſt quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP, æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum $I\beta$, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia; Eſt autem quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior ſit, quam linea βP, vt poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ $I\beta$, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoq; & linea $I\beta$, maior quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum β, extra ſphæram, EFGH, exiſtet, quam punctum Z: propterea q; multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget ſphæram maiorem EFGH. Eodem modo demonſtrabimus, quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſſint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

b 47. pri.

COROLLARIVM.

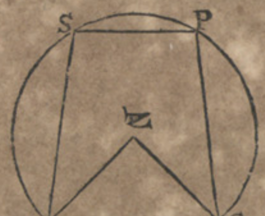
EX ijs, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in vna ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium, dictorum poliedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; vt conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium: Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cum ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoq; polyedrum vnius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidiametrorum, atque adeo diametrorum ſphærarum, [c] cum ſemidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

c 15. quin.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonſtranda.

PRIMVM itaque oſtendendum eſt, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, eſſe obtuſum. Quod vt commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura ſuperiori eſt vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, ſimilia ſint.)

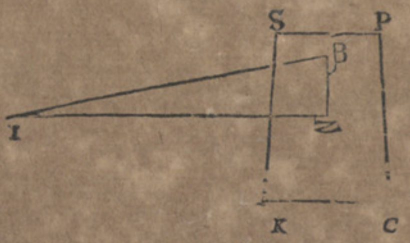


Eſt autem IK, maior, quam IY; [d] erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis ſit oſtenſa ipſi SP; erit quoque KC, maior quam SP, Ac propterea in hac figura, arcus CK, maior erit arcu SP, ex ſcholio propoſ 28. lib. 3. [e] Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, ſint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipſi KC, lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Atque idcirco quilibet arcuum C, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque à ſemicirculo ſuperabitur; ac proinde multo maius ſegmentum SP, minus erit ſemicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non eſſe in illis ſegmentis, ſed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione oſtendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demiſſas, qualis eſt $K\beta$, cadere intra quadrilatera; necnon & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipſum. Quia igitur arcus CK, quadrante maior eſt; angulus CZK, obtuſus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3.

d 14. quin. e 28. ter.

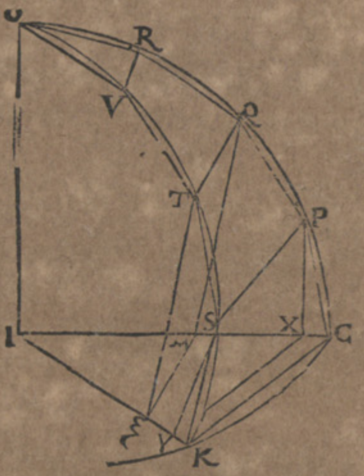
SECVN

SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. [f] Erit latus illi oppoſitum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo IθZ, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius à centro I, diſtat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.



f 19. pri.

TERTIO, ac vltimo probandum eſt, rectam ZC, maiorem eſſe recta βP. Quod vt aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam PS, maiorem eſſe recta QT. Deſcribatur igitur pars ſuperioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo eſt triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, [g] quæ in communes ſectiones IC, IK, cadent, [h] eruntque inter ſeſe parallelæ, vt de rectis PX, SY, dictum eſt. Quod ſi adiungatur recta μξ; erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum oſtenſum fuit parallelas eſſe & æquales PS, XY. [i] Quia vero μξ, ipſi CK, parallela eſt; quod latera IC, IK, proportionaliter ſint ſecta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY; [k] erunt quoq; μξ, XY, parallelæ. Quare erit ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ, Eſt autem IY, maior quam Iξ. [l] Igitur & YX, maior erit quam ξμ; Ac proinde & PS, quæ æqualis eſt ipſi XY, maior erit quam QT, quæ æqualis eſt ipſi ξμ.

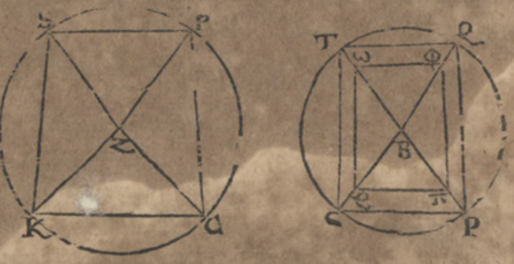


g 38. vndecimi.
h 6. vndecimi.
i 2. ſex.
k 30. pri.
l 14. quin.

HOC ergo demonſtrato, deſcribantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egrediantur que è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & baſis KC, maior eſt baſe PS; [m] erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam baſes KS, CP, baſibus ST, PQ, ſunt æquales [n] erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur æqualis eſt recta ZC, recta βP.

m 25. pri.
n 8. pri.

SIT deinde ZC, minor, quam βP. Et abſcindantur βπ, βρ, βω, βφ, ipſis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturq; rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ, [o] quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris ſectæ ſunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ, ad ρπ. Cum ergo βS, maior ſit quam βρ, [p] erit & SP, maior quam ρπ. Eademque ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, πφ, φπ; Ac propterea cum PS, minor ſit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ βπ, βρ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, ſint æquales; [q] erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quod tam illi, quam hi ſunt quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta ZC, quam βP: Sed neque æqualis eſt oſtenſa; Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.



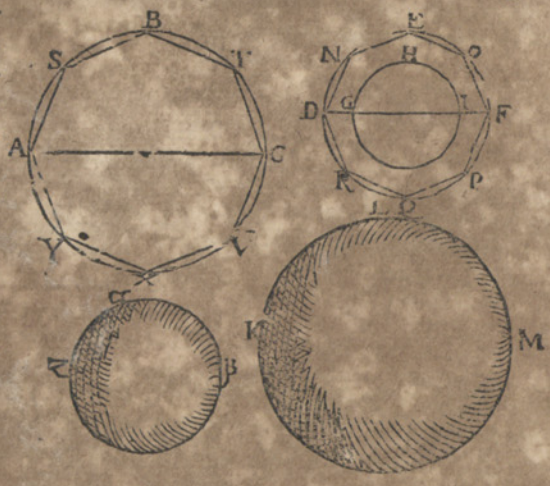
o 2. ſex.
p 14. quin.
q 25. pri.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

xv.

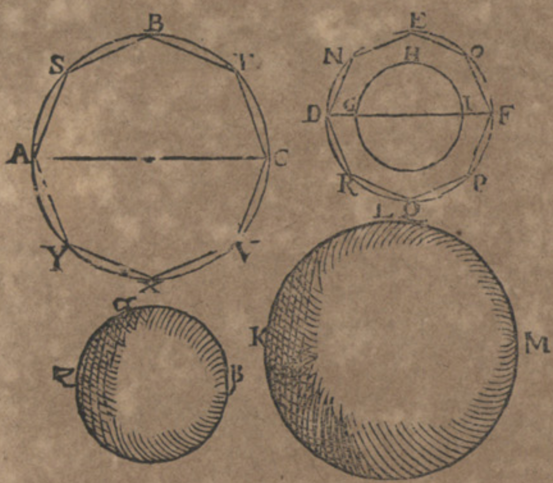
SPHÆRÆ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum,

SINT duæ ſphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico ſphæram ABC, ad ſphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphæra ABC, ad aliam ſphæram GHI, minotem, vel KLM, maiorem, quam DEF, triplicatam proportionẽ diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primũ ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque ſphæra GHI, concentrica ſphæræ DEF. [a] Inſcribatur in ſphæra maiori DEF, polyedrũ DNEOFPQR, non tangens minorem ſphæram GHI; Atque huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Eſt autem per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum ſphæra ABC, maior ſit polyedro ASBTCVXY, [b] erit & ſphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.



a 17. duodecimi.
b 14. quin.

HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionẽ triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra kLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Z$\alpha\beta$. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Z$\alpha\beta$, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra kLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, maior quam ſphæra Z$\alpha\beta$. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Z$\alpha\beta$, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram kLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.



COROLLARIVM.

HINC fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonſtratum eſt.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM,

Et Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

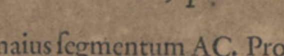
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Producta autem BA, ad D, ſit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur enim ſuper CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipſi DE, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur Ik, parallela ipſi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, eruntque ex coroll. propoſ. ;. lib. 2. AI, kG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum CM, ſub AB, CB, æquale ipſi kG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB, & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: [c] Eſt autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad Ak, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius Ak. [d] Quoniam autem Ak, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus Ak, IG. Additis igitur æqualibus CM, kG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum ſit quadrati AI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineæ AD, erit & gnomon OPQ, eiuſdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, ſi gnomoni OPQ, addatur ipſum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



a 3. def. ſexti.
b 17. ſex.
c 1. ſex.
d 43. pri.

ALITER. Ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum eſt quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. [e] Eſt autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis ſub AB, AC, & ſub AB, BC, comprehenſis; Et rurſus, quod ſub AB, AC, æquale eſt ei, quod ſub AD, AC, bis; (ſicut enim AB, ipſius AD, eſt dupla, [f] ita quoque erit rectangulum ſub AB, AC, rectanguli ſub AD, AC, duplum, cum vtriuſque rectanguli eadem ſit altitudo AC. Ac propterea rectangulum ſub AD, AC, bis ſumptum æquale erit rectãgulo ſub AB, AC.) [g] Quod vero ſub AB, BC, æquale eſt quadrato rectæ AC, cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiuſdem rectæ AD. [h] Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale ſit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis; Erit & quadratũ rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.



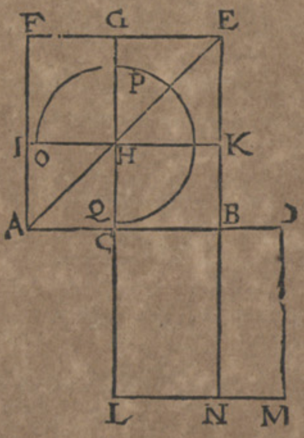
e 2. ſec.
f 1. ſex.
g 17. ſex.
h 4. ſec.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ à principio, rectæ.

DIVISA ſit recta AB, in C, poſſitque quintuplum ſegmenti AC; ſumatur autem ipſius AC, dupla CD,

quæ, vt poſt oſtendemus, maior erit reliquo ſegmento BC. Dico ſi CD, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmensum eſſe CB, reliquam partem prioris lineæ. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum BF, in quo ducta diametro A E, ex C, ducatur ipſi A F, parallela CG, ſecans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipſi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; E B, ad N. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum *BF*, quintuplum ponitur quadrati C I; Si tollatur quadratum C I, relinquetur gnomon O P Q, eiuſdem quadrati CI, quadruplus: Eſt autem & quadratũ C M, quadruplum quadrati C I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla ſit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato C M, æqualis erit. Rurſus quoniam CD, ponitur ipſius AB, dupla; eſtque L C, ipſi C D; & C H, ipſi A C, æqualis; erit & L C, ipſius C H, dupla. [a] Cum igitur ſit vt L C, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum C K; erit quoque illud huius duplum: [b] Eſt autem CK, ipſi HF, æquale. Æquale igitur eſt LB, ipſis C K, H F; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo ſunt tres rectæ CD, CB, BD; eſtque rectangulum B M, ſub C D, B D, comprehenſum æquale, ipſi KG, quadrato rectæ *CB*. [c] Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rem ex definitione, recta C D, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum CB.



a 1. ſex.

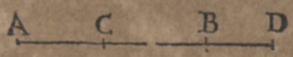
b 43. pri.

c 17. ſex.

d 4. ſec.

ALITER. Quoniam quadratũ rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; [d] eſtq; quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarũ CB, AC, vna cũ rectangulo ſub *AC, CB*, bis; Erunt & quadrata rectarũ CB, AC, vna cũ rectangulo ſub AC, CB, bis, quintuplũ quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratũ rectæ CB, & rectangulũ ſub AC, CB, bis, quadruplum eiuſdẽ quadrati rectæ AC; Eſt autem & quadratum rectæ C D, eiuſdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Æquale igitur eſt quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulũ ſub AC, CB, bis æquale ſit rectangulo ſub CD, CB; (ſicut enim recta CD, dupla eſt rectæ AC, [e] ita quoque duplum erit rectangulum ſub C D, C B, rectanguli ſub AC, CB; cum vtriuſque rectanguli eadem ſit altitudo CB; Ac propterea rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectangulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: [f] At quadratum rectæ CD, æquale eſt rectangulis ſub CD, CB, & ſub C D, BD; Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectangulis ſub CD, *CB*, & ſub *CD*, CB, æquale erit rectãgulo ſub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub CD, CB relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo ſub CD, BD; [g] ideoque erit vt C D, ad CB, ita *CB*, ad D B. Quare ex defin. recta C D, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtq; ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplũ poſſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 1 ſexti.



f 2. ſec.

g 17. ſex.

L E M M A.

QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, [h] *cum æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub A C, C D, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod eſt propoſitum.*

h 4. ſecun.

iij.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

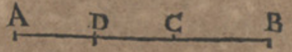
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.



SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum A C, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ B D, quadruplum eſſe quadrati rectæ CD. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum A E, in quo diameter B F. Deinde ex C, D, ducantur ipſis AF, *BE*, parallelæ CG, DH, ſecantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipſis *AB*, EF, parallelæ LM, NO, quæ ſecent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, *BD*. Quoniam igitur recta *AC*, dupla eſt rectæ *CD*, erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Eſt autem rectangulum CE, æquale quadrato L G. (Nam cum ſit vt

ſit vt AB,ad AC,ita AC,ad CB, [a] erit rectangulum ſub AB, CB, nempe CE,æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipſi LG.) Igitur & CE,quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia ſunt quadrata NH,PQ, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earum latera HK,IQ, æqualia; [b] ac proinde rectæ EO,OM, ipſis oppoſitæ æquales erunt. [c] Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt. [d] Eſt autem IO, ipſi ID, æquale. Ergo & QE,eidem ID, ęquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO; totus gnomon RST, rectangulo CE,erit æqualis. Cum igitur CE, oſtenſum ſit quadruplum quadrati PQ; erit etiam gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ. quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO,ex recta BD, quintuplum quadrati PQ,ex recta CD. a 17. ſex. b 34. pri. c 36. pri. d 43. pri.

ALITER. Cum AC,diuiſa ſit bifariam in D,& ei addita CB, [e] erit rectangulum ſub AB, BC, vna cum quadrato rectę CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectangulum ſub AB, BC, quadruplum eſt quadrati rectę CD; (Nam cum ſit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [f] erit rectangulum ſub AB,BC,æquale quadrato rectę AC: quod, cum ex ſcholio propoſ.4. lib.2. quadruplum ſit quadrati rectę CD; erit & rectangulum ſub AB,BC, quadruplum eiuſdem quadrati rectę CD.) Ac propterea rectangulum ſub AB,BC, vna cum quadrato rectę CD, quintuplum quadrati rectę CD. Igitur & quadratum rectę BD,quintuplum erit quadrati rectę CD. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur,minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur,quadrati. Quod erat oſtendendum. e 6. ſec. f 17. ſec.



SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonſtrabimus quoque cum Campano ad hunc modum,

SI recta inæqualiter ſecetur;& minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſſit eius,quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

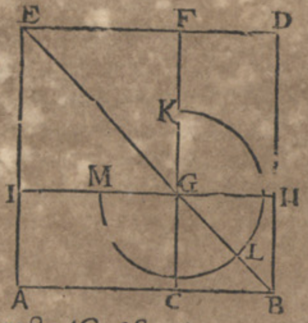
SIT recta AC, diuiſa inæqualiter in C,cuius maius ſegmentum AC, bifariam ſectum ſit in D; ſitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuiſam eſſe in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propoſ. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex ſcholio propoſ.4.lib.2. Eſt autem & gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus. (cum enim quadratum DO, rectæ BD,quintuplum ponatur quadrati PQ,ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST,eiuſdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG: At gnomoni RST, æquale eſt rectangulum CE, vt ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato LG, rectæ AC,æquale erit idem rectangulum CE,ſub AB,BC,comprehenſum: [g] Ac proinde erit, vt AB,ad AC,ita AC,ad CB. Quocirca ex definitione,ſecta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.

ALITER, Cum AC, diuiſa ſit bifariam in D, & ei addita CB, [h] erit rectangulum ſub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, deſcriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD,deſcripti; erit & rectangulũ ſub rectis lineis AB, BC, deſcriptum,vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD; rectangulum ſub AB, BC,quadruplum erit quadrati rectæ CD: Eſt autem eiuſdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex ſcholio propoſ.4. lib.2. Igitur quadrato rectæ AC,æquale eſt rectangulum ſub AB, BC. [i] Quamobrem erit,vt AB,ad AC, ita AC,ad CB; Ac proinde ſecta erit AB,in C,extrema ac media ratione, ex definitione. g 17. ſex. h 6. ſec. i 17. ſex.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque ſegmentum maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB,BC, ſimul tripla eſſe quadrati rectæ AC. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD,in quo ducta diametro BE, ducatur ex C,ipſi BD,parallela CF, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipſi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC,AC, ex coroll. propoſ.4.lib.2. Quoniam igitur eſt,vt AB,ad AC,ita AC,ad CB; [a] erit rectangulum ſub AB, BC, nempe AH, æquale ipſi IF, quadrato rectæ AC.Cum ergo AH,æquale ſit ipſi CD; erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH,duplus quadrati IF; Ac proinde addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectę BC, eiuſdem quadrati IF, rectæ AC, triplum. a 17. ſex.



ALITER. Quoniam eſt,vt AB,ad AC,ita AC,ad CB; [b] erit rectangulum ſub *AB*,BC, æquale quadrato rectę *AC*; Atque adeo rectangulum ſub *AB*,BC,bis,vna cum quadrato rectę AC, triplum quadrati rectę *AC*. [c] Sunt autem quadrata rectarum *AB*,BC,ſimul æqualia quadrato rectę *AC*,vna cum rectangulo ſub *AB*,BC,bis. Igitur & quadrata rectarum *AB*,BC tripla ſunt quadrati rectæ *AC*. Quocirca ſi recta ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata,tripla ſunt eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum. b 17. ſex. c 7. ſec.

SCHOLIVM.

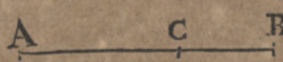
CONVERSVM etiam huius verum eſt, videlicet.

SI re-

SI recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti; Recta illa extrema ac media ratione ſecabitur.

SECTA ſit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris ſegmenti BC, vtraque ſimul tripla ſint quadrati maioris ſegmenti AC. Dico rectam AB, ſectam eſſe extrema ac media ratione. Conſtructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla ſint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus eiuſdem quadrati IF: Eſt autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla ſunt quadrati IF; Ac proinde cum æqualia ſint AH, & CD, erit AH, ipſi IF, æquale. Qua-
d 17. ſex. *propter cum rectangulum AH, ſub AB, BC, æquale ſit quadrato IF, rectæ AC; [d] erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac propterea AB, diuiſa erit in C, extrema & media ratione.*

e 7. ſecun. *ALITER. cum quadrata rectarum AB, BC, tripla ſint quadrati rectæ AC; [e] Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectangulo ſub AB, BC, bis; erit & quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo ſub AB, BC, bis, triplũ quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum ſub AB, BC, bis duplum quadrati rectæ AC. Et proinde rectangulũ ſub AB, BC, ſemel, æ-*

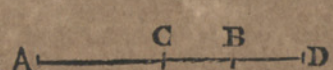


f 17. ſex. *quale quadrato rectæ AC. [f] Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, ſecta erit extrema ac media ratione.*

EX Franciſco Maurolyco demonſtrabimus quoque theorema quod ſequitur.

SI recta linea ſecundum extremam ac mediam rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentum, quintuplum poteſt eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur quadrati: Et ſi recta linea inæqualiter ſecetur, totaque aſſumens minus ſegmentum poſſit quintuplum eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt.

SIT primum recta AB, ſecta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis. Di-
g 8. ſec. *co quadratum ex AD, quintuplum eſſe quadrati ex AC, maiore ſegmento. [g] Quoniam enim quadratum ex AD, æquale eſt re-*
h 17. ſex. *ctangulo ſub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC: [h] Rectangulum autem ſub AB, BC, æquale eſt quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, ſint continue proportionales.) erit rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum ſub AB, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiuſdem quadrati ex AC, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.*



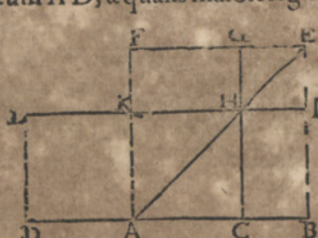
SIT deinde recta AB, ſecta inæqualiter in C, cui addatur rectæ BD, minori ſegmento BC, æqualis, ſitque quadratum ex
i 8. ſec. *AD, quadrati ex AC, maiori ſegmento quintuplum. Dico AB, in C, ſectam eſſe extrema ac media ratione. [i] Quoniam enim quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum ſub AC, BC, quater, vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum ſub AB, BC, quater, quadru-*
k 17. ſex. *plum quadrati ex AC: hoc eſt, rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato ex AC. [k] Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, ſecta eſt extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

iv.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

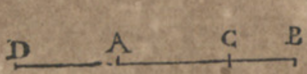
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori ſegmento AC. Dico rectam BD, ſecari in A, extrema ac media ratione, eſſeque maius ſegmentum AB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipſi BE, parallela CG, ſecans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipſi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipſi AF, parallela DL, occurrens ipſi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur eſt vt AB, ad AC, ita



a 17. ſex. AC, ad CB; [a] Erit rectangulum IF, contentum ſub AB, BC, æ-
b 36. pri. quale quadrato CK, rectæ AC. [b] Eſt autem CK, ipſi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipſi AL; additoque communi BK, erit rectangulum BL, contentum ſub BD, DA, æ-
c 17. ſex. quale quadrato BF, rectæ AB; [c] Ac proinde erit vt BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum AB.

ALITER. Quoniam eſt vt AB, ad AC, hoc eſt, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo vt DA, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc eſt, ad AD. Secta igitur eſt BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea



ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

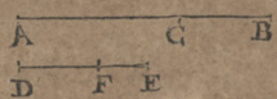
SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum AB, minus autem ſegmentum AD, & ex maiori ſegmento AB, detrahatur recta AC, æqualis minori ſegmento AD. Dico maius ſegmentum AB, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſſe rectam AC, quæ æqualis eſt minori ſegmento AD. Facta enim prioris figuræ conſtructione, cum ſit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD, [d] *erit rectangulum BL, contentum ſub BD, AD, æquale qua-* d 17. ſex.
drato BF, rectæ AB; & ablato communi BK, erit AL, æquale ipſi IF; [e] *Eſt autem AL, ipſi CK, æquale. Æquale igitur eſt* e 36. pri.
IF, contentum ſub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC; [f] *Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, ſecta eſt in C,* f 17. ſex.
extrema ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt AC, minus vero ſegmentum recta CB. Quod eſt propoſitum.
ALITER. Quoniam eſt vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc eſt, ad AC, detractam ex AB;
[g] *erit quoque ita AD, reliqua ipſius BD, hoc eſt, AC, ad CB, reliquam ipſius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc eſt, vt AB, ad AC;* g 19. quin.
Ac propterea diuiſa erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS & hoc demonſtrabimus, quod ſequitur.

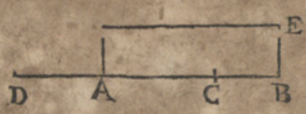
SI linea ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti: Erit quoque dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ.



DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, ſitque DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris ſegmenti AC. Dico DE, in F, ſecari extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum eſſe DF. Cum enim ſit vt AB, tota ad DE, totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum vtrobique ſit proportio dupla; h 19. quin.
[h] *erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam; Ac proinde & CB, dupla erit ipſius FE.* [i] *Quoniam vero eſt, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Eſt autem ex defin. lineæ ſectæ extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, ſecta erit in F, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.* i 15. quin.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vj.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; Vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.



SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema ac media ratione. Dico vtrumque ſegmentum AC, CB, eſſe lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori ſegmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum eſt quadrati rectæ AD; habebit
quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [b] Qua- a 1. tertij-dec.
re commenſurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea que ipſæ rectæ CD, AD, commenſurabiles quoque exiſtent, ſaltem potentia: Eſt autem AD, Rationalis, cum ſit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, nõ habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportio- b 6. dec.
nem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) [c] erũt rectæ CD, AD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationa- c 9. dec.
les potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum
commenſurabilis; [d] erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome. d 74. dec.
RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento ſub AB, CB; cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad
CB; [e] erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum e 17. ſex.
rectangulum AE, applicatum ſecundum lineam Rationalem AB, [f] facit alterum latus BE, hoc eſt, rectam CB, f 98. dec.
illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

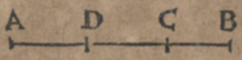
SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano oſtendemus.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuiſa in C, ſitque maius ſegmentum AC, linea Rationalis. Dico minus ſe-
gmentum CB, eſſe Apotomen. Diuiſa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipſius Rationalis AC, Rationalis, cum ſit ipſi g 3. tertij-
AC, commenſurabilis. [g] *Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum eſt quadrati rectæ CD; habebunt quadrata recta-* dec.
rum BD,

h 6. dec. *rum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum;* [h] *ac propterea commenſurabilia exiſtent. Quare & ipſæ rectæ BD, CD, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum igitur CD, ſit Rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde ſi a Ra-*



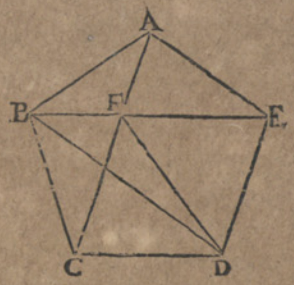
i 74. dec. *tionali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commenſurabilis;* [i] *erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*

vij. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps ſint, æquales A, B, C. Dico ipſum pentagonum eſſe æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi ſe interſecant rectæ BE, AC, recta ducatur ED. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; [a] erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales. [b] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia ſint oſtenſa latera BE; BD; Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rurſus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi. [c] Erit & baſis BE, baſi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales ſint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; [d] erunt quoque latera BF, AF, æqualia: Ac propterea ſi ipſa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera FE, ED, trianguli FED, æqualia ſint lateribus FC, CD, trianguli & baſis communis FD; [e] erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cum angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

a 4. pri.
b 5. pri.
c 4. pri.
d 6. pri.
e 8. pri.



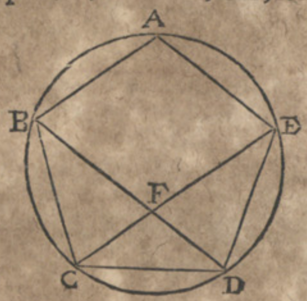
SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD; trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypo-
f 4. pri. theſi; [f] Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [g] Sunt autem & anguli BED, BDE, æqua-
g 5. pri. les, quod æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

viij. *THEOR. 8. PROPOS. 8.*

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, qui duobus angulis ſunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, ſe mutuo ſecãtes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, maioraq; earum ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pentagoni. [a] Deſcripto enim circulo circa pentagonum; [b] erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; [c] Erunt & baſes DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, ſint æquales, [d] & ipſis æqualis ſit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: [e] Eſt autem & angulus BCE, eiuſdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, ſit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales ſunt: [f] Ideoque

a 14. quar.
b 28. ter.
c 4. pri.
d 32. pri.
e 33. ſex.
f 6. pri.



g 27. ter. recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. [g] Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus inſiſtentes æquales ſunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, triãguli CFD.
h 32. pri. [h] Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. [i] Quare erit vt BD, ad DC, hoc eſt, ad BF, æqualem ipſi
i 4. ſexti. DC, ita CD, hoc eſt, ſibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, ſecta eſt in F, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt oſtenſum eſt. Simili ratione oſtendemus, rectam CE, ſecari in F, extrema ac media ratione, maiuſque illius ſegmentum EF, æquale eſſe lateri pentagoni DE. Itaque ſi pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonſtrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ſubtendit, parallelam eſſe
k 22. dec. *oppoſito lateri, hoc eſt, BD, parallelam eſſe lateri AE, & CE, lateri AE. Deſcripto enim circulo circa pentagonum.* [k] *Quoniam*

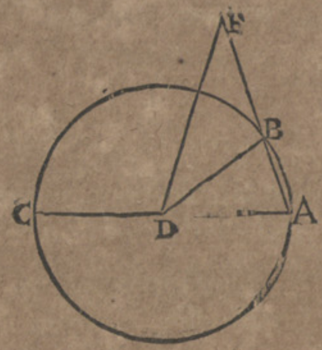
tam

tem duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales ſunt: Sunt autem A, & ABC inter ſe æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus ſint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales:[l] ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum. l 28. prim.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus.

IN circulo ABC, ſit latus decagoni AB, cui in rectum addatur BE, æqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inſcripti. Dico EA, rectam ſectam eſſe in B, extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentum eſſe EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter AC, coniunganturque rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, eſt decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus ſemicirculi arcum AB, quinquies: Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB.[a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rurſus quia latera BD, BE, ſunt æqualia, nempe latera hexagoni: (eſt enim BE, latus hexagoni ſemidiametro BD, æquale, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4.)[b] erunt & anguli BDE, BED, æquales:[c] quibus cum æqualis ſit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED:[d] Eſt autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, ſimul quadrupli erunt anguli BED. [e] Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis ſit externus BDC, erit angulus BDC, quadruplus eiuſdem anguli BED: Atqui idē angulus BDC, oſtenſus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales ſunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales ſint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD,[f] erunt triangula ADE, ABD, æquiangula.[g] Igitur erit vt EA, ad AD, hoc eſt, ad EB, ipſi AD, æqualem, ita AD, hoc eſt, EB ſibi æqualis ad BA: Atque idcirco recta EA, ſecta eſt in B, extrema & media ratione, eſtq; maius ſegmentum EB, latus hexagoni. Itaque ſi hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum.



a 33. ſexti.
b 5. primi.
c 32. primi.
d 5. primi.
e 32. primi.
f 32. primi.
g 4. ſexti.

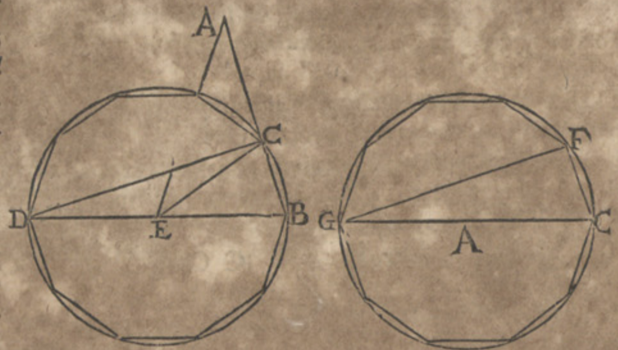
SCHOLIVM.

QVIA vero demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius lib. ſi minus ſegmentum lineæ diuiſæ extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur, maius ſegmentum ſecari quoq; extrema & media ratione, eiuſq; ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile cum Campano demonſtrabimus. Videlicet:

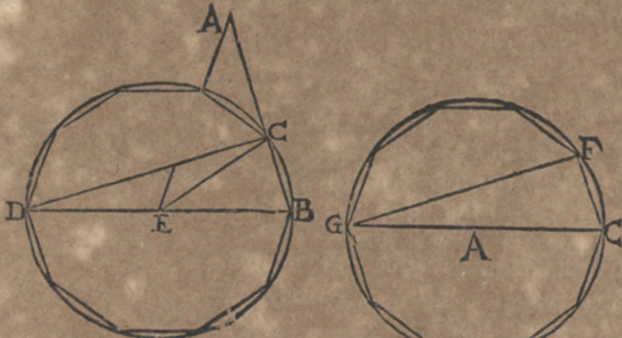
SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitque primum AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentum CB, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo eſt, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoque vt AB ad BE, ita EB, ad BC.[h] ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cum habeāt latera circa cōmunem angulū B, proportionalia; eritq; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni;[i] erunt anguli CAE, CEA, æquales;[k] quibus cum æqualis ſit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A:[l] Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli A.[m] Cum ergo angulis BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus.[n] Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus exiſtet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.



h 6. ſexti.
i 5. primi.
k 32. primi.
l 5. primi.
m 32. primi.
n 33. ſexti.

SIT deinde CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentum AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD; ducaturq; diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritq; ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum CB,



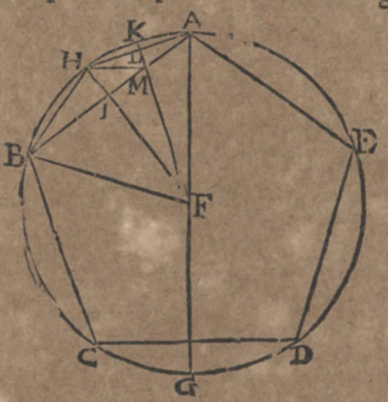
tum CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum & æquiangulum BCD; eruntq; latera BC, CF, inter ſe æqualia. Quoniam vero, ſi connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtendimus, quod inſiſtant arcubus ſimilibus BC, CF, nempe
o 31. tertij. *decimis partibus peripheriarum; & ſunt quoque anguli*
p 36. primi. *BCD, CFG, in ſemicirculis æquales, [o] nimirum recti: [p] Erunt quoq; latera BD, CG, inter ſe æqualia. Quam ob rem cum diametri BD, CG, ſint æquales, æquales quoque erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde, cum recta AC, ſit latus hexagoni circuli CFG, erit quoq; eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod eſt propoſitum.*

x.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, deſcriptum ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vna cum quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur



enim diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, ſecans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, ſecans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quoniam
a 27. tertij. igitur arcus AH, BH, æquales ſunt; [a] erunt & anguli ipſis inſiſtentes AFH, BFH, æquales. Quare cum latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia ſint lateribus BF, FI, trianguli BFI, &
b 4. primi. anguli ipſis contenti æquales quoque; [b] erunt & baſes AI, BI, æquales, & anguli AIF, BIF, ideoque recti: Eademq; ratione æquales erunt rectæ AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis ęqualibus ABCG, AEDG, demantur æquales arcus ABC, AED; relinquētur arcus CG, DG, inter ſeſe æquales, ideoque erit arcus CG, dimidium arcus CD. Eſt autem & arcus AH, dimidium arcus AB. Igitur cum arcus AB, CD, æquales ſint; erunt quoque eorum dimidij arcus CG, AH, æquales; Ac proinde cum arcus AH, duplus ſit arcus HK, erit & arcus CG, duplus eiuſdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales ſunt, & eſt arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam arcus BC, eiuſdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æque multiplices ſunt, nempe dupli, arcuum HK,
c 1. quint. BH; [c] Ac propterea totus arcus BG, duplus quoque erit totius arcus BK, [d] & idcirco angulus quoque BFG, du-
d 33. ſexti. plus anguli BFK: [e] Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus eſt quoque anguli FAB; erunt idcirco an-
e 20. tertij. guli BFM, FAB, æquales; [f] Ac propterea triangula ABF, FBM, cum habeant angulos FAB, MFB, æquales, &
f 32. primi.
g 4. ſexti. angulum ABF, communem, æquiangula erunt. [g] Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF, ad BM; [h] ideoq; rectan-
h 17. ſexti. gulum ſub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia ſunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & angu-
i 4. primi. li quoque ipſis contenti æquales, nempe recti; [i] erunt & baſes AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: [k] Eſt
k 5. primi. autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia ſint. Igitur & angulus LHM, ei-
l 32. primi. dem angulo HBA, æqualis erit; [l] Ac propterea triangula ABH, AHM, cũ habeant angulos ABH, AHM, æqua-
m 4. ſext. les, & angulum HAM, communẽ, æquiangula erunt. [m] Quam ob rẽ erit vt AB, ad AH, ita AH, ad AM; [n] ideo-
n 17. ſext. que rectangulum ſub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Oſtenſum eſt autem & rectangulum ſub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, ſimul æqualia ſunt quadratis re-
o 2. ſecund. ctarum BF, AH. [o] At vero rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, æqualia ſunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale eſt quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterũ deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

HINC ſequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris demonſtratio.

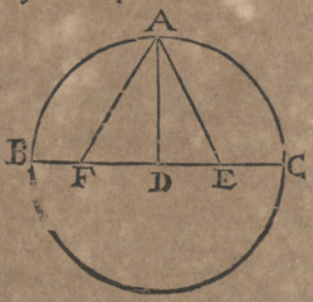
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque eſt, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitum ſubtendit, & latus ip[illegible]m oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos.

rectos: Demonſtratum enim eſt, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppoſitum CD, ſubtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum tranſeat per centrum, ſecabit quoq; latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolomeo tradidimus, qua vna eademq; opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum deſcribitur, eiuſque demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc à nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuiſa ſemidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abſcindatur EF, adiungaturq; recta AF. Dico rectam AF, eſſe latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD, ſecta ſit bifariam in E, eique addita DF, [p] *erit rectangulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoq; quadrato rectæ EA, quæ ipſi EF, eſt æqualis.* [q] *Eſt autem quadratũ rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadratis rectarum AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum ſub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc eſt, quadrato rectæ CD.* [r] *Quam ob rem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF, proptereaq; recta CF, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius ſegmẽtum CD, ſit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmentum DF, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib.* [s] *Rurſus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, vna cum quadrato lateris decagoni DF, æquale eſt quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli;* [t] *Eſt autem eiuſdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF; ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitum.*



p 6. ſec.
q 47. prim.
r 17. ſexti.
s 10. tertijd.
t 47. prim.

THEOR. II. PROPOS. II. xij.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur: pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem; deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, eſſe lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, ſecetq; AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, ſecet diametrum BH, in K. Abſcindatur quoque ex ſemidiametro FH, quarta eius pars FL: Item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoque FL, BF, illi commenſurabiles, cum ſint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota BL, compoſita, [a] cum ſit commenſurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit.



a 16. dec.

RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta ſecat arcum AC, bifariam in B, ſecabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiuſdem propoſ. Triangula ergo ACI, AFK, cum habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, [b] æquiangula inter ſe erunt. [c] Quamobrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA, ſiue ad FH, ipſi FA, æqualem. [d] Vt autem CA, ad FH, ita eſt CM, quarta pars ipſius CA, ad FL, quartam partem ipſius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc eſt, vt CD, dupla ipſius CI, ad CK, duplam ipſius CM, ita FK, ad FL; Atque componendo, vt CD, CK, ſimul ad CK, ita FK, FL, ſimul, nimirum recta KL, ad FL; [e] Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compoſitæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia vero ſi AC, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) [f] maius eius ſegmentum æquale eſt lateri pentagoni, nimirum ipſi [g] CD; Erit quadratum rectæ compoſitæ ex CD, maiori ſegmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ ſcilicet totius. Quare & quadratũ rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, [h] ideoque quadratum rectæ KL, commenſurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commenſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia: Eſt autem FL, oſtenſa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

b 32. prim.
c 3. ſexti.
d 15. quint.
e 22. ſexti.
f 8. tertijd.
g 1. tertijd.
h 6. dec.

DEINDE quia qualium partium 4. eſt BF, talium 1. eſt FL; ac propterea qualium 5. eſt BL, talium 1. eſt FL: erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. eſt quadratum rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. [i] habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium vero partium 1. eſt quadratum rectæ FL, talium 5. oſtenſum eſt quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25. eſt quadratum rectæ BL, talium 5. eſt quadratum rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt patet ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [k] Erunt rectæ BL, KL, longitudine incommenſurabiles: ideoque, cum oſtenſæ ſint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali BL, dematur Rationalis KL, potentia tantum commenſurabilis; [l] erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit KL.

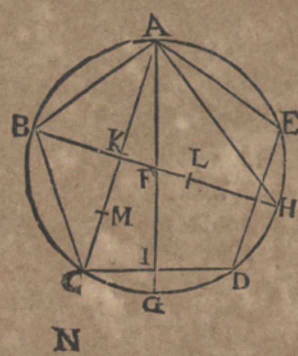
i 20. ſexti.
k 9. dec.
l 74. dec.

 IAM

IAM vero recta BL, poſſit plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum KL, & N; Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ BL, talium 1. fuit quadratum rectæ KL. Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. eſt quadratum rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. [m] Quare commenſurabilia erunt; proptereaque rectę ipſæ BL, & N, commenſurabiles, ſaltem potentia; Eſt autem BL, oſtenſa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum BL, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 24. lib 8. quod proportio eorum ſit, quæ 5. ad 4.) [n] Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis longitudine ſit commenſurabilis Rationali BH; (Qualium enim partium 8. eſt BH, talium 5. eſt BL,) poſſitq; plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis, vt oſtenſum eſt; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

m 6. dec.

n 9. dec.



POSTREMO quia recta AB, eſt media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (quod triangulum ABH, [o] habeat angulum BAH, rectum, à quo ducta eſt AK, ad baſin perpendicularis) [p] erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo ſub BH, BK. Quocirca cum ſuperficiem contentam ſub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, poſſit recta linea AB; [q] Erit AB, linea Minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

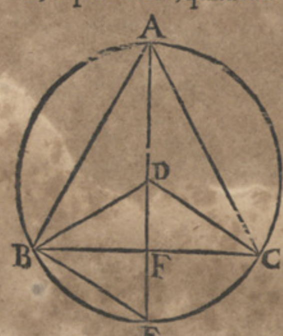
o 31. tertij.
p 17. ſexti.
q 95. dec.

viij.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

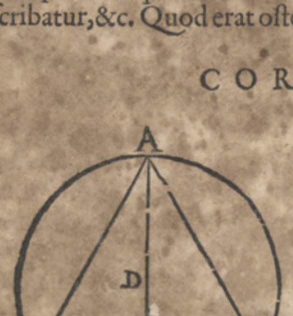
SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur ABC. Dico quadratum lateris AB, triplum eſſe, quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ ſecet ex coroll. 2. propoſ. 10. huius lib. arcum BC, bifariam in E, & rectam BC, bifariam quoque, & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus BC, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoque coniuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres ſextas partes totius circuli; arcus vero AB, cum ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus BE, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta BE, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro DE, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale eſt quadratis rectarum AB, BE, [b] quod angulus ABE, in ſemicirculo rectus ſit; Eſt autem quadratum rectæ AE, quadruplum quadrati rectæ BE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla ſit lineæ BE; erunt quadrata rectarum AB, BE, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ BE; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB. Quare quadratum rectæ AB, triplum eſt quadrati rectæ BE, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 47. prim.
b 31. tertij.

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. Nam cum latus AB, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri AD, poſito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atque adeo quadratum ex AE, quod ex ſcholio propoſition. 4. libr. 2. quadruplum eſt quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex, AE, quadrati ex AB, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. vt eſt AE, ad AB, ita ſe habet AB, ad AF; erit quoque latus trianguli æquilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad baſim demiſſæ potentia ſeſquitertium: quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide lib. 14. propoſ. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi poteſt, ſemidiametrum DE, bifariam ſecari in F, à latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplum ſit quadrati rectæ BE; ſi ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. [c] Eſt autem quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum BF, FE.

c 47. prim.

Igitur

Igitur & talium partium 4.erunt quadrata rectarum BF,FE.Eſt autem talium partium 3.quadratum rectæ BF, (quod quadratum rectæ AB,quadruplum ſit quadrati rectæ BF,ex ſcholio propoſ.4.lib.2. Eſt enim AB,dupla ipſius BF.)Igitur talium 1.erit quadratum rectæ FE;Ac proinde quadratum rectæ BE,hoc eſt,quadratum rectæ DE,ſibi æquale,quadruplum erit quadrati rectæ FE.Igitur ex ſcholio propoſ.4.lib.2.recta DE,dupla erit ipſius FE.Quocirca DE,bifariam ſecatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatut; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam,& latus oppoſitum,ac inſuper ad angulos rectos:Semidiameter quoque viciſſim bifariam,& ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito.

IN circulo ABC,cuius centrum D,triangulum æquilaterum inſcribatur ABC.Dico rectam AE, per centrum D, ductam,hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum BAC, & latus BC, necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoq; DE,ſecari à latere BC,bifariam,& ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD,CD,BE;cum latera AB, AD, æqualia ſint lateribus AC,AD,trianguli CAD;& baſes BD,CD,æquales quoque:[d] Erunt anguli BAD,CAD, æquales. Quod eſt primum. d 8. primi.



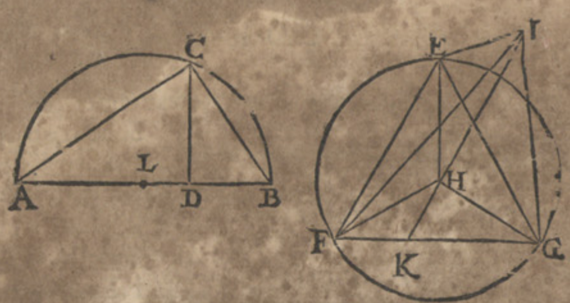
DEINDE,cum latera AB,AF, trianguli BAF,æqualia ſint lateribus AC,AF,trianguli CAF,& anguli ipſis contenti æquales oſtenſi:[e] Erunt & baſes BF, CF, & angulo ad F, æquales , ideoque recti. Quod eſt ſecundum. e 4.prim.

POSTREMO,cum anguli BAE,CAE,demonſtrati ſint eſſe æquales;[f] erunt & arcus BE,CE, æquales. Quare cum BEC, arcus ſit tertia pars circumferentiæ,erit BE,ſexta pars eiuſdem; Ac propterea recta BE,latus hexagoni,atque ſemidiametro proinde BD,æqualis,ex coroll.propoſ 15.lib.4.[g] Igitur anguli BDE,BED,æquales erunt.Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF,æquales ſunt angulis BEF,BFE,trianguli EBF,& latus BF, commune;[h] Erunt & latera DF, EF, æqualia. Quod eſt tertium. f 26. tertij. g 5. primi. h 26.primi.

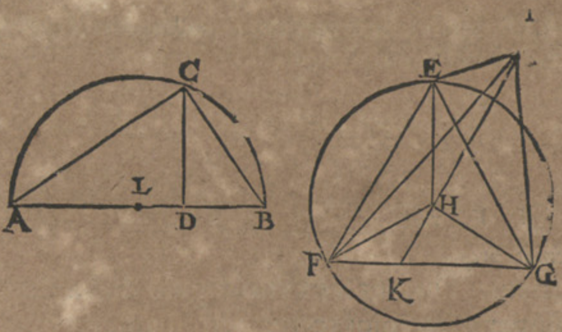
PROBL. 1. PROPOS. 13. xiij.

PYRAMIDEM conſtituere; & data ſphæra complecti,& demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

SIT datæ ſphæræ diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ABC; & ex AB,auferatur tertia pars BD,vt ſit AD, ipſius DB, dupla; at vero AB, eiuſdem DB, tripla: & ipſius AD,ſeſquialtera.Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB;connectantur rectæ AC,BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis ſit ipſi DC, deſcribatur circulus EFG , cuius centrum H,in quo triangulum æquilaterum inſcribatur EFG,adiunganturque rectæ HF, HG, quæ ſingulæ æquales erunt ipſi DC, cum æquales ſint ipſi HE , ad cuius interuallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD , & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis FEG, IEF,IFG,IEG,eſſe Pyramidẽ,ſiue Tetraedrũ. Quoniam n. latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia ſunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipſis contenti,recti,ex hypotheſi,& 3.defin.lib. 11.[a] erit baſis AC,baſi IE,æqualis.Non aliter oſtendemus eandẽ rectam AC, æqualẽ eſſe rectis IF,IG.Rurſus quia tres lineæ AD,DC, DB, proportionales ſunt ex coroll.prop. 8.li.6.erit ex coroll.propoſ.20.lib.6.vt AD.ad DB,ita quadratũ rectæ AD,ad quadratum rectæ DC;& componendo,vt AB,ad DB,ita quadrata rectarum AD,DC,ſimul ad quadratum rectæ DC: [b] Sunt autem quadrata rectarum AD , DC, æqualia quadrato rectæ AC. Igitur erit quoque vt AB, ad DB, ita quadratum rectæ AC, ad quadratum rectæ DC;Ac proinde cum AB,ſit ipſius DB,tripla, erit quoque quadratum rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis ſit ipſi DC:[c] Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque eſt eiuſdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ AC, quadrato rectæ EF, æquale erit;& propterea recta AC, rectæ EF.Quare cum recta AC,oſtenſa quoque ſit æqualis rectis IE,IF,IG;erunt quatuor triangula EFG,EFI,FGI, GEI,æquilatera & æqualia inter ſe.Conſtituta igitur iam eſt pyramis,ſeu Tetraedrum, cuius baſis EFG, vertex vero I.Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data,cuius diameter AB;& diametrum ſphæræ AB,potentia ſeſquialteram eſſe lateris EF,vel AC. a 4.prim. b 47.prim. c 12. tertijdec.



EXTENDATVR perpendicularis IH,vſq; ad K,vt ſit HK,ipſi DB ,& tota IK,toti AB,æqualis.Quia ergo tres rectæ AD,DC, DB, proportionales ſunt,quibus æquales exiſtunt tres IH, HE, HK; erunt quoq; IH, HE, HK,proportionales.Quare cum HE ſit ad IK,perpendicularis,& media proportionalis inter IH, HK, ſemicirculus circa IK,deſcriptus in plano rectarum IK,HE,tranſibit per E,vt mox oſtendetur;Eodemque argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam IK,deſcriptus in plano rectarum IK,HF,tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HG, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum



circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, talium 2. ſit AD. Igitur & quadratum rectæ AB, ſeſquialterum erit quadrati rectæ AC; Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis: perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ, ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, d æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.

d 17. *ſexti.*

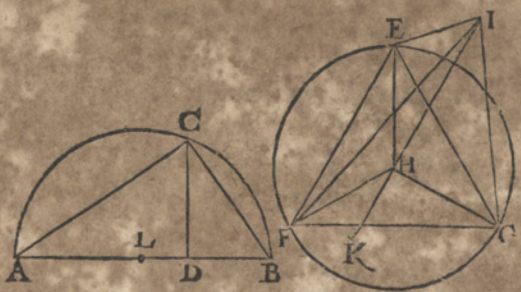


HINC manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, tranſire per E, cum HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualiũ 9. eſt quadratum rectæ AB: At qualium partium 6. eſt quadratum rectæ EF, talium partium 2. eſt quadratum rectæ HE, e quod quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cum proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2.

f 12. *tertij-dec.*



COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi ABC, eritque L, centrum quoque ſphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin EFG, ducitur perpendicularis; cum AD, æqualis ſit ipſi IH, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem ſemidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla eſt ipſius DB; Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB, ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

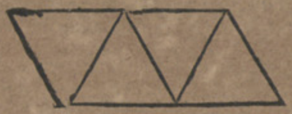
SIMILITER, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturq;, vt hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundum totam ſoliditatem. Hanc vero praxim, & ſequentes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durero non ignobili ſcriptore.



PROBL. 2. PROPOS. 14. xiv.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

SIT ſphæræ, quæ conſtituam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturq; rectæ AC, BC, [a] quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, ſe mutuo ſecantes in I: eruntq; rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. libr. demonſtratum eſt. Deinde ex I, in vtramq; partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturq; IK, IL, æquales ipſi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, eſſe octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti, recti; (ipſe quidem EIK, ex definit. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod ſit æqualis angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & baſium EH, GH.) [c] Erit & baſis EK, baſi EH, æqualis; Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula eſſe æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFGH, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphæra diamerri AB, qua nimirum & pyramis conſtructa comprehenditur; & diametrum ſphæræ AB, potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.

a 4. primi.
b 8. primi.
c 4. primi.

QVONIAM enim IE, perpendicularis eſt ad KL, ex 3. defi. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL; (quod tres rectæ KI, IE, IL, æquales ſint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, deſcriptus tranſibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propoſ. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G, H. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, deſcribet ſphæram, quæ complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc ſphæra æqualis ſit datæ ſphæræ, cuius diameter AB; (Nam cum rectæ AC, EF, æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ FE, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde ſphæræ ipſarum æquales exiſtent,) comprehendetur idem octaedrum data ſphæra.

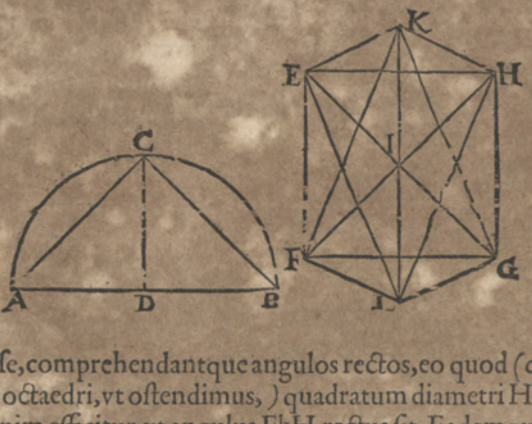
QVIA vero quadratum rectæ AB, [d] æquale eſt quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia ſunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateribus octaedri. Itaque octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

d 47. prim.

COROLLARIVM. I

EX dictis manifeſtum eſt, in octedrao tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphæræ: quales ſunt KL, EG, FH, ſecantes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum KI, recta ſit ad lineas EG, HE: [e] recta quoq; erit ad planum EFGH, per ipſas ductum: [f] ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt: Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera, ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantque angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, vt oſtendimus,) quadratum diametri HF, æquale exiſtit quadratis laterum octaedri Fk, kH. [g] Ita enim efficitur, vt angulus FkH, rectus ſit. Eademque eſt ratio de cæteris angulis.

e 4. vnde.
f 8. vnde.
g 48. pri.



COROLLARIVM. II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero k, & L; altitudines denique ſemidiametri Ik, IL: cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHk, EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, vt conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

COROLLARIVM. III.

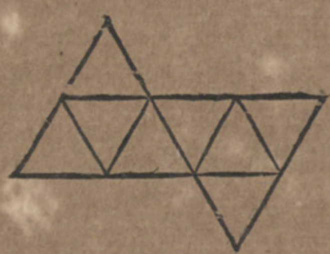
SI tetraedrum, & octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes. [h] Quoniam igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ. [i] Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri ſphæræ. Igitur cum talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.

h 13. tertij-dec.
i 14. tertijd.

COROLLARIVM. IV.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela eſt rectæ FG; & in quadrato ELGk, recta Ek, rectæ GL: [k] Erit planum EHk, per EH, Ek, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri; efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.

k 15. vnde.



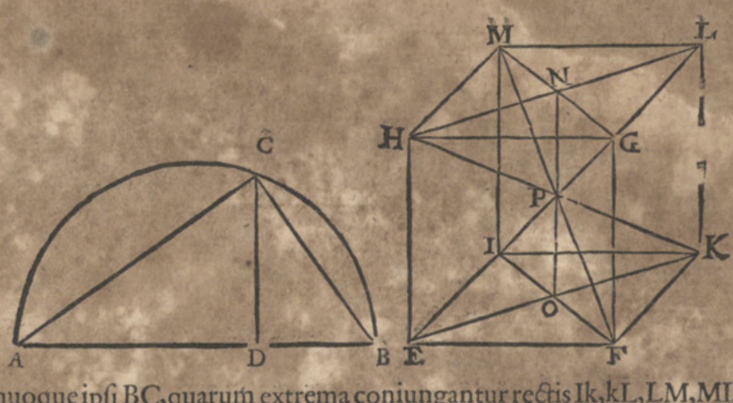
SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſeſe complicatis componetur octaedrum ſecundum totam ſoliditatem, vt ait Albertus Durerus.

xiiii.

PROBL. 3. PROPOS. 15.

CVBVM conſtituere: & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.



SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſup quod erigantur perpendiculares EI, Fk, GL, HM, æquales quoque ipſi BC, quarum extrema coniungantur rectis Ik, kL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, Fk, ad planum EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ EI, Fk, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis poſita ſit ipſi BC, hoc eſt, ipſi EF. [b] Igitur & EF, Ik, parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammum eſt EFkI; In quo, cum lineæ EI, Ik, kF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: [c] Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIk, FkI, æquales ſint oppoſitis angulis rectis kFE, IEF. Igitur EFkI, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt FkLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IkLM, quadratum erit, [d] cum ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quod eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphæra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFkI, GHML, diametri Ek, FI, GM, HL, per quas ducantur plana EkLH, FIMG, [f] Quia igitur tam planum EkLH, quam FIMG, cubum bifariam ſecat; vtrumq; per centrũ cubi tranſibit, ex ſcholio prop. 39. l. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdem propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana EkLH, FIMG, rectangula ſunt, (Cum enim HE, perpendicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, Ek; [g] perpendicularis quoque erit ad planum Ek, ideoque & ad rectam Ek, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt HEk. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EkLH, nec non & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EkLH, FIMG,) & æqualia, quod latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, Hk, FM, GI, æquales, vt

a 6. vnde.
b 33. prim.
c 34. prim.
d 24. vnde.
e 15. vnde.
f 28. vnde.
g 4. vnde.

les,vt conſtat ex ſcholio propoſ. 24. lib. 1. Ac proinde & ſemidiametri PE,PL,PH,PK; PF,PM,PG,PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa EL, ex centro P, deſcriptus,& circumductus, fixa manente diametro EL, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri AB, ita demonſtrabitur. h 47.prim.

Cum quadratum rectæ EK, [h] æquale ſit quadratis æqualibus rectarum EF,FK,ac proinde duplum quadrati rectæ EF,hoc eſt,quadrati rectæ KL: Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL, [i] Eſt autem quadratis rectarum EK,KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, ſit rectus in rectangulo EkLH. Igitur & quadratum rectæ EL,triplum erit quadrati rectæ kL,hoc eſt, quadrati rectæ BC: At vero eiuſdem quadrati rectæ BC,triplum eſt quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB,BC,BD, proportionales ſunt ex coroll. propoſ.8.lib.6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib.6.vt eſt AB,ad BD, ita erit quadratum rectæ AB,ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB,ipſius BD,ſit tripla: erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC,triplum.)Igitur quadrata rectarum EL,AB,æqualia ſunt; ac propterea ipſæ rectæ EL,AB,diametri nimirum ſphærarum,ideoque & ipſarum ſphæræ æquales exiſtunt. i 47. prim.

Quia vero oſtenſum eſt quadratum diametri EL triplum eſſe quadrati lateris cubi kL,manifeſtum eſt,diametrum ſphæræ poteutia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

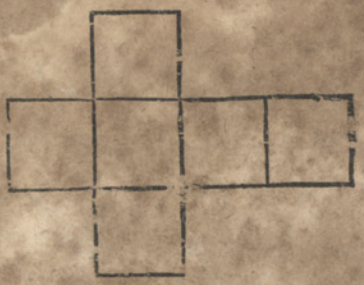
EX demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphęrę ſecare. Atque eadem ratione rectas, quę centra quadratorum oppoſitorum coniungunt,bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt,diametros cubi EL, Hk,FM,GI, æquales eſſe,ſeſeque mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHMI,EFkI, in eodem centro P,bifariam diuidatur,hac ratione oſtendetur.Duo anguli OFP,OPF,trianguli OFP,æquales ſunt duobus angulis NMP,NPM,trianguli NMP: ([k] Nam angulus OFP,æqualis eſt alterno NMP,inter lineas FI,GM, [l] quæ parallelę ſunt,cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum EFkI,GHML, [m] & angulus OPF,ęqualis eſt oppoſito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF,PM,quibus adiacent,ęqualia,cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO,PN,ęqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cęteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum. k 29. prim. l 16. vnde. m 15.prim.

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri ſphęrę,ſeu cubi, ęqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis.[n] Nam qualium partium 9.eſt quadratum diametri,talium 6.eſt quadratũ lateris tetraedri:[o] Qualium vero partium 9.eſt idem quadratum diametri,talium 3.eſt quadratum lateris cubi.Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrum ſphæræ deſcripto,in quo latus tetraedri eſt AC,cubi vero BC. [p] Perſpicuum autem eſt,diametrum ſphęræ AB, poſſe & rectam AC,& rectam BC,cum angulus ACB,ſit rectus. n 13. tertijdec. o 15. tertijdec. p 47.prim.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cuiuſpiam, vt conſtat.



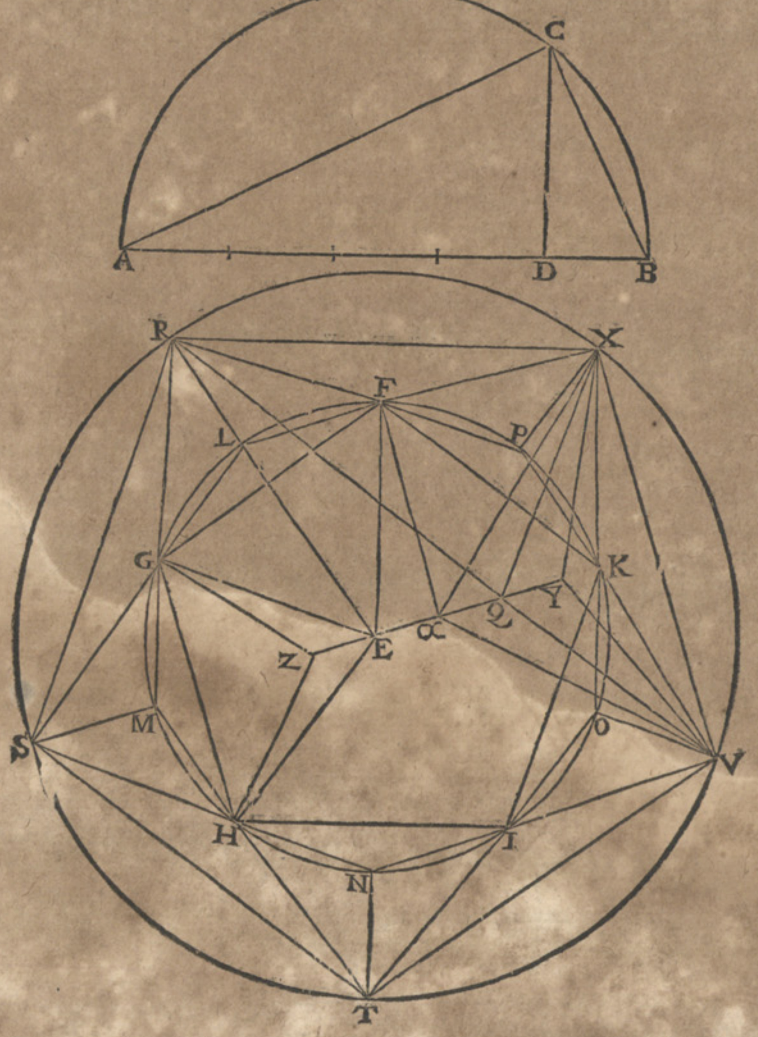
PROBL. 4. PROPOS. 16. XVI.

ICOSAEDRVM conſtituere: & ſphæra complecti,qua & ante dictas figuras; & demonſtrare,quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

SIT ſphęrę,quę prædictas figuras comprehendit,diameter AB,circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: Et ex AB,abſcindatur quinta pars BD,vt AB,ipſius BD,ſit quintupla; & ipſius AD,ſeſquiquarta; At vero AD,ipſius BD,quadrupla. Deinde ducta DC,perpendiculari ad AB,connectantur rectę AC, BC. Ad interuallũ rectę EF,quę ipſi BC,ſit ęqualis,circulus deſcribatur ex centro E; [a] in quo pentagonum æquilaterum inſcribatur FGHIk. Poſt hęc diuiſis arcubus FG,GH,HI,Ik,kF,bifariam in punctis L,M,N,O,P, connectantur rectę FL,LG,GM,MH,&c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E,& punctis L,M,N,O,P,ad planum circuli FGHIk,perpendiculares erigantur EQ, LR,MS, NT, OV, PX,quę ęquales ponantur ſemidiametro EF, ſeu rectę BC. Eruntq; omnes inter ſe ęquales; [b] ſed & parallelę ſunt. Igitur rectę, quę illas coniungunt, nempe EL,QR,EM,QS;EN,QT;EO,QV;EP,QX.(quas tamen omnes,vt vitaremus confuſionem,non duximus.) [c] binę inter ſe æquales erunt: Ac proinde cum ęquales ſint EL,EM,&c. ſemidiametro EF; ęquales quoq; erũt QR,QS,QT,QV,QX,& inter ſe,& ſemidiametro EF,ſeu rectę BC. [d] Quia vero planum per rectas QR,QS, ductũ parallelũ eſt plano FGHIk, per rectas EL,EM,ducto: eademq; ratione planũ per rectas QS, QT,ductũ parallelũ eſt plano eidem FGHIk,per rectas EM,EN,ducto,conuenit autẽ planũ per rectas QR,QS,cum plano per a 11.quar. b 6. vnd. c 33.prim. d 15. vnde.

no per QS,QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vna planum per ea, quæ ad propoſ.16. lib.11. oſtendimus. Non aliter oſtendemus planũ per QT,QV, cum hoc plano efficere vnũ planũ; necnon planũ per QV,QX; & planum per QX,QR. Sunt ergo quinque lineæ QR,QS,QT,QV,QX, in eodem plano; Ac proinde ſi ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus deſcribatur, is per reliqua puncta S,T,V,X, tranſibit, eritque æ-
c 6. vndec. qualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R,S,T,V,X, rectis AS,ST,TV,VX, XR. [e] Quia igitur LR,P-
f 33. prim. X, æquales ſunt, & parallelæ; ſi concipiatur duci recta LP; [f] erunt quoq; LP, RX, æquales & parallelæ; [g] Ac
g 28. tertij-dec. proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL,FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili proſus argumento concludemus, reliquas rectas RS,ST,TV,VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum eſt RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF,RG,SG,SH,TH,TI,VI,VK, XK,XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur ſemidiametro EF, hoc eſt, lateri hexagoni circuli FGHIK, & eſt LF, latus de-
h 10. tertij-dec. cagoni [h] erit quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: [i] Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus ſit ex 3. defin. libr. 11. Igitur quadra-
i 47. prim. tum rectæ FR, æquale eſt quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, ſeu FG, hoc eſt, ipſi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG,SG,SH, &c. reliquis lateribus vtriuſque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS,SGH, SHT,THI,TIV, VIK,VKX,XKF, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia; cum eorum omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri. Poſt hæc, perpendicularis EQ, in vtramq; partem extendatur, ſintque rectæ QY,EZ, æquales ſingulæ lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ,VY,XQ,XY,GE,GZ,HE, HZ. Quoniam ergo QX, ſemidiameter eſt circuli RSTVX, hoc eſt, latus hexagoni, & QY, latus eſt decagoni eiuſdem circuli [k] erit quadratum lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum Q X, Q Y; [l] Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus ſit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela ſint oſtenſa, ſitque EQ, ad illius planum recta, ex conſtructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale eſt quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ

k 10. tertij-dec.
l 47. prim.

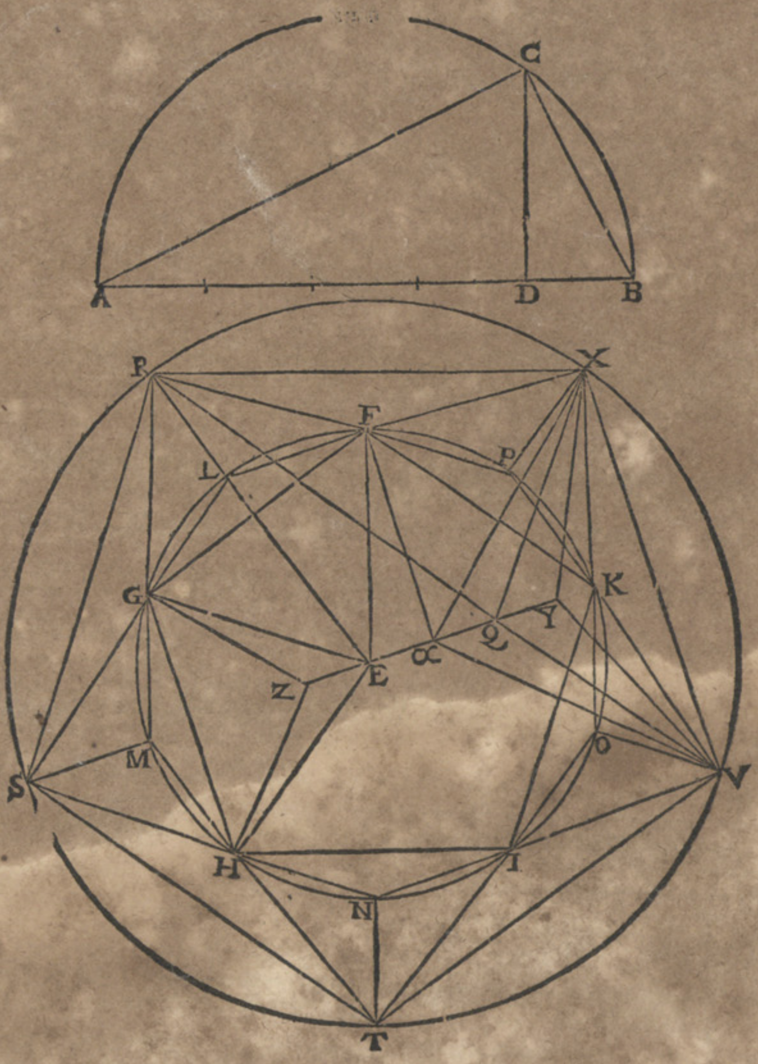


X V, æqualis. Eodemque modo eidem X V, æqualis oſtendetur V Y; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectæ RY,SY,TY, (quas tamen, vt vitaremus confuſionem linearum, non diximus.) quatuor triangula RYX,RYS,SYT, TYV, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo VYX, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confuſionem, non duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturque ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico comprehendi ſphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ,QV, trianguli αQV, æqualia ſunt lateribus αQ,QX, trianguli αQX, cum QV,QX, ſint ſemidiametri circuli RST-
m 4. prim. VX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex definit. 3. lib. 11. [m] Erunt & baſes αV, αX, æquales. Eademque ratione, ſi ducantur rectæ ex α, Q, ad R,S,T, oſtendentur rectæ αR, αS αT, æquales & inter ſe, & ipſis αV, αX. Rurſus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia ſunt lateribus αE,EF, trianguli αEF, cum QX,EF, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuiſa ſit bifariã in α: Sunt autẽ & anguli αQX, αEF,

EF, æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. [n] Erunt quoque baſes αX, αF, æquales: eodemque modo n 4. primi.
ſi ex α E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, oſtendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipſi αX; Ac proinde decem li-
neæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter o 9. tertijd.
eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiuſdem circuli; [o] erit QZ. diuiſa in E, ex- p 3. tertij-
trema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens Eα, dimidium dec.
maioris ſegmenti, hoc eſt, recta αZ, [p] quintuplum poteſt eius, quod ex Eα, deſcribitur, quadrati: Poteſt au-
tem & recta αF, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum ſit qua-
drati rectæ αE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius Eα; erunt quadrata rectarum EF, Eα,
ſimul quintupla quadrati rectæ Eα. [q] Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale ſit quadratum rectæ AF; q 47. prim.
erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum αZ,
αF, ac proinde rectæ ipſæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam ſecetur in α, (propterea quod ſi æ-
qualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt.) Erunt omnes rectæ ductæ ex
α, ad omnes angulos Icoſaedri æquales. Quocirca ſphæra deſcripta circa diametrum ZY, ex centro α per o-
mnes angulos Icoſaedri conſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphæram dico æqualem eſſe ſphæræ diametri AB. r 15. quint.

[r] CVM enim ſit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipſius αZ, QE, duplam ipſius αE; [s] Ac propterea vt quadratum rectæ αZ, ad quadratum rectæ αE, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE: [illegible] autem quadratum rectæ αZ, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ αE: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc eſt, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis ſit poſita ſemidiametro EF, hoc eſt, rectæ BC: Eſt autem & eiuſdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6 ſit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Ac proinde exiſtente AB, quintupla ipſius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia ſunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & ſphæræ circa ipſas æquales erunt. s 22. ſexti.



QVONIAM denique diameter ſphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendendum eſt latus Icoſaedri eſſe lineam Irrationalem, quæ minor vocatur.) poteſtque quintuplum quadrati rectæ BC, hoc eſt, rectæ illi æqualis EF; erit quoq; ſemidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata re-
ctarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. [t] t 6. dec.
erunt commenſurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo AB, ſit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propter-
ea FG, latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, [u] Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrum igitur u 11. tertij-
conſtituimus, & ſphæra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Ir- dec.
rationalis eſt linea, quæ vocatur Minor, quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

EX dictis infertur, ſphæræ diametrum eſſe potentia quintuplam ſemidiametri circuli quinq; latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutum eſt, & qui per quinq; Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum enim eſt quadratum diametri AB, quintuplum eſſe quadrati rectæ BC, hoc eſt, ſemidiametri EF.

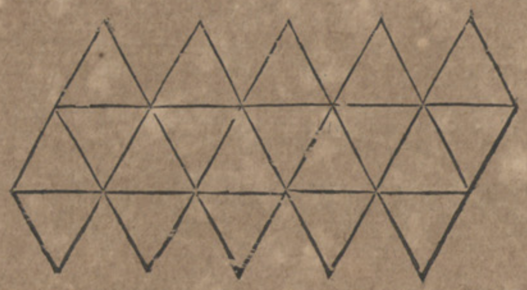
COROL-

COROLLARIVM. II.

ITEM manifeſtum eſt, ſphæræ diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli: Nam YZ, diameter ſphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM. III.

CONSTAT denique latera Icoſaedri oppoſita, qualia ſunt RX, HI, eſſe parallela. Nam recta RX, oſtenſa eſt parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ LP, ſit quoque parallela recta HI, vt in ſcholio propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus; (eo quod æquales ſunt arcus HL, IP: continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perſpicuum eſt, rectas RX, HI, eſſe parallelas. Eademque eſt ratio de cæteris lateribus oppoſitis.



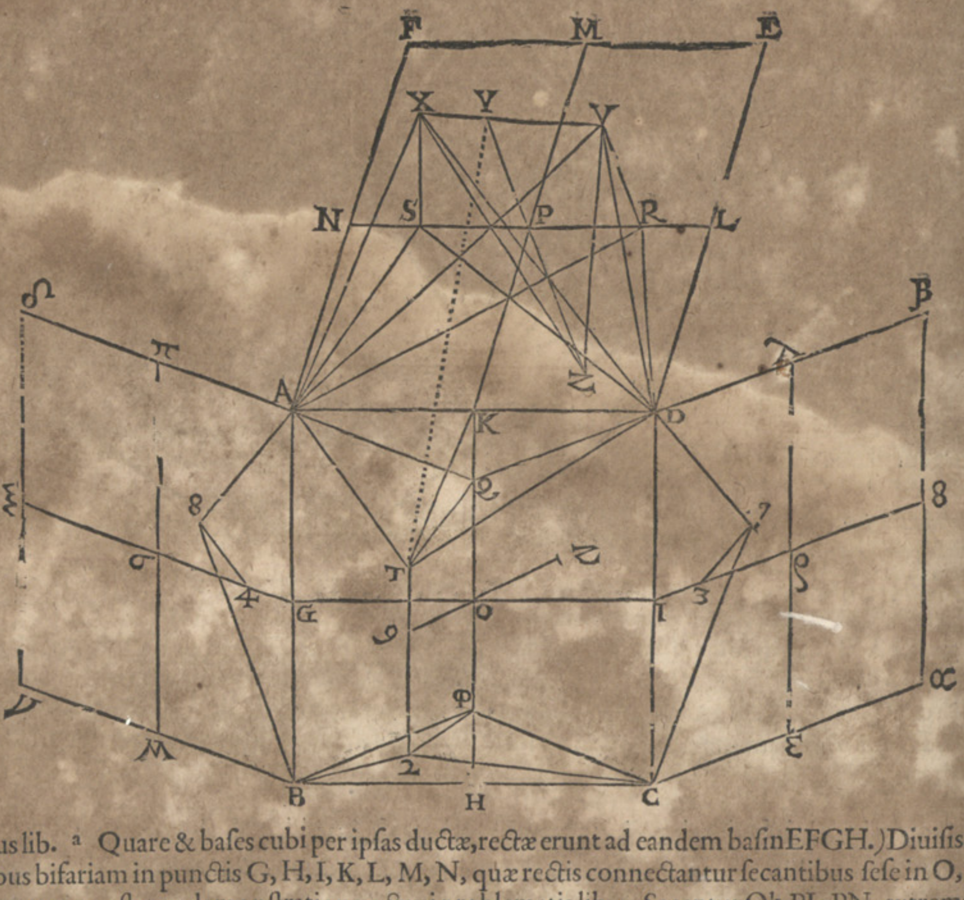
SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icoſaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſeſe aptentur.

PROBL. 5. PROPOS. 17.

xvii. DODECAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonſtrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome.

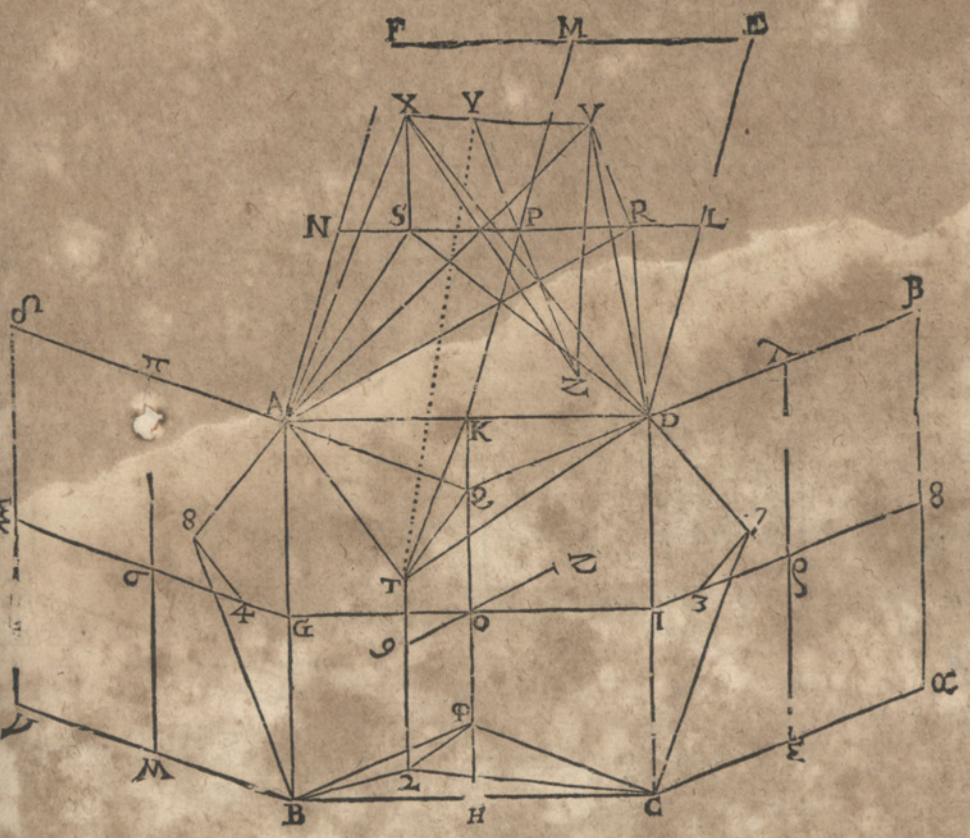
SIT vna baſis cubi data ſphæra comprehenſi, quadratum ABCD, cui inſiſtat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt ſit communis horum ſectio recta AD, (Inſiſtunt enim omnes baſes cubi ſibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus conſtitueretur, erectæ ſunt ex angulis baſis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipſi baſi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere poteſt ex figura propoſitio-



a 18. vnde. nis 15. huius lib. [a] Quare & baſes cubi per ipſas ductæ, rectæ erunt ad eandem baſin EFGH.) Diuiſis itaq; cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur ſecantibus ſeſe in O, P, centris quadratorum, vt conſtat ex demonſtratione octaui problematis lib. 4. Secentur Ok, PL, PN, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales ſegmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, eſſe vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri conſtituendi. Quod enim penta-
b 6. vnde. gonum ATDVX, ſit in vno plano, ita oſtendetur. Cum RV, SX, ſint ad quadratum ADEF, rectæ, [b] ipſæ erunt parallelæ; Ac proinde, cum ſint æquales, (quia ſegmenta maiora PR, PS, quibus æquales ſunt poſitæ, æqualia ſunt, cum & lineæ ſectæ PL, PN, æquales ſint.)
c 33. prim. [c] erunt quoque contingentes rectæ RS, VX, æquales & parallelæ:
d 33. primi. [d] Eſt autem & AD, eidem RS, ſiue LN, parallela, eo quod AN, DL, parallelæ ſunt & æquales. [e] Igitur
e 9. vnde. & AD, VX, parallelæ ſunt; [f] Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipſis erunt plano; ideoque
f 7. vnde.

deoque trapezium AD, VX,in vno exiſtet plano: Eſt autem & triangulum ATD,in vno plano. Dico quod &
in eodem plano cum trapezio ADVX. Ex P, namque ducatur PY,parallela ipſi RV, [a] quæ erit recta ad qua- a 8. vnd.
dratum ADEF,quod ad idem recta ſit RV: Et connectantur rectæ KT,KY. Quoniam igitur eſt vt OK, ad O-
Q,ita OQ,ad QK,ob ſectioně rectæ OK: Eſt autě KP, ipſi OK,æqualis; (ſunt enim dimidia latera cubi;) & PY,
ipſi OQ, (cum æqualis ſit ipſi RV,quæ poſita fuit æqualis ipſi OQ, maiori ſegmento;) erit quoque vt KP, ad
PY,ita OQ, hoc eſt, QT,illis æqualis, ad QK. Quare cum triangula PKY,QTK,duo latera habeant duobus la- b 6. vndec.
teribus proportionalia,ſintque ad vnum angulum K,compoſita, [b] ita vt homologa latera ſint parallela,nem-
pe PK,& QT,inter ſe,quod vtrumque rectum ſit ad quadratum ABCD; & PY, QK,inter ſe, quod vtrumq; re-
ctum ſit ad quadratum ADEF: [c] Erunt reliqua latera KY, KT, in rectam lineam collocata; [d] Ac propterea c 32. ſexti.
recta TY,in vno erit plano,ideoq; planum ATD,& planum ADVX, vnum planum conſtituent, perrectas T- d 1. vnde.
Y,AD, ductum. Quocirca pentagonum ATDVX, in vno exiſtit plano.

QVOD vero ſit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN,NS,trianguli ANS,æqualia ſint lateribus
AK,KQ,trianguli AKQ; (Sunt enim AN,AK,dimidia latera cubi,& NS,KQ,ſegmenta minora rectarũ æqua-
lium ſectarum,) & anguli ANS,AKQ,recti, ſi ducatur recta AQ, [e] erunt baſes AS,AQ,æquales. Rurſus cum e 4. primi.
latera AS,SX,trianguli ASX, ſint æqualia lateribus AQ, QT, trianguli AQT: (Nam rectæ AS, AQ, oſtenſæ
ſint æquales,& SX,QT,ſunt ſegmenta maiora rectarum æqualium ſectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex
defi. 3. lib. 11. [f] Erunt quoque baſes AX, AT,æquales. Quod ſi ducatur recta DQ, oſtendemus eodem argu- f 4. prim.
mento, rectam DT, rectæ AT, ſi vero ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, eſſe æqualem. Sunt igi-
tur pentagoni quatuor latera XA,AT,TD,DV; æqualia: quibus etiam æquale oſtendemus reliquum VX, hac
ratione. [g] Quadrata rectarum PN,NS, ſimul tripla ſunt quadrati rectæ,PS,hoc eſt,quadrati rectæ SX: Eſt au- g 4. tertijd.
tem quadrato rectæ PN,æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, ſimul tripla ſunt
quadrati rectæ SX. [h] Cum ergo quadratis rectarum AN,NS,æquale ſit quadratum rectæ AS; erit quoq; qua- h 47. prim.
dratum rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, ſimul quadrupla eiuſdem
quadrati rectæ SX. [i] Eſt autem quadratis rectarum AS, SX,æquale quadratum rectæ AX. Quadratum ergo i 47. prim.
rectæ AX,quadruplum quoque erit quadrati rectæ SX,hoc eſt,quadrati rectæ PS, hoc eſt, quadrati rectæ XY;
[k] Sunt enim rectæ PS,XY,æquales. Cum igitur & quadratum rectæ VX, quadruplum ſit eiuſdem quadrati re- k 34. prim.
ctæ XY, ex ſcholio propoſ. 4. libr. 2. quod VX, dupla ſit ipſius XY; Erunt quadrata rectarum AX,VX,æqualia;
Ac proinde rectæ ipſi æquales. Quare cum & XA,AT,TD,DV,oſtenſæ ſint eſſe æquales; æquilaterum eſt pen-
tagonum ATDVX.

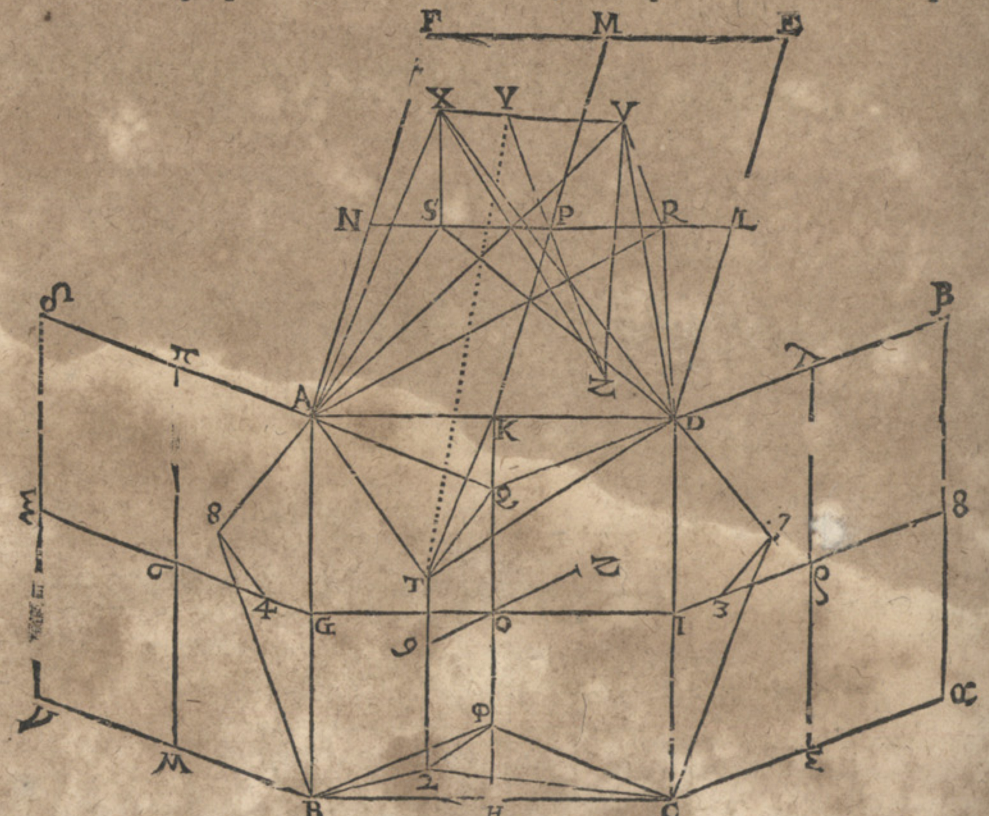


QVOD autem & æquiangulum ſit,ita perſpicuum fiet. Ductis rectis AR,AV; cum PN, ſecta ſit in S,extre-
ma ac media ratione,eiq; addita PR,æqualis maiori ſegmento PS; [l] erit quoq; NR; ſecta in P,extrema ac me- l 5. tertijd.
dia ratione,maiuſq; ſegmentum erit NP. [m] Quadrata igitur rectarum NR, RP,ſimul tripla ſunt quadrati re- m 4. tertij-
ctæ NP, hoc eſt,quadrati rectæ AN: Eſt autem quadratum rectæ RV,æquale quadrato rectæ RP. Ergo & qua- decim.
drata rectarum NR,RV,tripla ſunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR,RV,AN,quadru-
pla ſunt eiuſdem quadrati rectæ AN. [n] Sunt autem quadrata rectarum NR,AN,æqualia quadrato rectæ AR. n 47. prim.
Igitur & quadrata rectarum RV,AR,quadrupla ſunt quadrati rectæ AN. [o] Cum ergo quadratis rectarum A- o 47. pri.
R,RV,æquale ſit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiuſdem quadrati rectæ AN, qua-
druplum. At vero eiuſdem quadrati rectæ AN,quadruplum eſt quadratum rectæ AD,ex ſcholio propoſ. 4. lib.
2. quod AD,dupla ſit ipſius AN. Æqualia igitur ſunt quadrata rectarum AV,AD,ideoq; & rectæ AV, AD, æ-
quales. Simili argumento,ductis rectis DS,DX,oſtendemus DX,DA,æquales eſſe; ac propterea tres rectas AD,

 AV, AX,

AV,DX,inter ſe eſſe æquales. Quoniam igitur latera TA,TD, trianguli TAD,æqualia ſunt lateribus DV,VX,
a 8.primi. trianguli DXV; & baſes AD,DX,æquales quoque: [a] Erunt & anguli ATD,DVX,æquales. Non ſecus oſten-
detur angulus DVX,æqualis angulo AXV, Ac proinde,cum in pentagono æquilatero ATDVX,tres habeantur
anguli æquales ATD,DVX,AXV, [b] ipſum erit æquiangulum.
b 7.tertijd. QVOD ſi ſumantur alia duo cubi quadrata CαβD, BγδA, recta ad quadratum ABCD, in communi-
bus ſectionibus CD,AB,quorum ſingula latera bifariam ſecentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G,punctis,quæ rectis iun-
gantur ſe mutuo ſecantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde OH,OK, ρI. σG, extrema ac media
ratione in punctis φ, Q, 3,4,ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores,perpendicu-
lares φ2, QT,37,48, æquales ſegmentis maioribus φO,QO,3ρ,46, coniunganturque rectæ T2,2C,C7,7D,
DT,TA,A8,8B,B2, demonſtrabimus eadem ratione,pentagona T2,C7D, T2, B8, A, æquilatera eſſe
& æquiangula,& æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Conſtructa igitur iam ſunt
tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & ſibi mutuo cohærentia lateribus communibus TD,
TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem ſimilia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera;
conſtitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem ſphęra comprehendi,qua & cubus,& præcedentes figurę com-
prehenduntur,hac arte demonſtrabimus.

INTELLIGANTVR plana cubi oppoſita ſecari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam ſecan-
tes ducuntur,nempe planum ADEF,& eius oppoſitum,planis ductis per rectas KM,LN.Item planum ABCD,
& eius oppoſitum,planis per rectas GI,HK,ductis,&c. Quoniam igitur plana ſecantia recta ſunt ad dicta plana
c 19.vnde. cubi quod parallela ſint baſibus cubi, quæ rectæ ſunt ad plana ADEF, ABCD; [c] Erunt & communes eorum
ſectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum YP, recta ſit ad planum ADEF, ipſa producta verſus Z, erit
communis ſectio planorum per rectas KM,LN,ductorum. Eodem pacto ſi ex O, ad planum ABCD, erigatur
perpendicularis 9OZ; erit ipſa communis ſectio planorum, quæ per rectas GI,HK,ducuntur. [d] Quia vero
d 39.vnde. dictæ communes ſectiones & diametri cubi ſe mutuo bifariam ſecant; ſecent ſe mutuo bifariam in Z: Secant au-
tem ſeſe diametri cubi bifariam in centro ſphæræ cubum complectentis,ex coroll.1.prop.15.huius l. Punctum i-
gitur Z,centrum erit ſphęrę circa cubum deſcriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi du-
ctæ inter ſe æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoq; eſſe omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Do-
e 6. vnde. decaedri ductas, ſic fiet perſpicuum, ducta recta ZX. [e] Quoniam parallelæ ſunt KP. OZ, quod vtraq; re-

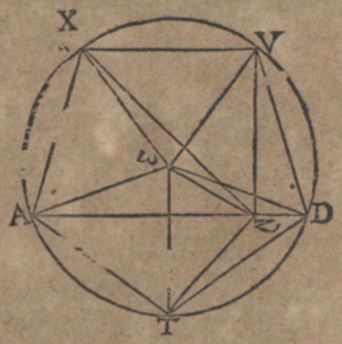


cta ſit ad planum ABCD; Item parallelæ ſunt OK, ZP, quod vtraque recta ſit ad planum ADEF; erit
PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi eſſe coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ,
æqualis erit ipſi KO, hoc eſt, ipſi NP, dimidio lateri cubi: Eſt autem & PZ, ipſi PR, æqualis. Tota ergo Z-
f 4. tertij-dec. Y,toti NR,æqualis erit. [f] Quare cum quadrata rectarum NR. PR, ſimul tripla ſint quadrati rectæ NP, quod
NR, in P,ſecta ſit extrema & media ratione; erunt quoq; quadrata rectarũ ZY,PY,hoc eſt, quadrata rectarum
g 47.prim. ZY,YX,ſimul tripla quadrati rectæ PZ: (Eſt.n. XY,æqualis ipſi PS,hoc eſt,ipſi PY:) [g] Eſt aũt quadratis rectarũ
ZY,YX,æquale quadratũ rectæ ZX. Igitur & quadratũ rectæ ZX.triplũ erit quadrati rectæ ZP,hoc eſt, quadrati
dimidii lateris cubi. At quia eiuſdẽ quadrati dimidii lateris cubi triplũ eſt quoq; quadratũ ſemidiametri ſphæræ
h 15. quint. cubũ comprehendentis: ([h] Nam vt diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiameter ad dimidiũ lateris; [i] Ac proinde
i 22. ſexti. vt quadratum diametri ad quadratum lateris,ita quadratum ſemidiametri ad quadratũ dimidii lateris. [k] Cum
k 15.tertijd. ergo quadratũ diametri triplũ ſit quadrati lateris; erit quoq; quadratum ſemidiametri triplum quadrati dimi-
dii lateris.) Æquale igitur eſt quadratum rectæ ZX,quadrato ſemidiametri ſphæræ,ſeu cubi; Ac propterea ZX,
æqualis ſemidiametro. Eadem ratione erit ducta recta ZV,ſemidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera
ZY,YX, trianguli ZYX,æqualia ſint lateribus ZY, YV,trianguli ZYV,& anguli contenti recti. (Cum enim P-
l 4.primi. Y, ſit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad ſibi parallelam VX, perpendicularis.) [l] Erunt baſes

ZX,ZV,

ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, ſemidiametro ſphæræ æquales, vt dictum eſt. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro ſphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales ſemidiametro ſphæræ. Vt autem oſtendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, ſemidiametro æqualis, deſcribatur circa pentagonum, cum ſit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipſius ex Z, centro ſphæræ perpendicularis demittatur Z ω, connectanturque rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ ZA, æquale eſt quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ ZX, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quod rectæ ZA, ZX, oſtenſæ ſint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarũ Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto cummuni quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquentur quadrata rectarũ ω A, ω X, ideoq; rectæ ipſæ ω A. ω X, æquales erunt. Non aliter oſtendentur rectæ ω V, ω D, & inter ſe, & ipſis ω A, ω X, æquales, quod & rectæ ZV, ZD, æquales ſint oſtenſæ rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ, [b] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarum Z ω ω A, æqualia erunt quadratis rectarum Z ω, ω T. [c] Cum ergo illis duobus æquale ſit quadratum rectæ ZA; his vero quadratum rectæ ZT; Erunt æqualia quadrata rectarum ZA, ZT; proptereaque & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare ſphæra complectens cubum ex centro Z, deſcripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX: Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem ſphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.

a 47. primi.
b 9. tertij.
c 47. primi.



POSTREMO cum ſit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: [d] erit quoq; vt NL, dupla ipſius NP, ad RS, duplam ipſius PS, ita RS, duplæ ipſius PS, ad rectam compoſitam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipſius SN. Si igitur cubi latus NL, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum erit SR; Sed NL, tota ita ſecta, Rationalis eſt. (Nam eius quadratum commenſurabile eſt quadratro diametri ſphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum ſit illud tertia pars huius.) [e] Igitur maius ſegmentum SR, hoc eſt, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & prædictas figuras; & demonſtrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.

d 15. quint.
e 6. tertijd.

COROLLARIVM. I.

CVM ergo demonſtratum ſit; recta LN, extrema ac media ratione ſecta, maius ſegmentum eſſe rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perſpicuum eſt, ſi latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Nam AD, latus cubi ſubtendit angulum T, pentagoni, eſtque oſtenſum æquale rectis AV, DX, ſubtendentibus angulos X, & V, eiuſdem pentagoni.

Quoniam vero recta ſubtendens dictum angulum pentagoni ſecta extrema ac media ratione, [f] facit maius ſegmentum latus pentagoni: [g] ac propterea recta compoſita ex dicta recta ſubtendente angulum pentagoni, hoc eſt, ex latere cubi, & ex maiori ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri, ſimiliter diuiditur, facitque minus ſegmentum latus Dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ.

f 8. tertijd.
g 5. tertijd.

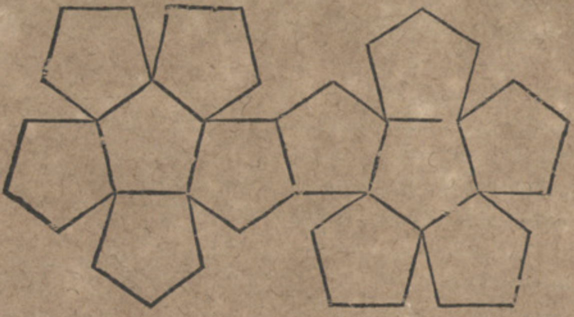
COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoq; & ad angulos rectos ſecantibus. Nam duo ex dictis lateribus ſunt VX, T2, quæ videlicet parallela ſunt lateribus cubi EF, AB: aliaq; quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cum parallelæ ſint cubi lateribus parallelis & oppoſitis, ſecanturque, ex demonſtratis, bifariam & ad rectos angulos, à lineis rectis, quæ centra baſium cubi oppoſitarum coniungunt; quales ſunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ, vt demonſtratum eſt, ſe mutuo interſecant in centro Z. Dico ſe mutuo ſecare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales ſint dimidio lateri cubi; & YP, 9O, æquales maioribus ſegmentis æqualibus PS, OQ; Erunt totæ YZ, 9Z, æquales: Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad ſectiones oppoſitorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales ſunt, ſeque bifariam in centro Z, mutuo ſecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo kOZP, angulus OZP, rectus eſt, cum opponatur recto OKP. Non aliter oſtendentur reliquæ lineæ rectæ centra baſium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos conſtituentibus, vt perſpicuum eſt.

COROLLARIVM. IV.

DENIQVE conſtat, ſi recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictũ eſt, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi: Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla oſtenſa ſint quadrati rectæ PZ: erit ZY, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit PZ, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY: [h] ideoque vt dupla ipſius ZY, nempe recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipſius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipſius ZP, ad duplam ipſius PY, hoc eſt, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ.

h 15. quint.



SCHOLIVM.

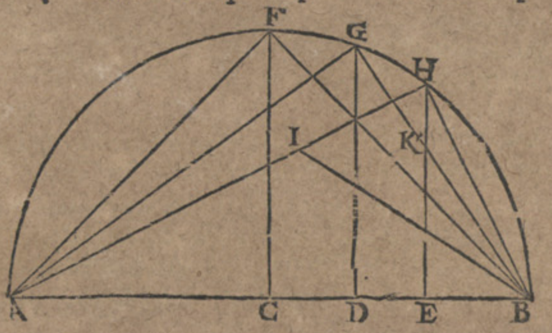
QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, diſponanturq́; , vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſe complicentur.

xviii.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

SIT ſphæræ diameter AB, quæ in C, ſecetur bifariam; In D, vero ita, vt BD, ſit ipſius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, ſit quinta pars eiuſdem. Deſcripto deinde circa AB, ſemicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipſi AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH, Poſt hæc ex HA, abſcindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo deſcripti, cuius ſemidiameter, ſeu latus Hexagoni eſt BH, connectaturque recta BI. Poſtremo BG, ſecetur extrema ac media ratione in K, ſitque maius ſegmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expoſitionem laterum prædictarum figurarũ, dico AG, eſſe latus pyramidis, ſeu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icoſaedri; BK, deniq; latus dodecaedri. Quoniam enim AG, media proportionalis eſt inter BA, AD, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Erit ex cor. prop. 20 eiuſdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG: Eſt autem BA, ipſius AD, ſeſquialtera: cum talium partium 2. ſit AD, qualium 3. eſt BA. Igitur & quadratum rectæ BA, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ AG; [a] Ac proinde cum diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri; erit AG, latus Tetraedri.

a 13. tertijdecim.

RVRSVS quoniam AF, eſt media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. propoſ. 8. lib. 6 Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. prop 20. l. 6. Eſt autem BA, ipſius AC, dupla: Erit quadratum rectæ BA, duplum quadrati rectæ AF. [b] Quarecum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

b 14. tertijdecim.

DEINDE cum BG, ſit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus coroll. l. 6. Sit autem AB, ipſius BD, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. [c] Quocirca cum ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi.

c 15. tertijd.

PRÆTEREA quia, ex eiſdem corollariis, BH, eſt media proportionalis inter AB, BE, atq; idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Eſt autem, ex conſtructione AB, ipſius BE, quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter ſphæræ potentia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinq; latera Icoſaedri ambientis ex coroll. 1. propoſ. 16. huius lib. Erit BH ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli; Eſt autem HI, latus decagoni eiuſdem circuli, ex conſtructione. [d] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, ſimul; Ac proinde [e] cum quadratum rectæ BI, æquale ſit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiuſdem. [f] Quam ob rem BI, latus eſt Icoſaedri.

d 10. tertijdecim.
e 47. pri.
f 16. tertijd.

DENIQVE cum BG, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius ſegmentum latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. prop. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinq; figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

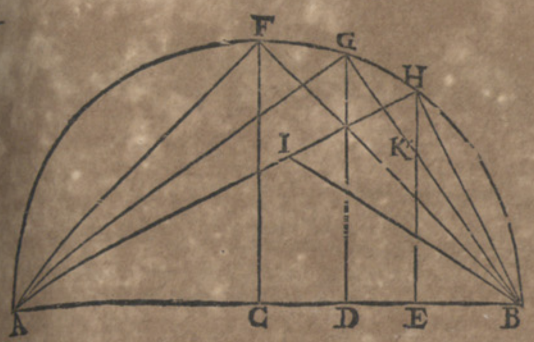
Quod vero ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cum demonſtratum ſit diametrũ ſphæræ eſſe potentia ſeſquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratum lateris Tetraedri; talium vero 3. quadratum lateris Octaedri; & deniq; quadratũ lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi; nec non ex ſphæræ diametro deſcripta proportionẽ inter ſe habent, quam numerus ad numerũ, [g] Ac propterea diameter ſphęræ, & latera dictarum figurarum lineæ ſunt commenſurabiles; atque adeo cum diameter ſphęrę ponatur eſſe Rationalis, erunt quoq; prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt conſtat ex cor. propoſ. 24. lib. 8. [h] Erunt huiuſmodi lineæ, nimirum diameter ſphæræ, latus Tetraedri, latus octaedri, & latus cubi longitudine incommenſurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles.

Diamet.	6.
Tetraed.	4.
Octaed.	3.
Cub.	2.

g 6. dec.
h 9. dec.

At vero latera Icoſaedri, & dodecaedri, quoniam ſunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonſtratum eſt, nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorũ, cum latera priorum ſint diametro ſphæræ commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorũ eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoq; ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum, oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.

SED



SED neque inter ſe vllo pacto commenſurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri,& Dodecaedri. Si namq; credantur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cum latus Dodecaedri ſit Apotome, [i] erit quoque latus Icoſaedri,Apotome. i 104. dec. Item cum latus Icoſaedri ſit linea Minor, [k] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi k 106. dec. dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantum,ſequetur eodem modo,latus Dodecaedri eſſe lineam Minorē, ex eo. [l] quod latus Icoſaedri Minor eſt. Quod eſt abſurdum. l 16.tertijd. Nam ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10. Apotome, & Minor ſint lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes,ita vt neutra ſit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe,& diametro ſphæræ,ideoq; Rationalia exiſtant, duo vero poſteriora incommenſurabilia,& inter ſe,& diametro,reliquiſq; lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo,vt latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri;Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri;Latus denique Icoſaedri maius latere Dodecaedri; hoc eſt,eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera,quo præfatas figuras conſtruximus. Quæ forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus,quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri,perſpicuum eſt.Cum enim AG,latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum,quam AF,latus octaedri; maior erit recta AG,quam AF,ex ſcholio propoſ.28,lib.3.

EODEM modo oſtendemus latus Octaedri maius eſſe latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit,quam BG,cubi latus.

LATVS autem cubi BG,maius eſſe latere Icoſaedri BI,hac arte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD; [m] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam;erit quadratum rectæ AB,noncuplum quadrati rectæ BD,cum noncupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac m 20.ſext. propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB,talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ AB,talium 3. eſt quadratum rectæ BG; [n] quod illud huius triplum ſit; Ac n 15. tertijdec. proinde talium quoq; 3. ſunt quadrata rectarum GD,BD,cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ BD,talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ AB,quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2.Nam cum 9.ad 2.minorem habeant proportionem quintupla,quod 10.ad 2 quintuplam proportionem habeant; [o] erit numerus,ad quē 9.habent proportionem quintuplā,minor quā 2.Quare quadratū rectæ o 10. quin. GD,maius eſt quadrato rectæ BH,ideoque recta GD,maior quā recta BH. Rurſus quia diameter ſphæræ AB, componitur ex BH,ſemidiametro circuli,ex quo Icoſaedrum conſtituitur,& ex linea dupla lateris decagoni HI, eiuſdem circuli,per coroll.2.propoſ.16.huius lib.conſtat latus decagoni HI,maius eſſe tertia parte rectæ AB,hoc eſt,minus recta BD. Nam ſi HI,recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus,nempe ipſi AD; Ac propterea BH,reliquæ tertiæ parti erit æqualis,nimirum ipſi BD;Atq; adeo cum quadratū rectæ AB,noncuplū ſit oſtenſum quadrati rectæ BD,erit idem quadratū rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod eſt abſurdū. quintuplū enim eſt demonſtratū. Non ergo HI,tertia pars eſt ipſius AB: Sed neq; maior tertia parte.Si enim recta HI,dicatur maior tertia parte rectę AB,& proinde dupla ipſius HI,maior quam duæ tertiæ,hoc eſt,quā AD,erit BH,minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB,maius erit,quam noncuplum quadrati rectæ BH. Quod magis eſt abſurdum. Non igitur maior eſt HI, tertia parte ipſius AB: Sed neq; æqualis tertiæ parti,vt oſtendimus. Minor ergo eſt quam tertia pars,hoc eſt,quam BD. Itaque cum rectæ GD,DB,maiores ſint rectis BH,HI,vt demonſtratum eſt, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [p] Eſt autem quadratum rectæ BG,æquale quadratis rectarum GD,DB; & quadratum p 47.prim. rectæ BI, quadratis rectarum BH,HI. Quadratum ergo rectæ BG,maius quoq; erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG,nempe latus cubi,maior erit quam recta BI,latus ſcilicet Icoſaedri.

MAIVS deniq; eſſe latus Icoſaedri BI, latere Dodecaedri BK.hac ratione patefiet. Cum rectæ BG,diuiſæ extrema ac media ratione,maius ſegmentum ſit BK,& minus GK;erit rectangulum ſub BG,BK,maius rectangulo ſub BG,GK,atq; adeo rectangula ſub BG,BK,& ſub BG,GK,ſimul maiora duplo rectanguli ſub BG,GK: [q] Eſt autem rectangulis ſub BG,BK,& ſub BG,GK,æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis q 2. ſec. ſub BG,GK,æqualia ſunt duo quadrata rectæ BK,(Nam cū ſit vt BG,ad BK,ita Bk,ad GK; [r] erit quadratū rectæ r 17. ſexti. BK, æquale rectangulo ſub BG,GK,ideoq; duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis ſub BG,GK.) Maius igitur quoque eſt quadratum rectæ BG,duobus quadratis rectæ BK; Atq; idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG,ſex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia ſunt quinque quadrata rectæ BH,(Cum enim quadratum rectæ AB,triplum ſit quadrati rectæ BG,& quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG,quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoq, tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH,maiora erunt ſex quadratis rectæ BK; Ac proinde vnum quadratum rectæ BH,maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale eſſet quadratum rectę BH,quadrato rectæ BK,vel minus; forent quinque quadrata rectæ BH,minora ſex quadratis rectæ BK. Quod eſt abſurdum,cum illa quinq; hiſce ſex maiora ſint demonſtrata.) Quam ob rem & recta BH,maior erit quam recta Bk; Ac propterea cum BI,maior ſit quam BH,multo maior erit BI,latus videlicet Icoſaedri,quam Bk,latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum expoſuimus,& inter ſe comparauimus. Quod erat faciendū.

S C H O L I V M.

INTERPRETES hoc loco demonſtrant, præter dictas quinque figuras, non poſſe aliam conſtitui figuram ſolidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter ſe æqualibus, hac fere ratione.

Ex duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, ſolidus angulus conſtitui non poteſt, cum ſaltem tres anguli plani requirantur ad ſolidi anguli conſtitutionem.

 EX

Ex tribus autem triangulis æquilateris conſtat pyramidis angulus.

Ex quatuor, Octaedri angulus;

Ex quinque, angulus Icoſaedri;

Ex ſex autem huiuſmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non poteſt angulus ſolidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. prop. 32. l. 1. Erũt eiuſmodi anguli ſex, duodecim tertiæ
r 20. vnde. *partes vnius recti, hoc eſt, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipſis nullus angulus ſolidus conſtituetur.*[r] *Nam ſolidus omnis angulus minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam ſex planis eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit.*

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autẽ quadratis nullus angulus ſolidus conſtitui poteſt. Rurſus. n. recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex plurib. quam quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit.

Ex tribus deniq; pentagonis æquilateris & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum. n. quinq; anguli pentagoni æquales ſint ſex rectis, vt oſtendimus ad prop. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiuſmodi anguli tres rectos, & inſuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoq; ex ipſis angulus ſolidus conſtituetur. Sed ex quatuor huiuſmodi angulis nullus ſolidus angulus confici poteſt. Cum. n. vnus, vt dictum eſt, maior ſit recto, eo quod continet vnum rectum, & inſuper recti quintam partem; erũt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus ſolidus ex ipſis conſtituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. Nec ſane ex aliis figuris æquilateris & æquiangulis conſtitui poterit angulus ſolidus. Nam cum ſex anguli hexagoni æquales ſint octo rectis, vt ad prop. 32. lib. 1. eſt demonſtratum; ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea duas partes ſextas vnius recti; continebunt tres anguli eiuſmodi tres rectos, & ſex ſextas partes, hoc eſt, quatuor rectos. Quare ex ipſis nullo modo componetur angulus ſolidus; atq; idcirco multo minus ex pluribus eiuſmodi angulis, quam trib. angulus ſolidus cõficietur, neq; propterea ex aliis polygonis. Quilibet. n. tres maiores ſunt quatuor rectis. Quamobrem perſpicuum eſt, præter d. quinq; figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe conſtitui, quæ planis æquilateris & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

NAM *ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.*

SI *vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.*

SI *denique aſſumantur quinq; talia triangula ad efformandum angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrum viginti eiuſmodi triangulis contentum.*

QVOD *ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex eiuſmodi quadratis.*

POSTREMO, *ſi tria pentagona æquilatera & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.*

HOC *etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.*

SI *enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ ſunt omnes baſes in vnius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionẽ vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendũ eſt dimidiũ omniũ laterum, vt numerus laterũ Regularis ſolidi appareat.*

EXEMPLVM. *Si quatuor triangula Pyramidis, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6. numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium eſt rurſus 12. numerus laterum Octaedri. Si rurſus 20 triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium eſt 30. numerus laterum Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum conſtituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium eſt rurſus 30. numerus laterum Dodecaedri.*

QVOD *ſi quis rurſus interrogauerit, quotnam angulos ſolidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ ſunt omnes baſes in vnius baſis angulos, vt habeantur omninm baſium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque ſemper anguli baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius anguli ſolidi, diuidendi ſunt omnes anguli in numerum angulorum, qui ſimul coeunt ad angulum ſolidum conſtituendum, vt numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.*

EXEMPLVM. *Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi diuidantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt vnum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum ſolidum cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoq; octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidum angulum Octaedri.) conficiunt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum Icoſaedri) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si deniq; 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.*

DENIQVE *conſideratione etiam dignum eſt, cubum & Octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quot baſes in vno continentur, tot anguli ſolidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet ſex baſes, & octo angulos ſolidos: octaedrum vero octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes, & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poßidet, & viginti angulos ſolidos. Solum Tetraedrum, (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur, niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes, totidemq; ſolidos angulos.*

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM,

Et Solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinæ ſocietatem commendatus longiſsimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumque diſſererent aliquando deſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorum, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem poſtea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidem cæpi voluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis conſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum vel maxime in Geometria verſatus, ſcite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi ſumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ conſuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, vt proœmio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamus.

TREDECIM *libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi aſcribuntur: Duo vero ſubſequentes à pleriſque Hypſicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui ſolent; in quorum quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrum, & Dodecaedrum, tam ſecundum ſuperficies, quam ſoliditate: In poſteriori vero exponuntur deſcriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorũ Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypſicle ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinq; corporum regularium, eorumque mutuas inſcriptiones vnius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus abſoluitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuerſum diſſerere, proponendo varia theoremata, atq; problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuo inſcribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanum, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operam, & ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non ſolum inſequentes duos libros quam plurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; verumetiam integrum librum, qui ordine decimusſextus eſt, adiunxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & Dodecaedri facile intelligi poteſt ex eius proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.*

QVONIAM *vero in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quam in earundem*

ordine,

ordine, & inter ſe, & à Franciſco Fluſſate, ideoq; & à nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem vtriuſq; duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior vero Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemq; in Campano intellige, ſi forte loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando deniq; nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.

1.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſq; lineæ ſimul; & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim AE, in vtramq; partem, vt perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur rectæ AC, CG,
a 3. tertij. CF, BF.[a] Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF,
b 4. primi. æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti;[b] erunt ba-
c 28. tertij. ſes CF, BF, æquales;[c] ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiuſdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia ſunt lateribus CE, EG,



d 4. primi. trianguli CEG, ſuntque anguli contenti recti;[d] erunt & baſes CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ DCF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partiũ 1. arcus CF,
e 33. ſext. qualium 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit arcus CF.[e] Quare &
f 20. tertij. angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF:[f] Eſt autem angulus CFD, dimidiũ anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus CGF, duplus erit
g 32. prim. anguli CAF:[g] Atqui angulus CGF, externus, æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, vt oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium
h 6. primi. eiuſdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA;[h] ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FG, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul AF, FC, duplæ erunt ipſius AE, atque idcirco è contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hæc linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

COROLLARIVM II.

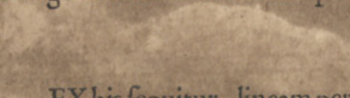
HINC quoq; fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam æqualem eſſe vtriq; lineæ ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul: Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

iv.
ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

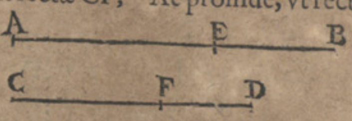
SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

SECENTVR binæ rectæ AB, CD, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe vt AB, ad CD, ita AE, ad CF, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum
a 17. ſexti. enim ſit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB; & vt CD, ad CF, ita CF, ad FD;[a] erit



rectangulum ſub AB, EB, æquale quadrato rectæ AE, & rectangulum ſub CD, FD, æquale quadrato rectæ CF. Quam ob rem erit vt rectãgulum ſub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita rectangulum ſub CD, FD, ad quadratum rectæ CF, (eſt enim vtrobiq; æqualitatis proportio.) Ac propterea, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli ſub AB EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, ad quadratum rectæ CF: & componendo, vt quadruplum rectanguli ſub AB, EB, & quadratum rectæ AE, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, & quadratum rectæ CF, ad quadratum

dratum rectæ CF:[b] Sed quod quater continetur ſub AB, EB, vna cum quadrato rectæ AE, æquale eſt quadrato
lineæ compoſitæ ex AB, EB; Et quod quater continetur ſub CD, FD, vna cum quadrato rectæ CF, æquale eſt b 8. ſecun.
quadrato lineæ compoſitæ ex CD, FD. Igitur erit quoque vt quadratum lineæ compoſitæ ex AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadratum lineæ compoſitæ ex CD, FD, ad quadratum rectæ CF, [c] Ac proinde, vt recta c 2. ſecund.
compoſita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta compoſita ex CD, FD, ad rectam CF: Et componendo vt compoſita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc eſt dupla ipſius AB, ad rectam AE, ita recta compoſita ex CD, FD, & recta CF, id eſt, dupla ipſius CD, ad rectam CF; Et permutando, vt dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita AE, ad CF; [d] Vt autem dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita eſt AB, ad CD.



Erit ergo vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; Ac propterea, cum ſit vt tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam; [e] erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, vt tota ad totam. Quare vt AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum vtraque proportio eadem ſit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit vt AE, ad EB, ſic CF, ad FD, & ſic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, oſtendemus & totas lineas, & earundem partes eſſe proportionales inter ſe. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, &c. Quod erat oſtendendum.

d 15. quint. e 19. quint.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonſtrabimus hoc ſequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum eandem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.

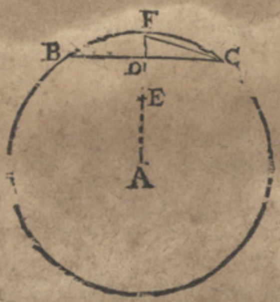
QVONIAM enim [f] latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione ſectam; [g] & recta ſubten...ns pentagoni angulum ſecta extrema ac media ratione facit maius ſegmentum, latus ipſum pentagoni. [h] fit vt eadem ſit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris ſegmenti ad maius, quæ maioris ſegmenti rectæ angulum pentagoni ſubtendentis ad minus. Cum ergo ſit, vt maius ſegmentum ad minus, ita tota ad maius ſegmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. Quod eſt propoſitum.

f 9. tertijd. g 8. tertijd. h 2. quartidecim.

EX hac quoque propoſitione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inſcripti, ſecetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius ſegmentum AE, eſſe æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ductæ; minus vero ſegmentum ED, æquale eſſe dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli. Extenſa namque recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propoſ. 1. huius lib. arcus BC, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam ſecetur in F, [l] Ac proinde recta compoſita ex AF, latere hexagoni, & FC latere decagoni, ſecta erit extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum AF, latus hexagoni, minus vero ſegmentum FC, latus decagoni. Quare vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, erit vt tota AD, diuiſa ſecundum extremam ac mediam rationem, ad totam compoſitam ex AF, FC, ſimiliter diuiſam, ita AE, maius ſegmentum ad AF, maius ſegmentum; & ED, minus ſegmentum ad FC, minus ſegmentum: [k] Eſt autem tota AD, dimidium totius compoſitæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipſius AF, ſemidiametri, & ED, ipſius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propoſitionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta æqualis ſit dimidio ſemidiametri; perſpicuum eſt, maius ſegmentum AE, æquale eſſe dictæ perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod eſt propoſitum.



l 9. tertijdec. k 1. quartidec.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

ij. iv.

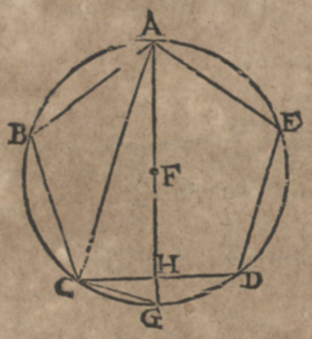
SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, ſubtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, ſimul quintupla eſſe quadrati ex ſemidiametro circuli deſcripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariã in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta ſubtenſa CG, latus decagoni. Quoniã igitur recta AG, dupla eſt rectæ FG; erit ex ſcholio prop. 4. lib. 2. quadratũ rectæ AG, quadruplũ quadrati rectæ FG: [a] Sunt autẽ quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarũ AC, CG, Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla ſunt quadrati re-



a 47. primi.

ctæ FG;



b 10. tertij-decim.

ctæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiuſdem rectæ FG:[b] Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoq; quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiuſmodi.

SI in ſphæra eadem cubus, & dodecaedrum inſcribantur, quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam ſphæra deſcripti: eritque ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta AC, ſubtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti.[c] Perſpicuum eſt autem quadrata rectarum AC, CD, lateris ſcilicet cubi, & lateris Dodecaedri,
c 3. quarti-decim. quintupla eſſe quadrati ſemidiametri FG, &c.

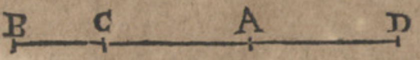
o. iij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, ſitque maius ſegmentum AC. Dico AC, eſſe latus decagoni eiuſdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiuſdem circuli, adiungaturque in rectum ipſi AB;[a] eritque tota compoſita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuiſa in A,

a 9. tertijd.



b 2. quarti decim.

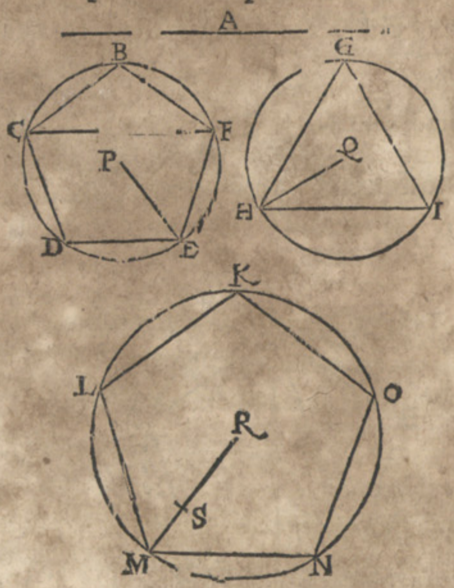
extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum BA. Ponitur autem & AB, ſecta in C, ſimiliter.[b] Igitur erit vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, tota ad maius ſui ſegmentum AC: Sed eſt quoque vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, maius ſegmentum ad AD, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni eſt AB, erit & AC, eiuſdem circuli latus decagoni.

c 5. tertijd. ALITER. Adiungatur ipſi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori ſegmento AC;[c] eritque tota recta BD, diuiſa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB maius ſegmentum ipſius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 9. lib. 13. AD, minus ſegmentum eiuſdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipſi AD, latus erit decagoni in eodem circulo deſcripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat oſtendendum.

ij. v.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.



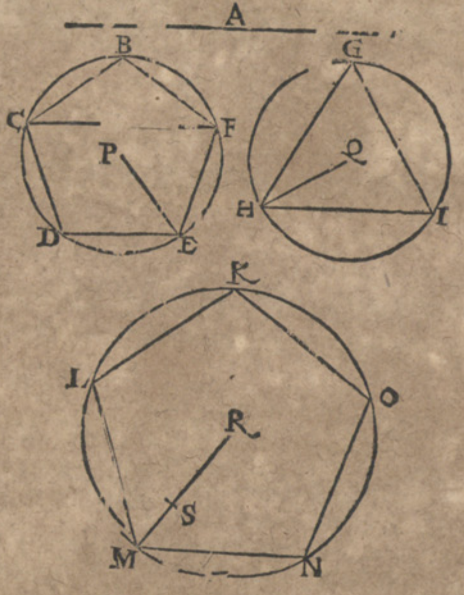
a 13. tertij-decim.

b 4. quar-tidecim.

c 2. quar-tidecim.

IN ſphæra, cuius diameter A. intelligatur deſcriptum & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icoſaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulum circumſcribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc eſt, circulos BCDEF, GHI, ipſa circumſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO,[a] ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoque quodlibet ipſorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturq; RM, extrema ac media ratione in S;[b] eritque maius ſegmentum RS, latus Decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtendat quoque recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdem propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti extrema ac media ratione;[c] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmentum ad RS, maius ſegmentum; Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo, per ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ

rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. ęquale eſt quadrato ex A, diametro ſphærę.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [e] Quia vero quadratũ rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni; & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoq; quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, ęqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, ([f] cũ quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri PE, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinq; quadrata rectæ MN, ęqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; [g] ſit autem quadratum ipſius GH, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinq; quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH,) erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; Ac propterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH, & idcirco ſemidiameter PE, ſemidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales ſunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonſtrandum.



e 10. tertijdecim.

f 3. quartidecim.

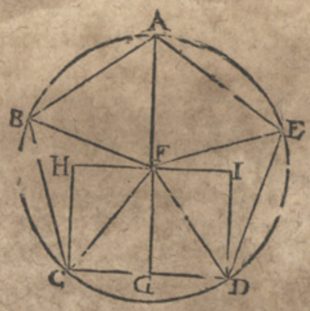
g 12. tertijd.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

iij. vi.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.

EX centro F, circuli circumſcribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum ſub FG, & CD, trigeſies ſumptum, eſſe æquale toti ſuperficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, reſoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. cum bina latera vnius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipſi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum ſub HC, hoc eſt, ſub FG, & CD. [a] Quoniam vero & rectangulum CI, duplum eſt trianguli FCD, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipſi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies ſumptum, æquale decem huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia ſint vni pentagono; Atque adeo ſextuplum rectanguli CI, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum CI, ſumptum trigeſies, æquale quoq; erit ſextuplo duorum pentagonorum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 41. primi.

ALITER. Facta eadem figuræ conſtructione, [b] cum rectangulum CI, duplum ſit trianguli FCD, hoc eſt, æquale triangulo FCD, bis ſumpto; Erit rectangulum CI, trigeſies ſumptum æquale triangulo FCD, bis ſumpto trigeſies, hoc eſt, ſumpto ſexagies; ac proinde toti ſuperficiei Dodecaedri. Cum enim vnum pentagonum Dodecaedri conſtet quinque huiuſmodi triangulis, conſtabunt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta huiuſmodi triangulis. Atque idcirco triangulum FCD, ſumptum ſexagies æquale erit ſuperficiei Dodecaedri.

b 41. prim.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

iij. vij.

SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.

EX centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum ſub DE, & BC, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorũ æqualia, & baſis vnius baſibus aliorũ æqualis.

Duca-



Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipſi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum BG, contentum ſub FB, hoc eſt, ſub DE, & BC. [a] Quoniam vero rectangulum BG, duplum eſt trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint vni triangulo Icoſaedri; Atq; adeo idem rectangulum trigeſies ſumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triãgulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icoſaedri. Si ergo excentro circuli triangulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

a 41. prim.

b 41. prim. ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ, [b] cum rectangulum BG, duplum ſit trianguli DBC, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectangulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo DBC, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigeſies ſumptum æquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri.

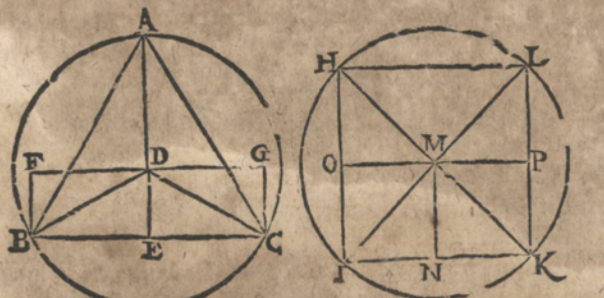
COROLLARIVM.

ITAQVE ſuperficies cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus. [c] Cum enim ſuperficies Dodecaedri æqualis ſit illi rectangulo trigeſies ſumpto; [d] Item ſuperficies Icoſaedri æqualis huic rectangulo trigeſies quoq; ſumpto: Erit tam illud rectangulum trigeſima pars ſuperficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, ſuperficiei Icoſaedri. [e] Quare erit ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt rectangulum illud, trigeſima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigeſimam ſcilicet partem Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

c 6. quartidec.
d 7. quartidecim.
e 15. quint.

SCHOLIVM.

NON diſſimili argumento indagabimus ſuperficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, Octaedri, & cubi. Nam ſi ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, vel quadratum cubi, circumſcribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei Tetraedri; In Octaedro vero & cubo duodecies ſumptum, ſuperficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circumſcriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icoſaedri dictum eſt. Dico rectangulum BG, ſexies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei, Tetraedri. [f] Quoniam enim rectangulum BG, duplum eſt trianguli DBC, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis; erit ipſum ſexies ſumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cũ igitur duodecim talia triangula conſtituant totam ſuperficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipſi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, ſexies ſumptum, ſuperficiei Tetraedri, ſeu Pyramidis æquale.



f 41. primi.

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Octaedri. [g] Cum enim rectangulum BG, duplum ſit trianguli DBC, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor huiuſmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies ſumptum æquale eſt ſuperficiei Octaedri.

g 41. prim.

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, deſcribatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum reſoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipſi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum ſub OI, hoc eſt, ſub MN, & IK, ſumptum duodecies, æquale eſſe ſuperficiei cubi. [h] Quoniam enim rectangulum IP, duplum eſt trianguli MIK, hoc eſt, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor eiuſmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula conſtituant ſex quadrata, id eſt, totam ſuperficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies ſumptum æquale ſuperficiei cubi. Quod eſt propoſitum.

h 41. prim.

ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (ſunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, ſit dimidium lateris HI, nempe æqualis ipſi MN,) conſtituent duodecim talia rectangula ſex quadrata eiuſmodi, hoc eſt, totam ſuperficiem cubi.

iv.
viij.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti; æquale eſt dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, deſcribatur pentagonum æquilaterū ABCDE, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres ſint AH: Angulum vero A, ſubtendens recta BE, ſecetur in ſex partes æquales, quarum quinque ſint BI, & vna IE, ita vt BI, ſint quintupla ipſius IE. Dico rectangulum comprehenſum ſub AH, BI, æquale eſſe pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum ſit ſemidiameter; erit AH, ipſius AF, ſeſquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam B E, bifariam, per coroll. 1. propoſ. 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam K B, quam KE, tres ſextas rectæ B E; atque adeo cum B I, contineat quinque, continebit KI, duas: Ac proinde & KB, ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobre... erit vt AH, ad A F, ita K B, ad K I; [a] atq; idcirco rectangulum ſub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo ſub medijs AF, K B. [b] Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin A F, & eandem altitudinem B K, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta. Igitur & rectangulum ſub A H, KI, duplum erit eiuſdem trianguli ABF: [c] Eſt autem & rectangulum ſub A H, K I, duplum rectanguli ſub A H, I E; propterea quod & baſis KI, dupla eſt baſis IE, (continet enim KI, duas ſextas partes ipſius BE, & IE, vnam.) eademque ſemper altitudo AH. Igitur æqualia ſunt triangulum ABF, & rectangulum ſub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum eſt trianguli ABF, quod pentagonum in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rectis è centro F, vt propoſ. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum vero ſub AH, BI, quintuplum eſt rectanguli ſub AH, IE; quod & baſis BI, quintupla ſit baſis I E, eademque ſemper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum ſub AH, BI, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus; &c Quod erat demonſtrandum.



a 16. ſex.
b 41 pri.
c 1. ſex.
d 1. ſex.

COROLLARIUM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum A B C D E, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti, ([e] comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum F G, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum inſcripti, nimirum ſub BI, æquale eſt pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.

e 5. quartidec.

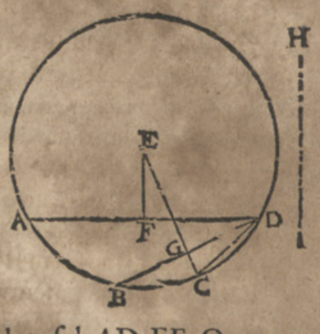
THEOR. 9. PROPOS. 9.

iv. viij.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

IN circulo ABCD, [a] circumſcribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulū Icoſaedri, ſit latus pentagoni BD, & trianguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit denique H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, ſectæ quoque extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt EF, ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. [b] Erit vt H, tota ad B D, maius ſui ſegmentum, ita E G, tota ad E F, maius ſui ſegmentum; [c] Ac proinde rectangulum ſub extremis H, EF; æquale erit rectangulo ſub medijs BD, EG. [d] Quia vero eſt, vt H, ad AD, ita rectangulum ſub H, EF, ad rectangulum ſub AD, E F, cum baſes ſint H, AD, latitudo vero ſemper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum ſub BD, EG, (quod eſt æquale rectangulo ſub H, EF,) ad idem rectangulum ſub AD, EF. Quare cum ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, vt rectangulum ſub BD, EG, ad rectangulū ſub AD, EF, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoq; vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaq; Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. quartidec.



b 2. quartidec.
c 16. ſex.
d 1. ſex.

ALITER. [e] Circumſcribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint BK. Dico rurſus eſſe, vt BE, latus cubi ad F G, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim rectangulum ſub AI, BK, æquale eſt pentagono A B C D E, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub A I, IE, æquale eſt triangulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum FG, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: erit vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub A I,

e 5. quartidec.



f 1. ſex. IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG. [f] Eſt autem vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita BK, ad IF, cum baſes ſint BK, IF, & altitudo eadem ſemper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF; Ac proinde, (ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, æque multiplicentur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum AFG, & recta IF, æque multiplicentur per numerum 20. [g] erit quoque vt pentagonum ABCDE, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta BK, duodecies ſumpta ad rectam IF, vigeſies ſumptam: Atqui recta BK, duodecies ſumpta æquiualet lateri cubi BE, decies ſumpto; (Nam cum BK, contineat quinque ſextas partes ipſius BE, continebit eadem BK, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.) Recta vero IF, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri FG, decies ſumpto; (eo quod FG, eſt ipſius IF, dupla.) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi BE, decies ſumptum ad latus Icoſaedri FG, decies ſumptum; Ac propterea, [h] cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

g ſchol. 22. quin.

h 15. quin.



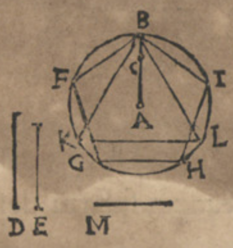
iv.
ix.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori ſegmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icoſaedri in ſphæra eadem cum cubo deſcripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus deſcribatur, in quo conſtituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius ſphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Quoniam vero AC, maius ſegmentum ſemidiametri AB, ſectæ extrema ac media ratione, [a] eſt latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus eſt Hexagoni; [b] poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius ſegmentum AC, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſſit iam & recta M, totam AB, & minus ſegmentum BC, per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico ſic eſſe D, latus propoſitum cubi ad E, latus propoſitum Icoſaedri, vt eſt BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC. [c] Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum eſt quadrati ſemidiametri AB: [d] Item quadrata rectarum AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum rectæ M, ipſis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Eſt autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, ſectæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit BF, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. eo quod BG, eſt latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ; [e] Erit vt tota AB, ad maius ſegmentum BF, [f] Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratū rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoq; vt quadratū rectæ BG, ad quadratū rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratū rectæ M: Et permutando, vt quadratū rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratū rectæ M; [g] Ac propterea erit vt recta BG, ad rectā BK, ita recta BF, potens totā AB, & maius ſegmentum AC, ad rectā M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC. Cum igitur propoſita latera D, E, cubi & Icoſaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, vt mox oſtendemus; perſpicuum eſt, vt ſe habet recta BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC, ita ſe habere propoſitum cubi latus D, ad Icoſaedri propoſitum latus E. Si recta itaque linea ſecetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat oſtendendum.

a 4. quartidec.
b 10. tertijdec.



c 12. tertijdec.
d 4. tertijdec.

e 2. quartidecimi.
f 22. ſex.

g 22. ſex.

SCHOLIVM.

QVOD vero propoſita latera cubi & Icoſaedri D, & E, eiuſdem ſphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, demonſtrabimus hoc propoſito theoremate.

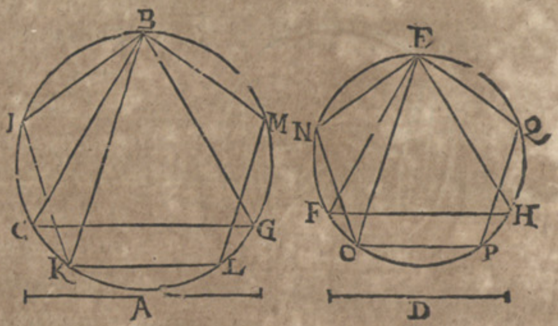
QVAM proportionem habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ. Item D, latus cubi, & EF, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico eſſe vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icoſaedrorum BCG, EFH, & circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pentagona æqualatera BIKLM, ENOPQ, connectanturque rectæ BK, CK, EO,

CK, EO, FO. [h] *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipſis ſphæra deſcripti: Ac propterea, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiuſdem ſphæræ, ideoque ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rurſus quia arcus BIK, ENO, ſimiles ſunt; (Nam vterque continet duas quintas partes ſuæ circumferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione ſegmentorum ſimilium, æquales inter ſe, quam anguli BKC, EOF, inter ſe, cum tam illi, quam hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, æquiangulum.* [i] *Quare erit vt BK, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icoſaedri, ita EO, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad EF, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.*

h 5. quar. tidec.

i 4. ſex.



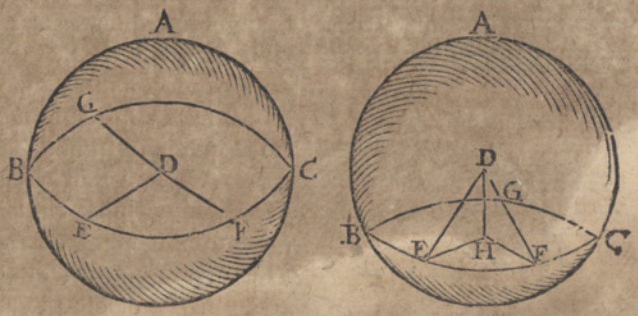
PERSPICVVM *eſt igitur id, quod in demonſtratione aſſumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.*

EX *hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.*

LEMMA I.

SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.

SECETVR *ſphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem ſectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, eſſe circulum. Tranſeat enim primo planum ſecans per centrum ſphæræ, ita vt centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione BEFCG; ducanturque ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſpæræ, cum ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiuſque centrum D, idem cum centro ſphæræ.*



TRANSEAT *ſecundo planum ſecans non per centrum ſphæræ: Ducatur autem ex D, centro ſphæræ ad planum ſecans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vſque communis ſectionis; & connectantur rectæ DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti ſunt;* [k] *erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis ſectionis cadentes eſſe æquales & inter ſe, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea contenta. ex defin. circuli, circulus erit; eiuſque centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod eſt propoſitum.*

k 47. pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE ſi planum ſecans tranſierit per centrum ſphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod ſphæra. Si vero planum ſecans per ſphæræ centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam ſphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum ſecans ducta. Nam ſemper demonſtrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli eſſe æquales, vt perſpicuum eſt.

LEMMA II.

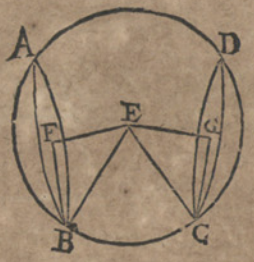
CIRCVLI in ſphæra æquales, æqualiter diſtant à centro ſphæræ: & circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæræ, æquales ſunt.

IN *ſphæra ABCD, cuius centrum E, ſint circuli æquales AB, DC. Dico ipſos æqualiter à centro E, diſtare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. præcedentis*

 lemma-

lemmatis in ipſorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. l Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum ſint ſemidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter diſtant à centro E.

l 47. pri.



SED iam æqualiter diſtent circuli AB, DC, à centro ſphæræ E. Dico ipſos eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius, oſtendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia eſſe quadratis rectarum EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur diſtare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit; atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, ſemidiametri ſcilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

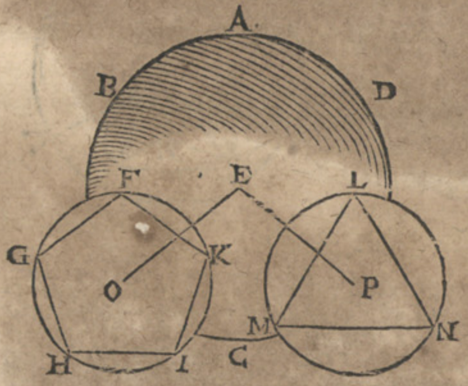
lv.
x.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri; in vna eademque ſphæra.

IN ſphæra ABCD, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum FGHIK: Item Icoſaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra ABCD, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangunt; ſi per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in ſphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. a Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN; Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro ſphæræ diſtabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales ſunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter oſtendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icoſaedri deductæ æquales. Quare ſi ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, reſoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & baſes ipſarum æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemque modo, ſi ex omnibus angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. b Quoniam autem eſt, vt baſis FGHIK, ad baſin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriuſque eadem ſit altitudo; Erunt quoque per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demonſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt, (ſicut modo diximus) vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit. per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: c Atque ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atque adeo ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 1. quartidec.



b 6. duodecimi.

c 9. quartidec.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero oſtenſum eſt quoque, d ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra: e Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemque ſphærę, vt eſt linea potens totam diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: f Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra: Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri: & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. & lineæ potentis totã quamcunq; ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentũ maius ad po-

d 9. quartidec.
e 10. quartidec.
f 11. quartidec.

ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius: & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

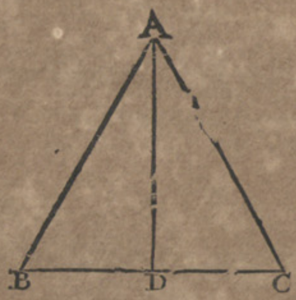
THEOR. 12. PROPOS. 12.

o. xj.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, [a] anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autem & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia. [b] Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia ſunt; ac propterea latus BC, hoc eſt, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia ſint quadrata rectarum AD, BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ BD; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratum rectæ AB, partium 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. pri.
b 6. pri.
c 47. pri.



COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt BD, & CD, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariam à perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli ACD: & baſis BD, baſi CD, æqualis: [d] Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id eſt, angulus BAC, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari AD. d 8. pri.

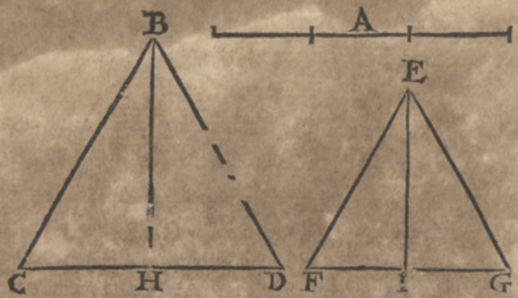
THEOR. 13. PROPOS. 13.

o. xiij.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim BCD, vnum triangulum Tetraedri, & EFG, octaedri illius ſphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera oppoſita CD, FG, perpendiculares BH, EI. [a] Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri BC, [b] & duplum quadrati lateris Octaedri EF; habebunt quadrata rectarum, ABC, EF, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. [c] ideoq; commenſurabilia erunt. Quare lineæ ipſæ A, BC, EF, commenſurabiles exiſtent ſaltem potentia; Atq; adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.

a 13. tertijdec.
b 14. tertijdec.
c 6. dec.



RVRSVS, [d] quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, ſeſquitertium eſt; habebunt tam quadrata rectarum BC, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter ſe, quã numeri 4. 3. [e] ideoq; tam illa, quam hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ BC, BH, quam lineæ EF, EI, commenſurabiles exiſtent. Eſt autem & tam CH, ipſi BC, quam FI, ipſi EF, dimidia videlicet toti, commenſurabilis. [f] Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commenſurabiles inter ſe erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoque BH, EI, Rationales. [g] Quoniam vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine ſunt incommenſurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. [h] cum oſtenſum ſit talium partium 1. eſſe tam quadratum CH, quam quadratum FI, qualium 3. eſt tam quadratum BH, quam quadratum EI.) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commenſurabiles: [i] Ac proinde tam rectangulum ſub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG, æqualia rectangulis ſub CH, BH, & ſub FI, EI, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum CD, FG, duplæ ſint baſium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri triangulo BCD, ſit commenſurabilis; (eſt enim triangulum BCD, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo EFG, commenſurabilis; (Eſt enim triangulum EFG, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media. Quod erat oſtendendum.

d 12. quartidec.
e 6. dec.
f 12. dec.
g 9. dec.
h 12 quartidec.
i 22. dec.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Ra-

rit Rationale,eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo,quod latera BC,EF,& ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas CH,BH, quam FI, EI, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles: Ac propterea rectangula ſub CH,BH,& ſub FI, EI, hoc eſt,triangula BCD,EFG,ipſis æqualia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale: perſpicuum eſt, quod infertur.

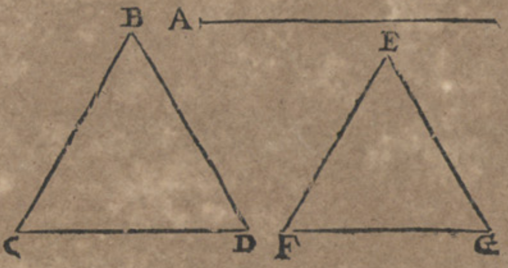
o. xiv.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum,atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

SIT ſphæræ diameter A,in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulum BCD; Octaedri vero baſis triangulum EFG.Dico triangulum BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli EFG; At vero ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialteram ſuperficiei Tetraedri. [a] Quoniam enim quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri CD; [b] duplum vero quadrati lateris Octaedri FG; ſit,vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. ſit quadratum lateris CD; & talium 3.quadratum lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triangulum BCD, ad triangulum EFG. ([c] quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter ſe habent laterum CD, FG, duplicatam,cum ſint ſimilia.) Igitur & triangulum BCD, ſeſquitertium eſt trianguli EFG.

a 13. tertijdec.
b 14. tertijdec.
c 20. & 19. ſex.



RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulum BCD, ſeſquitertiũ eſſe trianguli EFG; Ac propterea qualium partium 4.fuerit triangulum BCD,talium 3.eſſe triangulum EFG; Efficitur, vt triangulum EFG, octies ſumptum,hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earundem partium 24. At triangulum BCD, quater ſumptum,id eſt,tota ſuperficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphærę inſcribantur,&c. Quod erat oſtendendum.

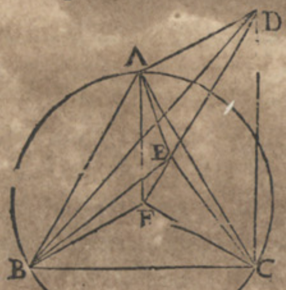
o. xv.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta,cadat in centrum baſis oppoſitæ,eſtque perpendicularis ad dictam baſim.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA,in ſphæra,cuius centrum E; ducaturque ex angulo D,per E,centrum ſphærę recta DEF, incidens in baſim ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC,& DF, perpendicularem eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F,ad angulos dictæ baſis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro ſphærę ad eius ſuperficiem æquales ſunt; erunt duo latera EA,ED,trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & baſes AD,CD,æquales,cum ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. [a] Igitur anguli AED, CED,æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt, [b] eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, ſi conſiderentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia ſunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipſis contenti, oſtenſi æquales; [c] Erunt baſes FA, FC,æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, ſi conſiderentur triangula EBF,ECF. Quare cum tres rectæ FA,FB,FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales; [d] erit F, centrum baſis ABC, ſeu circuli eam circumſcribentis.

a 8. pri.
b 13. pri.
c 4. pri.
d 9. ter.



QVIA vero ex coroll.lemmatis 1.propoſ.10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli ABC, demiſſa in centrum circuli cadit; efficitur vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F,cadens,perpendicularis ſit ad planum circuli,ſeu baſis Tetraedri ABC. Nam ſi alia duceretur perpendicularis,caderet ea in centrum circuli,per dictum coroll. Quare cum F,quoque ſit demonſtratum centrum eiuſdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. Quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.

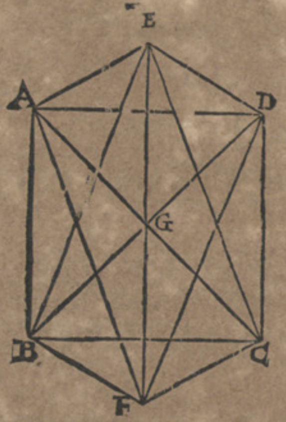
o. xvj.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis vero vtriuſque eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF,contentũ octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC,FBA,FAD,FDC,& in ſphæra deſcriptum,cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum, quarum baſis communis eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphærę.Ductis enim ex G,centro ſphærę ad omnes angulos rectis lineis GA,GB,GC,GD,GE,GF, quę æquales ſunt,

les ſunt, cum ſint ſemidiametri ſphæræ, ductæ videlicet è centro ad ſuperficiem ſphæræ: [a] quoniam quadratum diametri ſphærę duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri AG, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri ſphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cum ergo quadratum rectæ AG, æquale ſit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectę AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; [b] Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti. [c] Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ; [d] atque adeo rectæ AC, BD, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtent plano; [e] Ac propterea rectæ earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipſis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum baſis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides æquales ſunt & ſimiles ex defin. 10. lib. 11. cum quęlibet conſtet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia ſunt & ſimilia, & baſi communi ABCD. Dico iam earum altitudines eſſe æquales, & baſin ABCD, eſſe quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphærę. Quoniam enim oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri AB; æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG; [f] Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, ſe mutuo ſecantibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, [g] ipſa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe ad baſin pyramidum. Quare EG, altitudo eſt pyramidis ABCDE. Similiter oſtendemus FG, altitudinem ... pyramidis ABCDF. Cum ergo EG, FG, ſint ſemidiametri ſphærę æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia AC, eſt diameter ſphærę; [h] erit eius quadratum duplũ quadrati lateris AD; Ac propterea æquale duobus quadratis laterum AD, DC. [i] Quare angulus ADC, rectus eſt: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cum ſit deſcriptum ex latere octaedri AB; [k] conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphærę. Octaedrum ergo in ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.



a 14. tertijdec.
b 48. pri.
c 14. pri.
d 2. vndecimi.
e 7. vndecimi.
f 48. pri.
g 4 vndecimi.
h 14. tertijdec.
i 48. pri.
k 12. tertijdec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propoſitionem demonſtrauimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur à Campano, non habita ratione conſtructionis octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

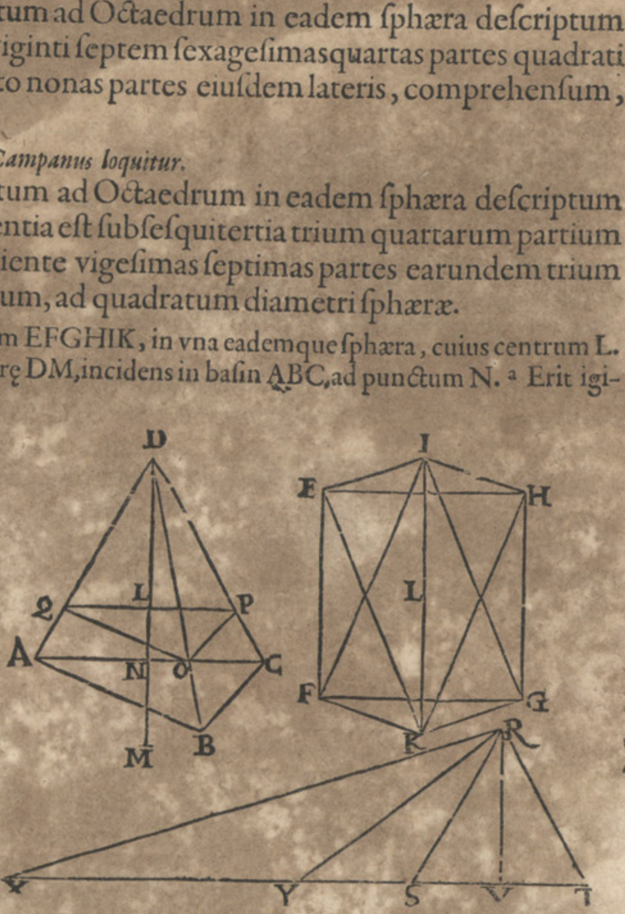
o. xvij.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente viginti ſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum, ad quadratum diametri ſphærę.

VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quæ potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphæræ.

SIT Tetraedrum ſphærę ABCD, & octaedrum EFGHIK, in vna eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter ſphærę DM, incidens in baſin ABC, ad punctum N. [a] Erit igitur N, centrum baſis ABC, & DN, perpendicularis ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum ſphærę & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit DL, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde, ex ſchol. propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum plano ABC; [b] Eruntq; rectę QO, OP, PQ, parallelę rectis AB, BC, CA; Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, [c] cũ anguli illius æquales ſint angulis huius, ſinguli ſingulis: At ABC, eſt æquiangulũ ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum ex coroll. propoſ. 6. lib. 1. ideoq; ſimile ipſi ABC: Sunt autẽ & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris ſimilia, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, ſimiles ſunt ex defin. 9. lib. 11. [d] Rurſus quia plana parallela ABC, QOP, ſecant rectas DN, DC, proportionaliter; erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3.



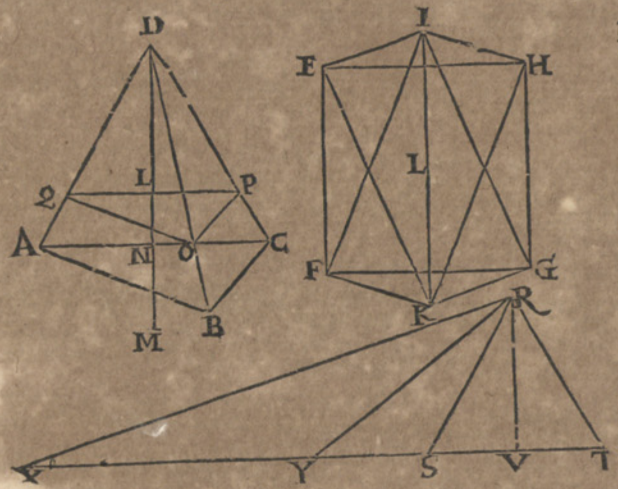
a 15. quartidec.
b 16. vndecimi.
c 10. vndecimi.
d 17. duodecimi.

 (cum

(cum oſtenſum ſit DN, eſſe talium partium 4. qualium 3. eſt DL.) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac pro-
e 5. duodec. inde, [e] cum pyramides ſimiles habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis A B C D, ad pyrami-
dem QOPD, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis 4. ad 3. vt conſtat in his numeris 64.
f 20. ſex. 48. 36. 27. Nam hi numeri ſunt minimi in proportione 4. ad 3. vt conſtat ex propoſ. 2. lib. 8. Rurſus [f] quia qua-
drata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ D C, ad quadratum rectæ D P, vt 64.
ad 36. vt in iiſdem numeris conſtat.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP; demittaturque ex R, ad ST, perpendi-
g 12. quartidec. cularis RV. [g] Eritque latus RT, hoc eſt, DP, illi æquale, potentia ſeſquitertium perpendicularis RV. Ac proin-
de qualium partium 36. fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem
partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea R V, eſt potens viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes qua-
drati lateris tetraedri.

RVRSVS extenſa T S, fiat T X, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propoſ. 6. lib. 10. diuidaturque TX, bifa-
riam in Y, vt ſit TY, talium partium 32. qualium 27. eſt TS, ſeu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC,
ad DP, erat vt 4. ad 3. nempe ſeſquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, eſt 27. (proportio enim 36.
ad 27. eſt ſeſquitertia) ac propterea qualium TY, eſt 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris te-
traedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum contentum ſub
recta RV, (quæ poteſt viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris DC,) & ſub recta T Y, (quæ
continet octo nonas partes eiuſdem lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.



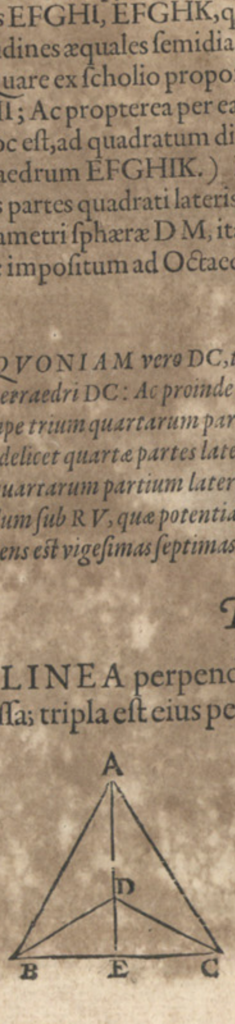
h 1. ſex. CVM enim ductis rectis RX, RY, [h] triangu-
lum RTX, duplum ſit trianguli RTY, quod & baſis
i 41. pri. TX, dupla ſit baſis TY: [i] Eſt autem & rectangulum
ſub RV, TY, duplum eiuſdem trianguli RTY; Erit
triangulum RTX, æquale rectangulo ſub RV, TY.
k 7. quin. [k] Ac propterea erit vt triangulum R T X, ad trian-
gulum RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idem
l 1. ſex. triangulum R S T: [l] Eſt autem triangulum R T X,
ad triangulum RST, vt baſis T X, ad baſin S T, ni-
mirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV,
T Y, ad triangulum R S T, hoc eſt, ad triangulum
DQP, ſiue QOP, ſibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit
autem & pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD,
vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum ſub RV, TY,
ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyra-
midem QOPD: At vero vt triangulum Q O P, ad
quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nam cum D N, recta ſit
ad planum ABC, recta quoque erit ad planum QOP, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque ſphæræ ſemidiameter
m 16. quartidec. DL, altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: [m] Octaedrum autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides
æquales EFGHI, EFGHK, quarum baſis communis quadratum EFGH, dimidium quadrati diametri ſphæræ,
& altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudi-
nes: Quare ex ſcholio propoſ. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita Pyramis QOPD, ad pyramidem
EFGHI; Ac propterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EF-
GH, hoc eſt, ad quadratum diametri ſphæræ D M, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt,
ad Octaedrum EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub RV, potente viginti ſeptem ſexageſimas
quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadra-
tum diametri ſphæræ D M, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo
ſphæræ impoſitum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes
n 12. quartidec. *lateris tetraedri DC: Ac proinde, [n] cum recta R T, ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV; erit RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius*
RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, fuit talium partium 32. qualium 27. S T, ſeu DP;
(tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, ſuperquintupartiens vigeſimas ſeptimas partes ipſius S T, nimirum
trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare conſtat, eſſe quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt re-
ctangulum ſub R V, quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, quæ ſuperquin-
tupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

o. xvij. LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam
demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur.



SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A,
per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad B C, eamque bifariam diuidet,
ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico AE, triplam eſſe rectæ D E, quæ ſcilicet
perpendicularis eſt è centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum
latera D A, D B, trianguli A D B, æqualia ſint lateribus DB, DC, trianguli
B D C; (è centro enim ducuntur) ſit autem & baſis A B, baſi B C, æqualis:
Erunt triangula ABD, BDC, æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque ea-
dem

dem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum eſt trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum ſub AE, EB, triangulo ABC; & rectangulum ſub DE, EB, triangulo BDC, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſis trianguli BDC, dupla ſit baſis BE, vtriuſque rectanguli; Erit quoque rectangulum ſub AE, EB, triplum rectanguli ſub DE, EB: [a] Eſt autem vt rectangulum ſub AE, EB, ad rectangulum ſub DE, EB, eiuſdem altitudinis EB, ita baſis AE, ad baſin DE. Igitur & AE, tripla eſt ipſius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendum. a 1. ſex.

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

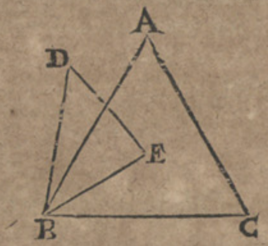
EX quibus rurſus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam eſſe.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

o. xvij.

SI octaedrum ſphæræ inſcribatur: erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunque octaedri ducitur.

SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrũ D, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro ſphæræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturque ſemidiameter ſphæræ DB. Dico ſemidiametrum DB, potentia triplam eſſe perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum ABC, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; [a] quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB, & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ DB, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ DB, 3. [b] Quia vero quadratum lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare [c] cum quadratum rectæ DB, æquale ſit quadratis rectarum BE, DE; ſit autem quadratum rectæ DB, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 14. tertijdec.
b 12. tertijdec.
c 47. pri.

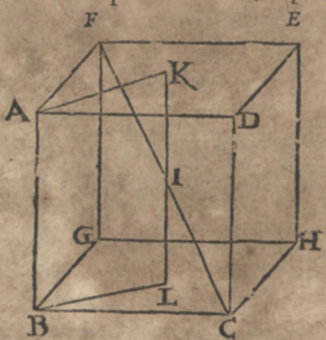
THEOR. 20. PROPOS. 20.

o. xviij.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem à centro ſphærę in aliquam baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam baſin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri ſphærę æquale eſſe ſuperficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem eſſe dimidio lateris cubi. [a] Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, hoc eſt, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti æquale ſex quadratis cubi, id eſt, toti ſuperficiei cubi.

PRODVCTA autem KI, ad baſin oppoſitam BCHG, vſque in punctum L; cum KL, recta ſit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. Rurſus, [b] quia AB, KL, parallelæ ſunt, quod rectæ ſint ad planum AE, ducatur per ipſas planum faciens in planis oppoſitis parallelis AE, BH, communes ſectiones, lineas rectas AK, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter ſe; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam vero perpendicularis KL, è centro ſphæræ I, cadit in baſes AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas baſes ambientium in ſphæra, per coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. Quare KL, in centro bifariam ſecabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. oſtendimus; Ac propterea cum KL, oſtenſa ſit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiuſdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, &c. Quod oſtendendum erat.



a 15. tertijdec.
b 6. vndecimi.
c 16 vndecimi.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, ſolidũ, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale eſſe cubo. [d] Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphæræ: [e] Perſpicuum autem eſt, ſolidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe ſolido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, eo quod dicta ſolida habeant & baſes, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo ſolida compleant totum cubum, manifeſtum eſt id, quod fit ex dimidio lateris çubi, in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe toti cubo. Quod eſt propoſitum.

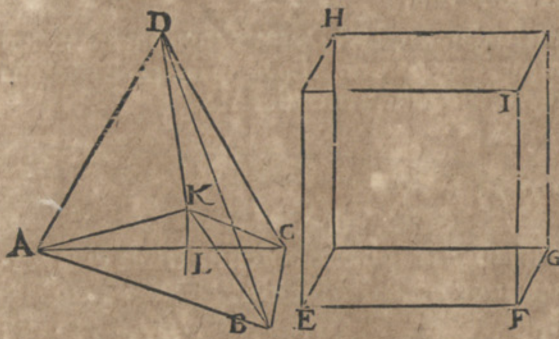
d 15 tertijdec.
e 31. vndecimi.

ALITER

ALITER proponi poteſt hoc corollarium, vt dicamus ſolidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod eſt tertia pars quadrati diametri ſphærę: Vt perſpicuum eſt.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem ſolidum, quod fit ex perpendiculari ex centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſim ducta in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, ſolidum autem EFGH, contentum ſub EI, tertia parte ſuperficiei corporis ABCD, & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL, ductæ ex centro K, ad baſin ABC. Dico ſolidum EFGH, æquale eſſe dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines. Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint, ipſi æqualiter à centro diſtabunt, per lemma 2. propoſ. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero priſma contentum ſub baſi ABC, & altitudine KL, triplum eſt pyramidis ABCK, per coroll. 1. propoſ. 6. lib. 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum; Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis ABCD. Quamobrem cum idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. Quod eſt propoſitum.



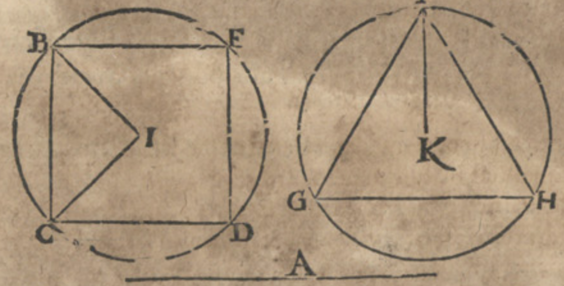
o.' xj.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrũ, cuius vnum triangulum FGH. Dico eundem circulum circumſcribere & quadratum BCDE, & triangulum FGH, hoc eſt, circulos BCDE, FGH, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint enim rectæ ex centris IB, KF.[a] Quia igitur quadratum diametri A, triplũ eſt quadrati lateris cubi BC, & quadratũ lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nã ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum ſubtendat quadratum;[b] Ac proinde quadratũ rectæ BC, æquale erit quadratis rectarũ BI, IC. Quare cũ rectarum quadrantẽ æqualiũ BI, IC, æqualia ſint quadrata: duplũ erit quadratũ rectæ BC, quadrati rectæ BI.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rurſus[c] quia quadratum diametri A, duplum eſt quadrati lateris Octaedri FG, & quadrati lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectæ BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipſæ, & circuli ex ipſis deſcripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.

a 15. tertij dec.
b 47. pri.
c 14. tertijdec.
d 12. tertijdec.



COROLLARIVM.

HINC fit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui baſes oppoſitas tam cubi, quam octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex centro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipſas circumſcribentium, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib.[e] qui cum ſint æquales oſtenſi, æqualiter diſtabunt à centro ſphærę ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt. (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11 propterea quod parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodum & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod eſt propoſitum.

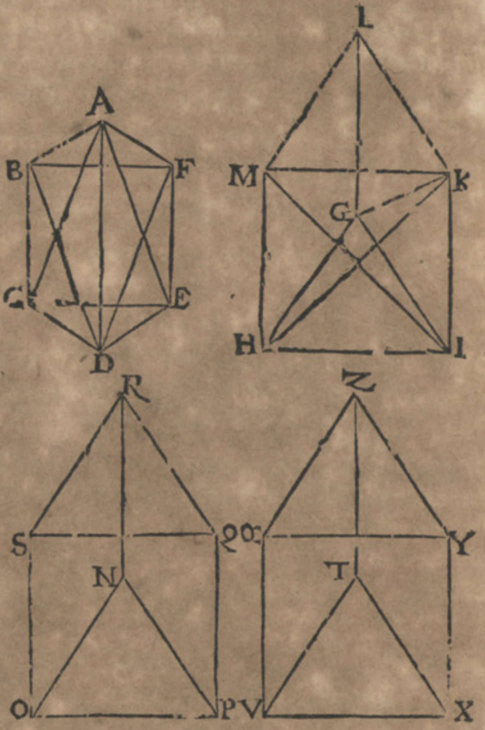
e 21. quartidec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem ſphera inſcriptum ſit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita eſſe octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune eſt ipſa diameter AD, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius baſis BCD, in BDFA, cuius baſis BDF; in CDEA, cuius baſis CDE; & in DEFA, cuius baſis DEF;

DEF; quæ quidem omnes baſes infra quadratum BCEF, exiſtunt continentes cum ipſo dimidiatam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyramidum conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt AD, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtunt, [a] inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. a 8. pri.



Conſtituatur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedri triplum erit, per coroll.1. propoſ.7.lib.12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZ&, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. [b] Quoniam igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZ&, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex ijs, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZ&. Quia vero priſma TVXYZ&, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ.14.lib.12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZ&, quod octaedro æquale eſt, eadem quæ octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplū tetraedri GHIk, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri. Eſt autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarū coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll.propoſ.21.huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ.15.lib.13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll.2.propoſ.13. lib.13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod demonſtrandum erat. b 14. quartidec.

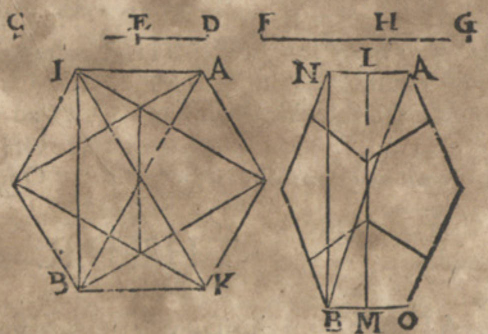
COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri, ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. [c] Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram. c 18. tertijdec.

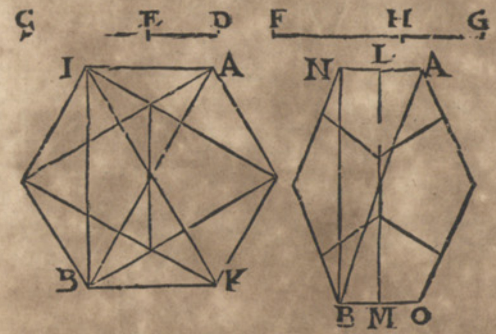
THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptum Icoſaedrum AIBk, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icoſaedri oppoſita AI, Bk, connectātur recta IB, quæ ſubtendet vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, vt conſtat ex propoſ.16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF; erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icoſaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadentia in ſuperficiem ſphæræ, in quo recta RH, latera oppoſita RX, HI, coniungens angulum RSH, ſubtendit) clariuſque patebit ex conſtructione Icoſaedri, quam ad finem lib.16. ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia vero AI, Bk, latera oppoſita parallela ſunt, per corol.13.propoſ.16.lib.3. [a] erūt anguli AIB, IBk, æquales duob⁹ rectis; Ac proinde, cū ſint inter ſe æqua- a 9. pri.



ſe æquales. (Ducta enim alia diametro IK; cum latera AI,IB, trianguli AIB, æqualia ſint lateribus KB,BI; & *b 8. pri.* baſes quoque AB,IK,æquales; [b] Erunt anguli AIB,IBK,æquales) recti erunt; [c] ideoq; quadratum rectæ pro- *c 47. pri.* poſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB; Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale,ex hypotheſi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia ſunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE,ſit maius ſegmentum ipſius CD,diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius IB,ſimiliter diuiſæ; (Nam IB,ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt IA, latus Ico- *d 8. tertijdec.* ſaedri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, [d] maius ſegmentum eſſe æquale lateri eiuſdem pentagoni) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi IA, lateri Icoſaedri. *e 2. quartidec.* [e] Cum enim ſit vt CD,ad CE, ita IB, ad IA; [f] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, *f 22. ſex.* ita quadratum rectæ IB,ad quadratum rectæ IA; Ac componendo,vt quadrata rectarum CD, CE,ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB,IA,ad quadratum rectæ IA: Oſtenſa ſunt autem quadratis rectarum *g 14. quin.* CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [g] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale eſt quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

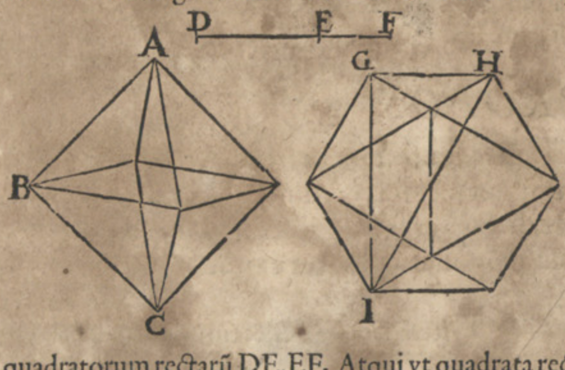


RVRSVS latera Dodecaedri oppoſita AN, BO, ſecentur bifariã in L,& M, punctis, quæ recta LM, & ipſa latera recta NB,coniungantur. Quoniam igitur NL,BM,æquales,parallelæ ſunt,per coroll.3. propoſ.17. *h 33. pri.* lib.13. [h] erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Eſt autem recta LM, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita, per idem coroll. *i 47. pri.* Igitur & NB,ad eadem perpendicularis erit. [i] Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ AB,æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cum idem quadratum rectæ AB,æquale ſit poſitũ quadratis rectarum FG,HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB,NA,quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea,cum HG,ſit minus ſegmentum ipſius FG, ſectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus ſegmentum ipſius NB, hoc eſt,ipſius LM,ſimiliter diuiſæ,per coroll.4.propoſ.17. lib.13. æquale erit HG, minus ſegmentum ipſius NA,lateri Dodecaedri.Quod quidem non aliter oſtendemus,ac ſupra demonſtrauimus,CE, maius ſegmentum æquale eſſe ipſi IA,lateri Icoſaedri.Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione,& maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam,& minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecadri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti duplum minoris ſegmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius ſegmentum DE,& minus EF, rectæ DF,ſectæ extrema ac media ratione.Sit quoque eidem ſphæræ inſcriptum Icoſaedrum GHI,cuius latus GH,& ſubtendens angulum pentagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI,& diameter HI. Dico quadratum lateris GH,duplum eſſe qua- *a 8. tertijdec.* drati minoris ſegmenti EF. Cum enim GH,ſit latus pentagoni,cuius vnum angulum ſubtendit recta GI; [a] erit *b 5. tertijdec.* GH, maius ſegmentum ipſius GI, diuiſæ extrema ac media ratione; [b] Ac proinde compoſita recta ex GI, GH, ſecabitur ſimiliter in G, puncto extrema ac media ratio- *c 47. pri.* ne; [c] Quia vero quadratum diametri HI, æquale eſt quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus ſit, vt in præcedenti propoſ. oſtenſum eſt; & quadratum lateris AB,ęquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt,vt quadratũ diametri HI ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarũ GI,GH,ad quadrata rectarũ DE,EF: [d] Eſt autem quadratũ diametri HI, duplũ quadrati lateris *d 14. tertijdec.* octaedri AB.Igitur & quadrata rectarũ GI,GH,dupla ſunt quadratorum rectarũ DE,EF. Atqui vt quadrata rectarũ GI, GH,ad quadrata rectarũ DE,EF, ita eſt quadra- *e 2. quartidec.* tũ rectæ GH,ad quadratum rectæ EF. ([e] Nam cum ſit vt GI, ad GH,ita DE, ad EF. [f] Erit quoq; vt quadratum rectæ GI,ad quadratum rectæ GH,ita quadratum rectæ DE,ad quadratum rectæ EF; & componendo,vt qua- *f 22. ſex.* drata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF,ad quadratum rectæ EF: Et permutando,vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH,ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque eſt quadrati rectæ EF. Quare ſi latus Octaedri potuerit maius & minus ſegmentum,&c. Quod erat oſtendendum.

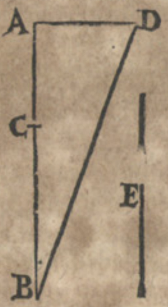


THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuiſa extrema ac media ratione cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat,cui recta ſubtendatur: Erit recta linea,quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ,latus octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.

LINEA

LINEA recta AB, ſecta in C, extrema ac media ratione conſtituat cum recta AD, quæ æqualis ſit minori ſegmento AC, angulum rectum A, cui recta ſubtendatur BD, ſitque recta E, potentia ſubdupla ipſius BD. Dico E, latus eſſe Octaedri illius ſphæræ, in qua AD, vel AC, latus eſt, Dodecaedri. Cum n. per corol. 2. prop. 17. lib. 13. maius ſegmentum BC, latus ſit cubi illius ſphæræ, cuius minus ſegmentum AC, vel AD, latus eſt Dodecaedri; erit diameter illius ſphæræ potentia tripla maioris ſegmenti BC, nempe lateris cubi: a Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris ſegmenti, tripla eiuſdem quadrati maioris ſegmenti BC. Quadratum igitur diametri ſphæræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc eſt, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter eſt ſphæræ. b Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; Poſſit autem recta BD, duplum rectæ E; quod recta E, ponatur potentia ſubdupla ipſius BD; Erit E, latus Octaedri eiuſdem ſphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diuiſa, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 4. tertijd. b 14. tertijdec.

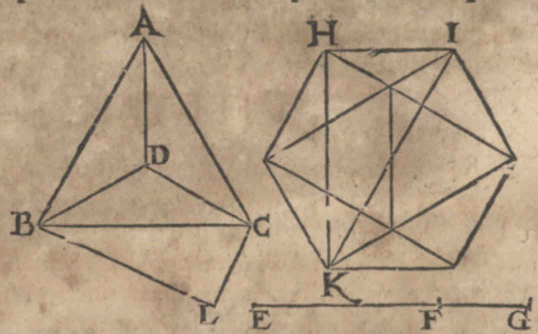
COROLLARIVM.

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia ſeſquialterum eſt lateris cubi BC, cuius maius ſegmentum eſt AD, latus Dodecaedri. vt conſtat ex iis, quæ oſtendimus ad propoſ. 4. lib. 13. cum BC, ſit maius ſegmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuiſæ: Perſpicuum eſt, ſi linea quæuis recta (nimirum BC,) ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum (nimirum AD,) eſſe latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ, in quo Octaedrum deſcriptum fuerit. c 18. tertijdec.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri poſſit maius & minus ſegmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione ſectæ; latus Icoſaedri eidem ſphæræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius ſegmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuiſæ extrema ac media ratione: Sit quoque HI, latus Icoſaedri HIK, eiuſdem ſphæræ. Dico HI, rectam potentia eſſe ſeſquialteram minoris ſegmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, connectaturque recta IK, diameter. a Quia igitur HI, eſt maius ſegmentum rectæ HK, diuiſæ extrema ac media ratione; b Erit quoque compoſita KHI, diuiſa eodem modo in H, maiuſq; ſegmentum HK, & minus HI. c Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulum BCL, ita vt BL, recta ipſi EF, & CL, ipſi FG, ſit æqualis, d Eritq; angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur poſſe rectas BL, CL, hoc eſt, rectas EF, FG: Eſt autem & angulus IHK, rectus, vt propoſ. 23. huius lib. oſtendimus; e Eſtque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. f Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula ſunt. g Ac propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CL. h Atqui IK, diameter eſt potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & HI, latus Icoſaedri erit potentia ſeſquialterum ipſius CL, hoc eſt, minoris ſegmenti FG. Si latus itaque Tetraedri poſſit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod oſtendendum erat.

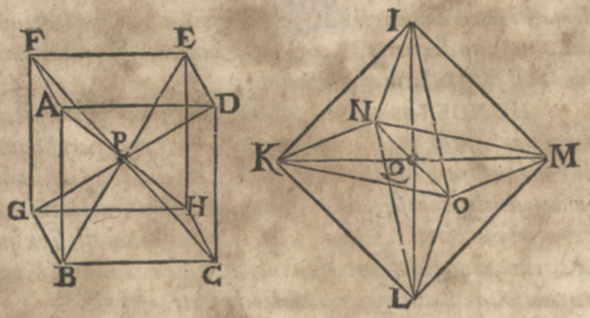


a 8. tertijd. b 5. tertijd. c 22. prim. d 48. pri. e 2. quartidec. f 6. ſexti. g 4. ſexti. h 13. tertijdec.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.

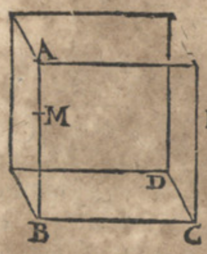
SINT in eadem ſphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam eſſe proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet ſuperficies cubi ad ſuperficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad ſemidiametrum ſphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, reſoluetur cubus in ſex pyramides æquales, quod habeant & baſes æquales, & altitudines. (Cum enim circuli deſcripti circa pyramidum, ſeu cubi baſes æquales, ſint æquales, ac propterea æqualiter à centro ſphæræ diſtent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, ſeu baſium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14.)

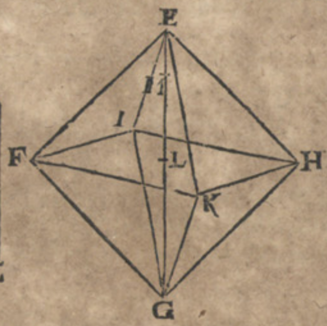


Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob cauſam. a Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratũ, & Octaedri triangulũ; æqualiter diſtabunt baſes pyramidum cubi, & Octaedri à centro ſphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales a 21. quartidec.

erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demonſtrauimus, ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies videlicet tota cubi, ad baſim pyramidis Octaedri; Ideoque rurſus, ex eodem ſcholio, vt cubus ad octuplum Pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.

SINT rurſus in eadem ſphæra cubus ABCD, & octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphæræ, ſeu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM ; Item ex ſemidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum, in quas Octae-
b 18. tertij- drum ſecari diximus propoſ. 16. huius lib.[b] ſeſquialterum eſt quadrati BD, lateris cubi BC : Eſt autem & recta
decim. AB, rectæ BM, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabuntur baſes IFKH, BD, & altitudines AB, BM:[c] Ac
c 34. vnd. propterea parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo ſuper baſim BD, & ſub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rurſus quia recta EL, rectæ EN, tripla eſt; erit & parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſim, & ſub altitudine EN, vt in ſcholio prop. 14. lib. 12. oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplum eſt pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propoſ. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EN: Atqui huius

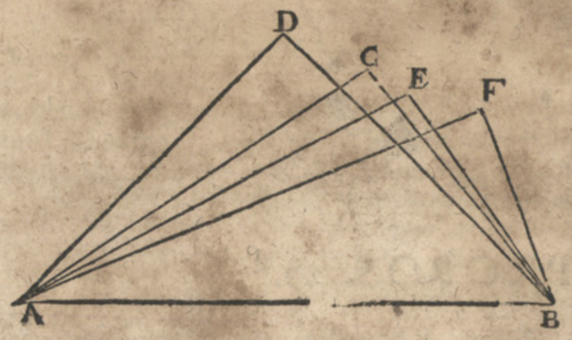




parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, ex ſcholio propoſ. 14.
d 16. quar- lib. 12. quod & altitudo LN, dupla ſit altitudinis EN.[d] Item Octaedrum EFGHIK, duplum eſt pyramidis IFK-
tidecim. HE. Æquale igitur erit parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſim IFKH & ſub altitudine BM, eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita eſt AB, ad EL. (Cum enim ſit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL: & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, æquale eſt oſtenſum cubo ABCD: Et parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, æquale eſt Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

e 13. tertij- *QVIA demonſtratum eſt,[e] diametrum ſphæræ, in qua omnia quinq; corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialteram*
decim. *potentia lateris Tetraedri, ita vt, ſi quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuum eſt, ſi ex quadrato diametri datæ auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in ſcholio prop. 33. lib. 6. oſtendimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam, ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratũ 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur AB, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB ; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia: ita vt quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC; Erit recta AC, latus Tetraedri.*



f 14. ter- *RVRSVS[f] cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri; Fit, ſi ex quadrato diametri AB,*
tijdec. *dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium ſit quadrati diametri AB; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis, ſecundum doctrinam ſcholij propoſ. 33. lib. 6. rectam AD, latus eſſe Octaedri.*

g 15. tertijd. *DEINDE,[g] quoniam docuimus, diametrum ſphæræ potentia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars ſit quadrati diametri AB; Vel ſi quadrato diametri AB, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita vt quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter AB, poßit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC; Quemadmodum è contrario, ſi ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.*

PRÆTEREA, quia ſi recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius
h 23. quar- *ſegmentum ;[h] Maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cuius diameter eſt recta prior linea; Conſtat ſi quadra-*
tidecim. *to diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6 demonſtrata ſunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarũ*
AE, BE,

AE, BE, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuiſæ ad maius ſegmentum; Rectam minorem BE, eſſe Icoſaedri latus.

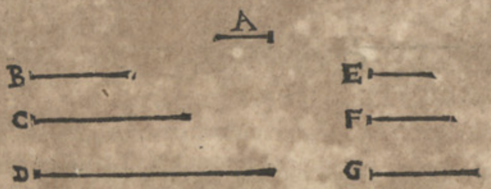
POSTREMO, quoniam ſi recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diuiſam extrema ac media ratione, & minus illius ſegmentum;[i] Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri eius ſphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, ſi quadrato diametri AB, conſtituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunq; recta linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum; Minorem lineam BF, latus eſſe Dodecaedri. i 23. quartidec.

HACTENVS ergo Hypſicles, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphæræ impoſitorum ſcripſerunt. Sequentes autem quinq; propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui ſequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adijciemus, quæ ad eorundem quinq; corporum Regularium in ſphæra deſcriptionem, eorundemq; comparationem ſpectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI ſint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt ſit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quarta ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, eſſe duplicatam proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam eſſe triplicatam eiuſdem proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; [a] habeat autē & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur eſt quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ, A ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E: vt recta C, ad rectam F: [b] Eſt autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata eſt proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod eſt primum.



a 20. ſexti.

quadr. B,	Recta C,
quadr. A.	Recta A.
quadr. E.	Recta F.

b 20. ſexti.

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; [c] habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo eſt cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: [d] Eſt autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata eſt proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod eſt ſecundum. Itaque ſi ſint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonſtrandum erat.

c 33. vnde.

Cubus B.	Recta D.
Cubus A.	Recta A.
Cubus E.	Recta G.

d. 33. vnde.

SCHOLIVM.

HOC idem demonſtrauimus ad propoſ. 10. lib. 8. de quotcunq; numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemq; numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum BC, recta perpendicularis AD, quæ bifariam ſecabit latus BC, vt in coroll. propoſ. 12. huius lib. demonſtratum eſt; Ac propterea BD, dimidium eſt lateris AB. [a] Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter AD, & BD. Dico quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris AB, ad rectam E. Cum enim rectangulo ſub AD, BD, æquale ſit triangulum ABC, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. [b] Sit autem eidem rectangulo ſub AD, BD, æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum ABC, & quadratum rectæ E. [c] Quoniam vero quadratum lateris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB, ad rectam E, Conſtat, quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.



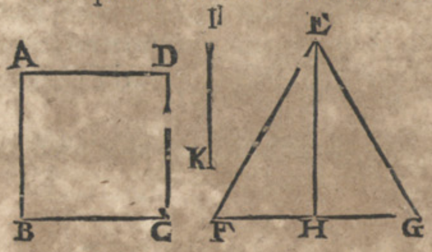
a 13. ſexti.
b 17. ſexti.
c 20. ſexti.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris: æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter AD, DB, æquale eſſe triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.



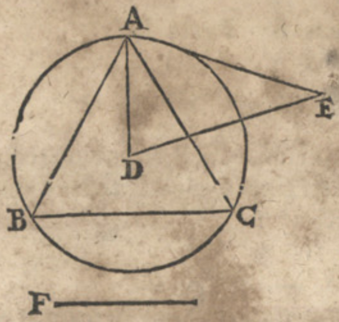
SIT quadratum cubi cuiuſuis ABCD, & Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E, ad latus oppoſitum FG, deducta diuidens FG, latus bifariam, ex coroll. propoſ. 12. huius lib. Dico, eſſe quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli EF, ad perpendicularem EH. Poſita enim inter EH, FH, media proportionali IK; [a] cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum ſit quadrati lateris cubi AB; [b] ſit autem & duplum rectanguli ſub latere EF, & dimidio eius FH, eo quod dictum quadratũ, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum ſub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; [c] Ac propterea AB, media proportionalis erit inter EF, FH, hoc eſt; tres rectæ FH, AB, EF, continue erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ FH, IK, EH, continue proportionales, ex conſtructione. Igitur cum omnium antecedens ſit FH, [d] erit proportio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cum & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectæ IK, hoc eſt, ad triangulum EFG, (eſt enim ex coroll. propoſ. 29. huius lib. quadratum rectæ IK, æquale triangulo EFG,) [e] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulum Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

FH.
AB. IK.
EF. EH.

a 28. tertijdec.
b 1. ſexti.
c 17. ſexti.
d 28. quardec.
e 20. ſexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, ſeu altitudinis ipſius: Axis vero, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.



SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, ſeu axis Tetraedri DE, latuſque cubi eiuſdem ſphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, eſſe potentia ſeſquialterum axis DE: Axem vero DE, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum [a] deſcripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur AD, ſemidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris AE, hoc eſt, lateris AB, [b] æquale eſt quadratis rectarum AD, DE, [c] & triplum quadrati ſemidiametri AD; Fit, vt poſito quadrato lateris AB, ſeu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.

QVONIAM vero latus Tetraedri AB, [d] potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris AB; Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

a 5. quar.
b 47. prim.
c 12. tertij.
d 18. tertijdec.

COROLLARIVM I.

e 13. tertijd.
f 20. ſexti.

QVIA vero, poſito quadrato lateris AB, partium 6. quadratũ diametri ſphæræ talium partium eſt 9. [e] quod diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri: Earundem vero partium 4. oſtenſum eſt quadratum axis DE: perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, [f] cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialteram axis Tetraedri. Seſquialteræ enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13.

COROLLARIVM II.

g 12. quartidec.

CONSTAT quoque, ita eſſe axem, ſeu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. Quia videlicet [g] tam latus Trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad latus oppoſitum deductæ, quam ex hac propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris cubi.

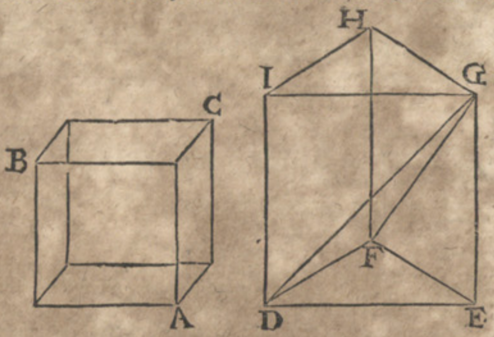
THEOR.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.

DESCRIBANTVR in eadem ſphæra cubus A B C, & Tetraedrum D E F G. Dico cubum Tetraedri eſſe triplum. Conſtituatur ſuper DEF, baſim Tetraedri priſma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [a] Quoniam igitur eſt baſis priſmatis, ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis baſis DEF, ad latus oppoſitum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictã, ita eſt, per coroll. 2. propoſ. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde priſmatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, ſeu priſmatis ABC; Erit baſis priſmatis ABC, ad baſim priſmatis D E F G H I, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 9. lib. 12. demonſtrauimus, æqualia erunt priſmata ABC, DEFGHI, cum ipſorum baſes & altitudines reciprocentur. Atqui priſma DEFGHI, triplum eſt pyramidis, ſeu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoq; erit eiuſdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. Quod oſtendendum erat.

[a] 30. quartidec.



COROLLARIVM.

VNDE priſma eandem habens, & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto oſtenſum enim eſt, cubum ABC, æqualem eſſe priſmati D E FGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

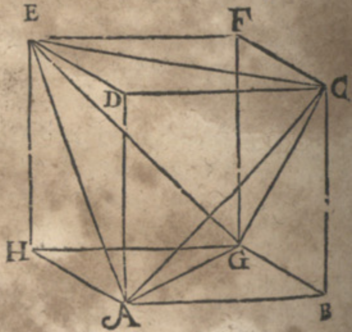
ET SOLIDORVM QVINTVM, vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER SECVNDVS.

i. PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat deſcribere pyramidem, ſeu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus baſibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales ſunt, quod potentia duplæ ſint laterum æqualium quadratorum, vt in ſcholio propoſit. 47. lib. 1. demonſtrauimus, perſpicuum eſt, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris compoſita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia; Ac propterea pyramidem, ſeu Tetraedrum conſtitui ex ipſis. Quia vero omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifeſtum eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

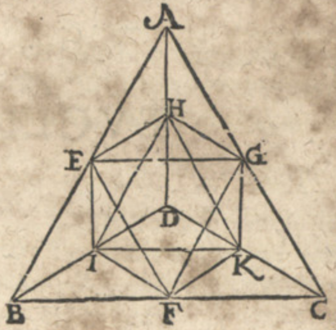


ij. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum deſcribere.

SIT in pyramide, ſeu tetraedro ABCD, deſcribendum octaedrum. Diuiſis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, conſtituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, HGE, ſupra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia ſunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod ſint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC, Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod ſint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD:[a] æquales erunt baſes EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque octaedrum componunt EIGHF; quod quidem ex definit. 31. lib. 11. intra tetraedrum deſcriptum eſt; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex conſtructione. In data igitur pyramide octaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 4. prim.



COROLLARIVM.

QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata ſunt æqualia, ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecantia, vt in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. demonſtrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, ſecat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipſam diuidit in pyramidem HIKD, & priſma HIKGAE: necnon in pyramidem EBFI, & priſma EFCGKI; Conſtat autem pyramidem pyramidi eſſe æqualem, & priſma priſmati: [b] Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem poramidem ABCD.) Manifeſtum eſt, ſi in tetraedro octaedrum inſcribatur, tetraedrum bifariam ſecari tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. b 8. duod.

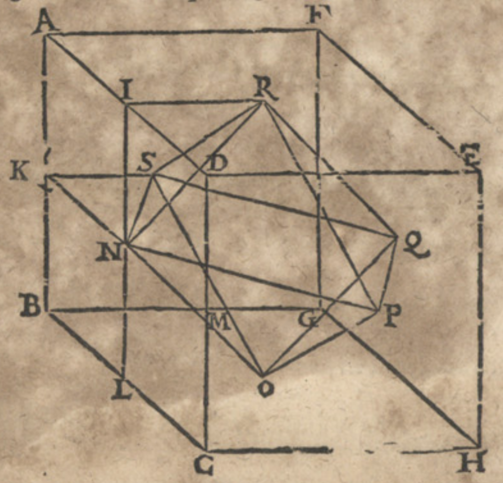
PROBL. 3. PROPOS. 3. iii.

IN dato cubo octaedrum inſcribere.

DESCRIBENDVM ſit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera baſis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ cõnectantur rectis IL, KM, ſecantibus ſeſe in N, puncto, quod quidem centrum eſt quadrati ABCD, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum baſium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectę ex dictis centris ductę ad media puncta baſium, cuiuſmodi ſunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, ſeu quadratorum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremo ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſuper planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia ſunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt: item & anguli contenti, æquales propterea quod, cum NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis eſt recto angulo KAF, in quadrato AG, eademq; ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt baſes NR, NS, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterũ, hac lege, vt quælibet duę ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidiũ lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoq; duæ rectæ NK, SK, ductæ ſunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 10. vnde.

b 4. primi.



ALITER. [c] In cubo dato inſcribatur pyramis; [d] In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione prop. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonſtratione propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

c 1. quintidec.

d 2. quintidec.

COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO, (ſi ducerentur,) ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſi. 14. lib. 13. quæ quidam coniungunt centra baſium cubi oppoſitarum: Manifeſtum eſt, rectas lineas centra baſium cubi oppoſitarum connectentes non ſolum ſeſe muruo bifariam, vt docuimus cor. 1. propoſ. 15. lib. 13. ſed etiam ad angulos rectos, vt hic oſtendimus, diuidere.

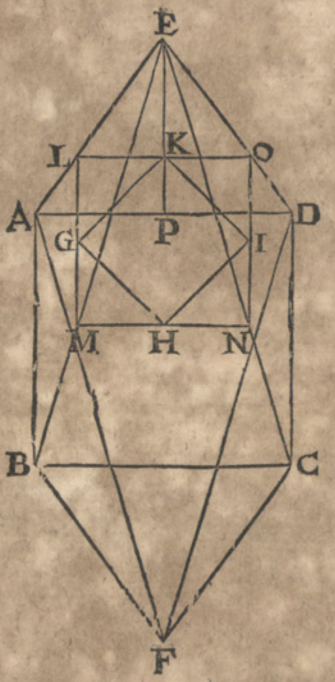
PROBL. 4. PROPOS. 4. iv.

IN dato octaedro cubum inſcribere.

DATVM octaedrum ſit ABCDEF, in quo oporteat deſcribere cubum. Quoniam in octaedro ſex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlices vertices ſunt ſex anguli octaedri, & quælibet duæ octaedrum conſtituunt; ſit vna earum pyramis ABCDE, cuius baſis ABCD, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum ſimilia ſint triangulis æquilateris ABE, EBC; CED, DEA, ex coroll. propoſit. 4.

 lib. 6.

lib. 6. atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod latera habent communia. Eſt enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc vero ipſi NEO; & hoc ipſi OEL, æquale eſſe. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox oſtendemus. Quocirca & quatuor
a 18. quartidec. rectæ LM, MN, NO, OL, inter ſe æquales ſunt. [a] Quia vero ducta recta EK, P, tripla eſt rectæ KP, [b] Eſt autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erũt
b 2. ſexti. rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione ſecantur, quadrilaterumq; conſtituent LMNO. Rurſus quia LO, LM, parallelæ ſunt rectis AD,
c 10. vnde. AB, non in eodem cum ipſis exiſtentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus eſt, cum ABCD, quadratum ſit, vt oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. & in propoſ. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non ſecus demonſtrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos eſſe. Quoniam vero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum,
d 15. vnde.
e 15. vnde.
[d] parallelum eſt plano ABCD, [e] ipſa, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, Ek, trianguli ELK, æqualia ſint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoq; ipſis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam ſecet angulum AED per coroll. propoſ. 12. libr. 13.
f 4. prim. [f] Erunt & baſes KL, KO, æquales, hoc eſt, recta LO, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam ſecabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum ſint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter ſe erunt; Ideoq;, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos,
g 4. prim. [g] æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, kG, centra G, H, I, k, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati LN, anguloſque comprehendunt rectos; (
h 13. prim. [h] cum enim anguli LkG, GkI, IkO, duobus ſint rectis æquales; Sint autem LkG, IkO, per coroll. 2. propoſ. 32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus GkI; Eademque ratione recti erunt anguli kGH, HIk.) quadratum erit GHIk, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octoedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum deſcripſimus, Quod faciendum erat.

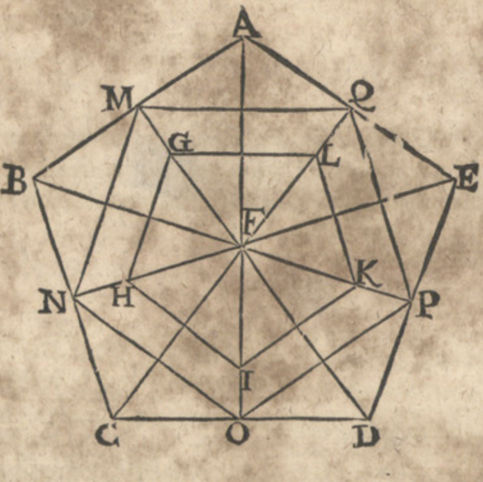


v.
vi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

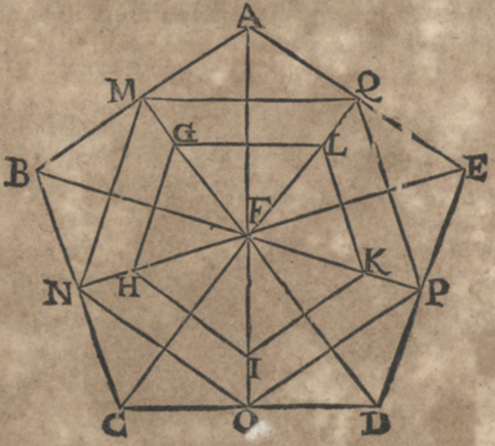
IN dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum videlicet baſes ſunt pentagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices vero duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius baſis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, k, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, Ik, kL, LG. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex ſcholio propoſ. 12. libr. 13. bifariam ſecabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales ſint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe
a 4. prim. angulos pentagoni, [a] æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q,
b 8. primi. connectentes; [b] Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad baſes oppoſitas demiſſæ. Dum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli FBM, æqualia ſint, con-
c 4. primi. tineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; [c] erunt baſes FM, FN, æquales; & ſic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, Fk, FL, nimirum ſemidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumſcribentium, æquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratũ eſt;



d Erunt

d Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. e Rurſus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quam anguli d 4. primi.
BNM, MNO, ONC, æquales ſunt duobus rectis. f Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æ- e 13. prim.
quales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & f 4. primi.
inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, exiſtens. Denique cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales ſint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplæ ſunt ipſarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. g parallelæ erunt GH, HI, Ik, kL, LG, ipſis MN, g 2. ſexti.
NO, OP, PQ, QM; h Ac propterea anguli LGH, GHI, HIk, IkL, kLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, h 10. vnde.
PQM, ideoque & inter ſe æquales erunt. i Quia vero plana i 15. vnde.
per rectas GH, HI, & per HI, Ik, ducta parallela ſunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto conuenientq; in recta HI, ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per Ik, kL, & per kL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum conſtituere cum plano per GH, HI, Ik, ducto. Quocirca GHIkL, pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum viginti anguli dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



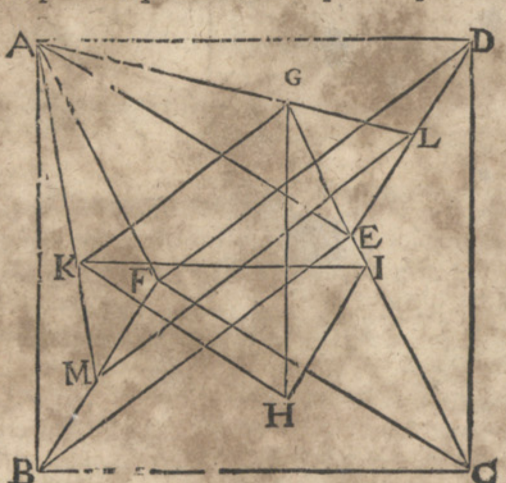
C O R O L L A R I V M.

ITAQVE cum omnes rectæ è centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. libr. 14. perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentium, atque adeo eorundem diſtantiæ exiſtant à centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemma. 2. eiuſdem propoſ. 10. libr. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6. o. v.

IN dato octaedro pyramidem deſcribere.

PYRAMIS deſcribenda ſit in octaedro ABCDEF. In pyramide octaedri ſuperiori ABCDE, ſumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerſo ſibi reſpondentium AED, BEC; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & k, centra triangulorum ex aduerſo quoque ſibi correſpondentium CFD, AFB: quæ quidem centra coniungantur ſex rectis GH, GI, Gk, HI, Hk, Ik, vt fiat pyramis HIkG. Deinde ex A, demittantur per centra G, k, rectæ AL, AM, ſecantes latera oppoſita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per ſcholium propoſ.
12. lib. 13. coniungaturque recta LM. a quæ ipſi BE, vel FD, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, a 33. primi.
FM, rectæ æquales ſint, & parallelæ, nimirum dimidia laterum DE, BF, popoſitorum in quadrato EF. Quoniam vero rectæ AL, AM, ſectæ ſunt proportionaliter in G, & k, punctis, quod AG, Ak, duplæ ſint ipſarum GL, kM,
ex coroll. propoſ 18. lib. 14. b Erunt Gk, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. prop. b 2. ſexti.
4. lib. 6. triangula ALM, AGk, ſimilia. c Quare erit vt AL, ad LM, ita AG, ad Gk; & per- c 4. ſexti.
mutando vt AL, ad AG, ita LM, ad Gk. Eſt autem AL, ipſius AG, ſeſquialtera; d quod d 18. quartidec.
GL, ſit tertia pars ipſius AL, ideoque AG, eiuſdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc eſt, ipſi æqualis DF, ſeſquialtera erit ipſius Gk. Hac eadem arte oſtendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, k, coniungentium ſeſquialtera eſſe latera octaedri; Ac proinde, rectos pyramidem HIKG, componentes, inter ſe eſſe, æquales, hoc eſt, triangula æquilatera æqualia ex ipſis confici, ideoq; Tetraedrũ conſtitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor baſium octaedri deſcriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.



ALITEER e In octaedro dato inſcribatur cubus, f & in cubo pyramis, factumq; erit, quod proponi- e 4. quartidec.
tur. Cum enim cubi anguli conſiſtant in centris baſium octaedri; & in angulis cubi collocentur quoq; anguli f 1. quinti.
pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyrami- decim.
dem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

COROLLARIVM. I.

g 9. vnd. QVIA vero oſtenſum eſt, vtramque GK, DF, parallelam eſſe ipſi LM, [g] ac propterea & GK, ipſi DF, at-
h 15. vnde. que adeo ipſi BE, parallelam eſſe: [h] Atque eadem ratione KH, ipſis FC, EA, parallelum eſſe: Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum parallelum eſſe plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallelas, binis nimirum ſingula: Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas videlicet binis oppoſitis.

COROLLARIVM II.

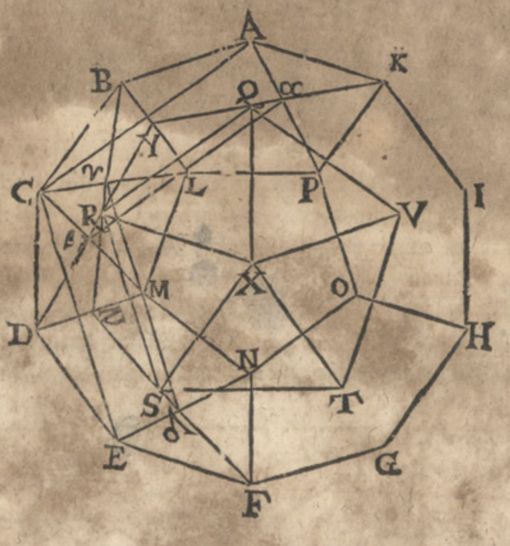
PRÆTEREA cum octaedrum circumſcribat: & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur; Atque adeo recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, vt conſtat ex 4. propoſ. huius lib. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

o. vii.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppoſitum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autẽ & rectæ eædẽ YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiuſdem propoſitionis, quod & arcus AKP, CDM,
a 28. tertij. circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant, ([a] conſtat enim rectas AK, PK; Item CD, MD,
b 28. primi. arcus ſubtendere æquales.) [b] Igitur Aα, Cβ, parallelæ ſunt rectæ BY, [c] atque adeo & inter ſe parallelæ: Sunt
c 9. vnde. autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM, [d] quæ æquales ſunt, cum latera KA, KP, lateribus DC,
d 4. prim. DM, æqualia ſint, anguloſque conti-
e 33. prim. neant æquales. [e] Rectæ ergo ipſas connectentes AC, αβ, æquales erunt & parallelæ. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur FZ, EZ, connectanturque rectæ
f 4. prim. CE, γδ, æquales eſſe ipſas CE, γδ: [f] Sunt autem AC, CE, inter ſe æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt conſtat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt verſus X, vt figura monſtrare videtur, ſed extrorſum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ Yα, Yβ, Zγ,



Zδ, æquales ſint, (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum BL, DM, à cen-
g 14. tertij. tris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumſcribunt, [g] atque adeo æquales.
Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, diſtantiæ ſunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum
h 14. tertij. æqualium, [h] ideoque æquales: Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt,) [i] Erunt quoque
i 8. primi. anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales ſint; [k] æquales quoq;
k 4. prim. erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri L, M, N, O, P, conſtituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri, ſimilia triangula conſtituantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos ſolidos,) quæ quidem latera habent communia, deſcriptum erit Icoſaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli ſolidi Icoſaedri conſiſtant in centris duodecim baſium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Içoſaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

o. viii.

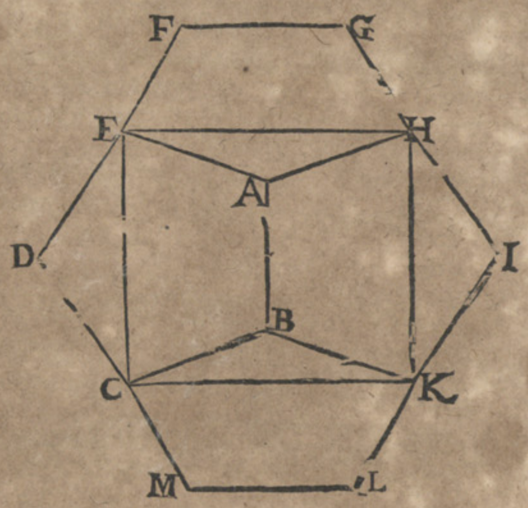
PROBL. 8. POPROS. 8.

IN dato Dodeçaedro cubum deſcribere.

PRO-

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inſcribendus ſit cubus, ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, cõuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABKIH, ſecundũ latus idẽ cõmune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. In his vero pentagonis ſubtendantur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC, quod æquilaterum erit. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia ſint, anguloſque contineant æquales, ex hypotheſi; [a] æquales erunt baſes EH, HK, KC, CE. [b] Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferunt ex circulo pentagonum ABCDE, circumſcribente arcus æquales; Erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademque ratione parallelæ erunt AB, HK. [c] Quare & EC, HK, inter ſe parallelæ erunt; [d] Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipſas connectunt, parallelæ erunt, [e] in eodẽq; cum ipſis plano; ideoq; parallelogrammum erit EHKC; quod oſtendimus eſſe æquilaterum. Quia vero planum ECKH, productum communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1. prop. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, deſcriptum; [f] Erunt tam anguli oppoſiti E, K, quam C, H, duobus rectis æquales; [g] Ac propterea cum oppoſiti E, & K, ſint æquales, necnon & oppoſiti C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans ſuos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis ſimiliter octo angulis octo aliæ rectæ ſubtendantur eodem ordine; conſtitutum erit ſolidum ſex quadratis contentum; quæ cum ſint æqualia, [h] eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum ęqualibus rectis comprehenſos ſubtendentia æqualia ſunt; cubum conſtituent intra Dodecaedrum deſcriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiuſque octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſident. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

a 4. primi.
b 28. tertij.
c 9. vnde.
d 33. primi.
e 7. vnde.
f 22. tertij.
g 34. primi.
h 4. primi.



COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ ſubtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt, CE, ipſi AB, eſſe parallelam.

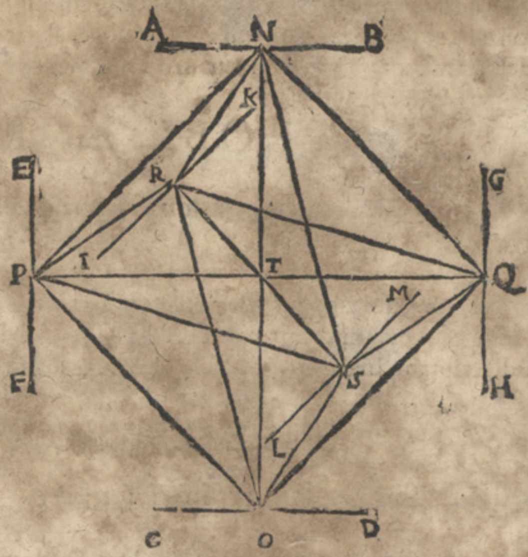
PROBL. 9. PROPOS. 9.

o. ix.

IN dato Dodecaedro octaedrum deſcribere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario 3. propoſ. 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam ſecentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, ſectiones oppoſitorum laterum coniungentes æquales erunt, ſeque mutuo in T, centro ſphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propoſ. 17. libr. 13. atq; adeo æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. [a] Quocirca duodecim rectæ ſubtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales ſunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cũ dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, conſtituentque octaedrum intra Dodecaedrum deſcriptum, cum ſex anguli octaedri tangant ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex conſtructione. In dato igitur Dodecadro octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 4. primi.



PROBB. 10. PROPOS. 10.

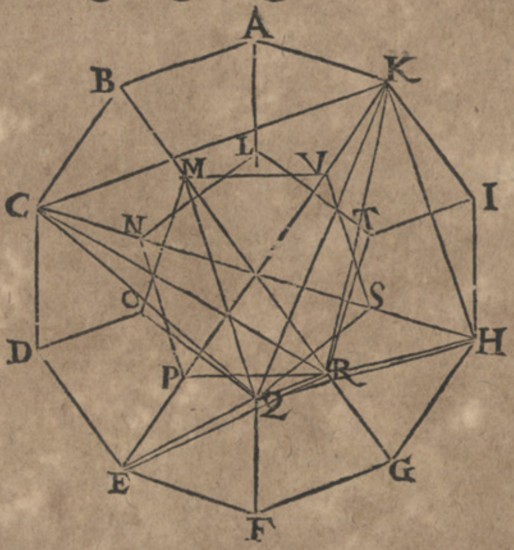
o. x.

IN dato Dodecaedro pyramidem deſcribere.

SIT

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo deſcribenda ſit pyramis, ſiue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum ſolidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q. ipſi L, oppoſitum rectæ ducantur CQ, KQ, R Q. vt ſit pyramis conſtructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, ſeu ſphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; a quoniam dodecaedrum in ſphæra deſcribitur; ſi planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius ſectio cum ſphæra circulus per lemma 1. propoſ. 10. libr. 14. b Ac propterea angulus CKH, in ſemicirculo exiſtens, rectus erit. Non ſecus oſtendemus rectos eſſe angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. c Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppoſiti æquale ſit quadratis laterum circa rectum angulum; ſint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum kR, RE, & quadratis rectarum kQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium kH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectę cum ſubtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehenſos, d ęquales ſunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum Ck, CR, Rk, kQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CkR, CkQ, kRQ, RCQ, æquilatera ſunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CkRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, k, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptum erit intra Dodecaedrum.

a 17. tertij-decim. b 31. tertij- c 47. prim. d 4. prim.



ALITER. e In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur; f & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideant, perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. Itaq; in dato Dodecaedro pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

e 8. quinti-decim. f 1. quin-tidec.

O. xi.

PROBB. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.

a DESCRIBATVR in dato Icoſaedro Dodecaedrum; b & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi reſideant in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedri in centris baſium Icoſaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra baſium Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quam ob rem in dato Icoſaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 5. quint-decim. b 8 quin-decim.

O. xii.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

IN dato Icaſaedro a cubus deſcribatur, b & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. c Cum enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri; & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtem eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri; d Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam, In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

a 11. quin-tidec. b 1. quinti-decim. c 11. quin-tidec. d 1. quinti-dec.

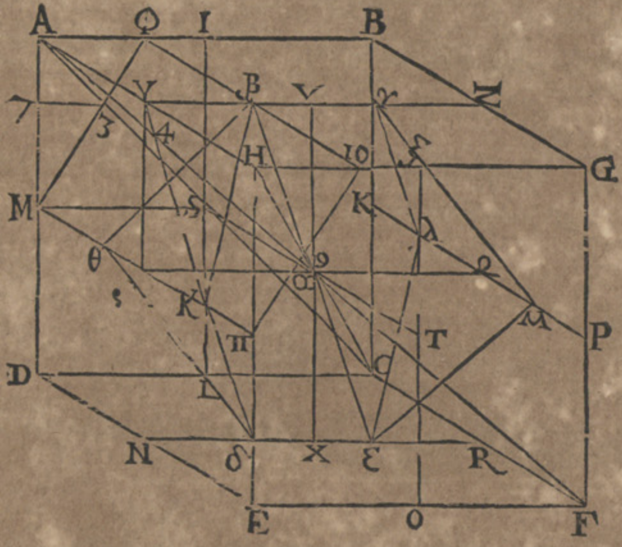
THEOR. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.

SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrum. Secentur ſingula latera bifariam in I, k, L, M, N, O, P, R, ϖ, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mϖ, kP, NR, nuſquam inter ſe coeuntibus, ita vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, ſed vna duntaxat, quæ rurſus bifariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ ſe mutuo in centro α, bifariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius lib. docuimus, ſuntq; lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, Mϖ, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt ſint maiora ſegmenta, Yβ, Zγ, Mθ, $\varpi\kappa$, ductis rectis Yρ, Yκ, $\beta\theta$, $\beta\kappa$. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & $\rho\kappa$, βV, ſegmenta minora rectarum æqualium YV, $\rho\varpi$, æqualia quoque: a Sunt autem quadrata rectarum

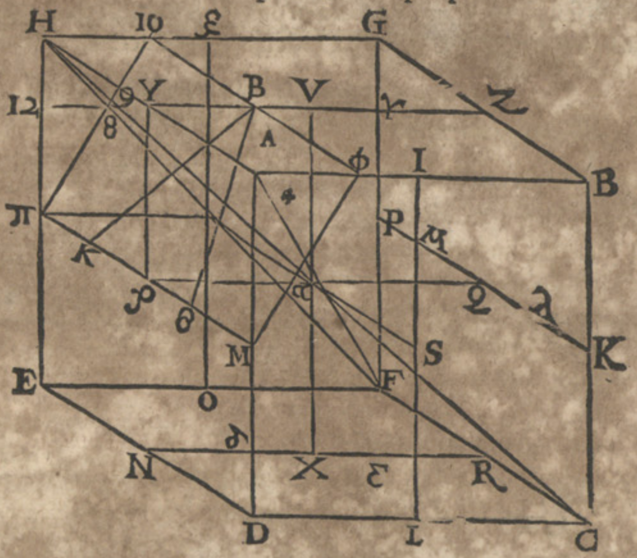
Ducatur in figura recta HaC. a 4. tertij-dec.

ctarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yϛ; Erunt & quadrata rectarum Yϱ, ρκ, tripla eiuſdem quadrati rectæ
Yβ. Quare, [b] cum quadratis rectarum Yϱ, ϱκ, æquale ſit quadratum rectæ Yκ, [c] quod angulus Yρκ, rectus b 47. prim.
ſit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rurſus quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, [d] c 29. prim.
recta eſt ad planum AE, per rectas AY, Yϱ, ductum, rectus erit angulus ϛYκ, ex defin. 3. lib. 11. [e] Ac propte- d 4. vndec.
rea quadratum rectæ ϛκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yϛ, exiſtens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ, e 47. prim.
(quia nimirum quadrata rectarum. Y-
κ, Yβ, quadrupla etiam ſunt quadrati
rectæ Yϛ, cum quadratum rectę Yκ,
triplum ſit oſtenſum quadrati rectę Y-
β.) Ideoque [f] cum quadrata propor- f 20. ſexti.
tionem habeant laterum duplicatam,
dupla erit recta ϛκ, rectę Yβ. Quadru-
pla enim proportio duplicata eſt duplę
proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4.
apparet; Eſt autem & θκ, dupla ipſius
ϱκ, quod minora ſegmenta θρ, κρ, re-
ctarũ æqualium Mρ, ϖϱ, æqualia ſint,
[g] Erit igitur vt Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla g 15. quint.
ipſius Yβ, ad θκ, duplã ipſius ϱκ: Eſt autẽ
Yβ, maius ſegmentum ad ϱκ, rectam
minori ſegmento βV, ęqualem, vt to-
ta ad maius ſegmentum. Ergo & βκ,
ad θκ, erit vt tota ad maius ſegmen-
tum; Ac proinde θκ, erit maius ſe-
gmentum rectæ βκ, ſectæ extrema ac
media ratione. Eadem ratione oſtendemus θκ, maius eſſe ſegmentum rectæ βθ, extrema ac media ratione ſe-
ctę, ſi nimirum ducatur recta Yθ. Quare æquales erunt ϛθ, βκ, conſtituentes triangulum Iſoſceles ϛθκ, ſimile
illi, quod ab Euclide conſtructum eſt propoſ. 10. lib. 4. vt poſtea demonſtrabimus; Ac proinde θκ, erit latus
pentagoni in circulo triangulum ϛθκ, circumſcribente deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 11. propoſ. lib. 4.

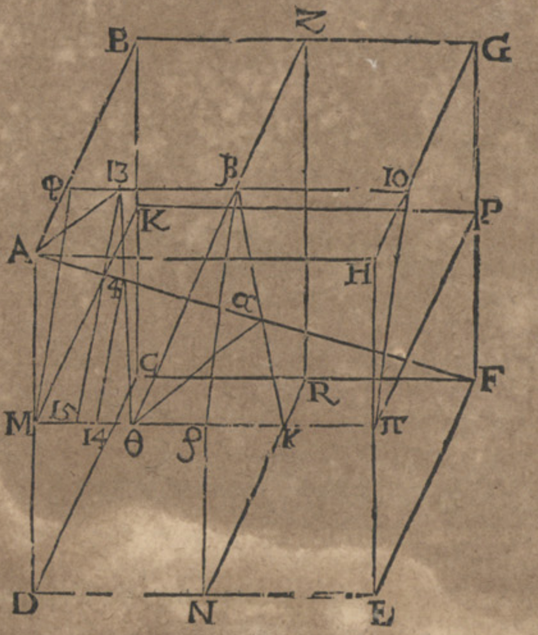


INTELLIGATVR iam planum trianguli βθκ, extendi, (ducta per β, recta βφ, ipſi Mϖ, parallela,) per
parallelas Mϖ, φ10. vt ſit planum extenſum φϖ, occurrens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi
vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipſi Aφ, parallela, connectaturq; MS, [h] quæ paral- h 33. primi.
lela eſt vtrique Aφ, 73. Quoniam igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum A73. ſimile eſt triangulo AMS;
[i] ac proinde vt AM, ad MS, ita eſt A7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt i 4. ſexti.
quoque A7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad Aφ, ita M7. ad 73. Eſt autem Aφ, maius ſegmentũ re-
ctæ MA, diuiſæ extrema ac media ratione. ([k] quod æquales ſint Aφ, Yϛ, necnon & MA, YV, dimidia cubi la- k 34. prim.
tera.) Igitur & 73. hoc eſt, 7A, maius ſegmentum erit rectæ M7. extrema ac media ratione ſectæ; [l] Ac propte- l 5. tertijd.
rea tota MA, diuiſa erit extrema ac media ratione in 7. maiuſque ſegmentum erit M7. [m] Atqui vt M7. ad 7. m 2. ſexti.
A, ita eſt S3. ad 3A. Secta eſt ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiuſq; ſegmentum eſt S3. [n] Quia vero n 33. pri.
SαT, parallela eſt ipſi Mϖ; quod & recta ducta ϖT, æqualis & parallela ſit ipſi MS; ſi per SαT planum duca-
tur parallelum plano φϖ, ducto per Mϖ, [o] ſecabuntur rectę AS, Aα, in eaſdem rationes, in punctis 3. & 4. o 17. vnde.
cum planum φϖ, rectas AS, Aα, ſecet in 3. & 4. at planum per SαT, ductum plano φϖ, parallelum eaſdem ſecet
in S, & α. Atque idcirco, cum AS, ſecta ſit in 3. extrema ac media ratione, ſecta erit eodem modo Aα, ſemidia-
meter cubi, in 4. maiuſq; ſegmentum erit α4.

IISDEM argumentis oſtendemus, ducta diametro cubi HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC,
ſemidiametrum cubi ſecari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano φϖ, vt perſpicuum eſt, ſi cubus in-
uertatur, vt in hac figura ſecunda ap-
paret. Sunt enim lineamenta omnino
ſimilia lineamentis prioris figuræ, licet
baſes cubi ſedes mutauerint, ita vt qua-
dratum AC, locum quadrati HF; &
quadratum HF, locum quadrati AC,
obtineat in hac ſecunda figura. Quod
tamen in prima figura, ſine hac inuer-
ſione probabitur etiam hoc modo.
Ducta diametro cubi HC, in ea figura;
(Hæc deeſt in figura, quam tamẽ qui-
libet ducere poterit) quam planum φϖ,
ſecet in 9. prope punctum H; intelli-
gaturq; per rectam AH, planum pla-
no φϖ, parallelum. Quoniam igitur
rectæ Aα, Hα, in centro α conue-
niunt, ſecanturque planis parallelis in
punctis A, H; & 4, 9; (Nam planũ φϖ,
eas ſecat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano φϖ, parallelum eaſdem ſecat in A, & H;) [p] erit vt α4, p 15. vnde.
ad 4A, ita α9, ad 9H. Cum ergo αA, ſecta ſit in 4, extrema & media ratione, erit quoq; αH, ſimiliter ſecta, quæ
demonſtratio locum etiã habet in hac quidẽ cubi inuerſione in ſecunda figura. Oſtendamus nunc, ſi rectæ iun-
gantur θ4 β4, β9. κ9, rectilineũ β4θκ9, in plano φϖ, exiſtens, pentagonũ eſſe æquilaterũ, & æquiangulum.



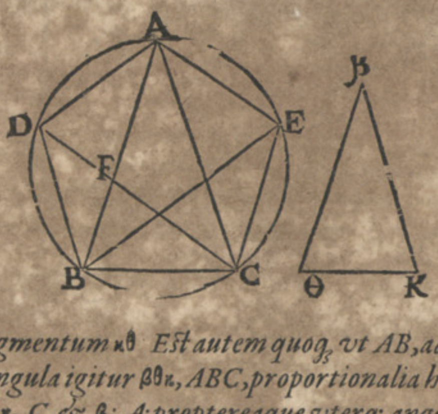
INVERTATVR rurſum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum βθϰ, ſiue planum φϖ, hunc ſitum habeant, quem monſtat tertia hæc figura. Deinde in plano φϖ, recta coniuncta θ4.
a 15. vnde. extendatur vſque ad rectam φ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta KP, & iunctis rectis MK, a pla-
b 32. vnde. num MP, parallelum eſt plano AG, (quod & rectæ PK, KM, parallelæ ſint rectis GB, BA,) b ſecatque cubum
c 16. vnde. bifariam; ideoque per centrum α, tranſit, per ea quæ in ſcholio propoſ. 39. lib. 11. oſtenſa ſunt; ſi per rectas α4, A, θ413. planum extendatur, c fient αθ, A13. communes ſ.ctiones planorum MP, AG. parallelæ; Ac proin-
d 4. ſexti. de triangula αθ4.1, α34. æquiangula erunt; d Eritq; vt α4 ad 4 A, ita θ4. ad 413. Quare cum α A, in 4. ſecta ſit extrema ac media ratione, vt oſtendimus; eodem modo erit ſecta ϑ 13. in 4. Rurſus plano NZ, per cen-
e 15. vnde trum α, tranſeunti, parallelum ducatur planum per punctum 4. ex ſchol. propoſ. 15. lib. 11. ſecans φϖ, recta 4, 14. e Eſt autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. f Rectæ igitur α A, ϱM, in eaſdem rationes ſecabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρM, in 14. ſecta erit extrema ac media ratione, minuſque erit ſe-
f 17. vnde. gmentum 14 M, ideoq; æquale minori ϱϑ ipſius Mρ. Quare cum ex ρ14. maiori ſegmento ipſius ρM, auferatur ρθ, minus ſegmentum; Erit, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. ρ14. diuiſa in θ, extrema ac media ratio-
g 2. ſexti. ne, maiuſque ſegmentum erit ϱϑ. Poſtr m ɔ acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, g ſecabuntur rectæ θ 13. ϑ15. proportionaliter; Ac proinde & ϑ15. ſecta erit in 14. extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit ϑ14. h Quapropter erit vt ϱϑ, maius ſegmentum ad ϑ14. minus, ita θ14. maius ad 14. 15. minus: Vt autem ϑ14. ad 14. 15. ita eſt tota ϑ15. ad θ14. maius ſegmentum. Igitur erit vt ϱϑ, ad θ14. ita ϑ15. ad eandem ϑ14.
h 2. quartidecim. Ac propterea rectæ ρθ, vel ϱϰ, & ϑ15. æquales erunt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelum per
i 16. vnde. 4. 14. ductum, ſecantur plano φϖ, i erunt communes ſectiones βρ, 4. 14. parallelæ, ideoq; & 13. 15. βϱ, paralle-
k 29. prim. læ erunt, k anguluſque externus βρϰ, interno 13. 15 ϑ. æqualis. Cum igitur & latera βϱ, ρϰ, lateribus 13. 15. 15θ,
l 4. prim.



ſint æqualia. l æquales erunt quoque rectæ βϰ 13θ. Ac proinde & earum ſegmenta maiora θϰ, θ4, (Oſtenſum enim eſt θϰ, eſſe m ius ſegmentum ipſius βϰ,) æqualia erunt. Eadem arte & ϛ4, ipſi βγ. in prima fig ıra oſtendet æqualis, ſi ſimili ſitu triangulum Icoſceles formetur ſuper baſim βγ, cuius vertex conſiſtat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemq; modo eiſdem θϰ, ϛγ, æquales erunt ϰ9. ϛ9. Æquilaterum ergo eſt pentagonum β4θϰ9, quandoquidem βγ, θϰ, rectæ æquales ſunt, cum componantur ex minoribus ſegmentis linearum æqualium extrema ac media ratione ſectarum, æquales ſunt YV, ZV, ϖρ, Mϱ. Sed & æquiangulum, vt mox oſtendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad ſingulas rectas Mϖ, YZ, NR, IL, ξO, KP; bina ipſi βθϰ, ſimilia, & æqualia conſtruantur; (Ita enim ad Mϖ, duo huiuſmodi triangula vides βθϰ, δθϰ.) & ipſorum beneficio duodecim pentagona ipſi β4θϰ9, ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis Mϖ, YZ, NR, IL, ξO, KP, bini nimirum in ſingulis, octo vero reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quæ ipſas extrema ac media ratione diuidunt, qualia ſunt puncta 4. & 9. in ſemidiametris Aα, & Hα, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptum eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodeçaedrum, quamuis non proprie, cum non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel denique in planis cubi conſtituantur, ſed duodecim quidem in ſex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

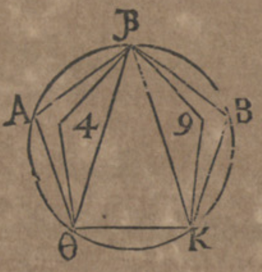
L E M M A.

QVOD autem triangulum βθϰ, cuius baſis θϰ. maius ſegmentum exiſtat vtriuſq; lateris βθ βϰ extrema ac media ratione diuiſi ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Icoſceles ABC, quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuiſiſq; angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propoſ. 11. lib. 4. tradidimus, ſecentq; ſe mutuo rectæ AB, CD, in F.



a 8. tertijd. *a Quoniam ergo AB, in F, ſecatur extrema ac media ratione, maiuſque eius ſegmentum eſt AF, æquale lateri BC;*
b 2. quartidec. *b Erit vt AB, tota ad maius ſuum ſegmentum BC, ita βθ, tota ad maius ſuum ſegmentum θϰ, tota ad maius ſuum ſegmentum: θϰ; Eodemque modo, vt tota AC; ad maius ſegmentum CB, ita ϛϰ, tota ad maius ſegmentum ϰθ Eſt autem quoq; vt AB, ad AC ita βθ, ad βϰ, vtrobique enim eſt proportio æqualitatis. Triangula igitur βθϰ, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula ſunt, æqualesq; erunt anguli θ, B; Item ϰ, C, & β; A; propterea que vterq; angulorum θ ϰ, duplus erit anguli β; & triangula βθϰ, ABC, ſimilia.*

PENTAGONVM vero β 4. θ κ 9, æquilaterum, eſſe quoque æquiangulum, hac ratione oſtendemus. Deſcribatur circa triangulum β θ κ, circulus β A θ κ B; qui ſi tranſeat per puncta 4, & 9, perſpicuum eſt ex iis, quæ ad propoſ. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum eſſe. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Deſcribatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propoſ. 11. libr. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A ϑ κ B. Quoniam igitur tam rectæ A θ, A ϛ, quam rectæ 4 ϑ, 4 β, æquales ſunt rectæ θ κ, cum & β 4 ϑ κ 9, & β A θ κ B, pentagonum ſit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θ A, ϑ 4, quam duæ ϛ A, 4, ϛ æquales; quod fieri non poſſe demonſtratum eſt propoſit. 7. libr. 1. Tranſit ergo circulus triangulo β θ κ circumſcriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4, θ κ 9, æquiangulum eſt.



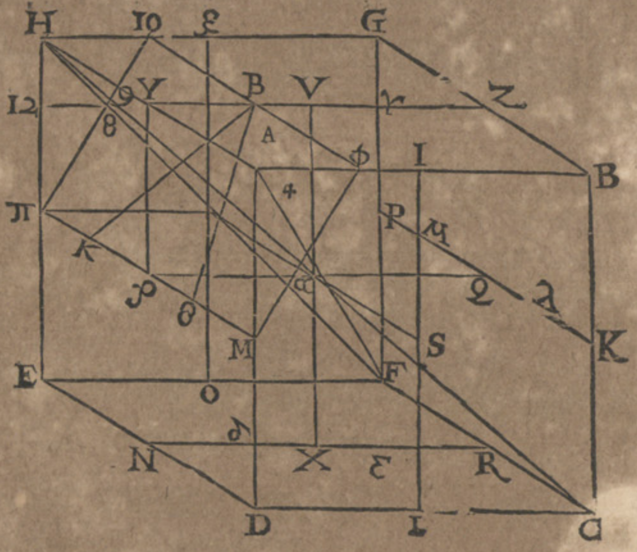
SCHOLIVM.

EX his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri ϛ ε, intelligaturque coniuncta recta γ ε, [a] æqualis exiſtens & parallela lateri cubi V X, quod ad V γ, X ε, æquales ſint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V X, rectus eſt; [b] rectus quoque erit angulus β γ ε, ad γ, conſtitutus, [c] Ac proinde quadratum diametri β ε, æquale erit quadratis laterum ϛ γ, γ ε, nempe Dodecaedri, & cubi.



a 33. primi.
b 29. prim.
c 47. prim.

II.

SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Maius vero ſegmentum latus cubi in hoc dodecaedro deſcripti.

IN eadem enim prima figura, [d] cum ſit vt Υ X, ad β V, ita Υ Z, dupla ipſius Υ V, ad β γ, duplam ipſius ϛ V; Sit autem ϛ V, minus ſegmentum ipſius Υ V, ſectæ extrema ac media ratione. Erit & ϛ γ, minus ſegmentum lateris cubi Υ Z, ſecti extrema ac media ratione; compoſita vero ex Υ β, γ Z, hoc eſt, recta ϛ κ, (quæ dupla fuit oſtenſa ipſius Υ ϛ, ideoque compoſitæ ex Υ ϛ, γ Z, æqualis) maius ſegmentum. Conſtat autem ex conſtructione ϛ γ, eſſe latus Dodecaedri, [e] & ϛ κ, ſeu ϛ θ, eſſe latus cubi in dicto Dodecaedro deſcripti, cum ſubtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 θ.

d 15. quint.
e 8. quintidec.

III.

LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus; Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti.

NAM in prima rurſus figura, latus cubi Υ Z, componitur ex latere Dodecaedri β γ, in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex Υ β, γ Z, quam conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem cubo circumſcripti. Cum enim Υ Z, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 8. propoſ. huius lib. [f] Sit autem latus illius pentagoni maius ſegmentum lateris Υ Z, ſecti extrema ac media ratione: Erit β θ, exiſtens quoque maius ſegmentum eiuſdem lateris Υ Z, & æqualis duabus Υ β, γ Z, ſimul, vt iam demonſtrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris Υ Z, circumſcripti

f 8. tertijd.

IV.

RECTA duo angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus conſtituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θ κ, oppoſiti, [g] æqualis eſt rectæ V X, (quod & β V, δ X, æquales ſint, & parallelæ) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.

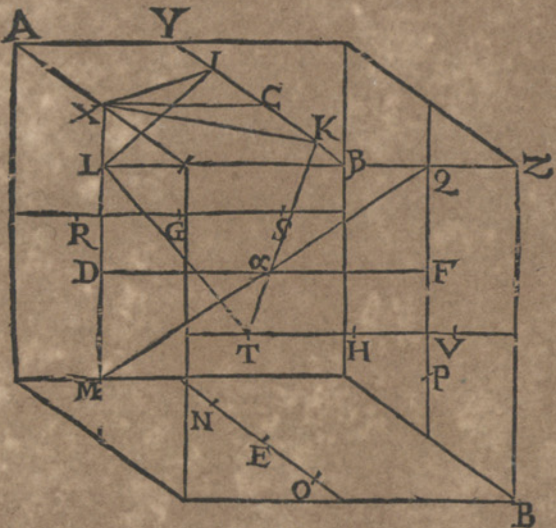
g 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icoſaedrum deſcribere.

CVBVS datus, in quo deſcribendum ſit Icoſaedrum, ſit AB, per cuius baſium centra C,D,E,F,G,H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nuſquam inter ſe conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione ſecentur, ita vt maiora ſegmenta prope centra ſint in punctis I,K; L,M; N,O; P,Q; R,S; T,V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I,K,T, & R: R, cum L,M,I, & N, &c. vt conſtituantur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN; TVR, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim, ſubtendantur vndecim cubi lateribus, poſteriora vero octo eiuſdem cubi octo angulis ſubſternuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia ſunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; a & anguli contenti, recti, quod XC, parallela ſit ipſi AY; b Erunt & baſes XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta eſt ad planum AZ, per def. 4. lib 11. recta quoque erit ad lineas XI, XK; Ac propterea, cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia ſint lateribus LX, XK, trianguli LXK, & anguli contenti, recti; c æquales erunt baſes LI, LK. Rurſus d quoniam quadratum rectæ LI, æquale eſt quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum vero rectæ XL, quadratis rectarum XC, CI, eſt æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera ſint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale eſt tribus quadratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla ſunt quadrati rectæ CI, (e Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris ſegmenti, tripla ſint quadrati rectæ CI, maioris ſegmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiuſdem quadrati rectæ CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum eſt quoque quadrati rectæ CI; Ac propterea, cum eiuſdem quadrati rectæ CI, quadruplum ſit quadratum rectæ KI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum LI, IK, ideoque & rectæ ipſæ æquales. Æquilaterum igitur eſt triangulum IKL, lateri cubi AG, ſubſtratum.

a 29. prim.
b 4. primi.
c 4. prim.
d 47. prim.
e 4. tertij.



Non aliter oſtendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi ſuppoſita, eſſe æquilatera; Atque adeo inter ſe æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia ſint. Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi ſuppoſitorum, communia ſunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, commune eſt triangulo IKL; & latus KT, triangulo TVK; & latus TL, triangulo LMT; perſpicuum eſt, ea quoque eſſe æqualia & inter ſe, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiuſmodi triangula Icoſaedrum component cubo inſcriptum, cum eius anguli omnes duodecim in ſex cubi baſibus conſiſtant, bini nimirum in ſingulis. Itaque in dato cubo Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propoſitiones ſequentes.

I.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & cubi Icoſaedrum ambientis.

f 33. primi.
g 47. prim.
h 29. prim.

DVCTA enim recta LQ, f quæ lateri cubi DF, parallela eſt, & æqualis, quod & DL, FQ, parallelæ ſint, & æquales; g manifeſtum eſt, quadratum diametri QM, æquale eſſe quadratis rectarum LM, lateris Icoſaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icoſaedrum deſcriptum eſt, h cum angulus MLQ. ſit rectus, quod & LDF, rectus ſit.

II.

BIFARIÆ ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, ad & angulos ſecantibus.

i 4. primi.

NAM huiuſmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cum coniungant centra baſium cubi oppoſitarum, æquales ſunt lateribus cubi, ſeſeq; per coroll. propoſ. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod ſit α, diuidunt. Quod quidem & centrum eſſe Icoſaedri, ita oſtendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF, FQ, trianguli αFQ, æqualia ſunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, anguloſque comprehendunt rectos, i æquales erunt rectæ αQ, αP. Eademq; ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icoſaedri prodeuntes. Igitur α, centrum eſt Icoſaedri.

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.

CVM

CVM enim CI, ſit maius ſegmentum rectæ CY; [k] *ſitq; vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipſius CI, ad βY, duplam ipſius CY;* k 15. quint.
[l] *erit quoq; KI, latus Icoſaedri, ſegmentum maius lateris cubi βY. Si enim alia recta, quam KI, eſſet maius ſegmentum rectæ* l 2. quartidec.
βY, eſſet βY, ad illam rectam, vt CY, ad CI, hoc eſt, vt βY, ad KI, diuerſam ab illa recta. quod eſt abſurdum.

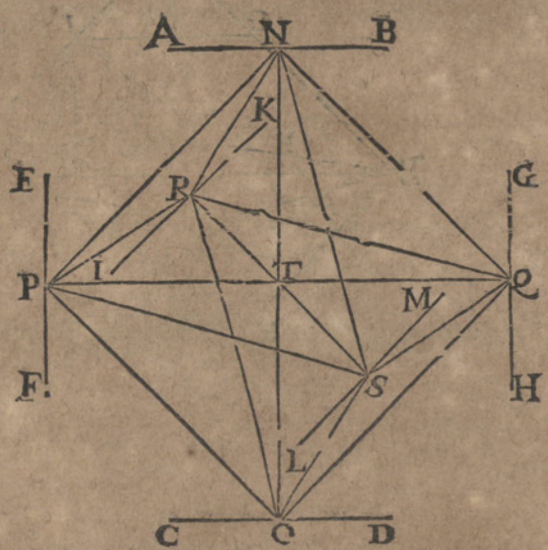
IV.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fiunt duo triangula inter ſe æqualia, anguloſque alternos habentia æquales ex 4. propoſ. l. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare qualibet latera oppoſita parallela erunt; [m] *Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela.* m 15. vnde.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.



EXPONANTVR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita, AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſeſe in centro T, bifariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ. præcedentis oſtenſa ſunt; ducanturq; rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS, conſtituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum ſint rectarum æqualium dimidia) anguloſque continent rectos, vt dictum eſt; [a] Æquales erunt baſes NS, NP: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia; Ideoque Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum eius anguli reſideant in bifariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaq; Icoſaedro Octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

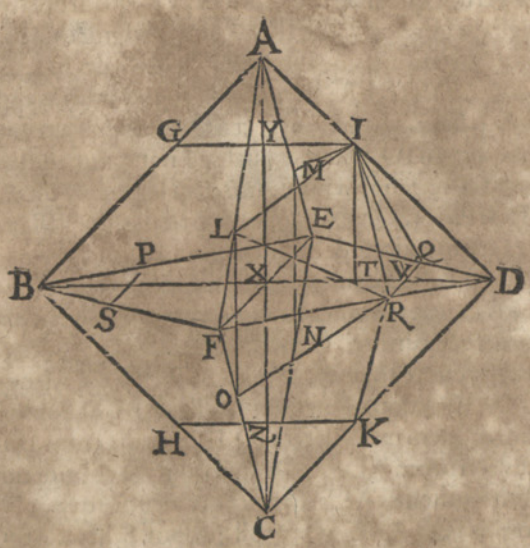
a 4. prim.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, idem eſſe centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. Quoniam ſcilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icoſaedri incedentes, diametri ſunt Octaedri NPOQRS, ſibi inſcripti. Quare T, centrum Icoſaedri, vbi ſe interſecant, centrum quoq; eſt Octaedri.

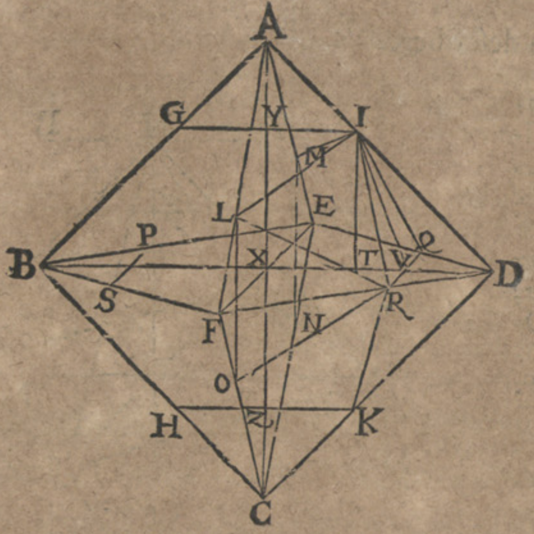
PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.



DATVM Octaedrum, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum ſit, A B C D E F. Cum à quolibet angulo quatuor latera exeant, ſumantur à ſingulis bina non proxima, ſed ſibi è regione reſpondentia, hoc eſt, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt, ſumendo ſemper bina iuxta angulos oppoſitos eiuſdem quadrati, qualia ſunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppoſitos B, D, quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta angulos oppoſitos A, C, quadrati AECF: (Nam à quolibet angulo ſumenda ſunt tantum duo latera; at vero latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eoſdem angulos A, C, iam ſumpta fuere,) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppoſitos E, F, quadrati EBFD; (Nam latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eoſdem angulos E, F, iam accepta ſunt,) quæ omnia ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora ſegmenta ſint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à ſingulis ad quinque proximas ſectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & ſic de cæteris, quamuis non

omnes ductæ ſint in figura, adeuitandam linearum confuſionem. Quæ autem ſint hæc quinq; puncta proxima, pulchre indicat octaedrũ materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctũ acceptum eſt, pyramidem conſtituunt; alia autẽ duo ſunt in duobus lateribus duorum triangulorũ octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum eſt. Vt quia punctum acceptũ eſt R, in latere DF, ꝙ cum tribus DE, DA, DC, pyramidem conſtituit in vertice D, eſt commune triangulis octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinque puncta horum quinque laterum ductæ ſunt lineæ rectæ, & ſic de cæteris. Poſt hæc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, ſe ſe in centro X, ſecantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. quarum AC, BD, ſecant rectas GI, RQ in Y, & V; connectaturque recta IV, agaturque IT, parallela ipſi YX. Quoniam ergo latera DQ, DI, trianguli DQI, æqualia ſunt lateribus DR, DI, trianguli DRI; (Sunt enim DQ, DR, minora ſegmenta rectarum æqualium DE, DF,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri ADE, ADF; [a] Erunt baſes IQ, IR, æquales. Deinde cum ſit, [b] vt BG, ad GA, ita DI, ad IA; [c] erit GI, rectæ BD, parallela. Eademque ratione QR, ipſi EF, parallela; [d] Ac proinde vt DI, ad IA, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, ſecta erit in Y, extrema ac media ratione. Rurſus quia eſt vt AX, ad XD, ita AY, ad YI, (quod triangulum AYI, ſimile ſit triangulo AXD, per coroll. propoſ. 4. lib. 6.) Eſt autem AX, ipſi XD, æqualis; Erit & AY, ipſi YI, æqualis. Quare YI, minus ſegmentum eſt rectæ XA. Non aliter oſtendemus AY, ipſi YG, eſſe æqualem; ideoque GI, rectam bifariam in Y, ſimiliterque QR, in V, ſecari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia ſint lateribus DQ, DR, trianguli DQR, (nimirum minora ſegmenta minoribus ſegmentis æqualium rectarum) angulosque comprehendant rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF; [e] Æquales erunt baſes GI, QR. Eadem ratione his æquales oſtendentur rectæ HK, PS, MN, LO, quę nimirum ſubtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, complectunturq; duo ſegmẽta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, maius eſt ſegmentum maioris ſegmenti XY, diuiſi extrema ac media ratione, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. Eſt autem XY, rectæ XV, æqualis, (cum ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD,) [f] & YI, rectæ XT; erit XT, maius ſegmentum ipſius XV, & idcirco TV, ſegmentum minus eiuſdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc eſt, ipſius IT, ([g] cum & recta IT, æqualis ſit ipſi XY) & TV, minoris ſegmenti, [h] tripla ſunt quadrati rectæ XT, maioris ſegmenti; Atq; adeo quadratum rectæ IV, [i] æquale exiſtens quadratis rectarum IT, VT, triplum eſt eiuſdem quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, quæ æqualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cum RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: [k] At quadratis rectarum IV, VR, æquale eſt quadratum rectæ IR, [l] quod anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & ſubtenſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ, VR; Ac propterea cum eiuſdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque ſit per ſcholium propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR; Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triangula ſimilẽ ſitũ cum IQR, habentia, nẽpe KQR; GIL, GIM; GPS; HPS, NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN; atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium ſint æqualia inter ſe. quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horũ triangulorũ vnum latus ſubtendat angulũ rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis minoribus laterum octaedri; duo vero reliqua ſubtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos ſingulos duobus ſegmentis laterum Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipſa trinagula æqualia, per corollar. propoſitionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ, GI, ſubtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehenſos minoribus ſegmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia ſunt. Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum ſubtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum ille continetur ſegmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic vero ſegmentis AL, AI, maiore & minore quoq;. Non ſecus latera IR, GL, æqualia erũt. Æqualia igitur ſunt triangula IQR, GIL, per coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atqui IQR, oſtenſum eſt eſſe æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterũ eſt. Eademq; eſt ratio de cæteris habenda. Atq; hęc quidem duodecim triangula ſupponuntur ſex angulis Octaedri, bina videlicet ſingulis. Ex his conſequitur, reliqua octo triangula octo baſibus Octaedri impoſita, videli-



a 4. primi.
b 2. quartidec.
c 2. ſexti.
d 4. ſexti.
e 4. primi.
f 34. primi.
g 34. prim.
h 4. tertijd.
i 47. prim.
k 47. prim.
l 8. primi.

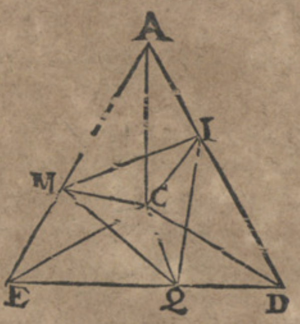
videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ, in AED, GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque eſſe, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorũ lateribus communia ſint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in ſingulis ſectionibus laterum octaedri conueniunt ad conſtitutionem anguli ſolidi, (vt vides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, ſolidum angulum R, componentibus.) Icoſaedrum componunt octaedro inſcriptum, cum Icoſaedri duodecim anguli, duodecim ſectiones laterum Octaedri poſſideant. In dato itaque Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe minoris ſegmenti. Cum enim in triangulo æquilatero ADE, maius ſegmentum lateris AD, ſit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, oſtenſa æqualis rectæ GI, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti AI, [l] cum quadratum rectæ GI, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perſpicuum eſt, & rectam IQ, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris AI. l 47. prim.

COROLLARIVM II.

RVRSVS ſit, cum octo Icoſaedri baſes collocatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. Suſcipiatur namq; Octaedri ſuperioris triangulum AED, in quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri IMQ, ſitque C, centrum trianguli AED, ex quo rectæ educantur CA, CE, CD: CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia ſunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ, (quod hæc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) anguloſque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. oſtendimus: Erunt baſes CM, CQ, æquales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.



COROLLARIVM III.

NON difficile eſt denique ex dictis colligere, idem centrum eſſe Octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunque duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O: cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia ſint lateribus XF, FO, trianguli XFO, (Nam XA, XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FO, ſegmenta minora laterum æqualium Octaedri ſectorum extrema ac media ratione) anguloſque complectantur æquales, ſemirectos videlicet: (cum AC, EF, diametri ſint quadratorum ABCD, EAFC: ac proinde, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam ſecent.) [m] Æquales erunt & baſes XG, XO. Eodemque argumento oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icoſaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque eſt Icoſaedri. m 4. prim.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

[a] INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrum; [b] & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarum octo concentricæ ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. Manifeſtum eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem centris octo baſium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binæ ſingulis ſex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere poteſt. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

a 18. quintidec.
b 5. quintedecim.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

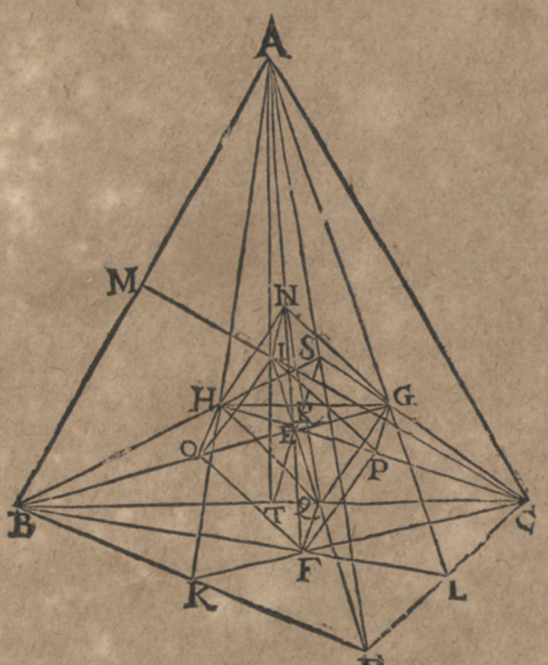
IN data pyramide cubum deſcribere.

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur deſcribi, ſitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectæ educãtur AEF, BEG, CEH, DEI, quę cadent in centra baſium oppoſitarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad eaſdem baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, ſecantes baſes oppoſitas BD, CD, AB, AD, BC, bifariã, & ad angulos rectos, ex ſchol. prop. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoq; rectæ ex ſolidis angulis per centrum E, demiſſæ AF, BG, CH, DI, bifariã in N, O, P, Q, punctis quorũ quodlibet cũ trib. proximis

a 15. quartidec.

centris

centris baſium (centris, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circumſtantium, ita vt relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico ſolidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum eſſe. Cum enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia ſint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quod FK, FL, cum perpendiculares ſint ad BD, CD, ex centro F, ductæ oſtendant æquales diſtantias rectarum æqualium
b 4. primi. BD, CD, à centro F,) anguloſque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [b] Æquales erunt & baſes AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rurſus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia ſunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (ſunt enim AH, AG, ſemidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABD, ACD,) angulos item comprehendunt æquales, vt de-
c 4. primi. monſtrauimus; [c] Æquales erunt baſes NH, NG. Haud ſecus oſtendetur æquales rectæ QG, QH, ſi rectæ ducantur DG, DH, nec non & reliquæ, cum omnes ſubtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehenſos; vt perſpicuum eſt. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, FT, æqualia ſint lateribus AF, FK. (Sunt namq; FT, FK, diſtantiæ rectarum æqualium BC, BD, à centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia ſint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, ſemidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABC, A-
d 4. prim. BD;) anguloſque contineant æquales: [d] Æquales erunt baſes NI, NH, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera æquilatera. Oſtendamus iam, ipſa plana eſſe atque rectangula, vt tandem quadrata eſſe concludamus, atque adeo componere cubum NF.



ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, oppoſita ſunt, hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter octaedri in pyramide deſcripti, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demõſtrabimus, tranſibit T, per E, centrum pyramidis, æqualeſque erunt ES, ET, nempe ſemidiametri Octaedri.
e 18. quarti dec. Deinde quia BS, CS, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. [e] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter ſecantur,
f 2. ſexti. [f] atque idcirco HG, parallela eſt lateri BC, ſecatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars eſt trianguli BSC,) proportionaliter; ideoque & RS, tertia pars eſt ipſius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE.
g 15. quartidec. Rurſus [g] quia DI, perpendicularis eſt ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars ſemidiametri DE, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4. recta DI, ideoque eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipſius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipſius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trian-
h 2. ſexti. guli AED, proportionaliter ſecentur, [h] recta NQ, parallela erit lateri AD, ſecabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars eſt trianguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, ſit tertia pars ipſius DE; tertia pars erit ER, ipſius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiuſdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R; ſecabitur SE, à rectis HG, NQ; Atque idcirco &
i 2. vndec. ipſæ HG, NQ, in eodem ſeſe puncto interſecabunt. [i] Quare in eodem ſunt plano, proptereaque & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum NQ; Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

CVM oſtenſa ſit HG, ipſi BC, parallela, atque adeo triangulum SHG, ſimile triangulo SBC, ex corollar.
k 2. ſexti. propoſition. 4. lib. 6. [k] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC: Eſt autem SH, tertia pars ipſius SB: Igitur & HG, tertia pars erit lateris BC. Haud ſecus oſtendemus NQ, tertiam eſſe partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, ſint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum ſubtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH,
l 8. primi. QH; [l] Æquales erunt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cum ipſi ſint quatuor rectis æquales, vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. recti erunt, ideoque quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent, qui ideo pyramidi dicetur inſcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor baſium pyramidis: quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant, vt conſtat.

ALITER. In data pyramide deſcribatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi ſtatuuntur in centris octo baſium octaedri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis, vt conſtat ex propoſ. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipſis, vt mox oſtendemus; fit, vt quatuor anguli cubi reſideant in centris quatuor baſium pyramidis, quemadmodum etiam in priori

priori demonſtratione dictum eſt. Rurſus quia reliquæ quatuor baſes octaedri parallelæ ſunt baſibus pyramidis, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. ([m] cum enim rectæ EG, EH, parallelæ ſint rectis BC, BD, [n] erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter ſe parallela, & ſic de cæteris) ſit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in baſes oppoſitas demiſſæ, ſint quoque ad illas quatuor reliquas baſes octaedri perpēdiculares, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. Quare cum prædictæ baſes abſcindant ex pyramide pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt.[o] Et quia dicta quatuor baſes octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc eſt, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

m 2. ſexti.
n 15. vnde.
o 17. vnde.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum per E, centrum pyramidis tranſeunt.

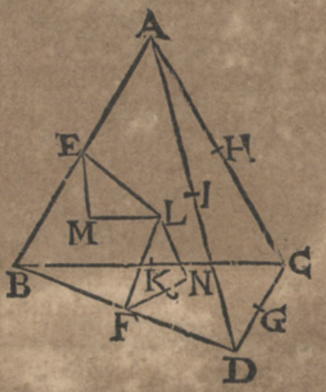
COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis GNHQ ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat: Recta RS, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, oſtenſa ſit tertia pars ipſius ST; perſpicuum eſt, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis AD, BC, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi RS.

LEMMA.

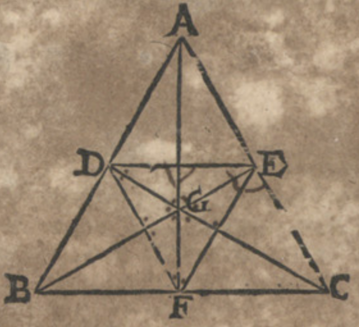
IDEM autem eſſe centrum Pyramidis, & Octaedri in ea deſcripti, idemque centrum baſis pyramidis, & baſis octaedri in ea deſcripti, ita demonſtrabimus.

Sit primum pyramis ABCD, cuius omnia ſex latera bifariam ſecentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro Pyramidis in baſes ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas baſes circumſcribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniam latera LM, ME. trianguli LME, æqualia ſunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli baſes ABD, BCD, circumſcribentes ſint æquales, æqualiter diſtabunt ipſi à centro L, per lemma 2. propoſ. 10. li. 14. Ac propterea eorum diſtantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, diſtantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M, & N, circulorum æqualium) anguloſque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11. [p] Aequales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hiſce æquales erunt, & inter ſe rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide deſcripti conſtituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex propoſ. huius lib. conſtat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos ſint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea deſcripti.



p 4. primi.

SIT deinde in baſe pyramidis ABC, baſis octaedri DEF, quæ ſecabit illius latera bifariam, vt patet ex propoſ. 2. huius lib. ſit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriuſque baſis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia ſunt, anguloſque continent æquales, nimirum ſemiſſes angulorum æqualium trianguli æquilateri; [q] erunt & baſes GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum eſt trianguli DEF. Quod eſt propoſitum.



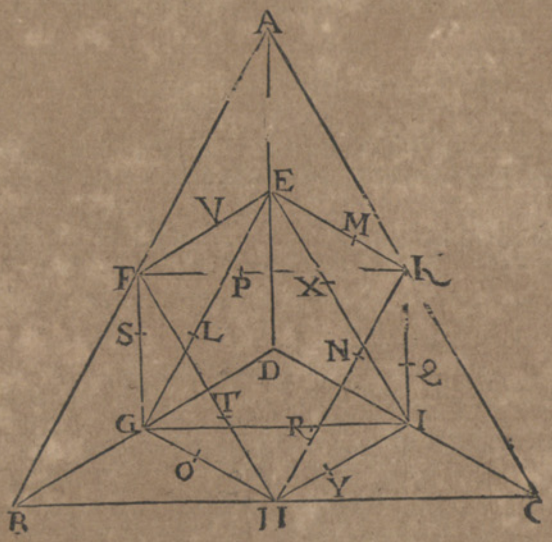
q 4. ſexti.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATÆ pyramidi ABCD, [a] inſcribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina ſumatur ex ſingulis angulis ſibi reſpondentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorũ octaedri cadentia, vt in propoſ. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK, HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. deſcriptum erit Icoſaedrum in dictis

a 2. quartidecim.



in dicto octaedro, vt conſtat ex propoſ. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis ſectionibus duodecim laterum octaedri. Cum ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſium Pyramidis ſint ducta; manifeſtum eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſium pyramidis conſtitui, ternos ſcilicet in ſingulis, quod & terna latera octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nam in baſi ABC, exiſtunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE: In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per deſin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor baſes MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, vt conſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data pyramide Dodecaedrum deſcribere.

a 19. quindecim. b 5. quindecim. c 8. quintidec. d 18. quintidec.

PYRAMIDI datæ [a] inſcribatur Icoſaedrum, [b] & in hoc Dodecaedrum habens viginti ſuos angulos in centris viginti baſium Icoſaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, vt in præcedenti propoſ. diximus: conſiſtent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, vt conſtat ex 2. coroll. propoſ. 16. huius lib. Deinde [c] quia cubus Dodecaedro inſcriptus octo ſuos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inſcriptus, [d] quatuor angulos in centris baſium pyramidis, de quibus iam dictum eſt, quatuor autem reliquos in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eiſdem bifariis ſectionibus perpendicularium dictarum: ſuperſunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum deſcriptum eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiamſi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

xiij.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

EX centro ſphæræ datum ſolidum complectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter à centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

S C H O L I V M.

ITAQVE, cum quodlibet quinq; ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones: vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 19. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt definit. 31. lib. 11. expoſuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

a 16. quindec. b 5. quintidec. c 8. quintidecim. d 1 quintidec.

CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta: [a] In octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde [b] Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inſcriptum eſt, vt conſtat ex propoſ. 17. huius lib. Poſt hæc in Dodecaedro [c] deſcribitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra baſium octaedri poſſident; ac propterea & cubus ipſe in octaedro deſcriptus eſt. [d] Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur eſſe deſcripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor baſium octaedri reſideant. Hoc autem priuilegium reliquis ſolidis regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis.

e 1. quintidec. f 8. quintidec.

NEQVE vero prætereundum eſt, Dodecaedrum, ſibique inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi. [e] Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor poſſideant, [f] conueniantque omnes

anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido conſtat, ſphæram Dodecaedro circumſcriptam complecti quoque cubum atq; pyramidem, cum ſphæræ illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.

PARI *ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum, atque pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, octaedro & pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur, vt demonſtratum eſt: in centris quidem, baſium Icoſaedri propoſ. 5. 11. & 12. In centris vero baſium octaedri, propoſ. 17. 4. & 6. In centris denique baſium pyramidis propoſ. 20. & 18. huius lib.*

VIGINTI *porro prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptioneſue quinque ſolidorum regularium vnius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrum, propoſ. 2. 18. 19. 20: In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ. 5. 1. 3. 14. 13. In Icoſaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ. 12. 15. 11. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icoſaedrum propoſ. 10. 9. 8. 7. deſcripſimus. At vero poſteriori vnica propoſitione, qua arte in quouis ſolido regulari ſphæra depingatur, docuimus.*

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

EVCLI-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

QVO VARIÆ SOLIDORVM REgularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus.

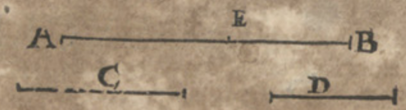
LIBER TERTIVS.

QVEMADMODVM libro 14. traditæ ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri poßit tractatio hæc quinq; corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

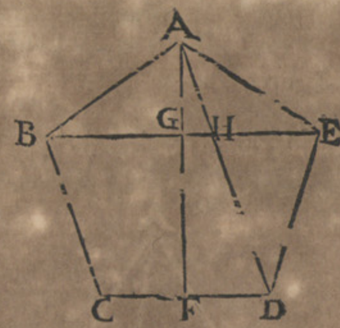
LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus. Cum enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docuimus Dodecaedrum, cubuſque in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphæra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit EB, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt AE, maius ſegmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D; proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, à recta BE, ſubtendente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ ſecet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD. ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. eſt parallela, [a] ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: [b] Atqui AD, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum DH. Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

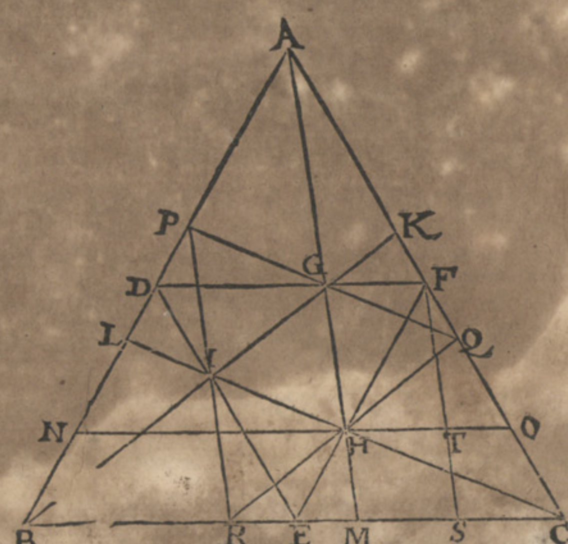


a 2. ſex.
b 18. tertijdec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM pyramidis ſit ABC, cuius latera ſecentur bifariã in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, conſtituentes GHI, triangulum Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli ABC, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri GHI, hoc eſt, rectam BK, tranſire per puncta G, I; & rectam CL, per puncta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipſi BC, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, ſimile, ex coroll. propoſ. 4 lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo ABC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis eſt rectæ FH, maiori ſegmento rectæ FE, ſeu DF, ipſi æqualis: (Eſt enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidijs ſcilicet æqualium laterum eiuſdem trianguli comprehenſos; [a] ideoque æqualia ſint.) [b] Eſt autem & NH, æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, [c] propterea quod FH, DF, parallelæ ſunt rectis AB, BC, ſeu NO. Igitur recta NO, compoſita ex NH, tota & HO, maiori ſegmento, [d] ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ BC, NO, DF, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam AM, tranſire per puncta GH. Haud ſecus oſtendemus BK, per puncta G, I; & CL, per puncta HI, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB; Atque idcirco rectæ BK, CL, AM, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri GHI.



a 4. pri.
b 34. pri.
c 2. ſexti.
d 5. tertijdec.

AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectæ FE, cuius maius ſegmentum fuit FH, hoc eſt FO, illi æqualis; Erit quoque FO, maius ſegmentum rectæ AF; [e] ac proinde tota AO, ſecta in F, extrema ac media ratione: [f] Eſt autem vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, ſegmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia vero eſt, [g] vt AQ, maius ſegmentum ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius ſegmentum; Et eſt AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus ſegmentum erit lateris AB, maiusque reliqua BP, ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, ſecabit extrema ac media ratione, atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniã vero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos, [h] æqualia inter ſe ſunt; erit triangulum PQR, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI: (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela ſit lateri CL; ſecabuntur PQ, LC, in eaſdem rationes, ex ijs, quæ ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela eſt lateri AL, [i] ſecans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam ſecatur in G. Eademq; eſt ratio de reliquis QR, RP) Ac propterea triangulum Icoſaedri GHI, inſcriptũ eſt

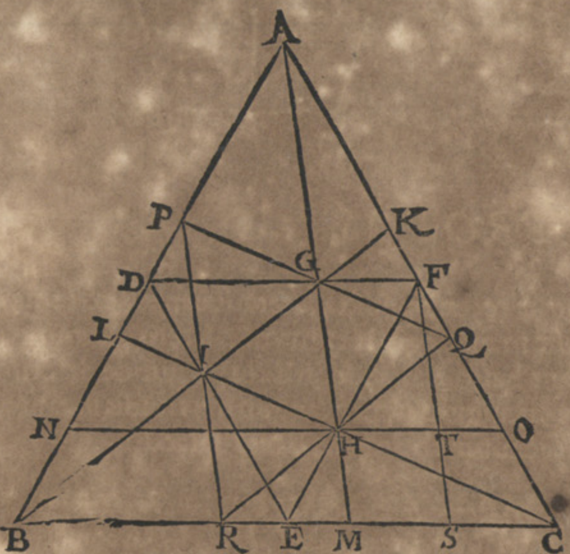
e 5. tertijdecimi.
f 2. ſexti.
g 2. quartidec.
h 4. pri.
i 2. ſexti.

triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera baſis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipſa biſariam ſecantur in G,H,I, ab angulis baſis Icoſaedri GHI. Quapropter, ſi ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi poteſt, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſſe ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. Cũ enim, vt conſtat ex propoſ.16. lib.15. GHI, triangulum ſit Icoſaedri in octaedro, cuius baſis DEF, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, eſt æquale, recta FS, paralleſa rectæ AM, ſecans MC, HO, in S, & T. [k] Cum igitur MC, biſariam ſecetur in S, ob triangulum AMC; [l] ſitque MS, ipſi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori ſegmento rectæ DF: Ac propterea cũ totæ DF, EC, æquales ſint: erit quoque, reliqua ES, reliquæ DG, maiori ſegmento æqualis: Ideoque EC, in S, ſecta erit extrema ac media ratione. Deinde [m] quia FE, FS, ſimiliter ſecantur: ſecatur autem FE, extrema ac media ratione, ſecabitur & FS, in T, extrema ac media ratione: maiusque ſegmentum erit FT, recta, [n] æqualis exiſtens lateri Icoſaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.

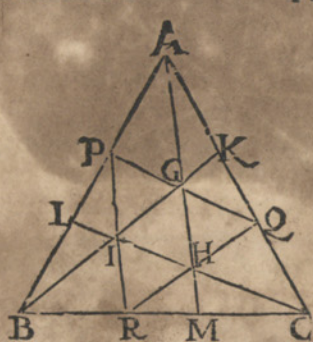
k 2. ſex.
l 34. pri.
m 2. ſex.
n 34. pri.



THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea pyramide deſcripti.

BASIS Pyramidis ſit ABC, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, baſim Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcriptã triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli ABC, ſecent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipſa latera PQ, QR, RP, biſariam diuidantur in G, H, I, vt in propoſ. præcedenti demonſtratum eſt. Dico AP, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri HI. Cum enim PQ, dupla ſit potentia minoris ſegmenti AP, ex coroll.1. propoſ.16. lib.15. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex ſcholio propoſ.4. lib.2. quod PQ, recta dupla ſit rectæ PG, hoc eſt, ſibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.



COROLLARIVM.

a 13. tertijdec. SEQVITVR ex his, latus Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. [a] Cum enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis: ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, [b] cum diametro potentia ſit commenſurabile. [c] Quare minus ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti Apotome erit: Atque adeo [d] cum minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile: (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri.) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ.104. lib.10. Apotome.

b 6. dec.
c 6 tertij dec.
d 6. dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus vero Pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo deſcriptæ diameter ſit baſis cubi, vt conſtat ex propoſ.1. lib.15. Sit autem quadratum huius diametri duplum baſis cubi, hoc eſt, quadrati lateris cubi, ex ſcholio propoſ.47. lib.1. Manifeſtum eſt, latus cubi dimidium eſſe potentia lateris Pyramidis in cubo illo deſcriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes biſarias ſectiones laterum Pyramidis conſtituunt octaedrum in pyramide deſcriptum, vt liquet ex propoſ.2. lib.15. Eſt autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentes biſarias eius ſectiones, cum ea recta æqualis ſit dimidio lateris trianguli, vt conſtat ex coroll. propoſ.4. lib.6. [a] Nam cum ſit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perſpicuum eſt latus pyramidis duplum eſſe longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti.

a 2. ſex.

b 14. tertijdec. DENIQVE [b] quia diameter ſphæræ, ſeu octaedri potentia eſt dupla lateris octaedri; Eſt autem latus cubi æquale diametro Octaedri ſibi inſcripti, cum diameter octaedri coniungat centra baſium oppoſitarum,

vt in

vt in coroll. propoſ. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia eſſe duplum lateris octaedri in eo deſcripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

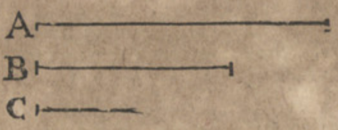
LATVS Dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia eſt dimidia lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ.

CVM enim Pyramis inſcripta cubo, deſcripta ſit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inſcribitur, vt docuimus propoſ. 10. lib. 15. Sit autem latus Dodecaedri maius ſegmentum, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo deſcribitur; [a] exiſtat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis ſibi inſcriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius eſſe ſegmentum rectæ, quæ potentia dimidia eſt lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandum. a 5. ſextidecimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icoſaedri in eo deſcripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo deſcripti C. Dico B, latus Icoſaedri medio loco eſſe proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex ijs, quæ in propoſ. 14. lib. 15. demonſtrata ſunt, B, latus Icoſaedri maius ſegmentum ſit lateris cubi A, & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. eiuſdem lib. oſtendimus, minus ſegmentum ſit eiuſdem lateris cubi. Planum fit, ita eſſe A, totam ad B, maius ſegmentum, vt B, maius ſegmentum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.



THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in eo deſcripti.

CVM enim per ea, quæ in propoſ. 18. lib. 15. ſunt demonſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti; (oſtenſum enim eſt ibi, GH, diametrum baſis cubi inſcripti tertiam eſſe partem lateris Pyramidis BC.) [a] Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cum noncupla proportio ſit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare cum quadratum diametri baſis cubi duplum ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. fit, vt ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiuſdem baſis diametri ſit 2. quadratum lateris Pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum. a 20. ſex.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus quoque ſit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inſcribitur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vlt. lib. 15. [a] Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi ſibi, & Dodecaedro inſcripti: Huius autē lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentū eſt, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat. a 8. ſextidecimi.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi.

VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi recta GI, ſubtendens angulum rectum GAI, minoribus ſegmentis AG, AI, comprehenſum;) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare, [a] cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum. a 47. pri.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT vna ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis quadratum ABCD, triangula vero ad E, verticem ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur kL, LM,

 MN, Nk,

MN,Nk, rectis AB,BC,CD,DA,parallelæ. Quod ſi coniungantur rectæ FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro deſcripti, vt demonſtrauimus propoſ.4.lib.15. Quoniam autem ducta recta EHO, ſeſquialtera eſt rectæ EH, per coroll. propoſ.18.lib.14. qualium partium 3.ponetur EO,talium 2.erit EH: [a] Atqui vt EO ad EH, ita eſt EB,ad EL. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, ſeu LM, ſibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9.& quadratum rectæ LM, nimirum kLMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2.cum quadratum LN, duplum ſit quadrati GI, ſibi inſcripti,per ea,quæ in ſcholio propoſ.47.lib.1.demonſtrauimus. Eſt enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, deſcriptum; [b] cum GI, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB,potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi GH,cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in eo deſcripti. Quod erat demonſtrandum.

a 2. ſexti.



b 33. pri.

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuiſum efficit maius ſegmentum latus Dodecaedri, cui inſcribitur,per coroll.2.propoſ.13. lib.15. inſcribunturque Dodecaedrum, & cubus ſibi inſcriptus, eidem octaedro, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. perſpicuum fit, octaedri latus eſſe potentia quadruplum ſeſquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti. Eſt enim eiuſmodi recta latus cubi eidem octaedro inſcripti, cuius quadruplum ſeſquialterum potentia eſſe oſtendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectę, quę potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt conſtat ex propoſ.14.lib.15. eiusque ſcholio: Et in bifarijs ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri reſident ſex anguli octaedri in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ.15.eiuſdem lib.15. Fit diametrum octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare, cum per ea, quæ ad propoſ.14.lib.15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoque idem latus Icoſaedri maius ſegmentum diametri octaedri in illo Icoſaedro deſcripti. [a] Atqui diameter ſphæræ,ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.

a 14. tertijdec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectę lineæ diuiſę extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectę lineæ.

OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ.13. lib.15. Minus ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius ſegmentum, vel maioris ſegmenti ad minus, (quod tota linea maius ſegmentum, atque minus, ſint tres rectæ continue proportionales:) liquido conſtat, proportionem lateris cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti eſſe quoque proportionis maioris ſegmenti ad minus duplicatam.

PRÆTEREA, cum conſtet ex coroll. 1. propoſ.17.lib.13. maius ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuiſi latus eſſe Dodecaedri, cui cubus inſcribitur; manifeſtum eſt eſſe vt latus Dodecaedri, hoc eſt,maius ſegmentum,ad latus cubi in ipſo deſcripti,hoc eſt, ad totam lineam extrema ac media ratione ſectam, ita minus ſegmentum ad maius. Cum enim ſit,vt tota linea ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum ad minus: Erit quoque conuertendo,vt maius ſegmentum ad totam lineam,ita ſegmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri,&c. Quod demonſtrandum erat.

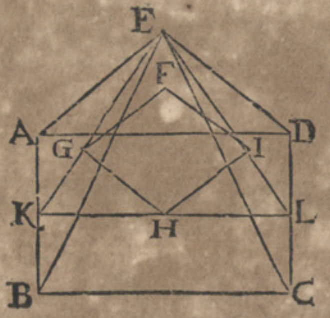
THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptę Pyramidis.

SIT vna ſex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius baſis quadratum ABCD, triãgula autem ad verticem E,ſint ABE,EBC,CED,DEA, ſintq; horum triangulorũ centra F,G,H,I, quæ rectis iungantur FG,GH,HI, IF,quadratum cubi in octaedro deſcripti conſtituentibus,vt docuimus in propoſ.4.lib.15. Quoniam vero pyramis in cubo deſcripta, deſcribitur quoq; in Octaedro,cui cubus imponitur, vt in ſcholio propoſ.vltimæ lib.15. expoſuimus; Eſtq; latus pyramidis in cubo deſcriptæ diameter baſis cubi,vt conſtat ex propoſ.1.lib.15. Erit ducta

diame-

diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto deſcriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, ſeſquialterum eſſe lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, biſariam in K, L, ex ſcholio propoſ.12.lib.13. ipſæq; EK, EL, ſeſquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll.propoſ.18.lib.14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll.propoſ.4.lib.6. triangulum EGI, ſimile triangulo EKL. Quare erit vt EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutãdo, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI, ideoq; cum EK, ſeſquialtera ſit ipſius EG, erit & KL, ſeſquialtera ipſius GI. [b] Cum ergo BC, æqualis ſit ipſi KL, quod & BK, CL, æquales ſint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri ſeſquialterum lateris Pyramidis GI, ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandum.

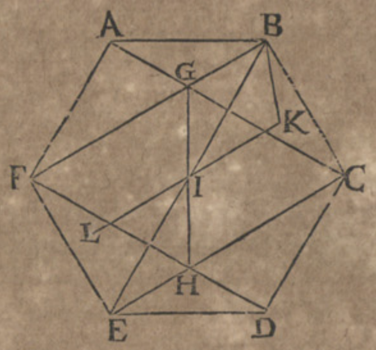


a 2. ſex.
b 33. pri.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertium quadrati lateris Icoſaedri.

SIT Icoſaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrum I; triangula vero oppoſita & parallela, per coroll.4.propoſ.14.lib.13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis IK, cadens ex coroll. lemmatis 1.propoſ.10. lib.14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per ſcholium propoſ.14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icoſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, vt conſtat ex propoſ.11.lib.15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit KL, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrũ Icoſaedri.





Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, tranſeant, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque IK, IL, ſemidiametri æquales: Coniuncta autem KB, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis, erit angulus BKI, rectus, ex defin.3.lib.11. [a] Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri BI, vt in ſcholio propoſ.4.lib.2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris BK, KI, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, ([b] quod triplum eſt quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri Icoſaedri BE, remanet quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri BC. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extenſaque Bk, vſque ad M, quæ ſecet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum k, ducta perpendicularis eſt ad CG, per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. [c] erit recta BC, potentia ſeſquitertia rectæ BN, vt autem BC, ad BN, ita eſt BM, ad BC, quod BC, ſit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll.propoſ.8.lib.6. [d] cum angulus BCM, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur BM, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, ſeſquitertium eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 47. pri.
b 15. tertij-dec.
c 12. quartidec.
d 31. ter.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri BE, æquale eſſe quadratis diametri cubi kL, & diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectę lineæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, [a] duplum potens lateris octaedri, coniungit biſarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, vt manifeſtum eſt ex propoſ.9.lib.15. Eſt autem rectæ dictas ſectiones coniungentis diuiſæ extrema ac media ratione minus ſegmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4.propoſ.17.lib.13. Liquet, latus Dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmodi recta coniungat biſarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 14. tertij dec.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

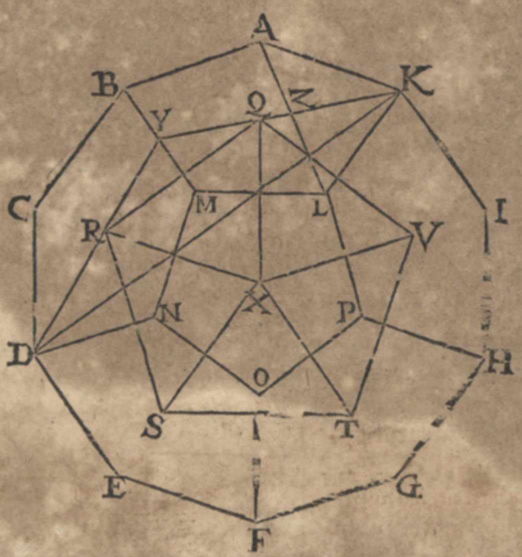
CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodem Icoſaedro deſcribantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæræ pyramidem circumdantis: [a] Poteſt autem diameter ſphæræ ſeſquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſim Icoſaedri circumſcribentis ſeſquitertium poteſt lateris Icoſaedri, vt in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſim Icoſaedri circumdantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſim Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

a 13. tertijdec.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atq; extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinq; triãgula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione



propoſ. 7. lib. 15. A duob[9] angulis pentagonorũ D, K, in communem baſim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K, ſecabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita eſſe latus Dodecaedri LM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt KZ, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta DK, quæ, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmẽtum ipſius DK, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodẽ ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniã vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q; (ſunt n. RD, QK, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; nec non & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [b] parallela erit QR, ipſi DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, ſimile per coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY, [d] Vt autem DK, tota ad totam KY, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita KZ, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 2. ſextidec.

b 2. ſex.
c 4. ſex.
d 2 quartidec.

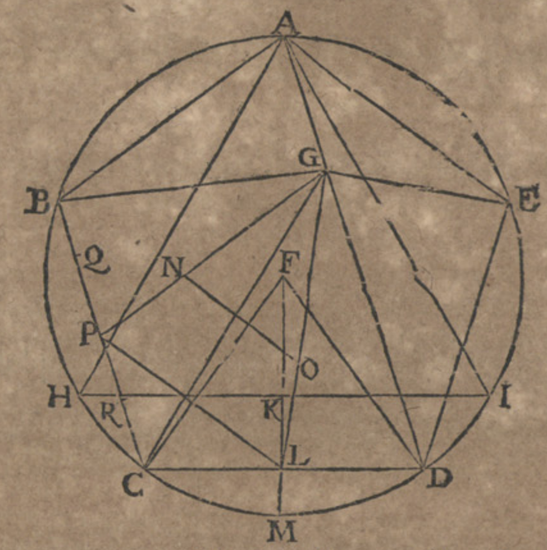
THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minuſque eius ſegmentum à toto latere Icoſaedri ſublatum; à reliqua quoque recta pars rurſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cuius centrum F; & ſuper quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex ijs, quæ in propoſ. 16. lib. 13. ſunt demonſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inſcribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales ſunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, nec non & duo arcus ABH, AEI, cum ſint tertiæ partes eiuſdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; proptereaque rectæ HI, CD, parallelæ, per ſcholium propoſ. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, [a] ſecans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; coniunganturque rectæ FC, FD. Suſcipiantur inſuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. latera oppoſita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuiſa eſt CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt conſtat ex demonſtratis in propoſit. 5. lib. 15. latus erit Dodecae-

a 3. ter.

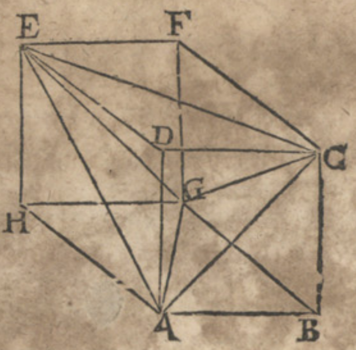
decaedri in Icoſaedro deſcripti. Denique BP, dimidium lateris Icoſaedri ſecetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori ſegmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem eſſe lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri HI, ſecetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione ſecta faciat maius ſegmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propoſitionis 2. lib. 14.) ſit autem maiori ſegmento FK, æqualis recta KM, per coroll. propoſ. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. maius ſegmentum KM, ſectum quoq; in L, à minori ſegmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ ſuiipſius ſegmento LM. Quoniam vero iuncta PL, eſt latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, deſcripti, idemque centrum F, habentis, ex ſcholio vltimo lib. 4. ideoque ſimilis illi; erunt triangula FCD, FPL, (ſi recta duceretur FP,) ſimilia, per ſcholium propoſ. 20. lib. 6. Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc eſt, ſibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore ſegmento dimidij ipſius FM, nempe minore ſegmento rectæ KM, vt oſtendimus. Recta igitur CD, vel ſibi æqualis BC, excedet quoq; rectam LP, minore ſegmento dimidij ipſius BC, nimirum minore ſegmento rectæ BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rurſus quia GP, GL, propotionaliter ſecantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplæ ſint ipſarum NP, OL, per coroll. propoſ. 18. lib. 14.) [b] parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, b 2. ſex.
triangulo GPL, ſimile ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt c 4. ſex.
GP, ad GN, ita PL, ad NO: Eſt autem GP, ipſius GN, ſeſquialtera, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc eſt, ſibi æqualis CQ, ſeſquialtera erit ipſius NO; Ac proinde, cum CQ, ſeſquialtera quoque ſit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. eſt CQ, talium 1. eſt CR, per conſtructionem; Ac propterea earundem 2. QR,) æqualis erit QR, ipſi NO, lateri Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Si dimidium itaque lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 20. POPROS. 20.

CVBVS ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt.

IN cubo AF, deſcripta ſit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum eſſe. Cum enim inſcriptam pyramidem æquilateram circumſtent quatuor pyramides fundatæ ſuper quatuor baſes ipſius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non reſident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inſcriptæ: (Nam ſuper baſin ACE, fundatur pyramis ACED; ſuper baſin AEG, pyramis AEGH; ſuper baſin CEG, pyramis CEGF; & ſuper baſin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales ſunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis ſimilibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim conſtat tribus æqualibus & ſimilibus triangulis, dimidijs ſcilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inſcriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum ſextuplus; (Nam exempli cauſa, pyramis ABCG, baſim habens ABC, dimidium baſis cubi BD, altitudinem vero eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars eſt, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. priſmatis eandem baſin, & altitudinem habentis. [a] Cum igitur a 32. vndecimi.
cubus duplus ſit eiuſmodi priſmatis, quod & baſis cubi dupla ſit baſis priſmatis; manifeſtum eſt, pyramidem ABCG, ſextam partem eſſe cubi, proptereaque cubum pyramidis illius eſſe ſextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumſtantes, quatuor eſſe ſextas partes, id eſt, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inſcriptam eiuſdem cubi tertiam eſſe partem. Cubus igitur ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. Quod erat demonſtrandum.



ALITER. Cum cubus, & in eo deſcripta pyramis eadem ſphæra comprehendantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. [b] Cubus vero triplus ſit pyramidis in eadem ſphæra deſcriptæ, vt demonſtratum b 32. quartidec.
eſt; perſpicue colligitur, cubum triplum eſſe ſibi inſcriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem ſphæra, in qua cubus, continetur.

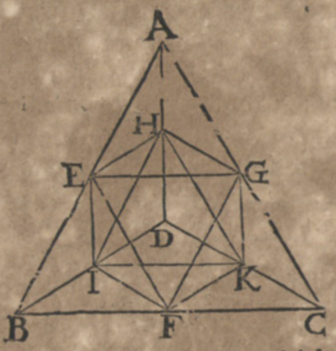
THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptum ſit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri eſſe duplã. Cum enim octaedrum circumſtent quatuor pyramides pyramidi ABCD, ſimiles, vt propoſ. 3. lib. 15. demonſtratũ eſt, fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri EGH, EFI, FGK, HIK, quales ſunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis ſimilibus, æqualibusq; numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibꝰ pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. lateraq; habeant æqualia, nempe dimidia laterũ æqualium eiuſdẽ pyramidis ABCD, ex conſtructione

 pro-

a 8. duodecimi.



propoſ.2. lib. 15. [a] Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cum octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum triplicata, vt in his numeris 1.2.4.8. perſpicue apparet) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIkGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

a 20. ſextidec. *b 21. ſextidec.*

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ.3. lib.15. [a] Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus, [b] & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri ſit ſextuplus. Quare cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

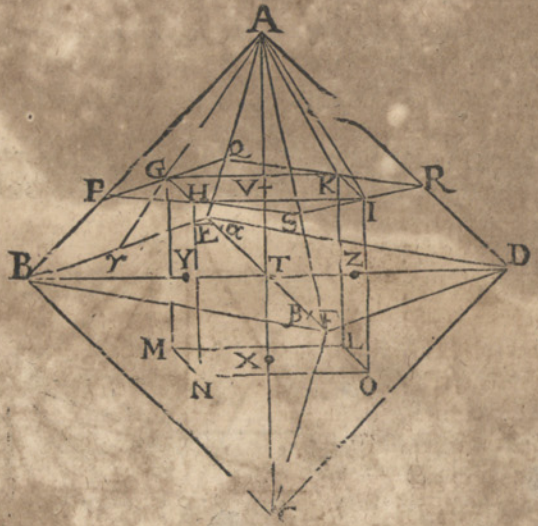
OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.

IN octaedro ABCDEF, cubus deſcriptus ſit GHIkLMNO, angulos ſuos ſtatuens in centris baſium octaedri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterum. Aſſumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, k, I, H, centra quatuor baſium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum conſtituentes PQRS, vt in propoſ.4. lib.15. eſt demonſtratum: [a] quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis exiſtens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ oſtendimus in coroll. 1. propoſ.14. lib.13. Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi GI, MO, in punctis V, X, per ſcholium propoſ.14. lib.11. Eſt autem V, centrum quadrati PQRS; [b] (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela ſecent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [c] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin.3. lib.11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt

a 15. vndecimi.

b 17. vndec.

c 47. pri.



reliqua quadrata rectarum VP, VQ, proptereaque & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIk, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib.4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, k, I, H, vt conſtat ex demonſtratis in propoſ.4. lib.15. Eodem argumento concludemus X, centrum eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ.18. lib. 14. [d] Cum ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: nec non VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum per coroll. 1. propoſ.15. lib.13. rectę centra baſium cubi oppoſitarum connectentes ſeſe bifariam ſecent in centro. Iam vero quoniam VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla autem fuit & AV, eiuſdem VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIkA, ductis rectis AI, Ak, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll.1. propoſ.7. lib.12. cum vtriuſque eadem ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX: [e] Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIkA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIk, illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula huius ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulis illius.) [f] proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterum, quod & recta Aγ, [g] proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſquialtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquial-

d 17. vndec.

e 6. vndec.

f 8. duodec.

g 2. ſex.

quialteræ 3.ad 2.vt in his numeris 8.12.18.27. conſtat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54.ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12.eſſe cubum GO, iam demonſtratum eſt. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54.ad 12.hoc eſt, in minimis numeris, per 35. propoſ.lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla ſeſquialtera eſt. Octaedrum itaque ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum eſt octaedri, atque cubi ſibi inſcripti. Oſtendimus enim T, vtriuſque eſſe centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. [h] Nam quadrata ipſorum laterum proportionem habent quadruplam ſeſquialteram, quam videlicet demonſtrauimus habere octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum. h 11.ſexti dec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ Pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.

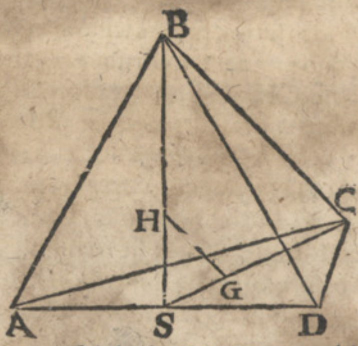
QVONIAM vt oſtendimus ad finem lib. 15. cubus, ſibique inſcripta pyramis in eodem octaedro deſcribuntur; [a] Eſt autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſquialterum; & cubus ſibi, ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 2.ponetur pyramis, talium 6.erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27.ad 6.proportionem quadruplam ſeſquialteram, & 6.ad 2.triplam. Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem habet, quam 27.ad 2. hoc eſt, tredecuplam ſeſquialteram. Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

a 23.ſexti dec.
b 20. ſextidec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur deſcriptus. Dico pyramidem cubi eſſe noncuplam. Aſſumantur enim G,H, centra duarum baſium ACD, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppoſitum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per ſcholium propoſ.12.lib.13.ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ ſint rectarum HS, GS, ex coroll.propoſ.18. lib.14. ac proinde proportionaliter ſecentur BS, CS, [a] parallelæ erunt BC, HG, & per coroll.propoſ. 4.lib.6. triangulum HGS, triangulo BCS, ſimile. [b] Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutando, vt BC, ad HG, ita CS, ad GS: [c] Eſt autem CS, ipſius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipſius HG. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi, vt in propoſ.1.lib.15.demonſtratum eſt; Recta vero connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentium diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ.18.lib.15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G,H, baſium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit baſis GNHQ, cubi deſcripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter baſis cubi pyramidem ABCD, circumſcribentis; GH, vero diameter baſis cubi in eadem pyramide deſcripti. Cum ergo eandem habeant proportionē diametri quadratorum, quam latera; (Eſt enim vt diameter vnius, quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quod proportio vtraque ſit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel ſic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipſum quadratum eſt, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipſum quadratum, cum vtrobique ſit proportio dupla. [d] Igitur erit quoque diameter ad latus, vt diameter ad latus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC, diameter baſis cubi circumſcripti ad GH, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At vero cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia, [e] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi ABDC, proportionem habet, quam 27.ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis, vt hic 1.3.9.27. videre licet. Quam ob rem, [f] cum cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27.ad 9.videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem, quam 9.ad 1.nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.



a 2. ſexti.
b 4. ſexti.
c 18.quartidec.
d 22.ſexti
e 33. vndec.
f 20. ſextidec.

COROLLARIVM.

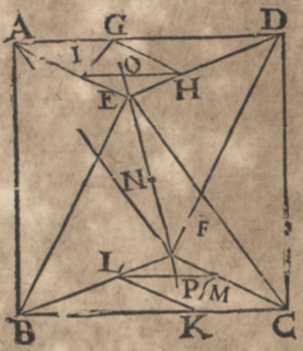
IGITVR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, proportionem habet, quam 27.ad 1.Hoc enim demonſtratum eſt ex propoſ.33. lib.11. in demonſtratione huius propoſitionis.

THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

IN octaedro ABCDEF, concipiatur deſcriptum Icoſaedrum. Dico octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cum enim, vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur; ſint duæ baſes Icoſaedri GHI, kLM, in duabus baſibus oppoſitis octaedri ADE, BCF; atq; ex N, centro octaedri, nec non & Icoſaedri (idem enim vtriuſq; eſt centrum, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15. ad baſim ADE, perpendicularis ducatur NO, cadens in centrum O, trianguli ADE, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propoſ. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli GHI, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cum ergo plana oppoſita ADE, BCF, parallela ſint, ex coroll. 4. propoſitionis 14. lib. 13. Recta ON, producta perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſitionis 14. lib. 11. ad planum BCF, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo kLM, cadet. Quare OP, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis NO: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis ADE, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri. At vero priſma, cuius eadem baſis ADE, altitudo autem OP, dupla altitudinis ON, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem ADE, altitudo vero ON; per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis ADE, & altitudo OP, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri: Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit & tertia pars priſmatis ſuper baſim ADE, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli ADE, altitudo vero eadem OP. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſim ADE, & ſub altitudine OP; cum per ea, quæ docuimus ad propoſ. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis ADE, & altitudo OP, alterius autem baſis tertia pars baſis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia ſint octaedro ABCDEF. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis GHI, altitudo vero OP, æquale eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: proptereaque triplum huius priſmatis, nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis GHI, altitudo autem eadē OP, æquales eſſe 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim GHI, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma ſcilicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli GHI, altitudo vero eadem OP; Atque idcirco duo priſmata, quorum vnius baſis tripla ſit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius vero baſis tertia pars baſis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icoſaedro in dicto octaedro deſcripto. Iam vero, cum duo illa priſmata, octaedro æqualia, ad duo hæc priſmata, Icoſaedro æqualia ſint per ea, quæ oſtendimus ad propoſ. 7. lib. 12 vt baſes priſmatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes, (cum vnius baſis ſit ADE, nempe tres tertiæ partes ipſius ADE, complectens, alterius vero baſis tertia pars ipſius ADE,) ad baſes priſmatum Icoſaedro æqualium decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes; (cum vnius baſis tripla ſit trianguli GHI, nimirum nouem tertias partes ipſius GHI, continens; alterius
a 15. quin. vero baſis tertia pars ipſius GHI.) Sint autem vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli GHI, [a] ita duæ tertiæ partes ipſius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarum ad quinq; tertias partes ipſius GHI, hoc eſt, ad dimidiū decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipſius ADE, ad quinq; tertias partes ipſius GHI, ita quoq; ſint, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. ſex tertiæ partes ipſius ADE, (hoc eſt, duæ baſes octaedri triplum duarū tertiarum vnius baſis conſtituentes, cum ſex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipſius GHI, (id eſt, ad quinque baſes Icoſaedri, triplum quinque tertiarum vnius baſis complectentes, cum quindecim tertias partes complectantur,) Erunt quoque duo illa priſmata, octaedro æqualia, hoc eſt, ipſummet octaedrum, ad duo hæc priſmata Icoſaedro æqualia, nempe ad ipſummet Icoſaedrum, vt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quocirca octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quod erat demonſtrandum.

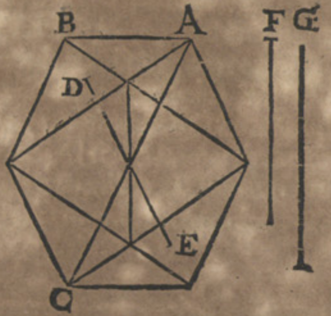


THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum in Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat centra baſium oppoſitarum: diameter autem eius ſit AC; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectam DE. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſium oppoſitarum; Erit DE, diameter Dodecaedri in Icoſaedro ABC, de-

ſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidentes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri AC, hoc eſt, in eadem ſphæra, in qua Icoſaedrum A B C, deſcripto, cum vtriuſque eadem ſit diameter; & Dodecaedro diametri DE, intra Icoſaedrum videlicet, ABC, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icoſaedri ABC, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, ſibi inſcriptum, componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis ſunt demonſtrata; nimirum ex proportionibus Icoſaedri ABC, ad Dodecaedrum diametri A C, in eadem ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icoſaedro A B C, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem ſphæra comprehenſum, ſit vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi;

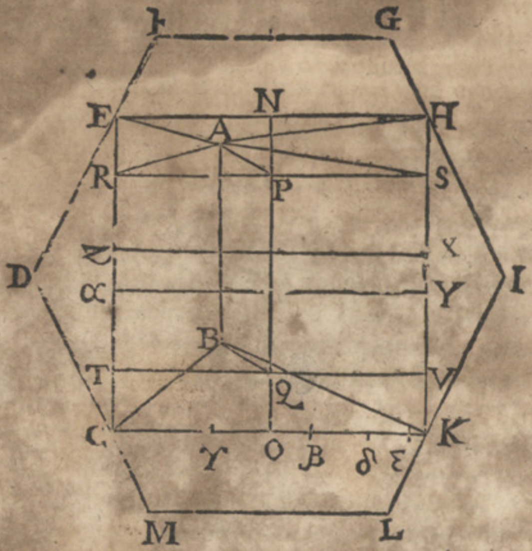


([a] Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icoſaedrum A B C, eiuſdem diametri eſt, vt G, latus cubi ad F, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icoſaedro videlicet A B C, deſcriptũ, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Manifeſtũ eſt, proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrũ diametri DE, componi quoq; ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum. a 11. quartidec.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

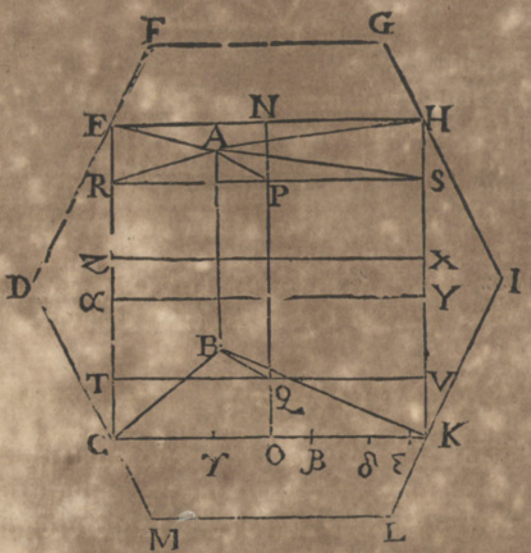
QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His vero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubũ circumſcribentis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, [a] triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni A E, A H, anguloſque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona ABCDE, ABKIH, per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, [b] æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia A B C E, A B K H;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia, & æqualia per 10. defin. lib. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrũ ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum a 4. pri. b 4. pri.



circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit à C E H K, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi C K, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaq; recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni A B, & in quam cadunt perpendiculares AP, BQ, demiſſæ in planum EK, vt conſtat ex demõſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN, VX, VR, XS, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit vtraq; recta AB, BQ, maius ſegmentum lateris cubi NO, vel HK, & vtraq; AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propoſ. 17. lib. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoq; RT, SV, maiora ſegmenta laterum EC, HK; atq; adeo ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cum & earum baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum ABTVSR. [c] Quoniam autem AS, ipſi BV, & A R, ipſi B T, æqualis eſt, & parallela, cum coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, [d] parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter ſe æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. cum latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentũ duobus aduerſis trian- c 33. pri. d 15. vndecimi.

triangulis æqualibus ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione.

IAM vero, cum oſtenſum ſit rectas HS, KV, minus ſegmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia vero pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; [e] vtriuſque vero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, conſtituta, [f] quod & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH; Æqualis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVkB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, vt demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 12. Item eiuſdem priſmatis, cuius baſis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VX, duas tertias partes continet priſma, cuius baſis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, ex ſcholio propoſ. 25. lib. 11. [g] quod & baſis TY, duas partes tertias complectatur baſis TX. Igitur & priſma, cuius baſis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVkB; Ac proinde hoc priſma appoſitum priſmati ABTVSR, efficiet priſma æquale ſolido CBkHAE, habens baſin rectangulum contentum ſub latere cubi TV, & ſub recta compoſita ex VY, duas tertias partes minoris ſegmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore ſegmento, ideoq; à baſe cubi deficientem rectangulo αX, contento ſub latere cubi αY, & ſub XY, tertia parte minoris ſegmenti VX. Non diſſimili ratione inueſtigabimus alia ſimilia quinque priſmata æqualia & proxime dicto priſmati, & reliquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſtitutis. Sex igitur huiuſmodi priſmata æqualia erunt ſex illis ſolidis, exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum. Quia autem duo quælibet priſmata illiuſmodi inter ſe aptata componunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conſtruentur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadem altitudine QB, quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, & ſuper baſes à baſe cubi deficientes ſingulas rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurget parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum æquale, cuius baſis à baſe cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo vero æqualis eſt tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc eſt, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris ſegmenti lateris cubi, ter ſumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, ſeu latere cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Diuidatur enim Ck, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemque Cβ, maius ſegmentum, & βk, minus bifariam in γ, δ; atque ex βk, abſcindatur $\beta\varepsilon$, æqualis ipſi $\beta\gamma$, ſeu Cγ, ita vt Cγ, vel $\gamma\beta$, vel $\beta\varepsilon$, dimidia pars maioris ſegmenti Cβ, æqualis ſit ipſi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Poteſt autem ex minori ſegmento βk, abſcindi recta æqualis ipſi Cγ, dimidio maioris ſegmenti; quia βk, maior eſt, quam dimidium maioris ſegmenti Cβ. Cum enim ſit, vt Ck, ad Cβ, ita Cβ, ad βk, ſit autem Ck, minor, quam dupla ipſius Cβ, quod Cβ, ſit ipſius maius ſegmentum; erit quoque Cβ, minor, quam dupla ipſius βk, hoc eſt, erit βk, maior, quam dimidium ipſius Cβ. Quoniam igitur eſt, vt tota Ck, ad maius ſegmentum Cβ, ita maius ſegmentum Cβ, ad minus βk; [h] erit quoque vt CO, dimidia ipſius Ck, ad Cγ, vel $\beta\varepsilon$, dimidiam ipſius Cβ, ita Cγ, vel $\beta\varepsilon$, ad $\beta\delta$, dimidiam ipſius βk; Ac proinde ſi CO, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius illius ſegmentum Cγ, vel $\beta\varepsilon$, & minus $\beta\delta$. Quare & $\beta\delta$, minus ſegmentum ſecabit $\beta\varepsilon$, maius ſegmentum extrema ac media ratione, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. eritque maius ſegmentum $\beta\delta$, minus autem $\delta\varepsilon$; Ac propterea rurſus $\delta\varepsilon$, minus ſegmentum ſecabit rectam δk maiori ſegmento $\beta\delta$, æqualem, extrema ac media ratione, minuſque ſegmentum erit εk. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi Ck, minore ſegmento εk, rectæ δk, vel ſibi æqualis rectæ $\beta\delta$, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmentum minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit ſibi inſcriptum cubum, à baſe cubi deficere rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonſtrandum.



e 6. duodec.
f 1. ſex.
g 1. ſex.
h 15. quin.

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit. Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati

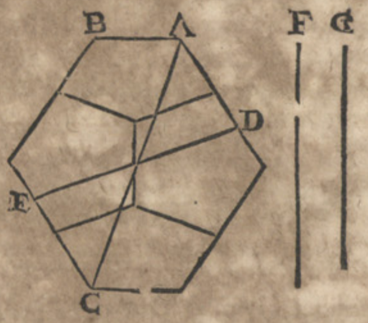
lateris

lateris cubi minus eſt ſegmentũ, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto iam parallelepipedo adiungatur poſterius parallelepipedum compoſitum erit parallelepipedum prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atq; idcirco, vt Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonſtratum eſt.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter ſit AC, & recta coniungens centra baſium oppoſitarum DE; At vero F, latus cubi, & G, latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri. Cum enim anguli Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti reponantur in centris baſium Dodecaedri, atque adeo anguli oppoſiti in centris baſium oppoſitarum; erit recta DE, centra baſium Dodecaedri oppoſitarum connectens, diameter Icoſaedri inſcripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem ſphæra cum Icoſaedro intra Dodecaedrum ABC, collocato deſcribetur, cum eandem habeant diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icoſaedro eiuſdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, deſcripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis ſunt demonſtrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, ſecundam magnitudinem, & Dodecaedri ex Diametro DE, deſcripti ſecundæ magnitudinis ad Icoſaedrum in Dodecaedro ABC, deſcriptum, tertiam magnitudinem.



Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12.[a] Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icoſaedrum eiuſdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro ABC, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icoſaedri; liquido conſtat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cuius ſcilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri AC, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppoſitarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaque ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 11. quartidec.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo vero tertiæ parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique à latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo vero minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales.

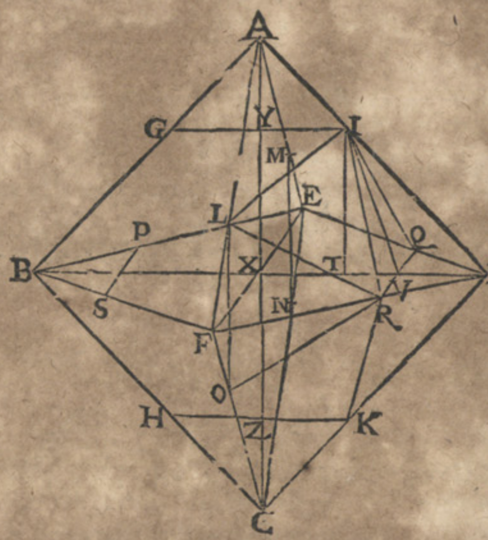
QVONIAM ſi in Dodecaedro intra Pyramidem deſcripto cubus deſcribatur, hic idem cubus in eadem pyramide eſt deſcriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua deſcribitur, nona pars eſt,[a] cum pyramis cubi ſibi inſcripti ſit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, ſeu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi ſibi inſcripti duplum ſit, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta eſt in verbis propoſitionis huius; non obſcure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inſcriptum duas nonas partes continere ipſius pyramidis minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt ſi dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tũ demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectẽs. Quamobrem Dodecadrum pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 25. ſextidecim.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema ac media ratione ſectæ.

OCTAEDRVM, cui inſcriptum eſt Icoſaedrum, ſit ABCDEF, repetita figura propoſ.16.lib.15. vbi demonſtratum eſt, viginti triangula Icoſaedrum inſcriptum componentia eſſe IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo poſtrema octo baſibus Octaedri ſunt impoſita, ſecãtia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Itẽ rectã IT, perpendicularẽ ad BD, æqualẽ eſſe maiori ſegmento XY, ſemidiametri AX. Dico Octaedrum ABCDEF, ſuperare Icoſaedrũ ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri QR, altitudo vero IT, maius ſegmentum ſemidiametri AX. Cum enim in quatuor baſibus Octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum ſolidum Octaedri D, conſtituentibus poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum ſolidum D, in eiſdem quatuor baſibus Octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus ſi accedant duo triangula Icoſaedri QIR, KQR, & commune triãgulum DQR, conſtituentur duæ pyramides ſuper communem baſem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. 5. lib. 12. cum earum altitudo ſit recta eadem IT, maius videlicet ſegmentum ſemidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum AX, ſecta eſt à recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoque ſecta eſt CX, à recta HK, in Z. Quare ſi ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, [a] erit ea, æqualis rectæ ZX, maiori ſegmento ſemidiametri CX, hoc eſt, ipſi IT. Quæ quidem pyramides extra Icoſaedrum in Octaedro deſcriptum conſiſtunt. Simili modo prope ſingulos reliquos quinque angulos Octaedri conſtituentur binæ pyramides & inter ſe, & dictis duabus æquales extra Icoſaedrum prædictum: ita vt Octaedrum ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidium eſt quadrati lateris DQ, (Cum DQ, DR, rectæ æquales ſint, minora ſcilicet ſegmenta laterum Octaedri, angulumque contineant rectum) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli DQR. Priſma igitur, ſiue parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit priſmatis, cuius baſis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ.7. lib. 12. Priſma autem, cuius baſis DQR, & altitudo IT, triplum exiſtens, ex coroll.1.propoſ.7.lib.12. pyramidis IDQR, æquale eſt tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icoſaedrum conſiſtere diximus. Priſma ergo, vel parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque eſt trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ ſint omnes duodecim pyramides ſimul Icoſaedrum ambientes; Æquale quoque erit priſma, ſeu parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icoſaedri, & altitudo IT, maius ſegmentum ſemidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc eſt, exceſſui Octaedri ſupra Icoſaedrum ſibi inſcriptum; Ac proinde Octaedrum ſuperabit Icoſaedrum dicto priſmate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.



a 34. prim.

COROLLARIVM

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri coniungens. Cum enim ex demonſtratis propoſ.19.lib.15. conſtet, ſi Pyramidi Octaedrum, & huic Octaedro Icoſaedrũ imponatur, Icoſaedrum eidem Pyramidi eſſe inſcriptum: [b] Octaedrum autem ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri, recta videlicet IT, ſeu YX: Fit, vt Octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis, cui inſcribitur, ([c] quod pyramis dupla ſit ſibi inſcripti Octaedri) ſuperet duplum Icoſaedri in Octaedro, ideoque & in Pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias ſectiones laterum Icoſaedri oppoſitorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata à nobis in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri copulans, Pyramis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

b 31. ſextidec.

c 21. ſextidec.

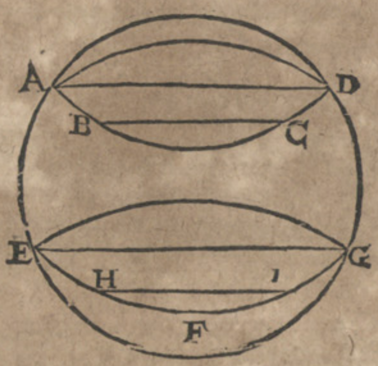
DE QVINQVE CORPORVM REGVLARIVM DESCRIptione in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM Euclides libro 13. quinq; corpora Regularia ſeorſum extra ſphæram conſtruxit, deinde vero eadem à ſphæra comprehendi, noua demonſtratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data ſphæra deſcribat: præſertim cum eius ratio multo clarior videatur, & facilior quã conſtructio illa ab Euclide præſcripta. Sed prius ex eodẽ Pappo lemmata nonnulla præmittẽda ſunt, quorũ aliqua etſi per elemẽta ſphærica Theodoſii demonſtran-

monſtrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere cenſeri poſſumus; quippe cum propoſitiones ſphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex ſolis 19. prioribus propoſitionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium conſtructionem percipi poßint. Incitandis autem Theodoſii propoſitionibus ſequemur ordinem noſtrorum commentariorum, quos in eadem elementa conſcripſimus. Hinc ergo initium ſumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.



IN ſphæra ſint duo circuli paralleli ABCD, EFG; ſitque primum in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda ſit diameter parallela. Ducatur, vt in ſcholio propoſ. 18, lib. 11. docuimus, per diametrum AD, planum rectum ad circulum ABCD, [a] faciens in ſphæræ ſuperficie circulum AEGD. Quoniam igitur circulus AEGD, circulum ABCD, bifariam, & ad angulos rectos ſecat, erit circulus AEGD, maximus; tranſibitque per polos circuli ABCD, ex ſchol. propoſ. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG, [b] cum paralleli eoſdem polos habeant; [c] ideoq; eum bifariam ſecabit. Communis ergo ſectio EG, eius diameter erit: [d] quæ cum ſit ipſi AD, parallela, patet propoſitum.

a 1. 1. Theod.
b 1. 2. Theod.
c 15. 1. Theod.
d 16. vnde.

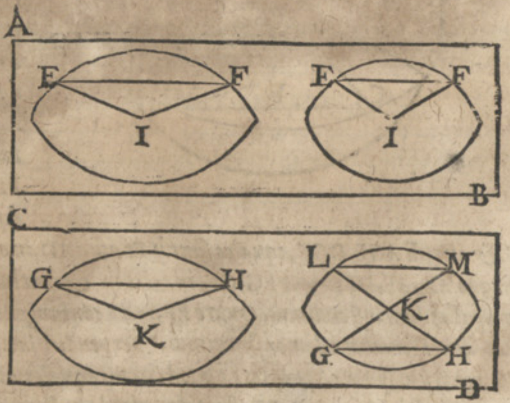
DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, non ſit eius diameter, cui ducenda ſit diameter parallela in circulo EFG. [e] Ducatur ipſi BC, per centrum circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime oſtendimus. Quoniam igitur vtraque BC, EG, eidem AD, parallela eſt, ex conſtructione, [f], ipſæ quoq; BC, EG, inter ſe parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.

e 31. primi.
f 9. vndeci.

EADEM ratione rectæ BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, à diametro EG, diuerſa, quæ ipſi BC, æqualis ſit, ſi modo BC, maior non ſit diametro EG. Nam ſi in circulo EFG, ducatur ipſi BG, parallela HI, & æqualis, vt ad propoſ. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

LEMMA II.

SI in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abſcindant arcus ſimiles; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelę duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.



IN planis parallelis AB, CD, deſcripti ſint duo circuli, in quibus rectæ EF, GH, primum parallelæ ſint, ad eaſdem partes centrorum I, K, auferanturq; arcus ſimiles EF, GH, ac tandem iungantur ad centra rectæ EI, FI, GK, HK. Dico tam EI, GK, quam FI, HK, parallelas eſſe. Quonim enim arcus EF, GH, ſimiles ſunt, erunt anguli I, K, æquales, ex ſcholio propoſ. 22. lib. 3. [a] Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales eruut. [b] Cum ergo tam illi, quam hi, ſint inter ſe æquales; erit tam angulus E, angulo G, quam angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ EF, GH, parallelæ ſunt, & rectæ EI, GK, ad eaſdem partes plani per EF, GH, ducti efficiunt cum ipſis æquales angulos E, G; erunt ex iys, quæ in ſcholio propoſ. 16. lib. 11. demonſtrauimus, EI, GK, parallelæ; Eademque ratione FI, HK, parallelæ erunt.

a 32. prim.
b 5. primi.

DEINDE ſint DF, GH, parallelæ, non ad eaſdem partes centrorum I, K. Dico tam EI, HK, quam FI, GK, eſſe parallelas. Productis enim GK, HK, iungatur recta LM. Et quia latera GK, HK, lateribus LK, MK, ſunt æqualia, [c] anguloſq; ad verticem K, æquales continent; [d] erunt & baſes GH, LM, & anguli H, L, æquales & anguli G, M. [e] Igitur arcus GH, LM, æquales ſunt, [f] & rectæ GH, LM, inter ſe parallelæ: Ac proinde cum vtraque EF, LM, ipſi GH, ſit parallela, [g] erunt & EF, LM, parallelæ inter ſe. Quia igitur EF, LM, parallelæ ſunt abſcindentes ad eaſdem partes centrorum arcus ſimiles EF, LM; (Nam cum arcus GH, ſit arcui EF, ſimilis, erit quoq; arcus LM, qui arcui GH, æqualis eſt, eidem arcui EF, ſimilis) erunt tam EI, LK, hoc eſt, EI, HK, quam FI, MK, hoc eſt, FI, GK, parallelæ. Quod eſt propoſitum.

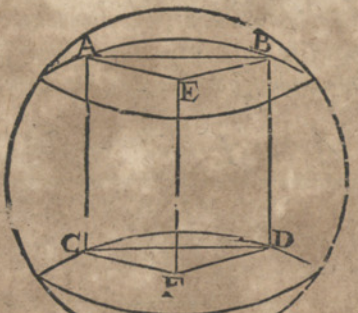
c 14. prim.
d 4. primi.
e 28. tertij.
f 27. prim.
g 9. vndec.

LEMMA III.

SI in ſphæra ſunt duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes centrorum; rectę harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, in quibus ſint duæ rectæ æquales & parallelæ AB, CD, ad eaſdem partes centrorum, quarum extrema iungantur ad eaſdem partes rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB, CD, parallelæ ſunt; [a] erunt AC, BD, in eodem cum ipſis plano. Quare cum AB, CD, ſint etiam æquales; [b] æquales quoque erunt ac parallelæ AC, BD, quod eſt primum.

a 7. vnde.
b 33. primi.



EX centris deinde E,F, ductis rectis EA,EB; FC,FD, iunctaque recta EF; erunt tam AE, CF, quam BE, DF, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. [c] *Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales.* [d] *Quoniam vero circuli AB, CD, paralleli circa eoſdem polos ſunt,* [e] *recta per eorum polos ducta tranſibit per eorundem centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta EF, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum ſphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum recta per eorum polos extenſa. Quod eſt abſurdum. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum commune EF.* [f] *Igitur EF, ad plana circulorum AB, CD, recta eſt;* [g] *Ac propterea & vtraque AC, BD, ipſi EF, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod eſt ſecundum.*

c 33. prim. d 1. 2. Theod. e 10. 1. Theod. f 10. 1. Theod. g 8. vndec.

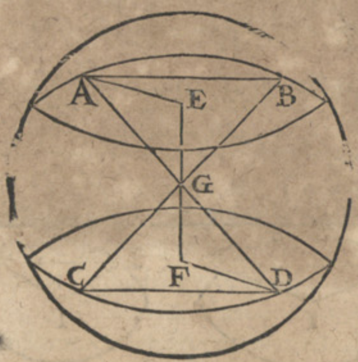
HÆC demonſtratio locum etiam habet; quando parallelæ AB, CD, ſunt circulorum diametri, ſed tunc EA, EB, FC, FD, erunt partes diametrorum, vt patet.

LEMMA IV.

SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales; Rectæ vero earundem parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

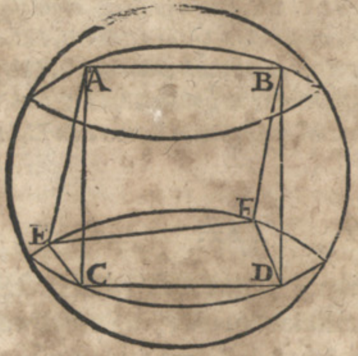
IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, & in iis duæ rectæ parallelæ & æquales AB, CD, non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad eaſdem partes iungantur rectis AD, BC. Dico rectas AD, BC, in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoq; diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales. Quoniam enim AB, CD, parallelæ ſunt; [a] *erunt AD, BC, in eodem cum ipſis plano; ac proinde ſe mutuo interſecabunt, vt in puncto H: quod dico eſſe centrum ſphæræ. Connectantur enim circulorum centra E,F, rectis EA, EG; FD, FG.* [b] *Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem æquales ſunt:* [c] *Item tam alterni anguli BAD, CDA, quam alterni ABC, DCB; æquiangula erunt triangula ABG, CDG.* [d] *Igitur erit vt AB, ad BG, ita DC, ad CG: Item vt AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cum ergo AB, CD, ponantur æquales,* [e] *erunt quoque tam BG, CG, quam AG, DG, inter ſe æquales. Rurſus quia AE, DF, ſemidiametri circulorum æqualium æquales ſunt; ſunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* [f] *ideoque anguli alterni EAD, FDA, æquales; erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, æqualia, angulosque comprehendent æquales.* [g] *Igitur & baſes EG, FG, & anguli AGE, DGF, æquales ſunt.* [h] *Et quia AD, in eodem plano eſt, in quo parallelæ AE, DF,* [i] *& EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, GF, in rectum & continuum conſtitutæ, propter æquales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum ſphæræ tranſibit, vt in præcedenti lemmate demonſtrauimus,* [k] *perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales ſint oſtenſæ, erit G, centrum ſphæræ,* [l] *propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter à centro ſphæræ abſunt; inæqualiter vero abeſſent, ſi centrum ſphæræ in recta EF, diceretur aliud punctum quam G. Quocirca AD, BC, diametri ſphæræ ſunt, & inter ſe propterea æquales. Quod eſt primum.*

a 7. vnde. b 15. primi. c 29. prim. d 4. primi. e 14. quin. f 29. primi. g 4. primi. h 7. vndec. i 2. vnde. k 10. 1. Theod. l 6. 1. Theod.



SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad eaſdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter ſe eſſe, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, eſſe rectos. Quod enim ſint parallelæ & æquales, [m] *manifeſtum eſt, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem ad AB, CD, ſint perpendiculares ita oſtendetur. In circulo CD, ad rectã CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti ſunt, erunt ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, ſemicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, ſemicirculi erunt,* [n] *& anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æquales ſunt,* [o] *ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramque EC, EA, & ad vtramque FD, FB, vt oſtendimus,* [p] *perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC. per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti:* [q] *ac propterea & CD, AB, ipſi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod eſt ſecundum.*

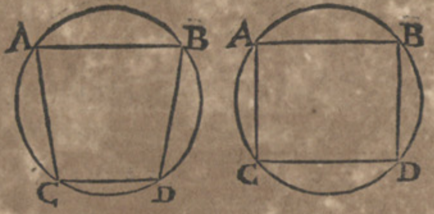
m 33. prim. n 31. tertij. o 9. vndec. p 4. vnde. q 8. vnde.



LEM-

LEMA V.

SI in ſphæra ſint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt: Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniungentes non ſolum æquales, ſed & parallelæ erunt, rectoſque cum ipſis angulos conficient.

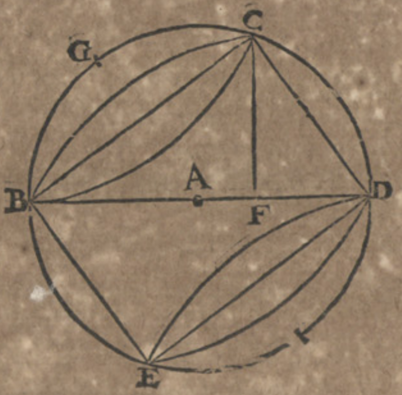


SINT in ſphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis AC, BD. Dico AC, BD, æquales eſſe. Quia enim parallelæ ſunt AB, CD;[a] erunt AC, BD, in eodem cum ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano, [b] fiat in ſphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ ſint AB, CD; erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales [c] ideoque & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod ſi parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABCD, in circulo habeat duo oppoſita latera AB, CD, parallela, & æqualia; erit ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. ABDC; parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod eſt propoſitum.

a 7. vndec.
b 1. 1. Theod.
c 29. tertij.

LEMMA VI.

IN data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita vt diameter ſphæræ ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialtera.



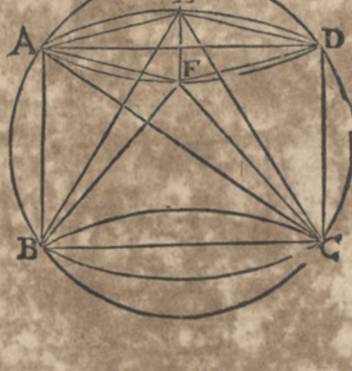
SIT ſphæræ centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. propoſ. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in F, vt BF, ipſius FD, dupla ſit, erit BD, talium partium 3. qualium 2. eſt BF; ac proinde BD, ipſius BF, ſeſquialtera eſt. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, iungantur rectæ BC, DC, ductaque DE, ipſi BC, parallela, connectatur recta BE.[a] Et quoniã tam duo anguli BCD, EDC, quam duo BED, CBE, duobus rectis æquales ſunt [b] eſtque tam BCD, quam BED, rectus; erit quoq; & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex ſcholio propoſ. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum eſt; [c] ideoq; rectæ BC, DE, æquales ſunt. Diuiſo iam arcu BC, bifariam in G, erit quoq; arcus EGD, diuiſus bifariam in G. quod ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales ſint. Polo igitur G, & interuallis GB, GE, circuli in ſuperficie ſphæræ deſcribantur tranſeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quam GE, GD; [d] qui paralleli erunt, cum eoſdem habeant polos.[e] Et quia circulus maximus BCDE, per polos ſecat circulos BC, ED, bifariam; erunt BC, ED, diametri ipſorum, quæ cum æquales ſint oſtenſæ, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum ſphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia ſeſquialteram. Quoniam enim ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continue proportionales ſunt; erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Eſt autem BD, ipſius BF, ſeſquialtera, vt oſtenſum eſt. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeo & quadrati ex DE, ſeſquialterum eſt: atque idcirco diameter ſphæræ BD, vtriuſq; diametri BC, DE, potentia ſeſquialtera eſt. Quod eſt propoſitum.

a 29. primi.
b 31. tertij.
c 34. prim.
d 2. 2. Theod.
e 15. 1. Theod.

HIS demonſtratis, hoc modo in ſphæra data deſcribemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data ſphæra Pyramidem deſcribere.

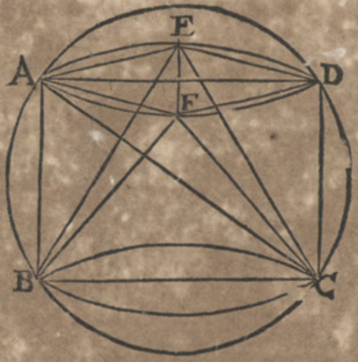


DESCRIBANTVR in data ſphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD,[a] qui eos ad angulos rectos, ac bifariam ſecabit, ac proinde cum eis communes ſectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, ſecans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, eſſe pyramidem, hoc eſt, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, eſſe æquilatera & æqualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter ſphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, deſcriptum, vt conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Itaq; quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ AC, ſeſquialterum eſt quadrati ex AD, diametro circuli; ſi ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC, [b] æquale ſit quadratis ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit. Eſt autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex DC, DF,[c] quibus cum æquale ſit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, proptereaq; quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc eſt, ipſi BC, æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoq; BCF, triangulum eſt æquilaterum.

a 15. 1. Theod.
b 47. prim.
c 47. prim.

 RVRSVS

d 47.prim.



RVRSVS quia quadratum ex AD quadrati ex DC, duplum eſt oſtenſum; eſt autem, ex ſcholio propoſ.47.lib.1. & duplum quadrati ex DE, æqualia erunt quadrata ex DC, DE: [d] *quibus cum æquale ſit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo ſunt quadrata ex CE, AD, proptereaque recta CE, rectæ AD, hoc eſt, rectis BC, EF, æqualis eſt, atque adeo & rectæ CF, quæ ipſi BC, oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam eſt, & ipſi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonſtrabimus, triangulum BEF, eſſe æquilaterum, & ipſis BCF, FCE, æquale. Ex quo ſequitur & BCE, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipſi BC, oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt EBCF, ex defin.26.lib.11. & in data ſphæra deſcripta, cum eius anguli ſolidi E,B,C,F, in ſuperficie ſphæræ conſiſtant. Quod eſt propoſitum.*

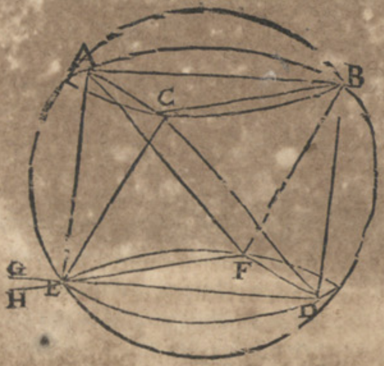
COROLLARIVM

HINC ſequitur, diametrum ſphæræ potentia eſſe ſeſquialteram lateris pyramidis in ea ſphæra deſcriptæ. Nam latus pyramidis eſt æquale diametro AD, vt oſtendimus, & ex conſtructione diameter ſphæræ potentia eſt ſeſquialtera diametri AD.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra Octaedrum deſcribere.

a 2. quart. *DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, ita vt ſphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera.* [a] *Deſcripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur per primum lemma, rectæ AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diuerſas partes centrorum; quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo DEF, deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero DEF, erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex ſchol. propoſ.16.lib.11. Cum enim parallelæ ſint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelæ ſint AB, GE, & BC, EH, ad eaſdem partes plani per AB, GE, ducti; erunt quoque BC, HE, hoc eſt, BC, EF, parallelæ, ex illo ſcholio propoſ.16.lib.11. Eadem ratione parallela erit DF, ipſi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, vt in figura. Dico AD, Octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, rectæ AB, DE, æquales ſunt & parallelæ ad diuerſas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ AD, BE, (quas tamen confuſionis vitandæ gratia non duximus) diametri ſphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares, ad ipſas AB,*



b 47.prim. *DE.* [b] *Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Poſito autem quadrato ex diametro ſphæræ BE, 6. quadratum ex DE, eſt 3. (Nam cum per conſtructionem diameter ſphæræ potentia ſit ſeſquialtera diametri circuli DEF, poſito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At poſito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, eſt 3. quod ex coroll.1. propoſ.12.lib. 13. diameter circuli potentia ſit ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex BD, eſt 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia ſunt, & rectæ ipſæ DE, BD, æquales. Eſt autem DE, ipſi AB, per conſtructionem, & BD, ipſi AE, per 4. lemma æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, conſtituentque quadratum ABDE, cum anguli ad A,B,D,E, recti ſint ex eodem 4. lemmate.*

RVRSVS quia BC, EF, parallelæ ſunt & æquales ad diuerſas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ BE, CF, non ad eaſdem partes, diametri ſphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ BF, CE, æquales inter ſe, atque ad BC, EF, perpendiculares, eritque rurſus, vt prius, quadratum BCEF. Non aliter oſtendemus, ACDF, quadratum eſſe; cum iunctæ rectæ AD, CF. ſint quoq; ſphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, BE, CF, conſtructa ſint ſuper latera æqualia AB, BC, CA, nimirum ſuper latera trianguli æquilateri, cum AB, latus ſit quadrati AD; & BC, quadrati BE; & CA, quadrati CF; erunt omnia triangula octo ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter ſe æqualia. Octaedrum ergo eſt AD, ex defi. 27.lib.11. & in data ſphæra deſcriptum, cum eius anguli ſolidi A,B,D, E,C, F, ſphæræ ſuperficiem attingant. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris Octaedri in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex BE, diametro ſphæræ duplum eſſe quadrati ex DE, latere Octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

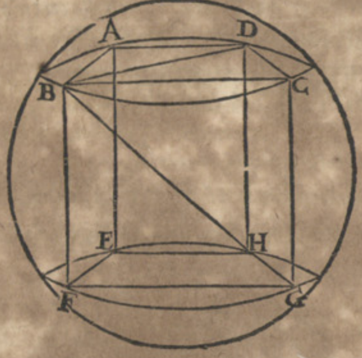
IN data ſphera cubum deſcribere.

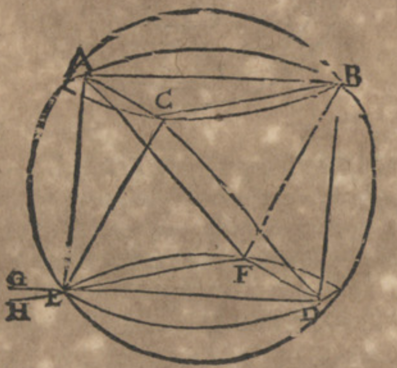
DESCRI-

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales ac paralleli ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ. [a] *Deſcripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD, ducatur per 1. lemma rectæ AD in circulo EFGH, parallela EH, & æqualis ex eadem parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo EFGH, deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato EFGH, erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum AD, EH, æqualitatem: parallela vero, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Nam quia parallelæ ſunt AD, EH, ſuntque anguli æquales ADC, EHG, nimirum recti; erunt quoque DC, HG, parallelæ, cum ſint ad eaſdem partes plani per AD, EH, ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ AE, BF, CG, DH, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter ſe parallelæ. Dico AG, eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, eſſe quadrata, & æqualia. Ductis n. rectis BH, BD, erit ex lemmate 4. BH, diameter ſphæræ; at BD, diameter circuli ABCD, quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniã igitur per conſtructionem, quadratũ ex BH, ſeſquialterũ eſt quadrati ex BD; quadratum autẽ ex BD, quadrati ex BC, duplum ex ſchol. propoſ. 47. lib. 1. ſi ſtatuatur quadratum ex BH, 3. erit quadratum ex BD, 2. & quadratum ex DC, 1. atque adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC, triplum erit. Rurſus quia quadratũ ex BH, eſt 3. & quadratũ ex BD, 2.* [b] *eſtque quadratum ex BH, æquale quadratis ex BD, DH, quod angulus BDH, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit, erit quadratum ex DH, 1. Quadratum igitur ex BH, triplum eſt quadrati ex DH. Fuit autem idem quadratum ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo ſunt quadrata ex DC, DH, ac proinde rectæ DC, DH, æquales. Cum ergo oppoſitis lateribus GH, CG, æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata oſtendentur: Sed & AC, EC, quadrata ſunt ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur eſt AG, ex defin. 25. lib. 11. & in data ſphæra deſcriptus, cum eius anguli ſolidi A, B, C, D, E, F, G, H, ſuperficiem ſphæræ contingant. Quod eſt propoſitum.*

a 6. quarti.

b 47. prim.





COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ BH, triplum eſſe quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque eſt, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ æqualis eſt circulo ABC, figuræ antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.

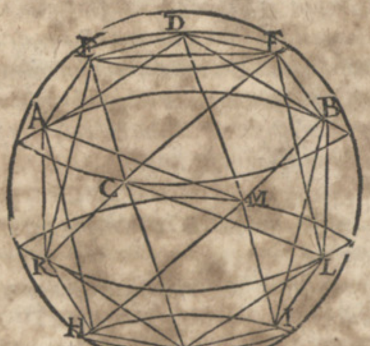
REPERIATVR [a] *recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti: Fiatque ex corollario propoſ. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdam lineæ, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametrum, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Deſcripto maximo circulo in ſphæra data,* [b] *accommodetur in eo recta, quæ inuentæ ſemidiametri ſit dupla, cum hæc recta minor ſit diametro ſphæræ, ſiue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam ſi per eam rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum,* [c] *faciet id circulum ABC, in ſphæra cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inuentæ. Deinde* [d] *inueniatur rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat datæ ſphæræ diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiatque vt 3. ad 1. ita per coroll. propoſit. 6. lib. 10. quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo ABC, parallelus; quod fiet, ſi in eodẽ illo circulo maximo accõmodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad prop. 1. lib. 4. demonſtrauimus, & per eã rectã planum extẽdatur priori circulo parallelum, hoc*

a 12. ſexti.

b 1. quinti.

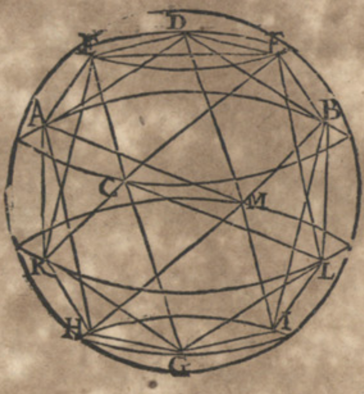
c 1. 1. Theod.

d 12. ſexti.



lum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectum, ex ſcholiò propoſ. 18. lib. 11. Nam per idem ſcholium, planum hoc erit circulo ABC, parallelum,[c] facietq; in ſphæra circulum DEF, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ æqualis eſt. His duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alij duo æquales ac paralleli deſcribantur GHI, KLM, quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. [f] Deſcripto autem in circulo DEF, triangulo æquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis ſit vni lateri trianguli æquilateri in circulo ABC, deſcripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis. Ac deniq; huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipſi EF, hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, deſcripti. Cōpletis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipſi DF; at BC, MK, GI, ipſi DE, quod probabitur ex ſcholio prop. 16. lib. 11. vt in problemate ſecundo oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, ad diuerſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea tringula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confuſionem pareret, ſed tantum laterum extrema puncta notauimus. Poſtremò ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorū ad viciniora quinq; puncta ducantur quinq; lineæ rectæ, videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF; ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico DG, eſſe Icoſaedrum, hoc eſt, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod vt demonſtretur, oſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit prop. 16. lib. 13.) ſuos 12. angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulos in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notauimus.

Marginal notes: e 1. 1. Theod. — f 2. quart.



SIT igitur in ſphæra deſcriptum Icoſaedrum DG, duodecim angulos ſtatuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinq; rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales ſunt, cum ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium; ſi ex polo D, per E, in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta A, M, B, F, ac propterea pentagonum E, A, M, B, F, in vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eius latera ſint æqualia, vtpote latera Icoſaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex ijs, quæ ad finem lib. 4. demonſtrata ſunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum & æquiangulum erit A K C F D, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinque latera Icoſaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: & GIMAK, ob latera quinq; Icoſaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IE, IM, IH, IG. Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinq; rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinq; æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinque latera Icoſaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEK, ob quinque Icoſaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK, ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaq; inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam vero recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus; erit iuncta recta AB, ipſi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipſi DF, parallela in pentagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipſi DE, in pentagono DECLB.[g] Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela ſunt,[h] faciuntque circulos parallelos in ſphæra DEF; ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipſi HI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipſi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipſi GH, in pentagono LBMHG: Ac propterea circuli in ſphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipſi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipſi EF, in pentagono GLFEK.[i] Igitur EF, HI, cum ſint eidem iunctæ AB, vel KL, parallelæ inter ſe parallelæ ſunt. Eademque ratione DE, GI, cum ſint eidem iunctæ BC, vel KM, parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; propter eaque plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in ſphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter ſe ſunt: & tam circuli DEF, GHI, inter ſe æquales, ob triangula æquilatera in illis deſcripta æqualia, quam circuli ABC, KLM, inter ſe etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipſis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, conſtituuntur: quippe cum latera hæc ſint rectæ ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium.

Marginal notes: g 15. vnde. — h 1. 1. Theod. — i 9. vndec.

QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad eaſdem partes extrema k, B, parallelarum kL, AB, in parallelis circulis, non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphæræ diameter eſt, & angulus BAk, rectus ex 4. lemmate, quod kA, connectat ad eaſdem partes extrema k, A, earundem parallelarum;[k] erit quadratum diametri kB, æquale duobus quadratis ex AB, Ak. Rurſus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, ſubtendit: Vt autem recta angulum pentagoni ſubtendens ad latus pentagoni, ita eſt hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, ex ſcholio propoſitionis 2. lib. 14. erit AB, iuncta ad EF, vel Ak, ipſi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco[l] cum latus pentagoni poßit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum: erit diameter ſphæræ kB, (quæ ambas AB, Ak, poteſt vt oſtendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus eſt hexagoni, & Ak, vel EF, latus decagoni. Quare ſphæræ diameter kB, ad iunctam AB, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad EF, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni:[m] Ac proinde cum tam AB, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum ſit ſemidiametri ſui circuli; erunt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, kLM, qui illis æquales ſunt, illi, quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiametri initio inuentæ, minorem eſſe diametro ſphæræ, vt ſupra diximus.

Marginal notes: k 47. prim. — l 10. tertijd. — m 12. tertijdecim.

HIS demonſtratis facili negotio concludemus, ſolidam figuram à nobis deſcriptam DG, eſſe Icoſaedrum, cum Icoſaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis triangulum DEF, omnes eius anguli ſolidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Icoſaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, ſphæræ diametrum ad latus Icoſaedri in ea deſcripti habere proportionem, quam latus

latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum; adeo vt ſi diameter ſphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icoſaedri ſit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam deſcripto Icoſaedro D-G, in ſphæra, oſtenſum eſt eſſe diametrum ſphæræ KB, ad EF, latus Icoſaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icoſaedri maius eſſe ſemidiametro ſphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius eſt ſemiſſe lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Iſoſceles *n 20. prim.* conſtituant: [n] ac propterea duo latera decagoni maiora ſint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni:

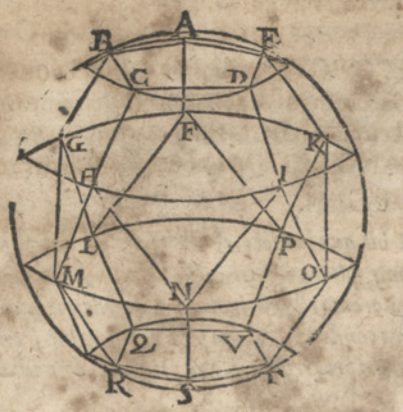
COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonſtratis, diametrum ſphæræ eſſe potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, deſcripti. Quoniã enim eſt, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, deſcriptorum, ita diameter ſphæræ KB, ad iunctam AB, ex conſtructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum ſphæræ, ita latus hexagoni ad iunctum AB. [o] Eſt autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc eſt, ſe- *o 12. tertijdecim.* midiameter) potentia ſubtriplum rectæ iunctæ AB, quod AB, ſit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia ſubtriplum eſt diametri ſphæræ, hoc eſt, diameter ſphæræ potentia tripla eſt lateris pentagoni in circulo ABC, deſcripti.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data ſphæra Dodecaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR in data ſphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propoſ. ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ita vt ſemidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, ſint potentia ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; ſemidiametri vero circulorum FGHIK, LMNOP, potentia ſint ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ſphæræ ſic ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Deſcripto autem in circulo ABCDE, pentagono ABCDE, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri CD, ad eaſdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & æqualis lateri pentagoni eiuſdem circuli, ex 1. lemmate: Rectæ autem HI, ad diuerſas partes centrorum agatur eodem modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic tandem LP, ad eaſdem centrorum partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autẽ pentagonis in hiſce tribus circulis, (quorũ tamen latera, vt confuſionẽ vitaremus, nonduximus, ſed eorũ tantũ extrema puncta notauimus.) erunt ſingula latera eorũ ſingulis laterib. pentagoni ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallelæ ductæ ſunt: quod demonſtrabitur, vt in probl. 2. oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erũt ipſi BC, &c. Poſtremo ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico AS, Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera eſſe æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrandum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſ. 17. lib. 13.) ſuos 20. angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atq; in eo ſitu, quo eadem 20. puncta notauimus.



SIT ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos ſtatuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio prop. 8. lib. 13. demonſtrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & Ik, lateri DE, in pentagono DEkOI; & kF, ipſi AE, in pentagono AEkPF; & FG, ipſi AB, in pentagono ABGLF; & ſic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FK, parallelæ ſunt; [c] erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per *c 15. vnde.* *AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quod hæ rectæ rectis AB, BC, ſint parallelæ. Igitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta inter ſe parallelæ ſunt, cum eidem plano pentagoni ABCDE, ſint parallela; atque adeo, ex eodem ſcholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter oſtendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E; & per puncta F, G, H, I, K, ducta in ſphæra [d] efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodem-* *d 1. 1. Theod.* *que modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, eruntque tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter ſe æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL, [e] quæ omnes æquales ſunt, cum ſubtendant angulos æquales* *e 4. primi.* *in pentagonis æqualibus.*

DEINDE quia ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ ſunt in pentagonis CHNID, BGMHC; [f] erunt quoque ipſæ iunctæ ND, MB parallelæ: Sunt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqua- *f 9. vndec.* *libus ſubtendant. [g] Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ* *g 33. prim.* *NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quod vtraque lateri DI, ſit parallela. [h] Circulus igitur LMN-* *h 15. vnde.* *OP, circulo ABCDE, parallelus eſt, cum ille ducatur per rectas NM, NO, hic vero per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ ſunt oſtenſæ. Non ſecus oſtendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli ſunt.*

RVRSVS quoniam iunctæ rectæ EF, OV, cum ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, æ-
a 9. vnd. *quidiſtent,* [a] *parallelæ ſunt; nec non & inter ſe æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus ſubtendant,* [b] *erunt*
b 33. primi. *& rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano eſt,* [c] *cum EF, OV, in eodem ſint*
c 7. vnde. *plano cum parallelis EO, FV. Eſt autem & in circulo,* [d] *propterea quod planum, in quo exiſtit, in ſphæra circulum efficit.*
d 1. 1. Theod. *Igitur ex iis, quæ ad propoſ. 31. lib. 3. demonſtrauimus, cum in eo quadrilatero oppoſita latera æqualia ſint, quadrilaterum rectangulum eſt EFVO; ac proinde cum omnia latera æqualia ſint, ſubtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum poteſt lateris FE, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. hoc eſt, rectæ iunctæ FG, quod æquales ſint FG, FE, ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoq; qualium partium 1. ſtatuetur quadratum*
e 47. pri. *rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata ſimul earundem partium 3. Quibus* [e] *cum æquale ſit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter ſphæræ eſt; (Nam cum æquales ſint iunctæ FG, ON, ſubtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallelæ, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ ſint, ex ſcholio propoſ. 8. libr. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter ſphæræ.) erit quoque quadratum diametri ſphæræ 3. qualium 1. eſt*
f 12. tertijd. *quadratum rectæ FG, hoc eſt, quadratum diametri ſphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit.* [f] *Eſt autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ſphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum late-*

Diam. ſphæræ	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

g 22. ſexti. *ris trianguli ad quadratum lateris hexagoni;* [g] *atq; adeo vt diameter ſphæræ ad rectam FG, ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni eiuſdem circuli ad latus trianguli, quod FG, ſit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appoſita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoq; vt diameter ſphæræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.*

PRÆTEREA quia ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, vt iuncta recta FG, ſubtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus triãguli in circulo FGHIK, ad lat. trianguli in circulo BCDE; erit quoq; vt lat. triãguli in circulo FGHIK, ad lat. trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad lat. decagoni in eodem circulo cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, vt proxime demonſtratum eſt.

Diam. ſphæræ.	Lat. pentago.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexago.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

Igitur ex æquo erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoq;, vt diameter ſphæræ ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus DFF, GHI, figuræ antecedentis propoſ. vtrique circulo ABCDE, QRSTV, huius figuræ æqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.

QVIBVS demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram AS, à nobis deſcriptam eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum ABCDE, omnes eius anguli ſolidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus DEF, figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo ABCDE, figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoq; eſt lib. 14. propoſ. 5.

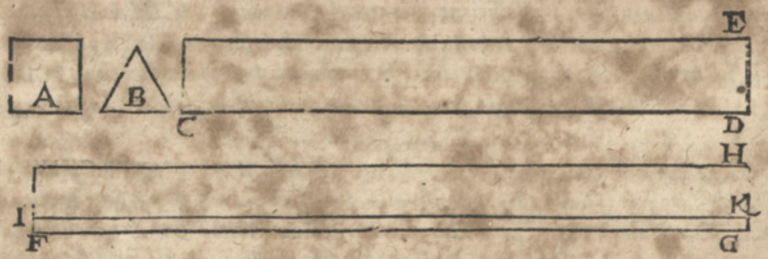
MANIFESTVM quoq; eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri & angulos ſolidos Dodecaedri.

SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facile etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademq; ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum deniq; Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cum poſt Tetraedrum ſtatim octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper à minoribus ad maiora progreſſus [illegible]. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

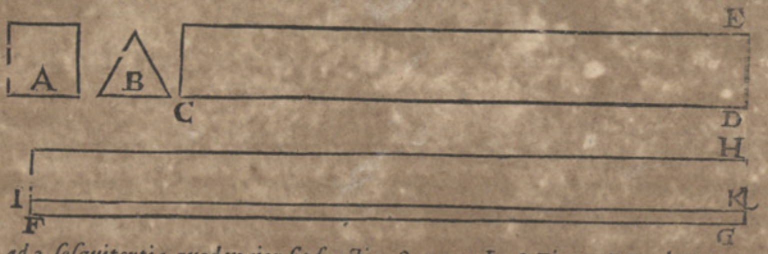
SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quam octo quadrata ſimul.



HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum CE, cuius vnum latus CD, octuplum ſit lateris quadrati A, & latus DE, lateri eiuſdẽ quadrati æquale: Eritq; rectangulum CE, octuplum quadrati A, [h]
h 1. ſexti. *cum ſit, vt CD, ad latus quadrati A, ita rectangulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cuius vnum latus FG, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſim demiſſæ,*

hoc

hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi GH, hoc eſt, altitudini trianguli B, [a] *vigecuplum eſt trianguli B; Ei autem triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum FH, quippe cum baſis FG, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum FH, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum FH, maius eſſe rectangulo CE.* [b] *Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus DE, potentia ſeſquitertium eſt eius perpendicularis, hoc eſt, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quod FG, ſit 10. & CD, 8. hoc eſt, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſupernoncupartiens ſextaſdecimas, quam 4. ad 3. ſeſquitertia, quod maior ſit fractio $\frac{9}{16}$. quam $\frac{1}{3}$.* [c] *Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK, eritque maior quoque proportio DE, ad HK, quam ad GH;* [d] *ac proinde maior erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipſi FG, parallela, erit vt IK, ipſi FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK.* [e] *Igitur erit IH, rectangulum rectangulo CE, æquale: ideoque EH, maius, quam CE. Quod eſt propoſitum.*



a 1. ſexti.
b 12. quartidec.
c 12. ſe
d 10. qui
e 14.
16. ſexti.

II.

OCTO quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

[f] *QVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæræ deſcripta ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt: Duo vero eadem quadrata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæræ deſcriptis, quod quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæræ æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ. Quod eſt propoſitum.*

f 20. quartidec.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit perpendicularis è centro ſphæræ ad vnam baſim Icoſaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri, & cubi ducta.

NAM [g] *quia latus octaedri maius eſt latere Icoſaedri in eadem ſphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoq; vno triangulo Icoſaedri. Quare ſi vtrumq; ſolidum ita intra ſphæram conſtituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius ſit parallelum, longius à centro aberit Icoſaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis ſuperficiem ſphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis è centro ſphæræ ad baſim Icoſaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad baſim Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis ſit perpendiculari cubi;* [h] *quod baſis cubi, & baſis octaedri eodem circulo circumſcribantur, ideoque æqualiter à centro diſtent; erit quoque perpendicularis Icoſaedri perpendiculari cubi maior. Quod eſt propoſitum.*

g 18 tertijd.
h 21. quartidec.

IV.

SI Cubus & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior eſt.

QVONIAM viginti triangula æquilatera ſuper ſemidiametro ſphæræ maiora ſunt octo quadratis ex eadem ſphæræ ſemidiametro deſcriptis, vt theoremate 1. demonſtrauimus: Sunt autem viginti triangula Icoſaedri maiora viginti triangulis æquilateris ſuper ſemidiametro ſphæræ conſtructis, quod latus Icoſaedri ſemidiametro ſphæræ maius ſit ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris. Igitur & viginti triangula Icoſaedri multo maiora ſunt octo quadratis ex ſphæræ ſemidiametro deſcriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icoſaedri totam ſuperficiem Icoſaedri conficiant, ac octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, ſuperficiei cubi æqualia ſint, ex theoremate 2. paulo ante demonſtrato; erit quoq; Icoſaedri ſuperficies maior ſuperficie cubi. Quod eſt propoſitum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATVM QVINQVE CORPORVM Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.

HIS præmiſſis, demonſtremus iam, Dodecaedrum maius eſſe Icoſaedro: Icoſaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro, quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icoſaedro maius eſt.

QVONIAM eſt, [i] *vt cubi latus ad latus Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad Icoſaedrum:* [k] *eſt autem latus cubi latere Icoſaedri maius, maius quoq; erit Dodecaedrum Icoſaedro. Quod eſt propoſitum.*

i 11. quartidec.
k 18 tertijd.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius eſt.

QVONIAM perpendicularis ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadens, maior eſt perpendiculari ex eodem centro in vnam baſim cubi demiſſa, vt in 3. theoremate præmiſſo oſtenſum eſt: Item ex 4. theoremate, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior quoq; eſt; erit ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Icoſaedri contentum maius ſolido, quod ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim cubi cadente, & tertia parte ſuperficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in ſcholio propoſ. 20. lib. 14. demonſtrauimus, illud ſolidum Icoſaedrum ſit æquale, & hoc cubo; maius quoq; erit Icoſaedrum, quam cubus. Quod eſt propoſitum.

III.

CVBVS Octaedro maius eſt.

a 27. quartidec. b 18 tertijd. *QVONIAM eſt,[a] vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius. (Nam [b] cum latus cubi maius ſit latere Icoſaedri; & latus Icoſaedri, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris, maius ſemidiametro ſphæræ; erit latus cubi multo maius ſemidiametro ſphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod eſt propoſitum.*

IV.

OCTAEDRVM Tetraedro maius eſt.

a 14. quartidec. *QVONIAM baſis Octaedri minor eſt baſe Tetraedri, [a] quod baſis Tetraedri ad baſem Octaedri proportionem habeat ſeſquitertiam; erit perpendicularis ex centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri demiſſa, maior perpendiculari ex eodem ſphæræ centro ad vnam baſim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam ſupra theoremate 3. oſtendimus, perpendicularem in Icoſaedro maiorem eſſe perpendiculari in Octaedro, & cubo. Eſt autem & ſuperficies Octaedri ſuperficie Tetraedri maior,[b] cum illa huius ſit ſeſquialtera. Igitur ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Octaedri* b 14. quardecim. *cadente, & tertia parte ſuperficiei Octaedri, maius eſt ſolido contento ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim Tetraedri deducta, & tertia parte ſuperficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 14. illud ſolidum Octaedro ſit æquale, hoc vero Tetraedro; erit quoq; Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. Quoniam eſt,[c] vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus c 22. quardecim. *Tetraedri ad eius tertiam partem, ita eſt triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id eſt, ad ipſum Tetraedrum. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius ſit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam [d] quia quadratum lateris Tetraedri ſeſquitertium eſt quadrati* d 18 tertijd. *lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem ſeſquitertia, ideoq; multo minorem tripla;* e 10. quint. *[e] ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoq; Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.*

ALITER.[f] Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetra- f 17. quartidec. *edri, & ſub linea contente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri ſphæræ; Eſt autem rectangulum illud minus quadrato diametri ſphæræ, quod eius latera minora ſint ſphæræ diametro; quippe quæ ſingula minora ſint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc eſt, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod eſt propoſitum.*

ALITER.[g] Quoniam cubus triplus eſt Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri. (Nam [h] cubus ad octaedrum eſt, g 32. quartidec. *vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ; & latus cubi minus eſt, quam triplum ſemidiametri ſphæræ, quod & tota diameter,* h 27. quartidec. *quæ cubi latere maior eſt, minorem proportionem habeat ad ſemidiametrum, quam triplam.) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod eſt propoſitum.*

EODEM prorſus ordine ſe mutuo ſuperant conuexæ ſuperficies eorundem corporum Regularium: hoc eſt, ſuperficies conuexa Dodecaedri maior eſt ſuperficie conuexa Icoſaedri. Superficies conuexa Icoſaedri maior ſuperficie conuexa cubi: Cõuexa ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior: Octaedri deniq; ſuperficies conuexa maior eſt conuexa ſuperficie Tetraedri.

QVONIAM enim[i] eſt ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri: Eſt autem cubi i 9. quartidecim. *latus Icoſaedri maius,[k] vt ſupra demonſtratum eſt: Erit & ſuperficies Dodecaedri ſuperficie Icoſaedri maior.*

k 18. tertijdec. *SVPERFICIEM vero Icoſaedri maiorem eſſe ſuperficie Cubi, demonſtratum eſt paulo ante theoremate quarto ante comparationem ſoliditatum quinq; corporum Regularium.*

l 27. quartidecim. *DEINDE [l] quoniam eſt ſuperficies cubi ad octaedri ſuperficiem, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo oſtendimus, cubum Octaedro maiorem eſſe, demonſtratum* m 14. quartidecim. *eſt; Erit quoq; ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior.*

DENIQVE [m] quia ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri; perſpicuum eſt, Octaedri ſuperficiem maiorem eſſe Tetraedri ſuperficie.

n 18 tertijd. *VIDES igitur ſuperficies & ſoliditates corporum Regularium contrario ordine reſpondere eorundem lateribus; ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam ſuperficiem, at eo minus latus. Nam [n] vt ſupra demonſtratum eſt, Tetraedri latus eſt omnium maximum, eius vero ſuperficies atq; ſoliditas, vt hic demonſtrauimus, omnium minima eſt: Item Dodecaedri latus omnium eſt minimum, eius vero conuexa ſuperficies & ſoliditas omnium maxima. Deniq; quemadmo-* o 18. tertijdec. *dum, ſi Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icoſaedrum, & Dodecaedrum in eadem ſphæra deſcripta ſint, latera eorum, eo ordine, quo propoſita ſunt, atq; ab Euclide deſcripta, ſe mutuo ſuperant, [o] vt ſupra oſtenſum eſt, ita contrario ordine earundem ſuperficies conuexæ, atq; ſoliditates ſe mutuo ſuperant, vt hoc loco demonſtrauimus.*

CÆTERVM prætereundum non eſt hoc loco id, quod à Pappo demonſtratum eſt lib. 4. Mathematicarum collectionum; ſoliditates videlicet quinq; corporum Regularium, ſi Iſoperimetra ſint, atq; idcirco, non in eadem ſphæra conſtructa, longe aliter ſe habere, quam à nobis demonſtratum eſt. Nam corpus, quod plures habet baſes, maius ſemper eſt corpore pauciorum baſium: Ita vt Icoſaedrum ſuperet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius ſit Octaedro, Octaedrum ſuperet Cubum, Cubus deniq; Tetraedro maius ſit.

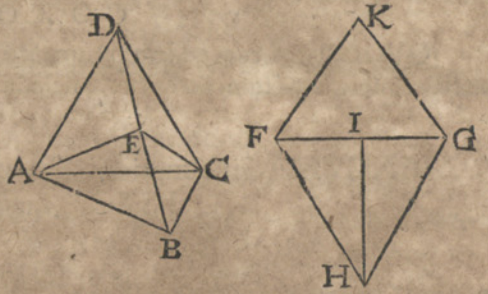
INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS DVArum baſium cuiuſcunque ſolidi regularis, vnius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT pyramis ABCD, cuius latere BD, bifariam ſecto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppoſitis rectæ ducantur AE, & CE; quæ cum perpendiculares ſint ad BD, communem ſectio- a 8. primi. nem planorum ABD, CBD, in quibus exiſtunt. (*a* Sunt enim in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, baſium ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. libr. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur FGH: triangulum æquilaterum ſuper rectam FG, lateri pyramidis æqualem conſtructum, atq; idcirco triangu-

triangulo cuicunq; pyramidis propoſitæ,ipſi nimirum ABD,ęquale,in quo ducta HI,perpendiculari ad FG, conſtituatur ſuper FG,triangulum FGK,habens vtrumq; latus FK, GK, æquale perpendiculari HI,hoc eſt,vtriq; perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, ſint æquales in triangulis ęqualibus. Dico angulum FKG, ęqualem eſſe angulo inclinationis AEC, baſium ABD,CBD.Cum enim latera KF,KG,ęqualia ſint lateribus EA, EC; & baſis FG, baſi AC; *a* Æquales erunt anguli FKG,AEC. Dico inſuper angulum inclinationis ACE,acutum eſſe. *b* Cum enim latus AD, vel illi æquale AC,ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE,CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC,talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE,CE,acutus erit angulus AEC,vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.



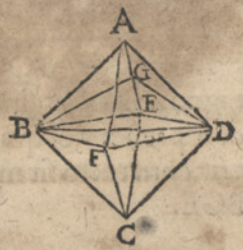
a 8. primi.
b 12. quartidecim.

COROLLARIVM.

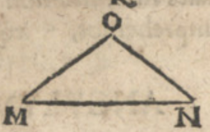
FACILE hinc colligemus,omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe.Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque à lateribus pyramidis , quale fuit AC; omnes erunt inter ſe æquales, quod & omnes illæ perpendiculares,quæ ipſos continent,æquales ſint,nec non & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia ſint æqualia.

II. ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium,vnius ad alteram,reperire.

EXHIBEATVR octaedrum ABCDEF,cuius diameter BD. Ex angulis B,& D,ad latus AE,triangulis ABE,ADE,commune,bifariamq; ſectum in G,rectę ducantur BG,DG,quę cum perpendiculares ſint ad AE,communem ſectionem planorum ABE,ADE,in quibus exiſtunt, *c* (quod in triangulis BGA,BGE,anguli ad G,æquales ſint,&c.) continebunt angulum BGD,inclinationis baſium ABE,ADE,per defin.6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum,ideoq; triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE,æquale,in quo ducta KL,perpendiculari ad HI,conſtituatur ſuper recta MN,quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro quadrati ABCD,ex AB,latere octaedri deſcripti,triangulum OMN,habens vtrumque latus MO,NO,perpendiculari KL,æquale,hoc eſt, vtriq; perpendiculari BG,DG,cum perpendiculares KL,BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON, æqualem eſſe angulo inclinationis BGD,baſium ABE,ADE. Cum enim latera OM, ON, æqualia ſint lateribus GB, GD; & baſis MN, baſi BD; *d* Æquales erunt anguli MON, BGD.Dico præterea,angulum inclinationis BGD,eſſe obtuſum. *e* Cum enim diameter octaedri BD,dupla ſit potentia lateris AB: *f* latus vero AB, potentia ſeſquitertium rectæ BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD,talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemq; 3. quadratum rectæ *BG*;ideoq; ambo ſimul quadrata rectarum *BG*,*DG*,talium partium 6. erunt.Quare quadratum lateris *BD*,in triangulo *GBD*, maius eſt quadratis ſimul laterum *GB*, *GD*; Ac propterea angulus *BGD*, obtuſus erit,vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 2. oſtendimus.







c 6. primi.
d 8. prim.
e 14. tertijdecim.
f 12. quartidec.

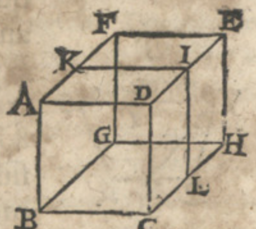
COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes baſium octaedri æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG,DG, ſubtendanturque ab octaedri diametris, cuiuſmodi eſt BD; *g* omnes inter ſe æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares,quæ ipſos continent,æquales ſint, necnon & diametri octaedri eoſdem ſubtendentes ſint æquales.

g 8. primi.

III. ANGVLVM inclinationis duarum cubi baſium, vnius ad alteram,inuenire.

SIT cubus *ABCDEFGH*,in quo ſecetur latus *DE*, bifariam in I,necnon & latera illi oppoſita in quadratis AE, EC,commune latus illud *DE*, habentibus,in punctis K,L.*D*einde rectę ducantur IK,IL; *h* quę cum æquales, ac parallelæ ſint lateribus EF,EH,(quod & KF, IE, inter ſe necnon & IE, LH, inter ſe ęquales exiſtant, & parallelę) ideoque *i* angulos rectos ad latus D E, efficiant. continebunt KIL, angulum inclinationis baſium AE, EC, ex definit. 6. lib. 11. Quoniam vero rectę IK,IL,parallelę exiſtentes rectis EF,EH,& non in eodem cum illis plano, *k* angulum KIL, ęqualem



h 33. prim.
i 29. prim.
k 10. vndec.

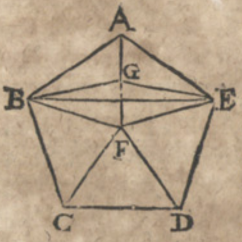
qualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis baſium cubi. Quare vt angulo inclinationis baſium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, conſtituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonſtrauimus, æqualis erit angulo inclinationis baſiũ cubi.

COROLLARIVM. I.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum: perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alteram, inuenire.







ESTO pyramis ABCDEF, vna ex 12. pyramidibus Icoſaedri, cuius baſis pentagonum ABCDE, ex quinque Icoſaedri lateribus compoſitum, vertex autem F. Diuiſo itaq; latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppoſitis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonſtratis in probl. 2. huius ſcholii, perpendiculares ſint ad AF, communem ſectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent BGE, angulum inclinationis baſium ABF, AEF, per 6. def. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterum HIK, ſuper rectam HI, lateri Icoſaedri æqualem fabricatum, hoc eſt, cuiuis triangulo Icoſaedri, ipſi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, conſtruatur ſuper recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, ſubtendenti ſit æqualis, triangulum OMN, habens vtramque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc eſt, vtriq; perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus ſint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis baſiũ ABF, AEF, æqualem eſſe. Cum enim latera OM,
a 8. primi. ON, æqualia ſint lateribus GB, GE, & baſis MN, baſi BE; *a* Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, eſſe obtuſum. Cum enim BG, angulum re-
b 19. primi. ctum faciat AGB; *b* erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemq; modum AE, maius erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoq; erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, poſitæ ſint æquales. Si itaque recta BE, ſuper rectam ſibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita vt rectæ AB, AE. rectas OM, ON, prorſus includant.
c 21. primi. *c* Angulus ergo O, maior erit angulo BAE; At hic obtuſus eſt (cum enim quinq; anguli pentagoni ſex rectis ſint æquales, per ea, quæ à nobis ſunt demonſtrata in ſcholio propoſ. 32. libr. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac inſuper vnius recti partem quintam. Obtuſus ergo erit, cum recto ſit maior.) Multo igitur magis obtuſus erit angulus MON, hoc eſt, ſibi æqualis BGE.

COROLLARIVM.

NON obſcure quoque ex his conſequitur, omnes baſium Icoſaedri inclinationes inter ſe æquales eſſe. Nam cum ſinguli anguli inclinationũ contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG, EG, ſubtendanturque à rectis angulos pentagonorum ſubtendentibus, cu-
d 8. primi. iuſmodi eſt BE: [d] omnes inter ſe erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos ſubtendunt æquales æqualibus rectis
e 4. primi. comprehenſos, [e] æquales erunt.

V.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

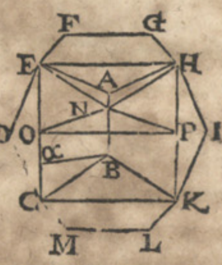




CVM per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. libr. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia, duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum idem latus commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His porro pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cum rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. ſuper rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulũ QRSTV, hoc eſt, cuius pentagono Dodecaedri, nimi-
f 4. prim. rum ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta ſubtendatur VS, *f* æqualis exiſtens rectæ EC,

cum

cum & latera TV,TS,lateribus DC,DE,æqualia ſint,anguloſque contineant æquales. Diuiſa
deinde recta QR, bifariam in X,ducatur à puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea-
que perpendicularis ad VS,cum VS,ſit parallela ipſi QR, ex ſchol. prop. 8. lib.13. Ac poſtremo
ſuper recta VS,triangulum fabricetur VZS,habens vtrumq; latus ZV,ZS,perpendiculari XY,
æquale. Dico angulum VZS,æqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Du-



ctis enim rectis NE,NH,VX; cum latera EA,AN,æqualia ſint lateribus H-
A,AN: Item lateribus VQ,QX, anguloſque comprehendant æquales; *a* a 4. primi.
Æquales erunt & baſes NE,NH,VX,& anguli ANE,ANH,QXV;ideoq;
& reſidui ex rectis,anguli videlicet ENO,HNP,VXY,æquales erũt. Quo-
niam igitur anguli ENO,EON, trianguli ENO,æquales ſunt angulis HN-
P,HPN,trianguli HNP; necnon & angulis VXY,VYX,trianguli VXY;
(ſunt enim EON,HPN,VYX,oſtenſi recti.) Et latus NE,lateribus NH,V-
X,æquale demonſtratum; *b* Æqualia erunt reliqua latera NO,OE,reli- b 26. prim.
quis lateribus NP,PH; Item lateribus XY,YV. Quare rectæ ZV,ZS,æqua-



les exiſtentes ipſi XY,rectis NO,NP,æquales erunt. Iam vero, quia OE,P-
H,æquales ſunt,ac parallelæ; *c* erit quoque recta coniuncta OP, æqualis c 33. prim.
& parallela ipſi EH,ideoque æqualis ipſi EC, hoc eſt,rectæ VS. Quam ob
rem,cum latera ZV,ZS,lateribus NO,NP,æqualia ſint; baſis item VS, baſi
OP; *d* æqualis erit angulus VZS,angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ON- d 8. primi.
P,inclinationis,eſſe obtuſum. Nam ducta recta Bα, ipſi NO,parallela; cum ſit quoque NB,ipſi
Oα, parallela, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Parallelogrammum erit NOαB, *e* ideoq; recta e 34. prim.
Bα, ipſi NO,æqualis. Quia vero BC,latus pentagoni oppoſitum angulo CαB, qui rectus eſt,
(*f* æqualis nimirum interno CON,) maius eſt latere Bα, hoc eſt recta NO,vel vtraque ZV,Z- f 29. prim.
S,quæ ipſi NO,oſtenſæ ſunt æquales; Erunt duæ rectæ TV,TS,maiores duabus rectis, ZV,ZS.
Cadit igitur punctum Z,intra triangulum TVS,ita vt rectæ TV,TS, rectas ZV,ZS, includant
omnino; Atq; proinde angul⁹ VZS,ideoq; illi æqualis ONP,maior eſt angulo pentagoni T: Hic
vero cũ ſit pẽtagoni angulus,paulo ante,cũ de inclinatione baſiũ Icoſaedri agerem⁹,demõſtra-
tus eſt maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoq; obtuſus.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his,omnes inclinationes baſium Dodecaedri æquales eſſe inter ſe. Cum enim ſinguli
anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus *g* medio puncto lateris Dodecaedri ad duo late- g 8. primi.
ra cubi in Dodecaedro deſcripti ductis: quales ſunt NO,NP, ſubtendanturq; à rectis, quæ cubi inſcripti lateri-
bus ſunt æquales, vel certe, quę rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum æquales ſunt, cuiuſmodi eſt recta
OP, lateri cubi inſcripti EH, quod angulum pentagoni EAH, ſubtendit, æqualis: Erunt omnes inter ſe æqua-
les, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint: nec non & rectæ illæ omnes, quæ eoſ-
dem ſubtendunt, latera videlicet cubi, inter ſe etiam ſint æquales.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

QVID IN SINGVLIS XV. LIBRIS AGAT EVCLIDES.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN primo libro diſputat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietateſque tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera, ipſa inter ſe comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma tranſit, eorumque ortum declarat: & ſymptomata, quæ in ipſis ſunt, demonſtrat. Poſtea triangulorum, parallelogrammorumq́ communicationem oſtendit, & quonam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo. Deniqe de iis, quæ in triangulis rectangulis à lateribus deſcribuntur, quadratis; quam habeat proportionẽ, quod à ſubtendente rectum angulum deſcribitur, ad ea, quæ à comprehendentibus ipſum fiunt.

IN ſecundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. Deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quæ ex rectarum linearum ſectionibus fiunt, proportiones declarantur. Poſtea de quadratis, quæ à lateribus obtuſangulorum, & acutangulorum triangulorum deſcribuntur, quam habeant proportionem, quæ à ſubtendentibus obtuſum, & acutum angulum fiunt, ad ea, quæ à comprehendentibus deſcribuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum conſtituatur.

IN tertio libro agitur, de iis, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis: itemque de angulis qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias conſiſtunt.

IN quarto libro de figurarum planarum inſcriptionibus, & circumſcriptionibus.

IN quinto de analogiis.

IN ſexto de proportionibus figurarum inter ſeſe: de figuris ſimilibus, & reciprocis: de rectis lineis proportionalibus; de parallelogrammorum applicationibus ad rectas lineas, quæ vel deficiant parallelogrammis ſimilibus, vel excedant: quomodo recta linea terminata, extrema ac media ratione ſecetur: de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, itemq; Sectorum, in circulis æqualibus.

IN ſeptimo agitur de numeris primis, & compoſitis, & quo pacto numerorum non primorum maxima communis menſura inueniatur: de numerorum parte, & partibus: de numeris multiplicibus: de proportionalibus: & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonſtrantur.

IN octauo de numeris deinceps proportionalibus; de numeris planis: de quadratis: de cubis, & ſolidis: de ſimilibus planis, & ſimilibus ſolidis.

IN nono item de ſimilibus planis: de cubis, & ſolidis: & de numeris deinceps proportionalibus ſiue ab vnitate, ſiue ſimpliciter: de numeris primis: de numeris paribus: de imparibus. de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus: de numeris perfectis.

IN decimo de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus magnitudinibus, itemq; de rationalibus, & irrationalibus.

IN vndecimo primum agitur de rectis lineis, quatenus ad ſolida corpora referuntur, videlicet quando ſint in vno plano; quando rectæ, ſeu perpendiculares ad planum; quando parallelæ: quomodo à puncto in ſublimi dato ad planum perpendicularis ducatur. Deinde vero de planis ſimul diſſerit, tum de ſolidis angulis. Poſtremo de ſolidis parallelepipedis, & nonnulla de Priſmatibus.

IN duodecimo de pyramidibus, & priſmatibus: poſtea de conis, & cylindris: demum de ſphæris.

IN tertiodecimo de conſtitutione quinq; figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellant: videlicet tetraedri, vel Pyramidis hexaedri, vel cubi octaedri, dodecaedri & Icoſaedri; ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de iis, quæ accidunt rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo æquilatero.

IN quartodecimo de dodecaedri, & Icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum comparatione.

IN quintodecimo & vltimo de inſcriptione quinq; figurarum iam dictarum, & de earundem lateribus, & angulis.

Hæc figura omiſſa eſt libro primo, propoſ. 24. Num. 2.



THEODOSII TRIPOLITÆ SPHÆRICORVM LIBRI III.

à

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI SOCIETATIS IESV

PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, & ſcholiis illuſtrati.

Et ab eodem ſecunda hac editione correcti, & aucti.



BIBLIOTHECA NACIONAL DE LISBOA

MOGVNTIÆ,

Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat REINHARDVS ELTZ.

Cum Gratia & Priuilegio Sacræ Cæſar. Maieſt.

ANNO M. DC. XI.

THEODOSII TRIPOLITÆ SPHÆRICORVM LIBRI TRES.

PRÆFATIO.

CVM & in Phœnicia, & in Africa vrbs, cui nomen Tripolis, à Geographis, atque Hiſtoricis deſcribatur, certo non conſtat apud ſcriptores, vtra harum ciuitatum Theodoſii patria fuerit. Quo item tempore floruerit, non ſatis inter eoſdem conuenit: Non tamen leuis coniectura eſt, eum circa tempora Pompeij Magni vixiſſe: propterea quod eum ſimul cum Aſclepiade medico (qui temporibus Pompeij Magni floruit, ſi Plinio credimus) in Bithynia floruiſſe ſcribit Strabo. Scripſit autem varia opuſcula Mathematica, vt De Habitationibus, De Noctibus, & diebus, atque etiam tres hoſce Sphæricorum libros ſumma eruditione refertos, in quibus varias ſphæræ proprietates demonſtrat, quarum quidem cognitio magnopere eſt neceſſaria ad rerum cœleſtium doctrinam conſequendam. Etenim ſine his Aſtronomia ſuam dignitatem tueri nulla ratione poteſt: Gnomonice quoque, ſeu ratio horologiorum Solarium deſcribendorum ex his maxime pendet. Adde quod & ad Geogrophiam, & ad Perſpectiuam recte intelligendam non parum momenti habeant, vt interim alias vtilitates ſphæricorum elementorum taceamus.

QVONIAM vero duplex verſio Sphæricorum Theodoſii circumfertur, germana altera & propria Joannis Penæ exemplari græco ad verbum reſpondens, altera Franciſci Maurolyci Abbatis Meſſanenſis ex traditione Arabum: nos priorem ſecuti ſumus, quæ nouem & quinquaginta propoſitionibus abſoluitur, inſeruimusq́ varia ſcholia, quibus plurima theoremata neceſſaria, & ſcitu iucunda, à Theodoſio quidem omiſſa, ab Arabibus autem adiuncta, demonſtrauimus. In demonſtrationibus autem non ſumus ſecuti verba codicis Græci, ſed ſenſum, vt demonſtrationes ipſæ clariores fierent: adiecimusq́ nonnunquam corollaria quædam, & ſcholia, necnon

lemmata, vt illis vti poſsimus, quando res poſtulabit. In margine porro appoſuimus numeros ſeriem propoſitionum iuxta verſionem Franciſci Maurolyci referentes; vt facile à quouis propoſitiones Theodoſii, quas nonnulli ſecundum ordinem Arabum citant, poſsint inueniri. Figuras quoque, quæ in græco exemplari extant, plerumque negleximus, quod illæ, quas Maurolycus pinxit, commodiores ſint, & ad intelligendas res ſphæricas multo faciliores. Poſtremo, ne demonſtrationum curſus interrumperetur, citauimus propoſitiones Euclidis, & horum librorum in margine. Id quod & in ſequentibus operibus obſeruauimus. Citationes autem hoc modo intelligendæ ſunt.

1. primi.	Prima propoſitio lib. 1. Euclid.
18. vndec.	Decimaoctaua propoſitio lib. 11. Euclid.
Coroll. 16. tertij.	Corollarium propoſitionis ſextædecimæ lib. 3. Euclid.
Coroll. 2. 33. ſexti.	Corollarium ſecundum propoſitionis trigeſimætertiæ ſexti libr. Euclid.
Schol. 1. 2. octaui.	Scholium primum propoſitionis ſecundæ lib. 8. Euclid.
4. huius.	Propoſitio quarta huius lib.
12. 2. huius.	Propoſitio duodecima libr. 2. huius operis.
Coroll. 10. huius.	Corollarium propoſitionis decimæ huius lib.
Coroll. 1. 1. huius.	Corollarium propoſitionis primæ lib. 1. huius operis.
Schol. 15. huius.	Scholium propoſitionis quintæ decimæ huius lib.
Schol. 15. 1. huius.	Scholium propoſitionis quintæ decimæ lib. 1. huius operis.
20. 1. Theod.	Propoſitio vigeſima lib. 1. Theod.
Coroll. 16. 1. Theod.	Corollarium propoſitionis ſextædecimæ lib. 1. Theodoſii.
Schol. 19. 1. Theod.	Scholium propoſitionis decimænonæ lib. 1. Theodoſii.

Ex his aliæ citationes facile percipientur, cum in omnibus eadem ſit ratio.

THEO-

THEODOSII SPHÆRICORVM
LIBER PRIMVS.

DEFINITIONES.

I.

SPHÆRA eſt figura ſolida comprehenſa vna ſuperficie, ad quam ab vno eorum punctorum, quæ intra figuram ſunt omnes rectæ lineæ ductæ ſunt inter ſe æquales.

II.

Centrum autem Sphæræ, eſt eiuſmodi punctum.

III.

Axis vero Sphæræ, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque terminata in ſphæræ ſuperficie, circa quam quieſcentem circumuoluitur ſphæra.

IV.

Poli ſphæræ ſunt extrema puncta ipſius axis.

V.

Polus Circuli in Sphęra, eſt punctum in ſuperficie ſphęræ, à quo omnes rectę lineæ ad Circuli circumferentiam tendentes ſunt inter ſe æquales.

SCHOLIVM.

ADDITVR in exemplari græco alia adhuc definitio, qua explicatur, quid ſit planum ad planum ſimiliter inclinari, atque alterum ad alterum. Sed quoniam inclinatio plani ad planum ab Euclide explicata eſt lib. 11. def. 6. At vero quando planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, eodem lib. defin. 7. declaratum eſt, ſtatui eam omnino omittere hoc loco, & ſequentem apponere non diſsimilem def. 4. lib. 3. Euclidis, ita vt ſextum locum obtineat.

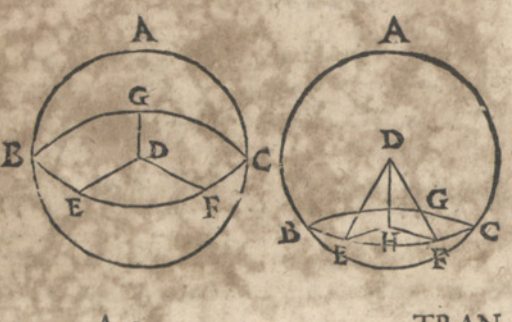
VI.

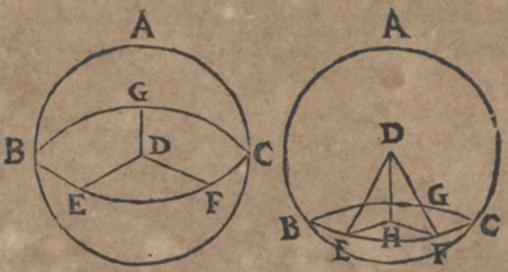
IN ſphæra æqualiter diſtare à centro ſphæræ circuli dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro ſphæræ in ipſorum plana ducuntur, ſunt æquales. Longius autem abeſſe ille dicitur, in cuius planum maior perpendicularis cadit.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI Sphærica ſuperficies plano aliquo ſecetur, linea quæ fit in ſphæræ ſuperficie, eſt circumferentia circuli.

SECETVR Sphęrica ſuperficies ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente in ſuperficie ſphæræ lineam BEFCG. Dico BEFCG, circumferentiã eſſe circuli. Tranſeat enim primo planum ſecans per centrum ſphæræ D, ita vt D, ſit in plano ſecante, in quo ex D, ad lineam factam BEFCG, ducantur lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, cum ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem cadant, inter ſe æquales ſunt, erit, per defin. 15. lib. 1. Eucl. linea BEFCG, circumferentia circuli, cuius centrum D, idem quod ſphæræ.





a 11. vnde. *b 47. pri.*

TRANSEAT deinde planum ſecans non per centrum ſphæræ. [a] Ducatur autẽ ex D, centro ſphæræ ad planum ſecans perpendicularis DH, emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad lineam BEFCG, & connectantur rectæ DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE, DHF, recti ſunt, ex def. 3. lib. 11. Euclid. [b] erit tam quadratum ex DE, quadratis ex DH, HE, quam quadratum ex DF, quadratis ex DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata ex DE, DF, inter ſe æqualia, quod & rectæ DE, DF, ex centro ſphæræ in eius ſuperficiem cadentes inter ſe æquales ſint. Quadrata igitur ex DH, HE, ſimul quadratis ex DH, HF, ſimul æqualia erunt. Dempto igitur communi quadrato rectæ DH, reliqua quadrata rectarum HE, HF, inter ſe æqualia, & rectæ propterea HE, HF, inter ſe æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex H, ad lineam BEFCG, cadentes eſſe æquales & inter ſe. & dictis duabus HE, HF. Linea ergo BEFCG, circumferentia erit circuli, ex def. 15. lib. 1. Eucl. cuius centrum eſt punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quare ſi ſphærica ſuperficies plano aliquo ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

ITAQVE ſi planum ſecans per centrum ſphæræ tranſierit, efficietur circulus idem centrum habens, quod ſphæra. Si vero non per centrum tranſierit, efficietur circulus aliud habens çentrum, quam ſphæra, illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphęrę ad planum ſeçans deducta. Nam ſemper demonſtrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli eſſe æquales.

HOC EST.

IDEM eſt ſphæræ centrum, & circuli per ſphæræ centrum traiecti. Et perpendicularis ducta à centro ſphæræ in planum circuli per centrum ſphæræ non traiecti, cadit in centrum circuli: quia punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit, demonſtratum eſt centrum eſſe circuli.

ij.

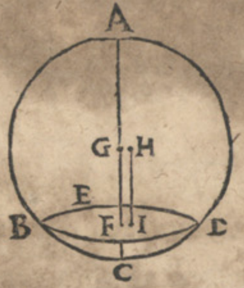
PROBL. 1. PROPOS. 2.

DATÆ Sphæræ centrum inuenire.

a 1. huius. *b 1. tertij.* *c Coroll. 1. huius.* *d 12. vnd.*

SIT centrum inueniendum Sphæræ ABCD. Secetur eius ſuperficies plano quopiam faciente in ipſa lineam BDE, [a] quæ circuli circumferentia erit. [b] Sit huius circuli centrum F. Si igitur circulus BDE, per centrum ſphæræ traiicitur, [c] erit punctum F, centrum quoque ſphæræ. Si vero per centrum ſphæræ non traiicitur, [d] erigatur ex F, ad planum circuli BDE, perpendicularis FG, quæ vtrinque ad ſuperficiem ſphæræ educta ad puncta A, C, ſecetur bifariam in G. Dico G, centrum eſſe ſphæræ. Si enim non eſt, ſit, ſi fieri poteſt, centrum H, ſeçans diametros omnes bifariam, quod quidem in linea AC, non exiſtet, cum ea in puncto G, ſolum bifariam diuidatur, ſed extra illam. [e] Demittatur ex H, centro ſphæræ ad planum circuli BDE, perpendicularis HI, [f] quæ æquidiſtans erit lineæ FG; ac proinde in punctum F, non cadet: coirent enim tunc duæ parallelæ HI, GF, in F, pũcto quod fieri non poteſt. Quoniã vero perpendicularis ex centro ſphæræ in planũ circuli BDE, demiſſa [g] cadit in eius centrum, erit I, centrum circuli BDE. Sed & F, ex conſtructione, centrum eſt eiuſdem circuli. Quod abſurdum eſt. Idem enim circulus vnum tantum habeat centrum neceſſe eſt. Non ergo aliud punctum præter G, centrum erit ſphæræ. Quare datæ ſphæræ centrum inuenimus. Quod faciendum erat.

e 11. vnde. *f 6. vndec.* *g Coroll. 1. huius.*



COROLLARIVM.

HINC conſtat, ſi in ſphæra ſit circulus non per centrum ſphęrę traiectus, à cuius centro excitetur perpendicularis ad ipſius planum, in linea perpendiculari centrum eſſe ſphærę. Oſtenſum enim eſt, punctum G, quod perpendicularem AC, bifariam diuidit, eſſe ſphæræ centrum.

iij.

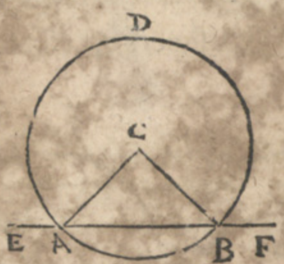
THEOR. 2. PROPOS. 3.

Sphęra planum, à quo non ſecatur, non tangit in pluribus punctis vno.

a 2. huius. *b 1. huius.* *c 3. vnde.*

SI enim fieri poteſt, ſphæra planum, à quo non ſecatur, tangat in pluribus punctis vno, vt in A, & B. [a] Inuento igitur C, centro ſphæræ, ducantur rectæ CA, CB: & per CA, CB, ducatur planum faciens quidem in ſuperficie ſphæræ [b] circumferentiam circuli ABD, in plano autem tangente, [c] rectam lineam EABF. Quia igitur planum tangens, in quo eſt recta EABF, ſphęram non ſecat, atq; adeo neq; circulum ABD, in ſphęrę ſuperficie exiſtentẽ, fit vt neq; recta EABF, circulum ABD, ſecet. Cadet ergo recta AB, tota extra circulum. Quoniam vero duo puncta ſumpta ſunt A, B, in circumferentia circuli ABD, [d] cadet eadem recta AB, à puncto A, in punctum B, ducta tota intra circulum ABD. Quod eſt abſurdum. Sphæra igitur planum, à quo non ſecatur, non tangit in pluribus punctis vno. Quod erat demonſtrandum.

d 2. tertij.



COROLLARIVM.

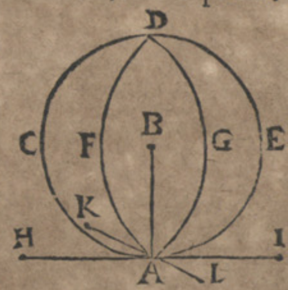
e 2. tertij.

HINC fit, ſi duo puncta ſignentur in ſuperficie ſphæræ, rectam, quæ illa connectit, intra ſphæram cadere. [e] quia videlicet cadit intra circulum, qui in ſphæræ ſuperficie çircumferentiam habet.

THEOR. 3. PROPOS. 4. iv.

SI Sphæra planum tangat, quod eam non ſecet, recta linea ducta à centro ſphæræ ad contactum, perpendicularis erit ad planum.

TANGAT Sphæra planum, quod ipſam non ſecet, in puncto A:[a] Et inuento B, centro ſphæræ, ducatur ab eo recta BA, ad punctum contactus A. Dico rectam BA, ad dictum planum perpendicularem eſſe. Nam per rectam AB, ducantur duo plana vtcunq; ſe mutuo ſecantia, quę in ſuperficie quidem ſphęræ [b] faciant circulorum circumferentias ACDE, AFDG, in plano autem tangente [c] rectas HAI, KAL. Quoniam igitur vterque circulus ACDE, AFDG, per centrum B, ſphæræ traijcitur, [d] erit quoque B, vtriuſque centrum. Ruſus quia planum tangens ſphæram non ſecat, fit, vt neque rectæ HAI, KAL, in eo exiſtentes eandem ſecent; ac proinde neque circulos ACDE, AFDG, in ſphæræ ſuperficie exiſtentes. Tanget igitur recta HAI, circulum ACDE, in puncto A. & recta KAL, circulum AFDG, in eodem puncto A.[e] Igitur recta BA, & ad rectam HAI, & ad rectam KAL, perpendicularis eſt.[f] Quare eadem recta BA, & ad planum tangens, quod per rectas HAI, KAL, ducitur, perpendicularis erit. Si ſphæra ergo planum tangat, quod eam non ſecet, &c. Quod oſtendendum erat.

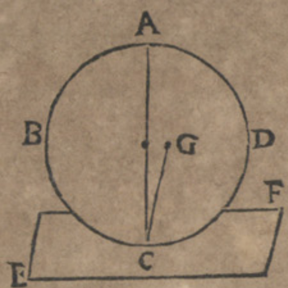


a 2. *huius.*
b 1. *huius.*
c 3. *vndec.*
d 1. *Coroll. huius.*
e 18. *tertij.*
f 4. *vndec.*

THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

SI Sphæra planum tangat, quod ipſam non ſecet, à contactu autem excitetur recta linea ad angulos rectos ipſi plano, in linea excitata erit centrum ſphæræ.

SPHÆRA ABCD, tangat in C, puncto planum EF, quod eam non ſecet, à puncto autem C, [a] excitetur ad planum EF, perpendicularis CA. Dico in AC, centrum eſſe ſphæræ. Si enim non eſt, ſit G, centrum ſphæræ extra rectam AC, ſi fieri poteſt, & à G, ad C, recta ducatur GC, [b] quæ ad planum EF, perpendicularis erit: Erat autem & AC, ad idem planum perpendicularis. Igitur ex eodem puncto C, ad idem planum EF, duæ perpendiculares ducuntur. Quod eſt abſurdum. Dato enim plano, à puncto, quod in illo datum eſt, [c] duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitantur. Quare ſi ſphæra planum tangat, quod ipſam non ſecet, &c. Quod erat oſtendendum.

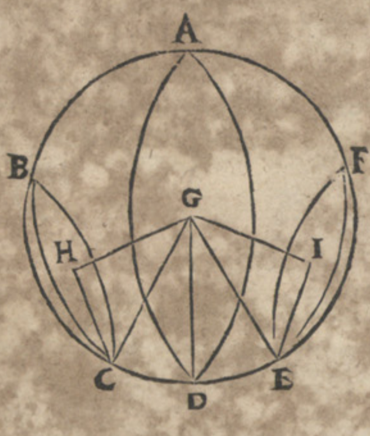


a 12. *vnde.*
b 4. *huius.*
c 13. *vndec.*

THEOR. 5. PROPOS. 6. vj. vij.

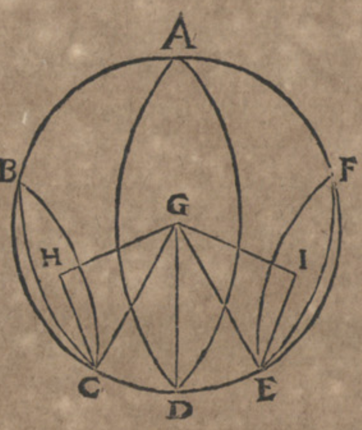
CIRCVLORVM, qui in ſphęra ſunt, maximi ſunt, qui per ſphęrę centrum ducuntur: aliorum autem illi inter ſe ęquales ſunt, qui ęqualiter à centro diſtant: qui vero longius à centro diſtant, minores ſunt Et circuli in ſphęra maximi per ſphęrę centrum tranſeunt: aliorum autem ęquales à centro ęqualiter diſtant: minores vero longius à centro diſtant.

IN ſphæra ABCDEF, cuius centrum G, tranſeat circulus AD, per centrum G, & alij BC, FE, non per centrum, Dico AD, circulum eſſe omnium maximum, &c.[a] Ducantur ex centro G, ad plana circulorum BC, FE, perpendiculares GH, GI, [b] quæ in ipſorum centra cadent; ita vt H, I, centra ſint circulorum BC, FE: [c] Eſt autem G, centrum ſphæræ, centrum quoque circuli AD, per centrum ſphæræ traiecti. Si igitur ex G, H, I, ad ſuperficiem ſphæræ rectæ ducantur GD, HC, IE, erunt hæ ſemidiametri circulorum AD, BC, FE. Connectantur autem rectæ GC, GE. Quoniam igitur in triangulo GHC, angulus H, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. Eucl.[d] erit quadratum ex GC, æquale quadratis ex GH, HC. Dempto ergo quadrato rectæ GH, maius erit quadratum ex GC, quadrato ex HC; atque adeo & recta GC, hoc eſt, ſibi æqualis GD, (ducuntur enim GC, GD, ex centro ſphæræ ad ſuperficiem) maior erit, quam recta HC. Quare circulus AD, maiorem habens ſemidiametrum, quam circulus BC, maior erit circulo BC. Non ſecus oſtendemus, circulum AD, quocunque alio, qui per centrum G, non tranſeat, maiorem eſſe. Maximus eſt ergo circulus AD.



a 11. *vndec.*
b *Coroll. 1. huius.*
c *Coroll. 1. huius.*
d 47. *prim.*

DISTENT iam circuli BC,FE,à centro G,æqualiter, hoc eſt, perpendiculares GH, GI, æqual[illegible] ex defin.6.huius libri.Dico circulos BC,FE,æquales eſſe. Cum enim rectæ GC, GE, à centro ſphæræ in eius ſu- c 47.prim. perficiem cadentes ſint æquales,ac proinde & earum quadrata æqualia;[c] ſit autem tam quadratum ex GC,quadratis ex GH,HC,quam quadratum ex GE,quadratis ex GI,IE, æquale; erunt quadrata ex GH, HC, ſimul æqualia quadratis ex GI,IE,ſimul.Demptis ergo æqualibus quadratis rectarum GH, GI, (poſitæ enim ſunt hæ lineæ æquales) æqualia erunt reliqua quadrata rectarum HC,IE,ac proinde & rectæ HC,IE,æquales erunt: quę cum ſint ſemidiametri circulorum BC,FE,æquales erunt circuli ipſi BC,FE.



QVOD ſi alter horum circulorum, nempe BC, longius à centro G,ponatur diſtare,quam alter FE,hoc eſt, perpendicularis GH, maior ponatur perpendiculari GI, oſtendemus eodem fere modo,circulum,BC,minorem eſſe circulo FE.Cum enim quadrata ex GH,HC, æqualia ſint demonſtrata quadratis ex GI, IE; ſi auferantur quadrata inæqualia rectarum inæqualium GH,GI,quorum illud maius eſt,(quod & recta GH, maior ponatur quam recta GI,) erit reliquum quadratum rectæ HC, minus quadrato reliquo rectæ IE; ac propterea & recta HC,minor erit,quam recta IE.Igitur & circulus BC,circulo FE,minor erit.

SIT iam circulus omnium maximus AD. Dico eum per G, centrum ſphæræ tranſire. Si enim non tranſeat per centrum, erit alius quiſpiam circulus per centrum G, tranſiens maior circulo AD,non per centrum tranſeunte, vt in hac propoſ.demonſtratum eſt. Quare AD,non eſt maximus circulus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim maximus. Tranſit ergo per G, centrum ſphæræ.

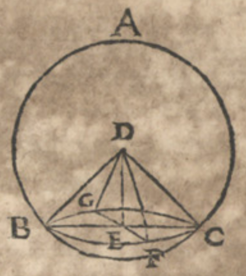
DEINDE ſint æquales circuli BC,FE. Dico eos à centro G,æqualiter diſtare.Constructa enim figura,vt prius,erunt ſemidiametri HC,IE,æquales. Et quoniam quadrata ex GH, HC, æqualia ſunt quadratis ex f 47.prim. GI,IE, [f] vt demonſtratum eſt; ablatis æqualibus quadratis linearum æqualium HC, IE,erunt reliqua quadrata rectarum GH,GI,æqualia;ac proinde & lineæ GH,GI,æquales erunt.Quæ cum perpendiculares ſint, ex conſtructione,ad plana circulorum BC,FE,æqualiter à centro G,diſtabunt circuli BC,FE,ex defin.6.huius lib.

QVOD ſi alter circulorum BC, FE, nimirum circulus BC, minor ponatur altero circulo FE, oſtendemus eodem fere modo,perpendicularem GH,maiorem eſſe perpendiculari GI. Cum enim quadrata ex GH, HC,oſtenſa ſint æqualia quadratis ex GI, IE; ſit autem quadratum ex HC, minus quadrato ex IE; (quod & ſemidiameter HC, circuli minoris minor ſit ſemidiametro IE, circuli maioris) erit quadratum reliquum rectæ GH,reliquo quadrato rectæ GI,maius;atque adeo & recta GH,maior erit,quam GI.Quare cum GH,GI,perpendiculares ſint, ex conſtructione, ad plana circulorum, longius diſtabit, per defin.6.huius lib. circulus BC, minor à centro G,quam circulus maior FE. Itaque circulorum, qui in ſphæra ſunt, maximi ſunt,qui per ſphæræ centrum ducuntur,&c.Quod erat demonſtrandum.

viij.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in ſphæra ſit circulus,à centro autem ſphæræ ad centrum circuli connectatur recta linea,connexa linea ad circuli planum recta erit.



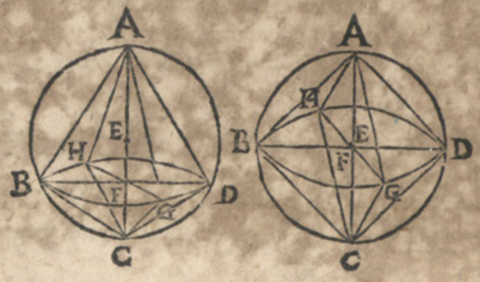
IN ſphæra ABC,cuius centrum D, ſit circulus BFCG, cuius centrum E:Et recta DE,connectat duo centra D,E. Dico DE, rectam eſſe ad planum circuli BFCG. Ductis enim duabus diametris vtcunque BC, FG,in circulo, ducantur ab earum extremis ad D, centrum ſphæræ rectæ lineæ, BD,CD,FD,GD, quæ omnes inter ſe æquales erunt, cum à centro ſphæræ ad eius ſuperficiem cadant:Sunt autem & BE,CE,FE, GE, ſemidiametri circuli BFCG,æquales.Igitur duo triangula DEB,DEC, duo latera DE,EB,duobus lateribus DE,EC, & baſim DB, baſi DC, æqualem habent; a 8. primi. ex quo fit, [a] angulos DEB, DEC, æquales, atque adeo rectos eſſe. Recta igitur DE,rectæ BC,ad rectos inſiſtet angulos.Non aliter oſtendemus, rectam DE, rectæ FG, ad rectos angu- b 4.vndec. los inſiſtere.[b] Quamobrem & plano circuli BFCG,per rectas BC,FG,ducta ad rectos angulos inſiſtet.Si igitur in ſphæra ſit circulus,&c. Quod oſtendendum erat.

ix.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

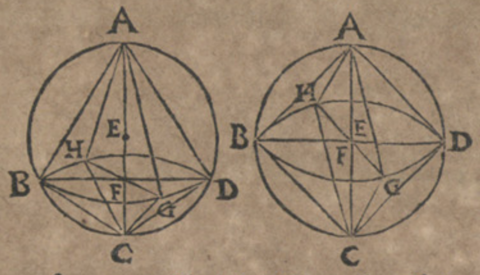
SI ſit in ſphæra circulus,& à centro ſphæræ ad circulum ducatur perpendicularis, quæ ad vtramque partem producatur,cadet ea in polos ipſius circuli.

a 11.vndec.



IN ſphæra ABCD, cuius centrum E,ſit circulus BGDH, [a] in cuius planum è centro ſphæræ E, perpendicularis deducta ſit EF, quæ in vtramque partem protracta cadat in ſuperficiem ſphæræ ad puncta A,C. Dico AC,polos eſſe circuli BGDH. Cadet enim perpendicularis EF,in centrum circuli BGDH, atque adeo F, centrum erit circuli. Quod ſi circulus b Coroll. 1. huius. BGDH, per centrum ſphæræ ducatur, [b] erit ipſum centrum

centrum ſphæræ E, idem quod F, centrum circuli, [c] ex quo ad planum circuli excitata ſit perpendicularis AC. c 11. vnde.
Ductis igitur diametris BD, GH, vtcunque, ducantur ab earum extremis rectæ ad puncta A, C. Et quia AF, perpendicularis eſt ad planum circuli BGDH, erunt anguli omnes, quos ad F, facit, recti, ex defin. 3. lib. 11. Euclid. Quare duo triangula AFB, AFH, duo latera AF, FB, duobus lateribus AF, FH, æqualia habent, quę quidem angulos comprehendunt æquales, nempe rectos. [d] Igitur baſes AB, AH, æquales erunt. Eodem modo oſtendemus & rectas AD, AG, & alias quaſcunque ex A, ad circumferentiam circuli BGDH, ductas tam inter ſe, quam rectis AB, AH, æquales eſſe. Punctum ergo A, polus eſt circuli BGDH, ex defin. 5. huius lib. Non aliter demonſtrabimus, & C, punctum eiuſdem circuli polum eſſe. Si igitur ſit in ſphæra circulus, & à centro, &c. Quod erat oſtendendum. d 4. primi.



S C H O L I V M.

IN verſione Maurolyci adduntur ſequentia duo theoremata, quæ Arabes adiecerunt.

I.

SI ſit in ſphæra circulus, à cuius centro educatur perpendicularis ad circuli planum, quæ in vtramque partem producatur, cadet hæc in vtrumque polum circuli. x.

IN eadem figura ex F, centro circuli BGDH, [a] *erigatur recta FA, perpendicularis ad circuli planum, quæ occurrat ſuperficiei ſphæræ in punctis A, C. Dico A, C, eſſe polos circuli BGDH. Erunt enim rurſus ex definit. 3. lib. 11. Eucl. omnes anguli, quos ad F, facit recta AF, recti.* [b] *Quare, vt prius, lineæ AB, AD, AG, AH, &c. æquales inter ſe erunt, &c.* a 12. vnde. b 4. primi.

ALITER. [c] *Quoniam perpendicularis FA, tranſit per centrum ſphæræ E; ducta erit recta EF, ex E, centro ſphæræ ad planum circuli BGDH, perpendicularis.* [d] *Quare vt demonſtratum eſt, cadet in polos eiuſdem circuli. Quod eſt propoſitum.* c Coroll. 2. huius. d 8. huius.

II.

SI ſit in ſphæra circulus, & ab altero polorum eius recta ducatur per centrum illius, erit hæc ad planum circuli perpendicularis, & producta cadet in reliquum polum. xj.

IN eadem adhuc figura ex A, polo circuli BGDH, per centrum eius F, demittatur linea recta AF, occurrens ſuperficiei ſphæræ in C. Dico rectam AF, perpendicularem eſſe ad planum circuli BGDH, & C, eſſe reliquum polum eiuſdem circuli. Quoniam enim duo triangula AFB, AFD, duo latera AF, FB, duobus lateribus AF, FD, & baſim AB, baſi AD, æqualem habent, ex defin. poli; [a] *habebunt quoque duos angulos AFB, AFD, æquales, atque adeo rectos. Igitur AF, rectæ BD, inſiſtit ad angulos rectos. Similiter oſtendemus, eandem AF, ad angulos rectos inſiſtere rectæ GH.* [b] *Quare & plano circuli BGDH, per rectas BD, GH, ducto eadem recta AF, ad rectos inſiſtet angulos. Quod eſt primo propoſitum. Quoniam igitur AF, ad rectos eſt angulos plano circuli BGDH, ducta erit FA, ex centro circuli F, ad planum circuli perpendicularis. Quare, vt in hoc ſcholio proxime demonſtratum eſt, in vtramque partem protracta in vtrumque polum circuli cadet, ac proinde C, reliquus polus erit circuli BGDH, quod eſt ſecundo loco propoſitum.* a 8. primi. b 4. vnde.

THEOR. 8. PROPOS. 9. xij.

Si ſit in ſphæra circulus, & ab altero polorum eius in ipſum ducatur perpendicularis recta linea, cadet hæc in circuli centrum, & inde producta cadet in reliquum polum ipſius circuli.

IN ſphæra ABCD, ſit circulus BFDG, [a] à cuius polo A, ad eius planum perpendicularis ducatur AE, occurrens ſuperficiei ſphæræ in C. Dico E, centrum eſſe circuli BFDG, & C reliquum polum. Ductis enim per E, duabus rectis vtcunq; BD, FG, connectantur earum extrema cum polo A, rectis AB, AD, AF, AG, quæ omnes inter ſe æquales erunt, ex definitione poli. Omnes item anguli, quos recta AE, facit ad E, recti, ex definition. 3. lib. 11. Euclid. [b] Erit igitur tam quadratum ex AB, quadratis ex AE, EB, quam quadratum ex AG, quadratis ex AE, EG, æquale; atque adeo cum quadrata rectarum AB, AG, æqualium æqualia ſint, erunt quadrata ex AE, EB, ſimul quadratis ex AE, GE, ſimul æqualia. Dempto ergo communi quadrato rectæ AE, reliqua quadrata rectarum EB, EG, æqualia erunt, ac proinde & rectæ EB, EG, æquales. Eodem modo oſtendemus, rectas EG, ED, æquales eſſe. [c] Quare E, centrum eſt circuli BFDG; Quod eſt propoſitum. Quoniam igitur ex E, centro circuli BFDG, ad ipſius planum educta eſt perpendicularis EA, [d] tranſibit hæc per H, centrum ſphæræ, atque adeo ex H, centro ſphæræ eadem HE, ducta erit perpendicularis ad planum circuli BFDG. [e] Quocirca HE, vtrinque educta cadet in polos eiuſdem circuli; ac proinde C, reliquus polus erit circuli BFDG. Si igitur ſit in ſphæra circulus, & ab altero polorum eius, &c. Quod oſtendendum erat. a 11. vnde. b 47. primi. c 9. tertij. d Coroll. 2. huius. e 8. huius.



THEOR. 9. PROPOS. 10. xiij.

SI ſit in ſphæra circulus, linea recta per eius polos ducta, ad circulum recta eſt, tranſitque per centrum circuli, & ſphæræ.

IN

IN ſphæra ABCD, ſit circulus BFDG, per cuius polos A, C, recta ducatur AC, occurrens plano circuli in E. Dico rectam AC, ad planum circuli rectam eſſe, tranſireq; per eius centrum, (hoc eſt, E, eſſe ipſius centrum) nec non per centrum ſphæræ. Ductis namque per E, duabus rectis vtcunque BD, FG, quarum extrema cum polis A, C, iungantur rectis, vt in figura; erunt tam AB, AG, AF, AD, inter ſe, quam CB, CG, CF, CD, inter ſe æquales, ex defi. poli. Igitur duo triãguli ABC, ADC, duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, & baſim BC, baſi DC, æqualem habent.



a 8. primi. [a] Quapropter & angulos BAC, DAC, æquales habebunt. Quoniam igitur duo triangula ABE, ADE, duo latera AB, AE, duobus lateribus AD, AE, æqualia habent, anguloſque ſub ipſis contentos BAE, DAE, æquales,
b 4. primi. vt proxime demonſtratum eſt, [b] erunt & anguli AEB, AED, æquales, & ob id recti. Non aliter demonſtrabimus, rectos eſſe angulos AEG, AEF. Recta igitur AE, duabus rectis
c 4. vndec. BD, FG, ad rectos inſiſtit angulos. [c] Quare perpendicularis erit ad planum circuli BFDG, per rectas BD, FG, ductum. Quod eſt primo loco propoſitum. Quoniam igitur ex A, polo circuli BFDG, ad eius planum perpen-
d 9. huius. dicularis eſt ductaAE, [d] cadet AE, in centrum ipſius. Eſt ergo E, centrum circuli BFDG. Rurſus quia ex E, cen-
e Coroll. 2. huius. tro circuli, BFGD, educta eſt ad eius planum perpendicularis EA, [e] tranſibit hæc per centrum quoque ſphæræ. Quare recta AC, perpendicularis eſt, ad planum circuli BFDG, tranſitque per eius centrum, & ſphæræ. Quod eſt propoſitum. Si ſit igitur in ſphæra circulus, linea recta per eius polos ducta, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

ADDVNTVR hoc loco alia duo theoremata huiuſmodi.

I.

xiv. SI in ſphæra ſit circulus, & ab altero polorum eius per centrum ſphæræ recta linea ducatur, erit hæc ad planum circuli perpendicularis, & producta cadet in centrum ipſius, & in reliquum polum.

IN ſphæra ABCD, cuius centrum E, ſit circulus BGDH, à cuius polo A, per E, centrum ſphæræ ducatur recta AE, occurrens plano circuli in F, & ſuperficiei ſphæræ in C. Dico AE, perpendicularem eſſe ad planum circuli, tranſireque per eius centrum, vt reliquum polum, hoc eſt, F, eſſe eius centrum; & C, reliquum polum. Ductis enim per F, duabus rectis vtcunque BD, GH, iungantur extrema cum punctis A, & E, vt in figura; eruntq; AB, AH, AD, AG, ex definitione poli, inter ſe æquales; nec non & EB, EH, ED, EG ſemidiametri ſphæræ inter ſe æquales. Quoniam igitur duo triangula ABE, ADE, duo latera AB, AE, duobus lateribus AD, AE, & baſim EB, baſi ED,



a 8. primi. *habent æqualem; [a] erunt anguli BAE, DAE, æquales. Itaque duo triangula ABF, ADF, duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia habent, anguloſque ſub ipſis con-*
b 4. primi. *tentos BAF, DAF, æquales, vt proxime oſtenſum eſt. [b] Quare anguli AFB, AFD, æquales erunt, atque adeo recti. Eodem modo demonſtrabimus rectos eſſe angulos AFH,*
c 4. vndec. *AFG. Recta igitur AF, duabus rectis BD, GH, inſiſtit ad angulos rectos. [c] Quare perpendicularis erit ad planum circuli BGDH,*
d 9. huius. *per rectas BD, GH, ductum. [d] Itaque producta cadet & in centrum circuli, & in reliquum polum: ac proinde F, centrum erit circuli, & C, reliquus polus. Quod eſt propoſitum. Si in ſphæra igitur ſit circulus, &c. Quod erat oſtendendum.*

C O R O L L A R I V M.

HINC fit, circulum maximum, qui per alterum polorum cuiuslibet circuli in ſphæra tranſit, tranſire quoque per polum reliquum. Nam ſi ex vno polo per centrum ſphæræ diameter ducatur circuli maximi, qui per illum polum tranſit, cadet hæc in alterum polum, vt demonſtratum eſt. Idem ergo circulus maximus per reliquum polum tranſibit.

ET quia diameter circuli maximi eſt quoque diameter ſphæræ, manifeſtum eſt, duos polos circuli cuiuslibet in ſphæra per diametrum eſſe oppoſitos: atque adeo inter ipſos interpoſitum eſſe ſemicirculum maximi circuli.

II.

xv. SI in ſphæra ſit circulus, & à centro ſphæræ per centrum circuli recta linea ducatur, cadet hæc in vtrumque polum circuli.

IN eadem figura ducatur per E, centrum ſphæræ, & F, centrum circuli BGDH, recta EF, in vtramque partem. Dico EF, cadere in vtrumque polum circuli BGDH; Quoniam enim recta EF, centrum ſphæræ, & centrum circuli BGDH, connectens
e 7. huius. *[e] perpendicularis eſt ad planum eiuſdem circuli, [f] cadet eadem EF, vtrinque protracta in polum vtrumque eiuſdem circuli.*
f 8. huius. *Quod eſt propoſitum.*

C O R O L L A R I V M.

EX his omnibus conſtat, in ſphæra quatuor hæc puncta, nempe duos polos cuiuſque circuli, eiuſdem centrum, & centrum ſphæræ, perpetuo in vna linea recta, nempe diametro ſphæræ, exiſtere, & ipſam quidem diametrum ad planum eiuſdem circuli eſſe perpendicularem: Adeo vt recta per quælibet duo puncta ex his ducta tranſeat per reliqua duo, ſitque ad planum circuli perpendicularis: Et recta per vnum eorum ducta perpendicularis ad planum circuli, tranſeat quoque per tria puncta reliqua.

xvj. *THEOR. 10. PROPOS. 11.*

IN ſphæra maximi circuli ſe mutuo ſecant bifariam.

IN

IN ſphæra ABCD, ſecent ſe mutuo duo circuli maximi AC, BD, in punctis E, F. Dico ſe mutuo ſecare bifariam. [a] Quoniam enim circuli maximi in ſphæra per centrum ſphæræ tranſeunt, tranſibunt circuli AC, BD, per ſphæræ centrum, quod ſit G. [b] Et quoniam idem eſt ſphæræ centrum, & circuli per ſphæræ centrum traiecti, erit punctum G, quod ſphæræ centrum ponitur, centrum quoq; vtriuſq; circuli AC, BD, ita vt in vtroq; eodẽ plano circulorum AC, BD, exiſtat. Sunt autem & puncta E, F, in vtroque eodem plano. Tria igitur puncta E, G, F, in vtroque plano circulorum AC, BD, exiſtunt; atq; adeo in communi eorum ſectione erunt, cum ſolum communis eorum ſectio ſit in vtroque plano. [c] Eſt autem communis eorum ſectio linea recta. Igitur tria puncta E, G, F, in linea recta ex E, per G, ad F, ducta exiſtunt, quæ cum tranſeat per G, centrum vtriuſq; circuli, & ſphæræ, vt oſtenſum eſt, diameter erit & ſphæræ, & vtriuſque circuli; atque adeo vtrumque eorum bifariam ſecabit, ita vt ſemicirculi ſint EAF, FCE, EBF, FDE: In ſphæra ergo maximi circuli ſe mutuo ſecant bifariam. Quod demonſtrandum erat.



a 6. huius.
b Coro. 1. huius.
c 3. vndec.

THEOR. 11. PROPOS. 12. 17.

IN ſphæra circuli, qui ſe mutuo bifariam ſecant, ſunt maximi.

IN ſphæra ABCD, circuli AE, BD, ſe mutuo ſecent bifariam in punctis E, F. Dico circulos AC, BD, eſſe maximos. Cum enim ſe mutuo ſecent bifariam in E, F, erit ducta recta EF, vtriuſque diameter, cum ſola diameter circulum quemcunque bifariam diuidat; ac proinde diuiſa recta EF, bifariam in G, erit G, vtriuſque circuli centrum: quod dico etiam eſſe ſphæræ centrum atque adeo vtrumque circulum per ſphæræ centrum duci. Si namque G, dicatur non eſſe centrum ſphæræ, ac proinde circulos AC, BD, non eſſe per ſphæræ centrum ductos; hoc ipſo oſtendemus, G, eſſe centrum ſphæræ, atque idcirco vtrumque circulum per ſphæræ centrum duci. [a] Erigatur enim ex G, ad planum circuli AC, perpendicularis GH: Item GI, perpendicularis ad planum circuli BD. Quoniam igitur circuli AC, BD, ponuntur non tranſire per centrum ſphæræ, [b] tranſibit vtraque perpendicularis GH, GI, per centrum ſphæræ. Quare punctum G, in quo conueniunt, centrum erit ſphæræ, alias centrum nõ exiſteret in vtraque: ac proinde vterq; circulus per centrum ſphæræ traijcietur. [c] Sunt ergo circuli AC, BD, per centrum ſphæræ traiecti, maximi. In ſphæra ergo circuli, qui ſe mutuo bifariam ſecant, ſunt maximi. Quod erat oſtendendum.



a 12. vnde.
b Coroll. 2. huius.
c 6. huius.

SCHOLIVM.

HIC vides mirabilem ſane argumentandi modum. Nam ex eo, quod G, dicitur non eſſe centrum ſphæræ demonſtratum eſt demonſtratione affirmatiua, G, eſſe centrum ſphæræ. Quo modo argumentandi etiam vſus eſt Euclides lib. 9. propoſ. 12. & Cardanus lib. 5. de Proport. propoſ. 201. vt in ſcholio eiuſdem propoſ. monuimus.

THEOR. 12. PROPOS. 13. 18.

SI in ſphæra maximus circulus circulum quempiam ad rectos angulos ſecet; & bifariam eum ſecat, & per polos.

IN ſphæra maximus circulus ABCD, ſecet circulum BED, in punctis B, D, ad angulos rectos, hoc eſt, planum circuli ABCD, rectum ſit ad planum circuli BED, ſitque communis eorum ſectio recta BD. Dico circulum ABCD, bifariam, & per polos ſecare circulum BED. [a] Sumpto enim F, cẽtro circuli maximi ABCD, quod & centrum ſphæræ erit, [b] (Nam cum circulus maximus ducatur per centrum ſphæræ, [c] erit eius centrum idem, quod ſphæræ) [d] ducatur ex F, ad planum circuli BED, perpendicularis FG, [e] quæ in BD, communem ſectionem cadet. Cadat autem in punctum G. [f] Et quoniã eadem cadit quoque in centrum circuli BED, erit G, centrum circuli BED; atq; adeo BD, per G, ducta, diameter eiuſdem: quæ cum diuidat circulum BED, bifariam diuidet quoque eundem bifariam circulus maximus ABCD, per rectam BD, ductus. Quod eſt primo loco propoſitum. Quoniam vero recta FG, in plano eſt circuli ABCD, cadet ea producta in circumferentiam ad A, C, puncta, quæ in ſuperficie ſphæræ ſunt: [g] cadit autem & in vtrumq; polum circuli BED, quod ex F, centro ſphæræ ad circuli planum perpendicularis ſit ducta. Igitur A, C, poli ſunt circuli BED, ac proinde circulus maximus ABCD, per polos circuli BED, tranſit, quod ſecundo loco proponebatur demonſtrandum. Si igitur in ſphæra maximus circulus circulum quempiam, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 1. tertij.
b 6. huius.
c Corol. 1. huius.
d 11. vnde.
e 38. vnde.
f Coroll. 1. huius.
g 8. huius.

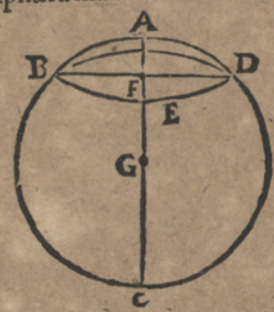
SCHOLIVM.

CÆTERVM hæc propoſ. vna cum 8. 9. 10. & earum ſcholijs intelligenda etiam eſt, quando circulus BD, maximus eſt, & per ſphæræ centrum tranſit. Eadem enim eſt fere ſemper demonſtratio, vt perſpicuum eſt.

THEOR. 13. PROPOS. 14. 19.

SI in ſphæra maximus circulus circulum non maximum bifariam ſecet; ad angulos rectos eum ſecat, & per polos.

IN ſphæra maximus circulus ABCD, non maximum BED, ſecet bifariam in punctis B, D, ſitque communis eorum ſectio recta BD. Dico circulum ABCD, ſecare circulum BED, ad angulos rectos, & per polos. Quia enim circulus BED, bifariam ſecatur in B, D, hoc eſt, in ſemicirculos, erit BD, communis ſectio diameter eius. Diuiſa ergo BD, bifariam in F, erit F,



a 2. huius centrum circuli BED.[a] Sumpto autem G, centro ſphæræ, quod & centrum erit maximi circuli ABCD, ducatur ex G, ad F, recta FG,

b 7. huius. [b] quæ perpendicularis erit ad planum circuli BED. [c] Igitur & planum circuli maximi ABCD, per rectam FG, ductum ad idem pla-

c 18. vnde. num circuli BED, rectum erit. Secat igitur circulus maximus ABCD, circulum BED, non maximum ad angulos rectos. Quod eſt primo loco propoſitum. Et quoniam oſtenſum eſt, rectam FG, ex G, centro ſphæræ ductam ad planum circuli

d 8. huius. BED, eſſe perpendicularem, [d] cadet FG, vtrinque producta in polos circuli BED. Quare cum GF, in plano circuli ABCD, exiſtens, producta cadat in circumferentiam eius ad puncta A, C, quæ etiam in ſuperficie ſphæræ ſunt, erunt A, C, poli circuli BED, atque adeo circulus maximus ABCD, circulum non maximum BED, per polos A, C, ſecabit, quod ſecundo loco propoſitum fuit. Si igitur in ſphæra maximus circulus circulum non maximum, &c. Quod erat oſtendendum.

20.

THEOR. 14. PROPOS. 15.

SI in ſphæra maximus circulus, eorum, qui in ſphæra ſunt, circulorum aliquem per polos ſecet, bifariam, & ad angulos rectos eum ſecat.

IN ſphæra maximus circulus ABCD, ſecet circulum BED, per polos AC. Dico circulum ABCD, ſecare circulum BED, bifariam, & ad angulos rectos. Connectat enim recta AC, polos A, C, occurrens plano circuli BED, in F, puncto.[a] Et



a 10. huius. quoniam recta AC, ad planum circuli BED, perpendicularis eſt, tranſitque per centrum ſphæræ, & circuli BED; erit F, centrum circuli BED. Cum ergo circulus maximus ABCD, circulum BED, ſecans tranſeat per rectam AC, ac proinde per centrum F, erit communis ſectio BFD, diameter circuli BED. Bifariam ergo ſecatur circulus BED. Dico quod & ad angulos rectos. Cum enim recta A-

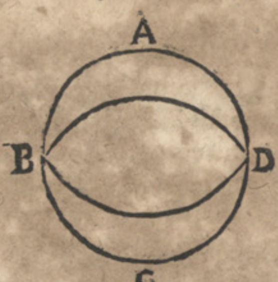
b 18. vnde. C, oſtenſa ſit perpendicularis ad planum circuli BED,[b] erit quoque planum circuli maximi ABCD, per rectam AC, ductum ad idem planum circuli BED, rectum. Igitur ſi in ſphæra maximus circulus, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

QVATVOR alia theoremata hoc loco adduntur in alia verſione, hoc ordine.

21. I.

SI in ſphæra maximus circulus per polos alterius cuiuſpiam maximi circuli tranſeat, tranſibit viciſſim hic per polos illius.



IN ſphæra tranſeat maximus circulus ABCD, per A, C, polos circuli maximi BD. Dico & maximum circulum BD per polos maximi circuli ABCD, tranſire. Quoniam enim circulus maximus ABCD, circulum BD, ſecat per polos,[a] ſecabit ipſum ad angulos rectos. Quare viciſſim maximus circulus BD, circulum ABCD, ad angulos rectos ſecabit;[b] atque adeo per ipſius polos eum ſecabit. Quod eſt propoſitum.

a 15. huius.
b 13. huius.

22. II.

SI in ſphæra circulus circulum per polos ſecet, circulus maximus eſt, & bifariam eum ſecat, & ad angulos rectos.

IN ſphæra circulus ABCD, ſecet circulum BD, per polos A, C. Dico ipſum eſſe circulum maximum, ſecareque circulum BD, bifariam, & ad angulos rectos. Coniungat enim recta AC, polos A, C, quæ neceſſario in plano circuli ABCD, erit, quod circumferentia eius per eoſdem polos A, C, ponatur tranſire. Quoniam vero recta AC, per A, C, polos circuli BD, ducta[a] tranſit per centrum ſphæræ, tranſibit quoque circulus ABCD, (cum per rectam AC, ducatur) per centrum ſphæræ;[b] atque adeo maximus erit. Quare cum per A, C, polos circuli BD, ponatur tranſire,[c] ſecabit eum bifariam, & ad angulos rectos. Quod eſt propoſitum.



a 10. huius.
b 6. huius.
c 15. huius.

III.

23. SI in ſphæra circulus circulum bifariam, & ad angulos rectos ſecet, circulus maximus eſt, & per polos eum ſecat.

IN ſphæra circulus A B C D, ſecet circulum B D, biſariam, & ad angulos rectos. Dico ipſum eſſe circulum maximum, tranſireque per polos circuli B D. Sit recta BD, communis circulorum ſectio. Quoniam igitur circulus ABCD, circulum B D, ſecat biſariam, erit recta BD, nempe communis ſectio circulorum, diameter circuli B D, atque adeo diuiſa recta BD, biſariam in E: erit E, eiuſdem circuli centrum. Ducatur in plano circuli A B C D, recta EA, perpendicularis ad rectam BD. Et quoniam circulus ABCD, circulum BD, ponitur ſecare ad angulos rectos, erit ex deſin. 4. lib. 11. Eucl. EA, ad planum circuli B D, recta; ac proinde cum ex E, centro ipſius educatur, [h] in vtrumque polum eiuſdem cadet. Cadit autem in circumferentiam circuli A B C D, in ſuperficie ſphæræ exiſtentem ad puncta A, C. Sunt ergo A, C, poli circuli B D; atque adeo circulus ABCD, circulum BD, per polos A, C, ſecat. Quare ex præcedenti theoremate, maximus circulus eſt. Probatum autem eſt, quod & circulum BD, per polos ſecat. Conſtat ergo propoſitum.

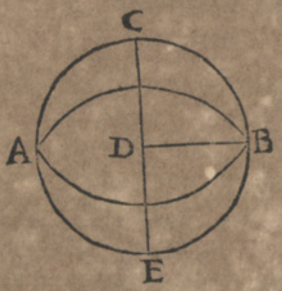


h ſchol. 8. huius.

IV.

SI in ſphæra ſit circulus, & ab altero polorum eius recta cadens in planum ipſius ad angulos rectos æqualis ſit ſemidiametro eius, circulus maximus eſt. xxiv.

IN ſphæra ſit circulus A B, à cuius altero polorum C, in planum eius cadens recta perpendicularis C D, æqualis ſit ipſius ſemidiametro. Dico AB, eſſe circulum maximum. Cum enim CD, perpendicularis ſit ad circulum AB, [i] cadet ipſa in circuli centrum, & producta cadet in alterum polum, qui ſit E. Eſt ergo D, centrum circuli A B: [k] atque adeo perpendicularis CD, tranſit per centrum ſphæræ. Ducatur per rectam CE, in ſphæra planum vtcunque [l] faciens in ſphæra circulum AEBC, qui cum tranſeat per centrum ſphæræ, [m] maximus erit: qui circulum A B, ſecet in punctis A B, & iungatur ſemidiameter DB, cui ex hypotheſi æqualis eſt C D. Quoniam vero CD, perpendicularis ponitur ad circulum AB, erit, ex deſin. 3. lib. 11. Eucl. angulus CDB, rectus. [n] Quare BD, media proportionalis eſt inter CD, DE, hoc eſt, erit, vt CD, ad BD, ita BD, ad DE. Eſt autem CD, ipſi BD, æqualis. Igitur & DE, eidem BD, æqualis erit; atque adeo & C D, DE, inter ſe æquales erunt. Cum ergo CE, oſtenſa ſit tranſire per centrum ſphæræ, erit D, centrum ſphæræ. Erat autem & centrum circuli AB. Idem ergo eſt centrum ſphæræ, & circuli AB, [o] ac proinde circulus AB, maximus eſt. Quod eſt propoſitum.



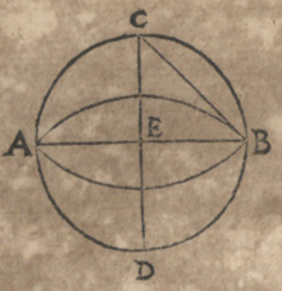
i 9. huius. k coroll. 2. huius. l 1. huius. m 6. huius n ſchol 13. ſexti. o 6. huius.

THEOR. 15. PROPOS. 16.

xxv.

SI in ſphæra ſit maximus circulus, recta linea ducta ab eiuſdem circuli polo ad circumferentiam æqualis eſt lateri quadrati inſcripti in maximo circulo.

IN ſphæra ſit circulus maximus A B, à cuius polo C, ad eius circumferentiam ducatur recta C B. Dico CB, æqualem eſſe lateri quadrati in circulo AB, vel quouis alio maximo inſcripti. [a] Ducatur ex C, ad circulum AB, perpendicularis C E, [b] quæ in centrum ipſius cadet, quod ſit E, & producta in reliquum polum, qui ſit D, cadet. Iam per rectas CB, CD, planum ducatur [c] faciens in ſphæra circulum A D B C, qui cum per E, centrum ſphæræ (Eſt enim E, centrum circuli maximi A B, quod per centrum ſphæræ tranſeat, [d] idem, quod ſphæræ) tranſeat, [e] maximus erit, [f] atque adeo circulum maximum AB, biſariam ſecabit. Quod etiam inde patet, quod per eius polos incedat. [g] Hinc enim fit, vt ipſum biſariam diuidat. Sit ergo communis ſectio diameter BEA. Et quoniam CE, perpendicularis ducta eſt ad circulum A B, erit eadem perpendicularis ad rectam AB, ex deſin. 3. lib. 11. Euclid. Duæ ergo diametri AB, CD, in maximo circulo ADBC, ſeſe mutuo ſecant ad angulos rectos: [h] ac propterea vt in lib. 4. Euclidis demonſtratum eſt, CB, latus eſt quadrati in circulo maximo ADBC, atque adeo & in maximo AB, deſcripti. Si igitur in ſphæra ſit maximus circulus, recta linea ducta, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 11. vndeci. b 9. huius. c 1. huius. d coroll. 1. huius. e 6. huius. f 11. huius. g 15. huius. h 6. quar.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero quatuor anguli recti ad centrum E, æquales ſunt, atque [i] adeo quatuor arcus B C, CA, AD, D B, ſuper quos aſcenderunt, æquales, nempe quadrantes, perſpicuum eſt, in ſphæra polum maximi circuli abeſſe à circumferentia maximi circuli quadrante maximi circuli. Abeſt enim C, polus circuli maximi AB, ab eius circumferentia quadrante CB, eademque ratio de cæteris habenda eſt. [k] Semper enim recta ducta à circumferentia maximi circuli ad eiuſdem polum æqualis eſt lateri quadrati in maximo circulo inſcripti, atque adeo quadrantem in maximo circulo ſubtendet.

i 20. tertij. k 16. huius.

SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius demonſtratur in alia verſione hoc theorema.

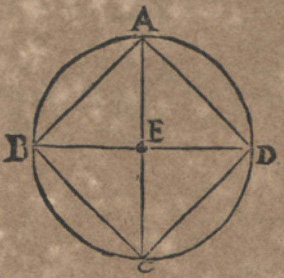
SI in ſphæra ſit circulus, & ab eius polo ad circumferentiam ducta recta æqualis ſit lateri quadrati in eo deſcripti, circulus ipſe maximus eſt.

IN eadem figura ex C, polo ad circumferentiam circuli A B, ducta recta C B, ſit æqualis lateri quadrati in circulo A B, deſcripti. Dico AB, circulum eſſe maximum. [l] *Ducatur enim ex C, ad circulum AB, perpendicularis C E,* [m] *quæ in eius centrum cadet, quod ſit E. Ducta autem ſemidiametro E B, erit ex defin. 3. lib. 11. Euclid. angulus E, rectus.* [n] *Igitur quadratum ex CB, hoc eſt, quadratum in circulo AB, deſcriptum, æquale eſt quadratis ex BE, CE: ſed quadratum ſemidiametri B E, dimidium eſt quadrati in circulo AB, deſcripti, vt mox oſtendemus. Igitur & quadratum ex C E, eiuſdem quadrati in circulo A B, deſcripti dimidium erit; atque adeo quadrata ex B E, C E, inter ſe æqualia, nec non & lineæ propterea BE, CE, æquales erunt. Quare cum C E, ducta ſit ex C, polo circuli A B, ad ipſum circulum perpendicularis, oſtenſaque ſit ſemidiametro BE, æqualis;* [o] *erit circulus A B, maximus.*

l 11. vndec. m 9. huius n 47. pri. o ſchol. 15. huius.

LEMMA.

IN omni circulo quadratum ſemidiametri dimidium eſt quadrati in ipſo circulo deſcripti.



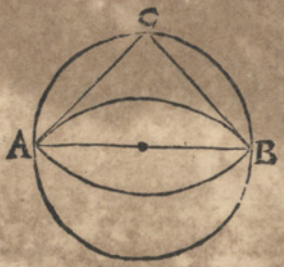
IN circulo, cuius centrum E, ductæ ſint duæ diametri AC, BD, ſeſe ad angulos rectos ſecantes in E, centro. Iunctis igitur rectis A B, B C, C D, D A, quadratum erit ABCD, in circulo inſcriptum, vt conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Euclid. Quoniam vero quadrata ex ſemidiametris æqualibus E A, EB, æqualia inter ſe, [p] *æqualia ſimul ſunt quadrato ex A B; dimidium erit quadratum ſemidiametri E A, quadrati ex A B, quod in circulo deſcribitur. Quod eſt propoſitum. Ex quo conſtat, in ſuperiori figura, quadratum ſemidiametri BE, dimidium eſſe quadrati ex CB, quod æquale ponitur ei, quod in circulo A B, inſcribitur.*

p 47. pri.

xxvij.

THEOR. 16. PROPOS. 17.

SI in ſphęra ſit circulus, à cuius polo in ipſius circumferentiam ducta recta linea ęqualis ſit lateri quadrati inſcripti in maximo circulo, ipſe cirçulus maximus erit.



IN ſphæra ſit circulus AB, à cuius polo C, ad eius circumferentiam recta ducta CA, æqualis ſit lateri quadrati in maximo circulo ſphærę deſcripti. Dico A B, circulum eſſe maximum. Per rectam enim AC, & centrum ſphæræ planum ducatur, [a] faciens in ſphæra circulum A C B, [b] qui maximus erit, cum per ſphærę centrum ducatur. Ducatur quoque ex C, recta linea CB ad B, punctum, in quo circulus maximus ACB, circulum AB, ſecat; eritque per definit. poli, recta CB, rectæ CA, æqualis. Cum ergo AC, ponatur latus quadrati in maximo circulo ACB, deſcripti, erit quoque CB, latus eiuſdem quadrati; atque adeo duo arcus A C, C B, quadrantes erunt conficientes ſemicirculũ ACB, quod quatuor latera quadrati æqualia [c] ſubtendant quatuor circuli arcus æquales. Recta igitur AB, communis ſectio circulorum diameter erit circuli maximi ACB; ac proinde & ſphærę. Quoniam vero circulus maximus ACB, circulum AB, per polos ſecans, [d] ſecat bifariam, erit quoque A B, communis ſectio diameter circuli AB, ac proinde cum & ſphærę diameter ſit, circulus maximus erit AB. Si in ſphæra ergo ſit circulus, à cuius polo, &c. Quod erat demonſtrandum.

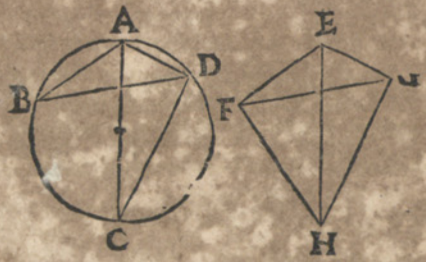
a 1. huius. b 6. huius. c 28. ter. d 15. huius.

xxviij.

PROBL. 2. PROPOS. 18.

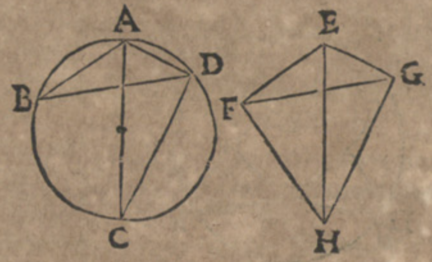
LINEAM rectam deſcribere æqualem diametro circuli cuiuſlibet in ſphæra dati.

IN ſphæra ſit datus circulus quilibet ABCD, cuius diametro rectam æqualem oporteat deſcribere. Sumptis tribus punctis in circumferentia circuli vtcunq; A, B, D, & iunctis rectis A B, A D, B D, [a] conſtituatur triangulo ABD, triangulũ æquale EFG, ita vt latus EF, lateri AB, & EG, ipſi AD, & FG, ipſi BD, æquale ſit. Poſſunt n. tria interualla AB, AD, BD, circino in ſuperficie ſphærę accepta in planum transferri, atq; adeo triangulum conſtitui, cuius tria latera tribus illis ſpatijs ſint æqualia. Deinde ex G, F, ducantur ad rectas E F, EG, perpendiculares F H, G H, coeuntes in H, connectaturque recta E H. Dico E H, æqualem eſſe diametro circuli A B C D. Ducta enim diametro A C, iungatur recta D C. [b] Quoniam vero quatuor anguli quadrilateri E F H G, quatuor rectis æquales ſunt, ſuntque EFH, EGH, recti; erunt FEG, FHG, duobus rectis æquales; atque adeo in quadrilatero E F H G, duo quilibet anguli ex aduerſo duobus rectis æquales erunt. [c] Quare circa ipſum circulus deſcribi poteſt: Quo deſcripto [d] erunt anguli EFG, EHG, eidem ſegmento, cuius chorda E G, inſiſten-



a ſchol. 22. primi. b ſchol. 32. primi. c ſchol. 22. tertij. d 27. tert.

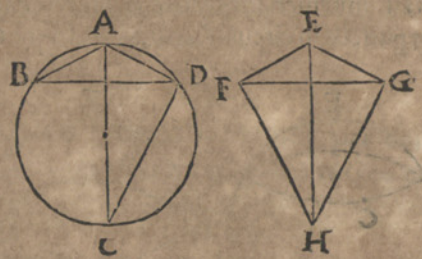
inſiſtentes, æquales. [e] Eſt autem angulus E F G, angulo ABD, æqualis; quod duo latera EF, FG, duobus la- e 8. primi.
teribus AB,BD,æqualia ſint, & baſis EG,baſi AD,ex con- f 27. tertij.
ſtructione, [f] & angulus A B D, angulo ACD, æqualis eſt.
Igitur & angulus EHG,angulo ACD, æqualis erit. Eſt au-
tem & rectus angulus EGH,angulo ADC,æqualis,[g] quod g 31. tertij.
hic quoque rectus ſit in ſemicirculo A D C, exiſtens. Igi-
tur triangula E H G, ACD, duos angulos duobus angulis
æquales habent, nec non & latus E G, lateri A D, quod æ-
qualium angulorum vni ſubtenditur,æquale. [h] Quare & h 26. pri.
latus EH,lateri AC,æquale erit. Lineam igitur rectam EH,
deſcripſimus æqualem diametro A C, circuli ABCD.
Quod erat faciendum.



PROBL. 3. PROPOS. 19. xxix.

LINEAM rectam deſcribere æqualem diametro datæ ſphæræ.

IN ſphæra data ſumptis vtcunque duobus punctis A, B, deſcribatur ex A,polo,& interuallo A B, circu-
lus BD, [a] cuius diametro æqualis recta deſcribatur F G, [b] & fiat ſupra FG, triangulum EFG, habens vtrumq; a 18. huius
reliquorum laterum E F, E G, rectæ ductæ A B, æquale, b ſchol. 22.
ſumendo nimirum circino interuallum A B, &c. Deinde primi.
ex F,G,ad EF, EG, perpendiculares educantur F H, G H,
coeuntes in H; iungaturque recta EH. Dico EH,æqualem
eſſe diametro datæ ſphæræ. Ducta enim ſphæræ diametro
AC, traiiciatur per rectas AB, A C, planum [c] faciens in
ſphæra circulum ABCD, [d] qui maximus erit,cum per dia- c 1. huius.
metrum ſphæræ,atque adeo per centrum eiuſdem ducatur. d 6. huius.
Quare idem per A, polum circuli B D, ductus [e] circulum e 15. huius.
BD, bifariam ſecabit; ac propterea communis ſectio B D,
diameter erit circuli BD. Iunctis autem rectis A D, D C,
erunt duo latera AB,BD,duobus lateribus EF,FG,æqualia,nec non & baſes AD,EG,æquales. Eſt enim F G,
diametro BD,æqualis,ex conſtructione: & vtraque E F, E G, rectæ A B, vel A D. [f] Igitur & anguli A B D, f 8. primi.
EFG,æquales erunt. [g] Eſt autem angulo ABD,angulus ACD, æqualis: & angulo E F G, angulus EHG, vt g 27. tert.
in præcedenti propoſ. demonſtratum eſt. Igitur & anguli A C D, E H G, æquales erunt. Sunt autem & recti
ADC, EGH, æquales, & latus A D, lateri E G, quod vni æqualium angulorum obiicitur, æquale. [h] Igitur & h 26. pri.
recta EH, rectæ AC, æqualis erit. Lineam igitur rectam EH,deſcripſimus æqualem diametro AC, datæ ſphæ-
ræ. Quod faciendum erat.

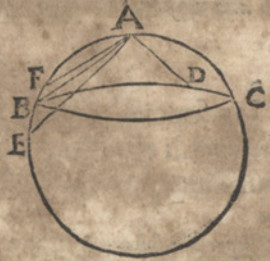


SCHOLIVM.

ADDITVR in alia verſione ſequens hoc Theorema.

LINEA recta à polo cuiuſuis circuli in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ ducta, quæ ſit æ- xxx.
qualis lineæ rectæ ab eodem polo ad circumferentiam circuli ductæ, in circuli circumferen-
tiam cadit.

IN ſphæra ex A, polo circuli B C, recta ducta ſit vtcumque A D, ad eius
circumferentiam, quæ minor erit diametro ſphæræ, atque adeo diametro circu-
li maximi in ſphæra, cum diameter ſphæræ ſit omnium rectarum in ſphæra du-
ctarum maxima. Ducatur iam ex eodem polo A, ad ſuperficiem ſphæræ recta
A E, quæ ipſi A D, æqualis ſit. Dico rectam A E, cadere in circumferentiam cir-
culi B C. Si enim fieri poteſt, non cadat in eius circumferentiam. Et per rectam
A E, & centrum ſphæræ ducatur planum, [i] faciens in ſphæra circulum A B C,
[k] qui maximus erit, cum per centrum ſphæræ tranſeat. Secet autem circulus i 1. huius.
A B C, circulum B C, in punctis B, C. Non cadet ergo recta A E, in puncta B, C, k 6 huius.
cum ponatur non cadere in circumferentiam circuli BC. Ducta igitur recta A B,
erit hæc, ex defin. poli, rectæ AD, atque adeo rectæ A E, æqualis. Et quia vtraque A B, A E, minor eſt diametro maximi circu-
li ABC, vt dictum eſt, [l] erunt arcus AB, AE, cum ſint ſegmenta ſemicirculo minora, æquales, pars & totum. Quod eſt abſur- l 28. tertij.
dum. Cadet ergo recta AE, in circumferentiam circuli B C. Quod eſt propoſitum.



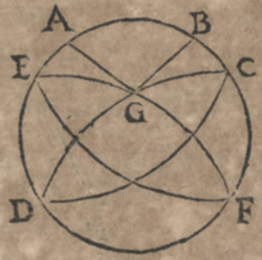
PROBL. 4. PROPOS. 20.

PER duo puncta data in ſphærica ſuperficie maximum circulum deſcribere. xxxj.

IN ſphærica ſuperficie data ſint duo puncta A, B, per quæ deſcribere oporteat circulum maximum. Si
ergo puncta A, B, ſint oppoſita ex diametro ſphæræ, certum eſt, infinitos circulos maximos per ipſa duci poſ-
ſe, ductis nimirum infinitis planis per diametrum ſphæræ puncta illa connectentem. Si autem puncta A, B,
non ſint in ſphæræ diametro, deſcribatur ex A, polo, & interuallo quod lateri quadrati in maximo circulo de-
ſcripti æquale ſit; circulus C D, [a] qui maximus erit, cum recta ex A, polo ad eius circumferentiam ducta æqua- a 17. huius.

lis ſit lateri quadrati in circulo maximo deſcripti,propter interuallum,quo circulus CD,deſcriptus eſt: Hoc autem interuallum ita inuenietur. Inuenta diametro ſphæræ,ſiue circuli maximi, vt in præcedenti propoſ. oſtenſum eſt, erit latus quadrati in circulo illius diametri deſcripti interuallum, quod quæritur, vt patet. Similiter ex B polo, & interuallo eodem, quo prius,circulus deſcribatur EF, [b] qui rurſus erit maximus. Secet autem hic priorem in puncto G, à quo ad polos A,B, rectæ ducantur GA, GB; quarum vtraque, ex conſtructione, æqualis erit lateri quadrati in maximo circulo deſcripti. Tanto enim interuallo ex polis A, B, circuli CD,EF,deſcripti ſunt. Æquales ergo ſunt GA,GB. Iam ex G, polo & interuallo GA, circulus deſcribatur AEDFCB, [c] qui maximus erit; cum recta GA, ex G, polo ad eius circumferentiam ducta æqualis ſit lateri quadrati in maximo circulo inſcripti,vt demonſtratum eſt. Quoniam vero recta GB,æqualis ipſi GA, ducta ad ſuperficiem ſphæræ, [d] cadit in circumferentiam circuli AEDFCB, deſcriptus propterea erit circulus maximus AEDFCB, per data duo puncta A, B, in ſuperficie ſphæræ. Per duo ergo puncta data in ſphærica ſuperficie maximum circulum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

b 17. huius. c 17. huius. d ſchol.19. huius.



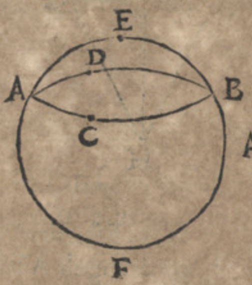
xxxij.

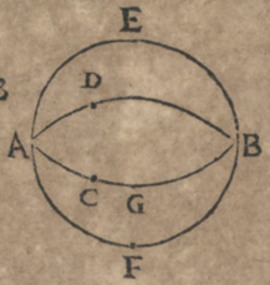
PROBL. 5. PROPOS. 21.

CVIVSLIBET circuli in ſphæra dati polum inuenire.

a 30.tert. b 20. huius. c 14. huius.

SIT inueniendus polus circuli AB, in ſphæra dati, ſitque primum circulus AB, non maximus. Sumptis duobus punctis in circumferentia vtcumque C,D, [a] diuidatur vterque arcus CAD, CBD, bifariam in A,& B, punctis, [b] per quæ deſcribatur maximus circulus AEB; ſeceturque arcus AEB,bifariam in E. Dico E,polum eſſe circuli AB; Quoniam enim arcus AC, AD, æquales ſunt, nec non BC, BD, erunt toti arcus ACB, ADB, æquales. Quare maximus circulus AEB, cum circulum non maximum AB, bifariam ſecet in A, &B, [c] ſecabit eum per polos.Punctum ergo E, æqualiter diſtans à circumferentia circuli AB, polus eſt circuli AP. Eodem modo, ſi reliquus arcus AFB, ſecetur bifariam in F,erit F, alter polus circuli AB.





d 30. tert. e 17.huius f ſchol. 15. huius.

SED ſit iam datus circulus AB,maximus. Sumptis rurſus punctis C, D, vtcumque, [d] & diuiſis arcubus CAD, CBD, bifariam in A,B,oſtendemus, vt prius, totos arcus ACB, ADB, eſſe æquales,ac propterea vtrumque eſſe ſemicirculum circuli maximi. Diuiſo ergo altero ſemicirculo, nempe ACB, bifariam in G, erit recta GA, ſubtendens quadrantem circuli latus quadrati in maximo circulo AB, deſcripti; vt ex propoſ.6. lib. 4. Euclid.conſtat. Itaque ex polo G, & interuallo GA, circulus deſcribatur AEB, [e] qui maximus erit,cum recta ex G,polo,ad eius circumferentiam ducta nimirũ ad punctum A, ſit æqualis lateri quadrati in circulo maximo AB,deſcripti. Diuidatur deniq; arcus AEB,bifariam in E.Dico E, polum eſſe circuli AB.Cum enim maximus circulus ACB,tranſeat per G,polum maximi circuli AEB, [f] tranſibit viciſſim maximus circulus AEB, per polos maximi circuli ACB.Quare punctum E,æqualiter remotum à circumferentia circuli ACB, polus eſt circuli ACB. Eodem modo diuiſo arcu AFB, bifariam in F,erit F, alter polus circuli ACB. Cuiuslibet ergo circuli in ſphæra dati polum inuenimus. Quod erat faciendum.

S C H O L I V M.

IN *alia verſione demonſtrantur ſequentia duo theoremata.*

xxxiij.

I.

SI in ſuperficie ſphæræ acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circumferentiam circuli cuiuſpiam in ſphæra dati cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum polus eſt ipſius circuli.

a 11. vndec. b 47.pri. c 9. tertij. d ſchol. 8. huius.

I N *ſuperficie ſphæræ ABC,acceptum ſit punctum A, à quo ad circumferentiam circuli BC, cadant plures,quam duæ rectæ lineæ æquales AD, AE, AF. Dico A, polum eſſe circuli BC.* [a] *Demittatur enim ex A, in planum circuli BC, perpendicularis AG, iunganturque rectæ DG, EG, FG, eruntque ex 3.defin. lib.11.Eucl. omnes tres anguli ad G,recti.* [b] *Quare tam quadratum ex AD, quadratis ex AG, GD, quam quadratum ex AE, quadratis ex AG, GE, & quadratum ex AF,quadratis ex AG,GF, æquale erit. Cum ergo quadrata rectarum æqualium AD, AE, AF, æqualia ſint, erunt & quadrata ex AG,GD,ſimul quadratis ex AG, GE, ſimul,nec non quadratis ex AG,GF,ſimul æqualia; demptoq; communi quadrato lineæ AG, æqualia erunt reliqua quadrata linearum GD, GE, GF, atque adeo & rectæ GD,GE,GF, æquales erunt.* [c] *Igitur G,centrum erit circuli BC;* [d] *ac proinde recta GA, quæ ex centro G, ad circulum BC, perpendicularis eſt ducta, in polum circuli BC,cadet. Punctum ergo A, polus eſt circuli BC. Quod eſt propoſitum.*



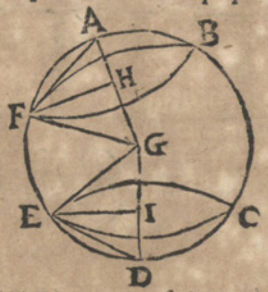
II. IN

II.

IN ſphæra circuli, à quorum polis rectæ ad eorum circumferentias ductæ ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt. Et circulorum æqualium æquales ſunt rectæ ab eorum polis ad circumferentias ductæ. xxxiv.

IN ſphæra ABCDEF, cuius centrum G, ſint duo circuli BF, CE, à quorum polis A,D, rectæ AF,DE, ad eorum circumferentias ductæ ſint æquales. Dico circulos BF, CE, æquales eſſe. [a] *Ducantur ex polis A,D, ad plana circulorum perpendiculares AH, DI,* [b] *quæ cadent in eorum centra H, I, & inde productæ in reliquos polos,* [c] *atque adeo & in G, centrum ſphæræ, Ductis igitur ſemidiametris ſphæræ FG, EG, & ſemidiametris circulorum FH, EI, cum latera AG, GF, lateribus DG, GE, ſint æqualia, & baſis AF, baſi DE,* [d] *erunt anguli AGF, DGE, æquales. Sunt autem anguli H, I, ex deſin. 3. lib. 11. Eucl. recti. Triangula igitur FGH, EGI, duos angulos duobus angulis æquales habent: habent autem & latus FG, lateri EG, quod recto angulo opponitur, æquale:* [e] *Igitur & ſemidiametri FH, EI, æquales erunt, atque adeo & circuli BF, CE, æquales. Quod primo loco propoſitum eſt.*

a 11. vndec.
b 9. huius.
c 10. huius.
d 8. primi.
e 26. pri.



SINT iam circuli BF, CE, æquales. Dico & rectas AF, DE, ab eorum polis ad circumferentias ductas eſſe æquales. [f] *Conſtructis enim eiſdem, erunt ſemidiametri FH, EI, æquales,* [f] *& circuli ipſi æqualiter à centro ſphæræ diſtabunt. Perpendiculares ergo GH, GI, æquales erunt; atque adeo & reliquæ lineæ AH, DI, erunt æquales. Quoniam igitur latera AH, HF, lateribus DI, IE, æqualia ſunt, continentque angulos HI, æquales, cum recti ſint ex deſin. 3. lib. 11. Euclid.* [g] *erunt baſes AF, DE, æquales. Quod ſecundo loco propoſitum erat.*

f 6. huius.
g 4. pri.

THEOR. 17. PROPOS. 22.

O.

SI in ſphæra recta linea per centrum ducta rectam aliquam lineam non per centrum ductam bifariam ſecet, ad angulos rectos ipſam ſecabit. Quod ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque ipſam ſecabit.

IN ſphæra, cuius centrum A, recta AB, per centrum ducta rectam CD, non per centrum ductam ſecet bifariam in B. Dico ipſam CD, ſecari ad angulos rectos. Ducto enim per rectas AB, CD, plano, [a] quod circulum faciat CD, [b] qui maximus erit, cum per centrum ſphæræ tranſeat. Quoniam in circulo CD, recta AB, per eius centrum A, tranſiens rectam CD, non per centrum ductam ſecat bifariam in B, [c] ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, bifariam ipſam ſecabit. Si igitur in ſphæra recta linea, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 1. huius.
b 6. huius
c 3. tertij.



SCHOLIVM.

ADDITVR hic in exemplari græco theorema aliud, quod idem prorſus eſt, quod propoſ. 7. demonſtratum eſt. Vnde ſuperuacaneum eſſe duximus, illud hic repetere.

FINIS LIBRI I. THEODOSII.

THEODOSII SPHÆRICORVM

LIBER SECVNDVS.

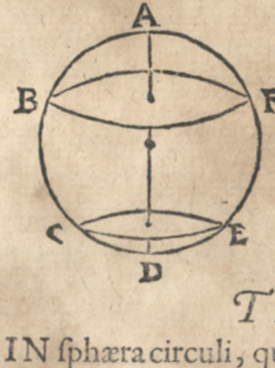
DEFINITIO.

IN ſphæra circuli ſe mutuo tangere dicuntur, cum communis ſectio planorum vtrumque circulum tetigerit.

QVONIAM enim recta tangens circulum quempiam in ſphæra tangit quoque ſuperficiem ſphærę in eo puncto, in quo circulum tangit (alioquin ſi eam non tangeret, ſed ſecaret, ſecaret etiam neceſſario circulum, cum in eius plano exiſtat, connectatq; duo puncta in ſphærę ſuperficie, in quibus nimirum eam ſecare dicitur; quæ quidem duo puncta in circuli quoque circumferentia exiſtent, cum planum circuli per eam rectam ducatur, ac proinde ab ea duobus illis punctis ſecetur) fit, vt circumferentiæ duorum circulorum, quorum communis ſectio (quam nimirum eorum plana producta efficiunt) vtrumque tangit, habeant ſolum illud punctum, in quo ſphęram tangit commune: quandoquidem in eo puncto, & in nullo alio, communis illa ſectio vtrumque circulum tangere poteſt, cum omnia alia illius puncta extra ſuperficiem ſphærę, atque adeo extra circulum vtrumque exiſtant. Recte ergo Theodoſius dixit, circulos in ſphæra ſe mutuo tangere, cum communis ſectio planorum vtrumque circulum tetigerit.

j. *THEOR. 1. PROPOS. 1.*

IN ſphæra paralleli circuli circa eoſdem polos ſunt.



a 21. 1. huius.
b 10. 1. huius.
c ſchol. 14. vndec.
d 8. 1. huius.

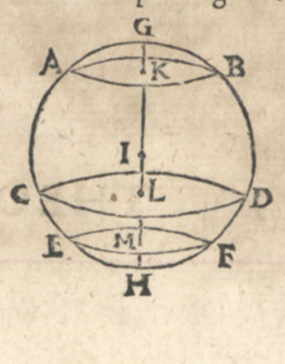
IN ſphæra ABCDEF, paralleli circuli ſint BF, CE. Dico eos circa eoſdem polos eſſe. [a] Sint enim A, D, poli circuli B, F, & connectatur recta AD, [b] quæ ad circulum BF, recta erit, tranſibitque per centrum ſphærę. Quoniam igitur recta AD, ad circulum BF, perpendicularis eſt, [c] erit quoque ad circulum parallelum CE, perpendicularis. Quare cum tranſeat per centrum ſphærę, vt oſtenſum eſt, [d] cadet in polos circuli CE. Sunt ergo A, D, poli circuli CE: ſunt autem & poli circuli BF. In ſphęra igitur paralleli circuli BF, CE, circa eoſdem polos A, D, ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

ij. *THEOR. 2. PROPOS. 2.*

IN ſphæra circuli, qui ſunt circa eoſdem polos, ſunt paralleli.

a 10. 1. huius.
b 14. vndec.

IN eadem ſphæra ABCDEF, circa eoſdem polos A, D, ſint circuli BF, CE. Dico eos parallelos eſſe. Connexa enim recta AD, [a] erit hæc ad vtrumque circulum perpendicularis. [b] Quare plana circulorum BF, CE, parallela ſunt. In ſphæra igitur circuli, qui ſunt circa eoſdem polos, ſunt paralleli. Quod oſtendendum erat.



SCHOLIVM.

SED & hoc theorema ſequens in alia verſione demonſtratur.

IN ſphęra nõ ſunt plures circuli æquales, & paralleli, quã duo.

c 1. huius.
d 10. 1. huius.
e 6. 1. huius.

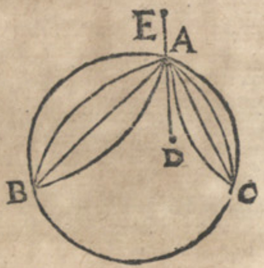
IN ſphæra quacunque ſint, ſi fieri poteſt, plures quam duo circuli æquales, & paralleli, nempe tres AB, CD, EF, [c] qui circa eoſdem polos erunt. Sint ergo eorum poli G, H, & iungatur recta GH, [d] quæ tranſibit per I, centrum ſphæræ, & per K, L, M, centra circulorum; perpendicularisque erit ad circulos AB, CD, EF. Quoniam igitur circuli AB, CD, EF, æquales ſunt, [e] ipſi æqualiter diſtabunt à centro ſphæræ I. Per defin. ergo 6. lib. 1. huius, perpen-

perpendiculares IK, IL, IM, *æquales erunt, nempe pars* IL, *& totum* IM. *Quod eſt abſurdum. In ſphæra igitur non ſunt plures circuli æquales, & paralleli, quàm duo. Quod demonſtrandum erat.*

THEOR. 3. PROPOS. 3. iv.

SI in ſphæra duo circuli ſecent in eodem puncto circumferentiam illius maximi circuli, in quo polos habent, ſe mutuo tangent illi circuli.

IN ſphæra duo circuli AB, AC, ſecent in puncto A, circumferentiam maximi circuli A B C, qui per illorum polos tranſeat. Dico circulos AB, AC, ſe mutuo tangere in A. Quoniam enim circulus maximus ABC, ſecat circulos A B, A C, per polos, [a] bifariam ipſos ſecabit, & ad angulos rectos. a 15.1. huius.

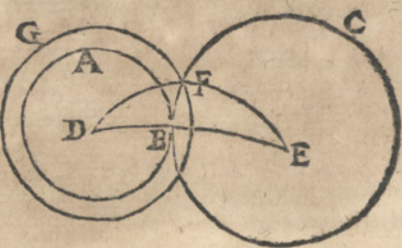


Communes ergo ſectiones circuli A B C, & circulorum AB, AC, nempe rectæ AB, AC, diametri ſunt circulorum A B, A C. Sit quoque communis ſectio planorum, in quibus circuli A B, A C, exiſtunt, recta D E, quæ per punctum A, tranſibit, propterea quod plana circulorum in A, ponantur ſecare circulum ABC. Et quoniam planum circuli A B C. ad plana circulorum AB, AC, rectum eſt oſtenſum, erunt viciſſim plana circulorum AB, AC, ad planum circuli ABC, recta; [b] atque adeo & DE, communis ipſorum ſectio ad idem planum circuli ABC, perpendicularis erit. Igitur & ad diametros A B, A C, in eodem plano exiſtentes, perpendicularis erit, ex defin. 3. lib. 11. Euclid. [c] Quare D E, vtrumque circulum A B, A C, tanget in *A*; ac proinde per defin. huius lib. circuli AB, AC, ſe mutuo tangent in *A*, puncto. Si igitur in ſphæra duo circuli ſecent, &c. Quod erat oſtendendum. b 19. vndeci. c coroll. 16 tertij.

THEOR. 4. PROPOS. 4. v.

SI in ſphæra duo circuli ſe mutuo tangant, maximus circulus per eorum polos deſcriptus, per eorum contactum tranſibit.

IN ſphæra tangant ſe mutuo circuli *A B*, CB, in B; & per D, polum circuli *AB*, & E, polum circuli CB, [a] deſcribatur circulus maximus DE. Dico circulum DE, per contactum B, tranſire. Non tranſeat enim, ſi fieri poteſt, per tactum B, ſed ſecet circumferentiam v.g. circuli CB, in F. Polo igitur D, & interuallo DF, circulus deſcribatur FG, qui, cum ad maius interuallum deſcriptus ſit, quam circulus *A B*, ſecabit circulum CB, in F; quandoquidem circulus *AB*, eundem tangit in B, puncto, vltra quod circulus G F, ex polo D, deſcriptus eſt. Quoniam vero in ſphæra a 20.1. huius.

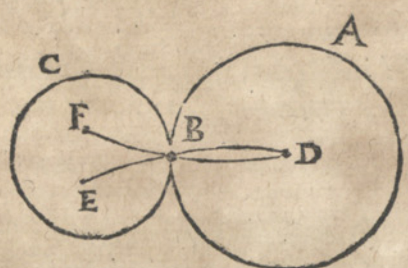


duo circuli G F, C F, ſecant in eodem puncto F, maximum circulum D F E, per eorum polos deſcriptum, [b] tangent ſe mutuo in F, duo circuli G F, C F: Sed & mutuo ſeſe ſecant in F, vt dictum eſt. Quod eſt abſurdum. Non ergo circulus maximus DE, ſecat alibi circulos *A B*, CB, quam in B, contactu, atque adeo per eorum tactum tranſibit. Itaque ſi in ſphæra duo circuli ſe mutuo tangant, &c. Qnod oſtendendum erat. b 3. huius.

THEOR. 5. PROPOS. 5. vj.

SI in ſphæra duo circuli ſe mutuo tangant, maximus circulus deſcriptus per vnius polos, & per contactum amborum circulorum, per reliqui quoque circuli polos tranſibit.

IN ſphæra duo circuli *AB*, CB, tangant ſe mutuo in B, ſintque D, E, poli ipſorum. Dico maximum circulum per D, polum circuli *A B*, & per contactum B, deſcriptum tranſire quoque per E, polum circuli CB. Si enim fieri poteſt, non tranſeat per E, ſed per aliud quoduis punctum F, cuiuſmodi eſt circulus maximus DBF: [a] Et per polos D, E, maximus circulus deſcribatur D E, [b] qui omnino per contactum B, tranſibit; atque adeo duo circuli maximi DBF, DBE, ſe mutuo ſecabunt in D, & B, [c] ac proinde bifariam. Semicirculus ergo erit vterque arcus D B. Quoniam vero circulus maximus per alterum polorum cuiuslibet circuli in ſphæra tranſiens, [d] tranſit quoque per reliquum polum, eſtque inter duos polos eiuſdem circuli ſemicirculus circuli maximi interpoſitus; fit, vt exiſtente D, vno polorum circuli *A B*, punctum B, ſit alter polus. Quod eſt abſurdum. Eſt enim B, in circumferentia circuli. Tranſit igitur circulus maximus D B, per E. Quocirca, ſi in ſphæra duo circuli ſe mutuo tangant, &c. Quod erat oſtendendum. a 20.1. huius. b 4. huius. c 11. 1. huius. d coroll. 16 1. huius.



THEOR. 6. PROPOS. 6. vij.

SI in ſphæra maximus circulus aliquem circulorum in ſphærica ſuperficie deſcriptorum tangat, tanget & alterum ei æqualem, & parallelum.

IN ſphæra maximus circulus A B, tangat circulum A C, in A. Dico circulum AB, tangere quoque alterum circulum ipſi AC, æqualem, & parallelum. Sit enim D, polus circuli AC: [a] ac per D, A, circulus maximus deſcribatur DA: qui, cum per D, polum circuli AC, & per contactum A, tranſeat, [b] tranſibit per polos quoque circuli AB. Aſſumpto autem E, reliquo polo circuli A C, ducatur recta D E, [c] quæ per centrum ſphæræ tranſibit, atque adeo ſphæræ diameter erit. Ex polo igitur E, & ad interuallum E B, circulus deſcribatur BF. Dico circulum maximum A B, tangere quoque circulum B F, in B, & circulum BF, æqualem eſſe, ac parallelum circulo A C. Quoniam enim recta D E, per polos circulorum A C, B F, tranſiens [d] perpendicularis eſt ad ipſos circulos, [e] erunt circuli A C, BF, paralleli. [f] Rurſus quia circuli maximi in ſphæra bifariam ſe ſecant, ſemicirculus erit ACB; atque adeo ſemicirculo DCE, æqualis. Dempto ergo communi arcu BD, æquales remanebunt arcus DA, EB; [g] atque adeo rectæ DA, EB, à polis D, E, ad circumferentias circulorum AC, BF, ductæ æquales. [h] Quare æquales ſunt circuli AC, BF. Denique quia circuli AB, BF, in eodem puncto B, ſecant maximum circulum AEB, in quo quidem polos habent, [i] ſe mutuo tangent in B, circuli AB, BF. Quare circulus maximus A B, tangens in ſphæra circulum A C, tangit quoque alterum circulum BF, ipſi AC, æqualem, & parallelum. Ac proinde ſi in ſphæra maximus circulus aliquem circulorum, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 20. 1. huius. b 5. huius. c 10. 1. huius. d 10. 1. huius. e 14. vndec. f 11. 1. huius. g 29. tert. h ſchol. 21. 1. huius. i 3. huius.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, puncta contactuum A, B, per diametrum eſſe oppoſita. Oſtenſum enim eſt, ACB, eſſe ſemicirculum, ac propterea rectam ex A, ad B, ductam eſſe diametrum ſphæræ, ſeu circuli maximi ACB, &c.

viij.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI ſint in ſphæra duo æquales, & paralleli circuli, maximus circulus, qui eorum alterum tetigerit, reliquum quoque tanget.

IN eadem figura ſint duo circuli æquales, & paralleli AC, BF, & maximus A B, tangat A C. Dico eundem AB, tangere quoque BF. Si enim A B, non tangat ipſum B F, [a] tanget vtique alterum ipſi A C, æqualem, & parallelum. Cum ergo & B F, eidem A C, æqualis ponatur, & parallelus, erunt tres circuli in ſphæra, nempe A C, B F, & ille alius, quem A B, tangit, inter ſe æquales, & paralleli. Quod eſt abſurdum. [b] Non enim plures circuli æquales ſunt, & paralleli in ſphæra, quàm duo. Tanget igitur circulus AB, circulum BF. Quamobrem, ſi ſint in ſphæra duo æquales, & paralleli circuli, &c. Quod erat oſtendendum.

a 6. huius. b ſchol. 2. huius.

SCHOLIVM.

IN alia verſione demonſtratur & ſequens theorema.

ix. CIRCVLI in ſphæra paralleli, quos maximus aliquis circulus tangit, æquales inter ſe ſunt.

IN eadem adhuc figura ſint duo circuli paralleli A C, BF, quos circulus maximus AB, tangat in A, B. Dico circulos AC, BF, æquales inter ſe eſſe. Quoniam enim paralleli ponuntur circuli A C, B E, [c] *ipſi circa eoſdem polos erunt, qui ſint D, E;* [d] *per quos, & polos circuli AB, circulus maximus deſcribatur AFB,* [e] *qui per contactus A, B, tranſibit. Quoniam vero circuli maximi in ſphæra ſe mutuo ſecant bifariam, ſemicirculus erit ADB, atque adeo ſemicirculo DBE, æqualis. Dempto ergo arcu communi DB, æquales remanebunt arcus DA, EB;* [f] *ac proinde & rectæ DA, EB, ex polis D, E, ad circumferentias circulorum AC, BF, ductæ æquales.* [g] *Quare circuli AC, BF, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.*

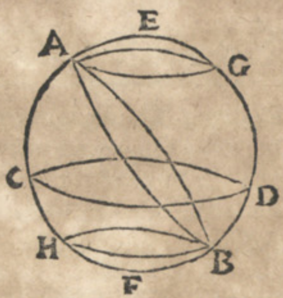
c 1. huius. d 20. 1. huius. e 4. huius. f 29. tert. g ſchol. 21. 1. huius.

x.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in ſphæra maximus circulus ad aliquem ſphæræ circulum obliquus ſit, tanget is duos circulos æquales quidem inter ſe, parallelos autem prædicto circulo, ad quem obliquus eſt.

IN ſphæra maximus circulus AB, ad circulum quemcunque CD, obliquus ſit. Dico circulum A B, tangere duos circulos inter ſe quidem æquales, parallelos autem ipſi C D. [a] Sint E, F, poli circuli CD, [b] per quos, & polos circuli A B, circulus maximus deſcribatur E A B, ſecans A B, in A, & B. Ex polo deinde E, & interuallo E A, circulus deſcribatur A G. Et quoniam circuli A B, A G, in eodem puncto A, ſecant maximum circulum E A B, in quo polos habent, [c] ipſi ſe mutuo tangent in A. Circulus igitur maximus A B, tangens circulum A G, [d] tanget alterum illi æqualem, & parallelum, qui ſit B H. Quia vero circuli paralleli A G, BH, [e] circa eoſdem polos ſunt E, F: Sunt autem E, F, poli etiam circuli C D; erunt tres circuli A G, CD, B H, circa eoſdem polos; [f] atque adeo paralleli inter ſe erunt. Tangit igitur maximus circulus A B, duos A G, BH, æquales quidem inter ſe, parallelos autem ipſi CD, ad quem obliquus eſt. Quocirca, ſi in ſphæra maximus circulus ad aliquem, &c. Quod oſtendendum erat.



a 21. 1. huius. b 20. 1. huius. c 3. huius. d 6. huius. e 1. huius. f 2. huius.

SCHO-

SCHOLIVM.

ALIVD theorema hoc loco adiicitur in alia verſione, videlicet.

SI in ſphera maximus circulus aliquem circulorum in ſphærica ſuperficie tangat, obliquus erit ad alios citculos, quos ſecat, parallelos ei, quem tangit.

IN eadem figura maximus circulus AB, tangat circulum AG, ſecet autem circulum CD, ipſi AG, parallelum. Dico circulum AB, obliquum eſſe ad circulum CD. Quoniam enim maximus circulus AB, tangens circulum AG, non tranſit per ipſius polos. (Si namque per ipſius polos duceretur, [a] ſecaret ipſum bifariam, non autem tangeret.) atque adeo neque per polos circuli CD; ([b] habent enim paralleli circuli AG, CD, eoſdem polos) non ſecabit maximus circulus AB, circulum CD, ad angulos rectos: [c] Aliàs tranſiret per eius polos. Igitur obliquus eſt ad circulum CD. Quod eſt propoſitum.

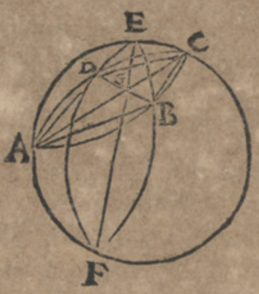


a 15.1. huius.
b 1. huius.
c 13.1. huius.

THEOR. 9. PROPOS. 9. x ij.

SI in ſphæra duo circuli ſe mutuo ſecent, maximus circulus per eorum polos ductus ſecabit bifariam ſegmenta ipſorum circulorum.

IN ſphæra ſe mutuo ſecent duo circuli ABCD, EDFB, in punctis B,D,& per eorum polos [a] deſcribatur maximus circulus AFCE, ſecans circulos dictos in punctis A, C, E, F. Dico circulum AFCE, ſecare bifariam ſegmenta BAD,BCD,BED, BFD. [b] Quoniam enim circulus maximus AFCE, circulos ABCD, EDFB, ſecat bifariam, & ad angulos rectos, quod per eorum polos ductus ſit, erunt communes ſectiones AC, EF, quas cum ipſis facit, diametri ipſorum ſecantes ſeſe in G. Secabunt enim ſe mutuo rectæ AC, EF, cum in eodem plano circuli AFCE, exiſtant, ſitque punctum F, inter puncta A,& C; atque punctum E, inter eadem puncta. Connectantur rectæ BG, DG; Eruntque tria puncta B, G, D, in vtroque plano circulorum ABCD, EDFB; atque adeo in communi eorum ſectione: [c] Eſt autem communis eorum ſectio linea recta. Igitur recta erit BGD. Et quoniam circulus AFCE, oſtenſus eſt ſecans ad angulos rectos vtrumq; circulũ ABCD, EDFB, erit viciſſim vterq; rectus ad circulum AFCE, [d] atq; adeo & BD, communis eorum ſectio ad eundem perpendicularis erit. Recti igitur erunt anguli BGA, DGA, BGC, DGC, ex definit. 3. lib. 11. Euclid. Quare diameter AC, cum per centrum circuli ABCD, tranſeat, ſecetque rectam BD, ad angulos rectos, [e] bifariam eam ſecabit. Itaque cum latera AG, GB, æqualia ſint lateribus AG, GD, contineantque angulos æquales, nempe rectos, [f] erunt baſes AB, AD, ſubtendentes arcus AB, AD, inter ſe æquales, [g] ac proinde & arcus AB, AD, æquales erunt. Eodem modo oſtendemus arcus CB, CD, æquales eſſe; nec non & arcus EB, ED; & FB, FD. Circulus igitur AFCE, ſegmenta BAD, BCD, BED, BFD, bifariam diuidit. Quapropter ſi in ſphæra duo circuli ſe mutuo ſecent, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 20.1. huius.
b 15.1. huius.
c 3. vndec.
d 29. vndec.
e 3. tertij.
f 4. primi.
g 28. tert.

SCHOLIVM.

DVO alia theoremata in alia verſione hoc loco adduntur, hæc videlicet.

I.

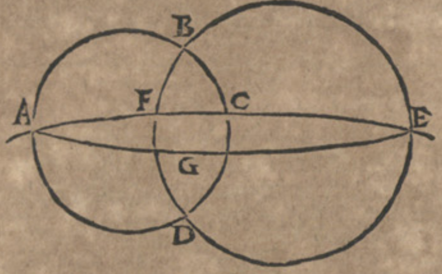
SI in ſphæra circuli ſe mutuo ſecent, circulus alius eorum ſegmenta bifariam ſecans, it per polos eorum, eſtque circulus maximus. xiij.

IN eadẽ figura ſecent ſe mutuo duo circuli ABCD, EDFB, in punctis B,D, & alius quiſpiã circulus AFCE, ſecet ſegmenta BAD, BCD, BED, BFD, bifariam. Dico circulum AFCE, ire per polos ipſorum, eſſeque circulum maximum. Quoniam enim arcus AD, AB, æquales ſunt, nec non CD, CB; erunt toti arcus ADC, ABC, æquales, & propterea ſemicirculi. Eodemque modo ſemicirculi erunt EDF, EBF. Circulus igitur AFCE, bifariam ſecat circulos ABCD, EDFB, atque adeo communes ſectiones AC, EF, ſe interſecantes in G, ipſorum diametri ſunt. Quod ſi connectantur rectæ BG, DG, cum tria puncta B, G, D, in vtroque plano circulorum ABCD, EDFB, ſint, atque adeo in communi ipſorum ſectione; [a] ſit autem communis eorum ſectio linea recta; recta erit BGD. [b] Quoniam vero ſubtenſæ rectæ DA, DC, ſubtenſis rectis BA, BC, ſingulæ ſingulis æquales ſunt, ob æquales arcus, angulosque continent æquales, [c] nempe rectos in ſemicirculis exiſtentes; [d] æquales erunt anguli DAC, BAC. Quod etiam ita probari poterit. Quoniam latera DA, AC, lateribus BA, AC, æqualia ſunt, baſisque DC, baſi BC, æqualis, [e] erunt anguli DAC, BAC, æquales. Rurſus quia latera AD, AG, lateribus AB, AG, æqualia ſunt, angulosque continent æquales, vt demonſtratum eſt; [f] æquales erunt anguli AGD, AGB, ac propterea recti. Perpendicularis igitur eſt BGD, ad rectam AC. Eodem modo oſtendemus rectam eandem BGD, ad EF, perpendicularem eſſe. [g] Quare eadem BGD, perpendicularis erit ad planũ circuli AFCE, per rectas AC, EF, ductum; [h] ac proinde & vtrumq; planum circulorum ABCD, EDFB, per rectam BGD, ductum ad idem planum circuli AFCE, rectum erit: & viciſſim circulus AFCE, ad circulos ABCD, EDFB, rectus erit. Itaque circulus AFCE, circulos ABCD, EDFB, & bifariam & ad angulos rectos ſecat. [i] Quare maximus eſt, tranſitque per ipſorum polos. Quod eſt propoſitum.

a 3. vndec.
b 29. tert.
c 21. tert.
d 4. primi.
e 8. primi.
f 4. primi.
g 4. vndec.
h 18. vndec.
i ſchol. 15. 1. huius.

I I.

xiv. SI in ſphera duo circuli ſe mutuo ſecent, maximus circulus ſecans bifariam duo illorum ſegmenta quæcunque, habens tamen arcum inter illa ſegmenta poſitum ſemicirculo inæqualem; tranſit per polos ipſorum, duoque reliqua ſegmenta bifariam ſecat.



IN ſphæra duo circuli A B C D, EBFD, *ſe mutuo ſecent in punctis* B,D: *Et maximus circulus* A F C E, *ſecet duo quæcumque illorum ſegmenta, nempe* BAD, BED, *biſariam in punctis* A,E,*&* *arcus* AFCE, *incerceptus inter dicta ſegmenta non ſit ſemicirculus.* Dico circulũ AFCE, *tranſire per polos circulorum* A B C D, E B F D, *ſecareq; reliqua ſegmenta* BCD,BFD, *bifariam. Si enim circulus* A F C E, *non tranſeat*
a 9. huius.
b 11.1. huius.
per ipſorum polos, deſcribatur, ſi fieri poteſt, alius circulus maximus AGE,*per eorum polos,* [a] *qui ſegmenta ipſorum bifariam ſecabit; atque adeo per puncta* A, E, *tranſibit.* [b] *Secabunt ſe igitur circuli maximi* AFCE, AGE, *in* A, E, *biſariam: ac propterea ſemicirculus erit* AFCE. *Quod eſt contra hypotheſim. Tranſit ergo circulus* AFCE,*per polos cir-*
c 9. huius. *culorum* ABCD, EBFD. [c] *Quare omnia ſegmenta ipſorum ſecabit bifariam. Quod eſt propoſitum.*

THEOR. 10. PROPOS. 10.

xv. SI ſint in ſphæra paralleli circuli, per quorum polos deſcribantur maximi circuli; parallellorum quidem circumferentiæ inter maximos circulos interceptæ, ſimiles ſunt; maximorum autem circulorum circumferentiæ inter parallelos circulos interceptæ, ſunt æquales.

a 1. huius. SINT in ſphæra circuli paralleli ABCD, EFGH, quorum polus I: [a] (ſunt enim paralleli circuli in ſphæra circa eoſdem polos.) Per I, autem circuli maximi deſcribantur vtcumque A E I G C, BFIHD. Dico



circumferentias parallelorum AB, EF, ſimiles, nec non BC,FG; Item CD, GH; & D A, HE: circumferentias vero maximorum circulorum inter parallelos, nempe AE,BF, CG, DH, æquales eſſe. Sint enim communes ſectiones circuli AIC, & parallelorum rectæ A C, E G, [b] quæ parallelæ erunt: communes vero ſectiones circuli BID, & parallelorum eorundem, rectæ B D, F H, quæ ſimiliter parallelæ erunt. Et quia circuli
b 16. vndec.
maximi AIC,BID, per polos parallelorum deſcripti [c] ſecant parallelos bifariam; erunt AC,BD, diametri circuli ABCD, & punctum L, vbi ſe interſecant, centrum eiuſdem: Item EG, FH, diametri circuli EFGH, & punctum K, vbi ſe interſecant, centrum eiuſdem. Quoniam igitur rectæ EK,KF, rectis AL,LB, parallelæ ſunt, ſuntq; in diuerſis planis, [d] erunt
c 15.1. huius.
d 10. vndec. anguli EkF, ALB, ad centra k,L, æquales. Quare circumferentiæ AB,EF, per ea, quæ in ſcholio propoſ.22.lib. 3. Euclid. oſtendimus, ſimiles erunt. Eodemque modo ſimiles erunt B C, F G, & C D, G H, nec non D A, HE.

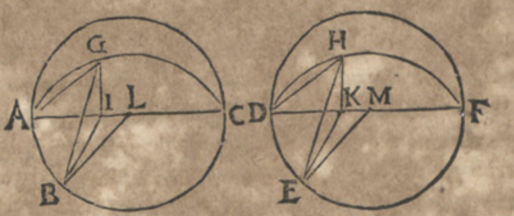
e 28. tert. RVRSVS, quia rectæ ex polo I, ad puncta A, B, C, D, demiſſæ æquales ſunt, ex defin. poli, [e] erunt quoque arcus I A, I B, I C, I D, æquales: Et eodem modo æquales erunt arcus IE, IF, IG, IH. Reliquæ igitur circumferentiæ AE,BF,CG,DH, æquales inter ſe erunt. Quapropter, ſi ſint in ſphæra paralleli circuli, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

xvj.

SI in diametris circulorum æqualium æqualia circulorum ſegmenta ad angulos rectos inſiſtant, à quibus ſumantur æquales circumferentiæ, quarum quælibet inchoata ab extremitate ſui ſegmenti, ſit minor ſemiſſe circumferentiæ integri ſegmenti, à punctis autem æquales circumferentias terminantibus ducantur æquales rectę lineæ ad circumferentias circulorum primo poſitorum; ipſæ circulorum primo poſitorum circumferentiæ interceptæ inter illas rectas lineas, & extremitates diametrorum, erunt æquales.

IN diametris A C, D F, circulorum æqualium A B C, D E F, inſiſtant ipſis circulis ad angulos rectos ſegmenta circulorum æqualia AGC, DHF: ſumanturque æquales arcus AG, D H, ita vt puncta G, H, ſecent



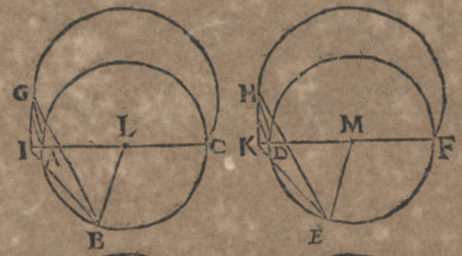
ſegmenta AGC,DHF, non bifariam. Ex G,H, denique in circumferentias circulorum ABC, DEF, cadant rectæ æquales GB,HE. Dico circumferentias AB,DE, eſſe æquales. [a] Demittantur ex G,H, rectæ GI,Hk, ad plana circulorum A B C, D E F, perpendiculares, [b] quæ in communes ſectiones AC,DF, cadent in puncta I,k. Sumptis quoque L,M, centris circulorum ABC, DEF, ducantur rectæ LB, BI, AG; ME, Ek, DH; cadantque primum puncta I, k,
a 11. vndec.
b 38. vndec.
in ſemidiametro AL,DM. Quoniam igitur arcus AGC,DHF, æquales ſunt, nec non & arcus AG,DH; æqua-
c 27. tert. les quoque erunt arcus CG, FH; [c] ac propterea anguli G A C, H D F, illis inſiſtentes æquales. Sunt autem

& angu-

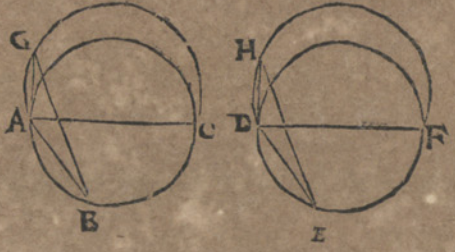
& anguli A I G, D K H, æquales, quod recti ſint ex defin.3.lib.11.Euclid. Itaque duo triangula A I G, DKH, habent duos angulos GAI, AIG, duobus angulis HDK, DKH, æquales. [d] Habent autem & latus A G, lateri DH, æquale (ob æqualitatem arcuum A G, D H.) quod angulis æqualibus I, K, ſubtenditur. [e] Igitur & latus A I, lateri D K, & latus G I, lateri H K, æquale erit. Quoniam vero anguli G I B, H K E, recti ſunt ex defin. 3.lib.11. Euclid. erunt quadrata ex G B, H E, quæ inter ſe æqualia ſunt, ob æqualitatem rectarum G B, H E, [f] quadratis ex GI,IB, & ex HK,KE, æqualia, ac propterea quadrata ex GI,IB, quadratis ex HK, KE, æqualia erunt. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium GI, HK, remanebunt quadrata rectarum IB, KE, æqualia; Et idcirco & rectæ IB,KE,æquales. Et quia A L, D M, ſemidiametri circulorum æqualium æquales ſunt; oſtenſæ autem quoque ſunt æquales AI, DK, erunt & reliquæ IL,KM, æquales. Quare latera I L, L B, lateribus K M, M E, æqualia erunt: ſunt autem & baſes IB, KE, oſtenſæ æquales. [g] Igitur & anguli L, M, ad centra æquales erunt; [h] ac proinde & arcus AB, D E, æquales erunt.

d 29. tert. e 26. pri. f 47. pri. g 8. primi. h 26. tert.

CADANT deinde puncta I, K, in ſemidiametros L A, M D, productas ad A, & D: quod quidem contingere poteſt, quando ſegmenta AGC, DHF, ſemicirculo ſunt maiora; fiatque eadem conſtructio, quæ prius. [i] Oſtendemus, vt prius, angulos GAC, HDF, eſſe æquales; ac propterea [k] cum tam G A C, GAI, quam HDF, HDK, duobus ſint rectis æquales, erunt & GAI, HDK, æquales. Cum ergo & anguli I, K, æquales ſint, nempe recti, [l] & latera GA, HD, æqualia, ob æquales arcus A G, D H, [m] erunt, vt prius, recti GI, IA, rectis HK, KD, æquales; ac propterea & totæ IL,KM, inter ſe æquales erunt. Igitur, vt prius, [n] oſtendemus rectam I B, rectæ K E, [o] & angulum L, angulo M, æqualem eſſe, [p] ac denique arcum A B, arcui D E.



i 27. tert. k 13. pri. l 29. tert. m 26. pri. n 47. pri. o 8. pri. p 26. tert.



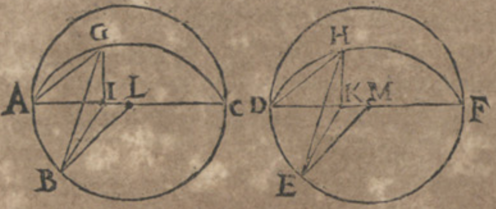
CADANT tertio perpendiculares ex G, H, demiſſæ in plana circulorum A B C, D E F, in puncta A D, quod etiam contingere poteſt, quando ſegmenta AGC, DHF, ſemicirculo ſunt maiora. Ductis igitur rectis AB, D E, erunt anguli GAB, HDE, recti, ex defin.3.lib.11.Euclid. [q] Quare, vt prius, æqualia erunt quadrata rectarum GA, AB, quadratis rectarum HD, DE: Sunt autem quadrata ex GA, HD, æqualia, [r] quod & rectæ GA, HD, æquales ſint, ob æquales arcus AG, DH. Igitur & quadrata ex AB, DE, æqualia erunt; & propterea & rectæ AB, DE, æquales. [s] Quare & arcus AB, D E, æquales erunt. Quod eſt propoſitum. Itaque ſi in diametris circulorum æqualium æqualia circulorum ſegmenta ad angulos rectos inſiſtant, &c. Quod erat demonſtrandum.

q 47. pri. r 29. tert. s 28. tert.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xvj.

SI in diametris circulorum æqualium, æqualia ſegmenta circulorum erigantur, & ab ipſis ſegmentis æquales circumferentię ad extremitates ſegmentorum deſumantur minores dimidijs ipſorum partibus: ab ipſis autem circulis æquales circumferentię ſumantur ad eaſdem partes, quę ſunt ad extremitates diametrorum, rectę lineę ductę à punctis in circumferentijs ſegmentorum ad puncta in circumferentijs circulorum, erunt æquales.

REPETANTVR figuræ propoſitionis præcedentis, cum eiſdem conſtructionibus, ponanturque arcus AB, DE, æquales. Dico & rectas G B, H E, æquales eſſe. Quoniam enim, vt in præcedenti propoſ. demonſtratum eſt, rectæ AI, IG, rectis D K, K H, æquales ſunt; erunt & reliquæ I L, K M, ex ſemidiametris A L, D M, vt in prima figura, vbi puncta I, k, cadunt in ſemidiametros A L, D M, vel certe erunt & totæ I L, k M, æquales, vt in ſecunda figura, vbi puncta I k, cadunt in ſemidiametros A L, D M, productas ad A, & D. Quia igitur I L, L B, rectis kM, M E, æquales ſunt; [a] continentque angulos ad L, M, æquales, ob æqualitatem arcuum A B, D E; [b] erunt & baſes I B, k E, æquales. Quamobrem cum latera GI, IB, lateribus Hk, kE, æqualia ſint, contineantque angulos G I B, H k E, æquales, nimirum rectos, ex defin. 3. lib. 11. Euclid. [c] erunt & baſes G B, H E, æquales. Quod eſt propoſitum. Facilius idem concludetur, ſi perpendiculares ex G, H, in plana circulorum A B C, D E F, demiſſæ cadant in puncta A, D, vt in tertia figura. [d] Nam quia rectæ G A, A B, rectis HD, D E, æquales ſunt, ob æquales arcus A G, D H, & A B, D E, continentque angulos æquales, vtpote rectos, ex defin.3. lib. 11. Euclid. [e] erunt baſes GB, HE, æquales. Si igitur in diametris circulorum æqualium, æqualia ſegmenta, &c. Quod erat oſtendendum.



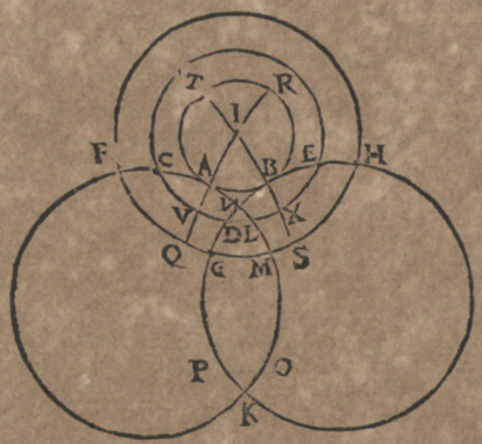
a 27. tert. b 4. pri. c 4. pri. d 29. tert. e 4. primi.

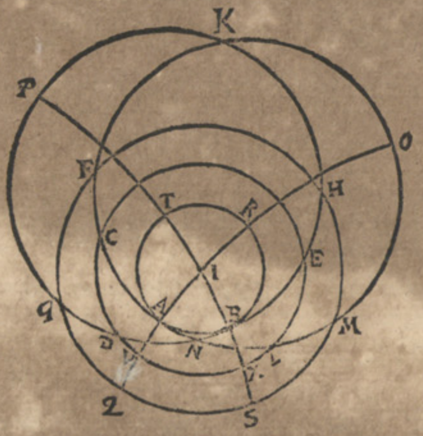
THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

xviij. SI in ſphæra ſint paralleli circuli, & deſcribantur maximi circuli, qui vnum quidē parallelorum tangant, reliquos vero ſecent; circumferentiæ parallelorum interceptæ inter eos maximorum circulorum ſemicirculos, qui non concurrunt, ſimiles erunt; maximorum vero circulorum circumferentiæ inter duos quoſcunque parallelos interceptæ, erunt æquales.

a 1. huius. b 11. 1. huius. SINT in ſphæra paralleli circuli AB, CDE, FGH, [a] qui eundem polum habebunt, nempe I. Circuli autem maximi AFK, BHK, tangant parallelum AB, in punctis A, B, & reliquos ſecent in punctis F, C, L, M; H, E, D, G; ſeipſos autem muto ſecent in K, N, vt ſint ſemicirculi KMN, NFK; KGN, NHK. [b] Maximi enim circuli ſe ſecant mutuo bifariam. Sumatur quoque arcus KO, arcui NA, & arcus KP, arcui NB, æqualis, vt ſint quoque ſemicirculi AMO, OFA; BGP, PHB. Erunt igitur ſemicirculi AMO, BHP, non coeuntes, cū ſe mutuo non ſecent. (Hi autem ſemicirculi abſcinduntur à circulis AIRO, BITP, vt in ſecunda figura apparet. In prima autem figura circuli AI, BI, per R, & T, producti intelligendi ſunt tranſire per O, P, vt eoſdem ſemicirculos auferant.) Eodem modo non coeuntes erunt ſemicirculi BGP, AFO. Dico arcus parallelorum AB, LE, MH, interceptos inter ſemicirculos AMO, BHP, non coeuntes ſimiles eſſe, necnon & arcus AB, CD, FG, interceptos inter ſemicirculos BGP, AFO, non concurrentes ſimiles eſſe: Arcus vero maximorum circulorum AC, AL, BD, BE, æquales eſſe; necnon & arcus CF, LM, DG, EH: quorum illi inter parallelos AB, CDE, hi vero inter parallelos CDE, FGH, interiiciuntur: Eodemque pacto æquales eſſe arcus AF, AM, BG, BH, inter parallelos AB, FGH, interiectos. [c] Per polum enim I, & puncta contactuum A, B, circuli maximi deſcribantur QAIR, SBIT, ſecantes parallelos in Q, S, V, X. [d] Tranſibunt hi circuli maximi per polos quoque circulorum AFK, BHK; [e] ac proinde bifariam ſecabunt ſegmenta CAL, DBE, CVL, DXE: necnon ſegmenta FAM, GBH, FQM, GSH. [f] Præterea iidem circuli ad angulos rectos ſecabunt parallelos AB, CDE, FGH, & maximos circulos AFK, BHK. Quoniam igitur diametris circulorum æqualium AFK, BHK, inſiſtunt ad angulos rectos ſegmenta circulorum æqualia, nempe ſemicirculi inchoati à punctis A, B, & per I, tranſeuntes, donec iterum ſecent circulos AFK, BHK, nimirum in punctis O, P, vt in ſecunda figura apparet; [g] ſuntque arcus æquales AI, BI, quod ex defin. poli rectæ IA, IB, æquales ſint; qui quidem minores ſunt dimidijs ſemicirculorum partibus: (cum enim dimidij ſint arcuum AIR, BIT, quod, ex defin. poli, rectæ ex I, ad puncta A, B, R, T, [h] atq; adeo arcus quoque ſint æquales: ſint autem arcus AIR, BIT, ſemicirculo minores, quod ſemicirculi tendant ex A, & B, per I, vſque ad circulos AFK, BHK, quales in ſecunda figura ſunt ARO, BTP; erunt arcus AI, BI, minores dimidijs partibus illorum ſemicirculorum.) ſunt quoque æquales rectæ IC, IE, ex poli defin. [i] erunt arcus AC, BE, æquales: Eſt autem AC, ipſi AL, & BE, ipſi BD, æqualis, [k] propterea quod arcus CAL, DBE, bifariam ſecantur, vt demonſtratum eſt. Quatuor ergo arcus AC, AL, BE, BD, æquales ſunt. Eodem modo oſtendemus, æquales eſſe quatuor arcus AF, AM, BH, BG; ac propterea & reliquos CF, LM, EH, DG, qui quidem ſinguli inter binos parallelos intercipiuntur. Quod ſecundo loco proponebatur demonſtrandum.





c 20. 1. huius. d 5. huius. e 9. huius. f 15. 1. huius. g 28. tert. h 28. tert. i 11. huius. k 9. huius.

QVIA vero arcus toti CAL, DBE, æquales ſunt, quod ipſorum dimidia æqualia ſint, vt demonſtratum eſt; [l] erunt & rectæ ſubtenſæ CL, DE, æquales, quæ quidem arcubus quoque CVL, DXE, ſubtenduntur; [m] ac propterea & arcus parallelorum CVL, DXE, æquales erunt. [n] Cum ergo ſecentur bifariam in V, X, vt dictum eſt, æquales erunt eorum medietates, nimirum quatuor arcus CV, VL, DX, XE. Si igitur arcubus æqualibus CV, DX, communis arcus addatur VD, vel auferatur in ſecunda figura, æquales erunt arcus CD, VX: [o] Eſt autem arcus VX, arcui AB, ſimilis. Igitur & CD, eidem AB, ſimilis erit. Non ſecus oſtendemus FG, eidem AB, ſimilem eſſe; nec non & arcus EL, HM, eidem arcui AB, eſſe ſimiles. Quod primo loco proponebatur demonſtrandum. Si ergo in ſphæra ſint paralleli circuli, &c. Quod oſtendendum erat.

l 29. tertij. m 18. tert. n 9. huius. o 10. huius.

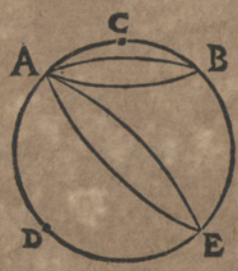
SCHOLIVM.

DEBENT *autem ſemicirculi non concurrentes inchoari à punctis contactuum A, B: quales ſunt AMO, BHP. Quare cum cuiuslibet circuli maximi ſint duo ſemicirculi inter puncta contactuum duorum parallelorum oppoſitorum non ſumendi ſunt duorum circulorum ſemicirculi ſe inter puncta contactuum duorum parallelorum ſecantes, ſed vnus quidem verſus illud punctum ſectionis, alter vero in alteram partem vergens; ita vt conuexum vnius reſpiciat concauum alterius, & contra*

contra, vt in prædictis duobus ſemicirculis apparet. Itaque ſi accipiantur duo ſemicirculi AMO, DKY, (ſumpto arcu KY, æquali ipſi DN,) non concurrentes, vt patet, non erunt arcus DL, GM, ſimiles. Alias maximi duo circuli per polum I, & puncta D, I, ducti, tranſirent per puncta G, M: quandoquidem per 10. huius intercipiunt arcus ſimiles. Hoc autem fieri non poteſt. Eſſent enim DG, LM, ſemicirculi: cum per 11. primi huius maximi circuli ſe bifariam ſecent.

PROBL. 1. PROPOS. 14. xvij.

CIRCVLO in ſphæra dato, qui minor ſit quam circulus maximus, datoq; aliquo puncto in eius circumferentia, per illud punctum deſcribere circulum maximum, qui tangat datum circulum.



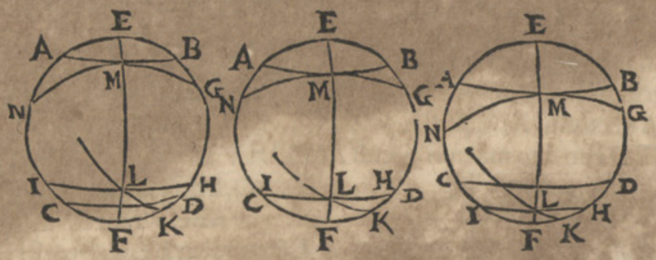
IN ſphæra datus circulus ſit non maximus AB, cuius polus C, oporteatq; per A, punctum in eius circumferentia datum, deſcribere maximum circulum, qui circulum AB, tangat. [a] Per polum C, & punctum A, deſcribatur circulus maximus CADEB, in quo ſumatur quadrans AD, & polo D, interuallo DA, circulus deſcribatur AE, [b] qui maximus erit, quod recta ſubtenſa DA, latus ſit quadrati in maximo circulo deſcripti. Dico circulum maximum AE, tangere circulum AB, in A. Quoniam enim duo circuli AB, AE, eundem circulum CAD, per eorum polos tranſeuntem ſecant in eodem puncto A, [c] ipſi ſe mutuo tangent in puncto A. Circulo igitur in ſphæra dato, &c. Quod faciendum erat.

a 20. 1. hui.
b 17. 1. hu.
c 3. huius.

PROBL. 2. PROOS. 15. xix.

CIRCVLO in ſphæra dato, qui minor ſit maximo circulo, & puncto aliquo dato in ſphæræ ſuperficie, quod ſit inter datum circulum, & alium eidem æqualem, & parallelum, per punctum illud datum deſcribere maximum circulum, qui tangat datum circulum maximo minorem.

SIT in ſphæra datus circulus non maximus AB, cui æqualis ſit & parallelus CD, datumq; punctum ſit G, inter duos circulos AB, CD; oporteatque per G, circulum maximum deſcribere, qui tangat circulum AB. Sint E, F, poli parallelorũ AB, CD, [a] (habent enim paralleli eoſdem polos) [b] & per E, G, circulus maximus deſcribatur EAC, qui per reliquum polum F, tranſibit, ex coroll. ſcholij prop. 10. lib. 1. huius. In hoc accipiatur quadrans BH; cadetque punctum H, vel ſupra D, vel in D, vel infra D: Quodcunque autem horum contingat, ita rem exequemur. Ex polo E, ad interuallum EH, vel ex polo F, ad interuallum FH, circulus deſcribatur HI, [c] qui ipſis AB, CD, parallelus erit, exiſtetque vel ſupra CD, vel idem erit qui CD, vel infra CD, ſitus erit, prout punctum H, ſupra D, vel in D, vel infra D, poſitum fuerit. Sumatur rurſum quadrans GK, eritque punctum K, vltra H, cum GH, quadrante minor ſit. Polo deinde G, interuallo autem GK, circulus deſcribatur KL, [d] qui maximus erit, quod recta ſubtendens quadrantem GK, æqualis ſit lateri quadrati in maximo circulo deſcripti. Secet autem KL, circulum HI, in L, [e] (Secabit enim eum neceſſario, cum punctum K, ſit infra H, & ad I, non perueniat. Nam cum paralleli AB, CD, æquales ſint; [f] erunt rectæ EA, FD, æquales, [g] ac proinde & arcus AE, DF, æquales erunt. Addito ergo communi arcu AF, æquales erunt arcus EAF, AFD: atque adeo cum EAF, ſit ſemicirculus inter polos E, F; erit quoque AFD, ſemicirculus. Eſt autem AI, quadrans; [h] cum æqualis ſit quadranti PH. Igitur & ID, quadrans erit: ac propterea IG, quadrante maior. Quare ſumpto quadrante GK, cadet quidem punctum K, infra H, ſed ad I, non perueniet. Ex quo fit, circulum HI, à circulo KL, ſecari) & per L, F, circulus maximus deſcribatur FL, qui per reliquum polum E, tranſibit, ex coroll. ſcholij propoſ. 10. lib. 1. huius. Secet autem hic circulus FLE, circulum AB, in M. [i] Eruntque arcus ML, BH, circulorum maximorum per E, F, polos parallelorum tranſeuntium, intercepti inter parallelos AB, HI, æquales, ac propterea exiſtente BH, quadrante per conſtructionem, erit & LM, quadrans. Polo igitur L, interuallo autem LM, circulus deſcribatur MN, [k] qui maximus erit, quod recta ſubtendens quadrantem LM, æqualis ſit lateri quadrati in maximo circulo deſcripti. Quoniam vero maximus circulus KL, tranſit per L, polum maximi circuli NM, [l] tranſibit viciſſim maximus circulus NM, per G, polum circuli KL: atque ita tranſit maximus circulus NM, per datum punctum G. Dico iam eundem tangere circulum AB, in M. Quoniam enim circuli AB, GN, in eodem puncto M, ſecant maximum circulum EF, in quo polos habent, [m] ipſi ſe mutuo tangent in M. Deſcriptus eſt ergo per G, circulus maximus GN, tangens circulum AB, in M. Quare circulo in ſphæra dato, &c. Quod faciendum erat.



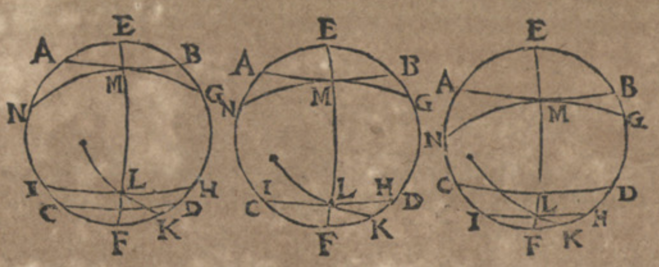
a 1. huius.
b 20. 1. hui.
c 2. huius.
d 17. 1. hui.
e 20. 1. hui.
f Schol. 21. huius.
g 28. tertij.
h 10. huius.
i 10. huius.
k 17. 1. hui.
l Schol. 15. 1 huius.
m 3. huius.

SCHOLIVM.

QVOD ſi punctum G, datum ſit præciſe in medio arcus BD, erit GF, quadrans. Tunc enim ſi æqualibus arcubus GB, GD, addantur arcus BE, DF, [n] qui æquales ſunt; cum rectæ EB, FD, per defin. poli æquales ſint: æquales fient arcus GE, GF; ac proinde, exiſtente EGF, ſemicirculo inter polos E, F, quadrãtes erunt GE, GF. Polo igitur G, interualloq; GF, circulus deſcriptus FE,

n 28. tertij.

q 3. huius.



ſecabit HI, in L, puncto, quod rurſum erit polus circuli tangentis, vt prius. Si vero G, punctum datum ſit idem, quod D, erit polus circuli tangentis in medio arcus DCA, cũ hic arcus ſemicirculus ſit. ¶ *Circulus autem ex illo polo deſcriptus tanget AB, in A, & CD, in D, vt patet: quoniam videlicet circulus hic maximus, & paralleli AB, CD, ſecant in punctis A, D, circumferentiam maximi circuli ACDB, in quo polos habent.*

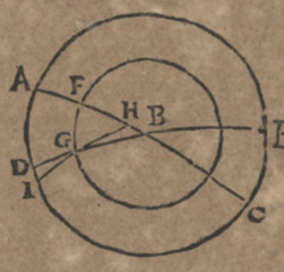
QVONIAM vero ſicut L, polus eſt oſtenſus circuli maximi GN, tangentis, circulum AB, ita quoque oſtèndi poteſt, aliud punctum, in quo maximus circulus KL, circulum HI, ex altera parte ſecat, polum eſſe alterius cuiuſdam circuli maximi, qui per G tranſeat, tangat que circulum AB, in alio puncto; perſpicuum eſt per punctum in ſphæra datum inter duos circulos æquales, & parallelos deſcribi poſſe duos circulos maximos, qui circulum AB, tangant in duobus punctis.

xx.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

MAXIMI circuli, qui ſimiles circumferentias parallelorum circulorum in ſphæra auferunt, aut per parallelorum polos tranſeunt, aut eundem vnum parallelum tangunt.

IN ſphæra maximi circuli ABC, DBE, auferant ex parallelis ADC, FG, circumferentias ſimiles AD, FG. Dico maximos circulos ABC, DBE, aut tranſire per polos parallelorum ADC, FG, aut vnum eundem parallelum tangere. Aut enim alter illorum, nempe ABC, tranſit per polos parallelorum, atque ita oſtendemus, alterum per eoſdem tranſire, aut non tranſit quidem per polos parallelorũ, ſed alterum tamen illorum tangit, atque ita demonſtrabimus, alterum eundem tangere; aut denique neque per polos parallelorum incedit, neque alterum illorum tangit, quo poſito concludemus circulos maximos datos aliquem alium parallelum tangere datis parallelis minorem. Trãſeat enim primum ABC, per polos parallelorum. Dico & DBE, per eoſdem tranſire, hoc eſt, punctum B, in quo ſe ſecant maximi circuli ABC, DBE, polum eſſe parallelorum ADC, FG. Si namque B, non eſt eorum polus, ſit H, polus ipſorum. Et quia circulus ABC, ponitur tranſire per

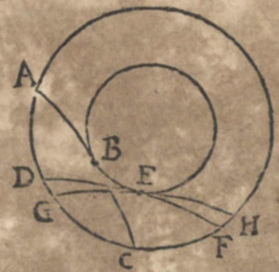


a 20.1. hui.
b 10. huius. eorum polos, erit H, in circumferentia ABC. [a] Per H, G, deſcribatur circulus maximus HG, ſecans ADC, in I. [b] Eruntque arcus AI, FG, ſimiles, cum intercipiantur inter maximos circulos AH, HI, per polum H, deſcriptos: Ponitur autem & arcus AD, eidem arcui FG. ſimilis. Similes ergo ſunt arcus AI, AD; atque adeo cum ſint eiuſdem circuli, inter ſe æquales erunt, totum & pars. Quod eſt abſurdum. Non ergo aliud punctum, præter B, polus erit parallelorum, ſi alter circulorum ABC, DBE, nempe ABC, per illorum polos ducitur. Quare vterque circulus maximus ABC, DBE per polum B, parallelorum tranſit, ſi vnus ipſorum tranſit.

SED iam duo maximi circuli ABC, DEF, auferant rurſum ex parallelis ADC, BE, circumferentias ſimiles AD, BE, & neuter illorum tranſeat per parallelorum polos, ſed alter, nempe ABC, vnum eorum, puta BE, tangat in B. Dico & circulum DEF, eundem BE, tangere in E. Si enim non tangit, ſed ſecat. [c] deſcribatur per E, punctum in parallelo BE, datum maximus circulus GEH, tangens parallelum BE, in E; eruntque ſemicirculi, quorum alter ex E, per G, ducitur, alter vero ex B, per A, tranſit, non coeuntes, vt conſtat ex figura propoſ. 13. huius libri, & ex demonſtratis ibidem. [d] Igitur arcus BE, AG, ſimiles erunt: Ponuntur autem & ſimiles BE, AD. Similes ergo ſunt inter ſe AG, AD; ac proinde, cum ſint eiuſdem circuli, inter ſe æquales erunt, totum, & pars. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo alius circulus maximus per E, ductus præter DEF, parallelum BE, tangit in E, ſi ABC, eundem in B, tangit. Quare ſi ABC, tangit BE, tanget & DEF, eundem BE.

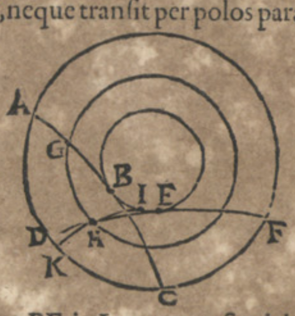
c 14. huius.

d 13 huius.



POSTREMO maximi circuli ABC, DEF, auferant ex parallelis ADC, GH, circumferentias ſimiles AD, GH; & neuter illorum per parallelorum polos ducatur, aut alterum eorum tangat. Dico circulos maximos ABC, DEF, tangere alium quendam parallelum ipſis ADC, GH minorem. Quoniam enim circulus maximus ABC, neque tranſit per polos parallelorum, neque alterum ipſorum tangit, erit circulus maximus ABC, ad vtrumque parallelorũ ADC, GH, obliquus. Si enim rectus eſſet, [e] tranſiret per ipſorum polos, quod non ponitur. [f] Tanget igitur ABC, duos circulos æquales inter ſe, & parallelos vtrique ADC, GH. Tangat ergo parallelum BE, qui minor erit vtroque ADC, GH; (cum ABC, ipſos ſecet) atque adeo & alter ſibi æqualis, & parallelus minor erit vtroque ADC, GH: ac proinde paralleli ADC, GH, poſiti erũt inter illos duos, quos circulus ABC, tangit. Dico & DEF, eundem BE, tangere. Si enim non tangit, [g] deſcribatur per punctum H, quod eſt inter circulum BE, & ſibi æqualem, ac parallelum, vt oſtendimus, circulus maximus KH, tangens BE, in I; eruntque ſemicirculi, quorum alter ex I, per H, alter vero ex B, per G, tranſit, non coeuntes, vt conſtat ex figura propoſ. 13. huius libri, & ex demonſtratis ibidem. [h] Igitur arcus AK, GH, ſimiles erunt: Ponuntur autem & AD, GH, ſimiles. Similes igitur ſunt AK, AD; atque adeo, cum ſint eiuſdem circuli, inter ſe æquales

e 13.1. hui.
f 8. huius.



g 15. huius.
h 13. huius.

quales erunt, totum & pars. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo alius circulus maximus per H, deſcriptus, præter DEF, parallelum BE, tangit, ſi ABC, eundem tangit in B. Quare ſi ABC, tangit circulum BE, tanget & DEF, eundem BE. Quapropter maximi circuli, qui ſimiles circumferentias, &c. Quod erat oſtendendum.

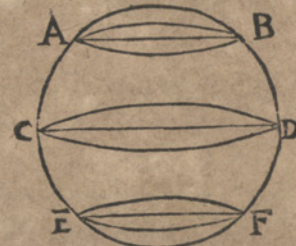
SCHOLIVM.

MANIFESTVM autem eſt, circulos maximos ABC, DEF, ita tangere eundem parallelum BE, vt ſemicirculi eorum à contactibus per arcus ſimiles procedentes non coeant. Alias non eſſent arcus ablati ſimiles, vt conſtat ex propoſ. 13. huius libri.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xxj.

IN ſphæra paralleli circuli, inter quos & maximum parallelorum æquales circumferentiæ maximorum circulorum intercipiuntur, ſunt inter ſe æquales: Illi vero, inter quos & maximum parallelorum maiores maximorum circulorum circumferentiæ intercipiuntur, ſunt minores.

SINT in ſphæra paralleli circuli AB, CD, EF; ſitque CD, maximus parallelorum. Inter circulum vero CD, & vtrumque parallelorum AB, EF, intercipiantur æquales circumferentiæ AC, CE, maximi alicuius circuli ACEFDB. Dico parallelos AB, EF, æquales eſſe. Sint enim communes ſectiones parallelorum, & circuli ACEFDB, rectæ AB, CD, EF, [a] quæ parallelæ inter ſe erunt. Tranſeat autem primum circulus maximus ACE, FDB, per polos parallelorum. Quo poſito, [b] ſecabit circulus ACEFDB, parallelos AB, CD, EF, biſariam, & ad angulos rectos; atque adeo diametri erũt AB, CD, EF, parallelorum. [c] Quoniam vero arcus AC, BD, æquales ſunt, nec non & arcus CE, DF; ponitur q; AC, æqualis ipſi CE; erunt AC, BD, ſimul ipſis CE, DF, ſimul æquales: Sunt autem ſemicirculi æquales CABD, CEFD: [d] quia circuli maximi CD, ACEFDB, ſe mutuo biſariam diuidunt. Igitur reliqui arcus AB, EF, æquales erunt, [e] ac propterea & rectæ AB, EF, hoc eſt, diametri circulorum AB, EF, æquales. Circuli ergo AB, EF, æquales ſunt.



a 16. vnde. b 15. 1. hui. c 10. huius. d 11. 1. hui. e 29. tertij.

QVOD ſi arcus AC, maior ponatur arcu CE. Dico circulum AB, minorem eſſe circulo EF. Poſita enim eadem conſtructione, & demonſtratione, [f] erunt vt prius, arcus AC, BD, æquales, nec non CE, DF, cum ergo AC, maior ponatur quam CE, erunt duo arcus AC, BD, ſimul maiores duobus arcubus CE, DF, ſimul. Reliquus igitur AB, ex ſemicirculo CABD, minor erit reliquo EF, ex ſemicirculo CEFD; ac propterea & recta AB, hoc eſt, diameter circuli AB, minor erit, quam recta EF, hoc eſt, quam diameter circuli EF, vt in ſchol. propoſ. 29. lib. 3. Eucl. à nobis eſt demonſtratum, cum arcus AB, EF, ſemicirculo ſint minores. Quare minor erit circulus AB, circulo EF. Quod eſt propoſitum.

f 10. huius.

SED iam circulus maximus ACEFDB, non tranſeat per polos parallelorum AB, CD, EF; ſintque rurſus arcus AC, CE, æquales. Dico adhuc circulos AB, EF, eſſe æquales. Sint enim G, H, poli parallelorum AB, CD, EF, [g] & per G, H, ac polos circuli maximi ACEFDB, circulus maximus deſcribatur GIHK, [h] qui circulum ACEFDB, ſecabit duobus in punctis vt in IK, ad angulos rectos. Quoniam igitur circulus maximus GIHK, per polos maximorum circulorum ACEFDB, CD, tranſit, ex conſtructione, [i] tranſibunt hi viciſſim per illius polos. Puncta igitur C, D, vbi ſe duo hi circuli interſecant, poli erunt circuli GIHK; (alias non vterq; circulus ACEFD, CD, per polos circuli GIHK, tranſiret) ac proinde ductæ rectæ CI, CK, ex defin. poli, æquales erunt [k] ac propterea & arcus CI, CK, inter ſe erunt æquales. Sunt autem & arcus AC, CE, per hypotheſim, æquales. Reliqui igitur arcus AI, EK, æquales quoque erunt. Rurſus quia ſemicirculus IGK; ſemicirculo GKH, æqualis eſt; [l] (Diuidunt enim ſe mutuo circuli ACEFDB, & GIHK, biſariam; ac proinde IGK, ſemicirculus eſt; Arcus autẽ GKH, ſemicirculus eſt, propter G, H, polos parallelorũ) Dempto cõmuni arcu GK, erunt reliqui arcus GI, HK, æquales. Quoniam igitur in diametro circuli ICKD, ſegmenta circulorum æqualia IGK, KHI, [m] quæ ſemicirculi ſunt, vt oſtendimus, inſiſtunt ad angulos rectos, ſuntque arcus IG, KH, æquales, & non ſunt ſegmentorum ſemiſſes, ſiue quadrantes, cum G, H, non ſint poli circuli ICKD: Item æquales ſunt arcus IA, KE, vt demonſtratum eſt; [n] erunt rectæ demiſſæ GA, HE, æquales. [o] Quare circuli AB, EF, æquales inter ſe erunt.



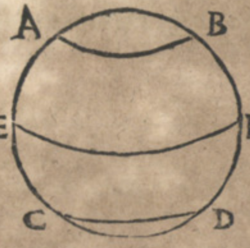
g 20. 1. hui. h 15. 1. hui. i Schol 15. 1 huius. k 28. tertij. l 11. 1. huius m 11. 1. hui. n 12. huius. o Sch. 26. 1. huius.

QVOD ſi arcus AC, maior ponatur arcu CE; Dico circulum AB, minorem eſſe circulo EF. Sumpto enim arcu CL, qui æqualis ſit arcui CE, erit, vt proxime demonſtratum eſt, parallelus per L, deſcriptus æqualis parallelo EF: [p] ſed parallelus AB, minor eſt, quam parallelus per L, deſcriptus, cum ille longius à maximo parallelorum, atque adeo à centro ſphæræ, abſit. Minor igitur quoque eſt parallelus AB, quam EF. Quod eſt propoſitum. In ſphæra ergo paralleli circuli, inter quos & maximum parallelorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

p 6. 1. huiu.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xxij.

IN ſphæra circumferentiæ maximorum circulorum interceptæ inter maximum parallelorum, & duos alios circulos æquales, & parallelos, ſunt ęquales: Illę vero, quę intercipiuntur inter maiorem parallelum, & maximum, ſunt minores.



IN ſphæra ſint duo paralleli æquales AB,CD,& maximus parallelorum ſit EF: Hos autem omnes parallelos ſecet maximus alius circulus ACDB. Dico arcus AE,EC,nec non BF,FD,æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales,ſit AE,maior.[a] Erit igitur circulus AB,minor circulo CD, quod eſt contra hypotheſim. Sunt ergo æquales arcus AE,EC, nec non BF,FD.

a 17.huius.

QVOD ſi circulus AB,maior ponatur circulo CD;Dico arcum AE, minorem eſſe arcu EC.Si enim non eſt minor, erit vel æqualis, vel maior.Si æqualis, [b] erunt circuli AB, CD,æquales: ſi maior, [c] erit circulus AB,minor circulo CD,quorum vtrumque eſt contra hypotheſim.Minor ergo eſt arcus AE,quam EC.Quamobrem in ſphæra circumferentiæ maximorum circulorum interceptæ,&c.Quod oſtendendum erat.

b 17.huius. c 17.huius.

xxiij.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si in ſphæra maximus circulus parallelos aliquot circulos in ſphærica ſuperficie deſcriptos ſecet quidem,non tamen per polos,in partes inæquales eos ſecabit, excepto maximo parallelorum: De parallelorum autem ſegmentis in vno hemiſphæriorum interceptis, ea quæ ſunt inter maximum parallelorum, & polum conſpicuum, ſunt maiora ſemicirculo; reliqua vero, quæ ſunt inter maximum parallelorum, & polum occultum, ſunt ſemicirculo minora: Æqualium denique ac parallelorum circulorum alterna ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.



IN ſphæra maximus circulus ABCD,parallelos EF,GH,IK,ſecet in L,M;B,D;& O,P,non per polos,qui ſint Q,R;& ſit GH,parallelorum maximus,& Q, polus conſpicuus, & R, occultus in hemiſphærio, quod ſupra circulum maximum ABCD, extat,& ad partes F,vergit.Dico circulum ABCD, parallelos non bifariam ſecare,excepto maximo GH;[a] hunc enim bifariam ſecat:ſegmentum autem LFM, inter maximum parallelum, & polum Q conſpicuũ ſemicirculo eſſe maius, & OKP, minus. Si denique paralleli EF, IK,æquales ſint,alterna ſegmenta LFM,OIP,æqualia eſſe.[b] Per polum enim Q & punctum B, circulus maximus deſcribatur QBRD; qui per reliquum polum R,tranſibit ex coroll,ſchol. prop. 10.lib.1. huius; nec non per punctum D, [c] cum vtrumque circulum GBHD, ABCD, bifariam diuidat;circuli autem hi ſecentur bifariam in B,D.Ex quo fit, circulum QBRD,parallelum EF,ſecare ſupra circulum ABCD,at parallelum IK,infra eundem;vt in punctis S, T; & V, X.[d] Quoniam vero circulus QBRD,parallelos EF,IK,bifariam ſecat,erunt SFT, VKX,ſemicirculi;ac propterea arcus LFM,ſemicirculo maior,& OKP,ſemicirculo minor erit.Quod eſt propoſitum.

a 11.1. hui. b 20.1. hui. c 11. 1. hui. d 15.1. hui.

SINT iam paralleli EF,IK,æquales. Dico alterna ſegmenta LFM,OIP, æqualia inter ſe eſſe; nec non ſegmenta alterna LEM,OKP.[e] Nam per polos parallelorum, & polos circuli ABCD,deſcribatur circulus maximus AGCH, [f] qui diuidet ſegmenta LAM, OCP, bifariam. Æquales ergo ſunt arcus AL, AM, inter ſe,& CO, CP,inter ſe. Et quoniam circulus maximus AGCH,tranſit per polos maximorum circulorũ GH, AC;[g] tranſibunt viciſſim hi per illius polos. Puncta igitur B,D,poli ſunt circuli AGCH;ac propterea rectæ BA, BC,æquales erunt, ex defi.poli;[h] atque idcirco & arcus ipſi BA,BC,æquales erunt:[i] Sunt autem & arcus BL, BO, æquales propterea quod æquales ponuntur paralleli EF,IK. Igitur & reliqui arcus AL,CO, æquales erunt. Sunt autem arcus AL,CO,dimidii arcuum LAM,OCP; propterea quod AL, ipſi AM, & CO, ipſi CP, oſtenſus eſt æqualis. Æquales ergo ſunt quoque arcus LAM, OCP, [k] ac proinde & rectæ ſubtenſæ LM, OP, æquales erunt. [l] Quare ex circulis æqualibus EF, IK, auferent æquales arcus, maiorem quidem LFM, maiori OIP,& minorem LEM, minori OKP,(hoc eſt alternum ſegmentum alterno ſegmento) æqualem. Quod eſt propoſitum. Itaque ſi in ſphæra maximus circulus parallelos aliquot circulos in ſphærica ſuperficie deſcriptos ſecet quidem, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 20.1. hui. f 9. huius. g Schol. 15. 1.huius. h 28.tertij. i 28. huius. k 29.tertij. l 28. tertij.

xxiv.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI in ſphera maximus circulus parallelos aliquot circulos ſecet,non tamen per polos; de parallelorum aſſumptis circumferentijs in vno hemiſphærio,illæ quæ propius accedunt ad polum conſpicuum,erunt maiores,quam vt ſimiles eſſe poſſint illis,quæ ab eodem conſpicuo polo longius abſunt.



IN ſphæra parallelos AB,CD,EF,ſecet in H,O;I,N;K,M,non tamen per polos, circulus maximus GHIKLMNO, ſitque ſupra hemiſphærium GBL, polus conſpicuus P, occultus autem Q. Dico arcum OBH, maiorem eſſe,quã vt ſimilis ſit arcui NDI,& NDI, maiorẽ, quam vt ſimilis ſit arcui MFK.[a] Per polum enim parallelorum P, & puncta IN, deſcribantur duo circuli maximi PI,PN, ſecantes parallelum AB, ſupra circulum GILN, in R, S:[b] eritque arcus RBS,arcui IDN,ſimilis.Cum ergo arcus OBH, maior ſit arcu RBS, maior quoque erit, quam vt ſimilis ſit arcui NDI. Eodem modo oſtendemus arcum NDI, maiorem eſſe, quam vt ſimilis ſit arcui MFK, ſi nimirum per polum P, & puncta KM, duo alij circuli maximi deſcribantur. Igitur ſi in ſphæra maximus circulus parallelos aliquot,&c.Quod demonſtrandum erat.

a 20.1. hui. b 10. huius.

COROL-

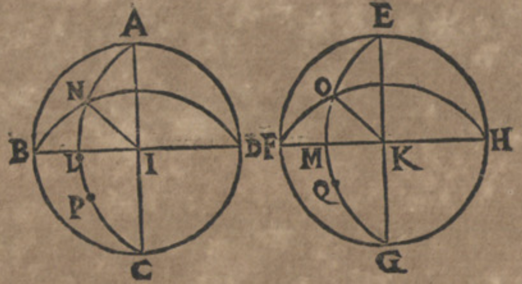
COROLLARIVM.

HINC fit, ſimpliciter arcum OBH, maiorem eſſe partem ſui paralleli AB, quam arcum NDI, ſui paralleli, &c. quandoquidem arcus RBS, tanta pars eſt ſui paralleli, quanta eſt arcus IDN, ſui paralleli, cum hi arcus demonſtrati ſint eſſe ſimiles, &c.

THEOR. 19. PROPOS. 21. XXV.

SI in ſphæris æqualibus maximi circuli ad maximos circulos inclinentur, ille, cuius polus ſublimior ſupra planum ſubiectum eſt, inclinatior erit: illi vero circuli, quorum poli æqualiter diſtant à ſubiectis planis, æqualiter inclinantur.

IN ſphæris æqualibus ABCD, EFGH, quarum centra I, K, ad circulos maximos ABCD, EFGH, quorum poli L, M, inclinentur duo circuli maximi BND, FOH, quorum poli, P, Q; ſitque primum polus P, ſublimior ſupra planum circuli ABCD, quam polus Q, ſupra planum circuli EFGH. Dico circulum BND, inclinatiorem eſſe ad circulum ABCD, quam FOH, ad EFGH.[a] Deſcribantur enim per L, P, polos, & per polos M, Q, circuli maximi ANC, EOG; ſitque communis ſectio circulorum ABCD, BND, recta BD; circulorum autem ABCD, ANC, recta AC; & circulorum BND, ANC, recta NI: quæ omnes rectæ per centrum ſphæræ I, tranſibunt,[b] cum circuli maximi per idem centrum ſphæræ ducantur. Eodem ordine ſint in alia ſphæra communes ſectiones circulorum, vt recta FH, circulorum EFGH, FOH; recta vero EG, circulorum EFGH, EOG; & recta OK, circulorum FOH, EOG: quæ omnes rectæ ſimiliter per centrum ſphæræ K, tranſibunt. Et quoniam circulus ANC, per polos circulorum ABCD, BND, tranſiens,[c] eos ſecat ad angulos rectos; erit viciſſim vterque circulus ABCD, BND, ad circulum ANC, rectus,[d] atque adeo & recta BD, communis eorum ſectio, ad eundem circulum ANC, perpendicularis erit. Quare anguli AID, NID, recti erunt, ex defin. 3. lib. 11. Eucl. ac proinde AIN, angulus erit inclinationis circuli BND, ad circulum ABCD, ex defin. 6. lib. 11. Eucl. Eodem modo erit EKO, angulus inclinationis circuli FOH, ad circulum EFGH. Quoniam vero, P, polus circuli BND, ſublimior ponitur ſupra circulum ABCD, quam polus Q, circuli FOH, ſupra circulum EFGH, erit maior arcus CP, arcu GQ. Hi enim arcus, cum ſint perpendiculares ad circulos ABCD, EFGH, altitudines polorum P, Q, ſupra ipſos circulos metiuntur. Sunt autem arcus PN, QO, æquales, cum ſint quadrantes.[e] Poli enim P, Q, à circulis maximis BND, FOH, per quadrantem abſunt. Arcus ergo CN, maior erit arcu GO, ac propterea AN, reliquus ex ſemicirculo ANC, minor erit reliquo EO, ex ſemicirculo EOG.[f] Quare angulus AIN, angulo EKO, minor erit, ac proinde magis inclinatus erit circulus BND, ad circulum ABCD, quam circulus FOH, ad circulum EFGH, vt in explicatione defin. 7. lib. 11. Eucl. ſcripſimus.



a 20. 1. hui.

b 6. 1. hui.

c 15. 1. hui.

d 19. vnde.

e Corol. 16. huius.

f Schol. 27. tertij.

SED ſint iam arcus CP, GQ, æquales, hoc eſt, poli B, Q, æqualiter diſtent à planis circulorum ABCD, EFGH. Dico circulos BND, FOH, æqualiter inclinari ad circulos ABCD, EFGH. Quoniam enim arcus CP, GQ, æquales ſunt, ſi addantur quadrantes PN, QO, erunt & arcus CN, GO, æquales; ac propterea & reliqui arcus AN, EO, ex ſemicirculis æquales erunt.[g] Anguli igitur AIN, EKO, æquales erunt, ac propterea, ex defin. 7. lib. 11. Eucl. ſimiles, ſiue æquales erunt inclinationes circulorum BND, FOH, ad circulos ABCD, EFGH. Si igitur in ſphæris æqualibus maximi circuli ad maximos circulos, &c. Quod erat oſtendendum.

g 27. tertij.

SCHOLIVM.

HINC fit, ſi circulorum maximorum ad alios inclinatorum poli æqualiter diſtent à polis maximorum, ad quos inclinãtur inclinationes eſſe æquales: cuius vero polus vicinior ſit polo eius, ad quem inclinantur, inclinationem eſſe maiorem. Nam ſi arcus LP, MQ, ſint æquales, erunt & CP, GQ, æquales,[h] cum quadrantes ſint CL, GM; atq; adeo poli P, Q, circulorũ inclinatorum æqualiter diſtabunt à ſubiectis planis circulorum ABCD, EFGH. Quare, vt demonſtratum eſt in hac propoſ. æquales erunt inclinationes circulorum BND, FOH, ad circulos ABCD, EFGH. Si vero arcus LP, minor ſit arcu MQ, erit reliquus arcus CP, ex quadrante maior arcu GQ, reliquo ex quadrante. Igitur, vt oſtendimus in hac propoſ. maior erit inclinatio circuli BND, ad circulum ABCD, quam circuli FOH, ad circulum EFGH.

h Corol. 16. 1. huius.

CONVERSVM quoque huius Theorematis, & ſcholij demonſtrabimus in hunc modum.

SI in ſphæris æqualibus maximi circuli ad maximos circulos æqualiter inclinentur, erunt diſtantiæ polorum ipſorum à ſubiectis planis æquales: Illius vero, qui magis inclinatur, ſublimior erit polus. Item diſtantiæ polorum illorum circulorum, qui æqualiter inclinantur, à polis circulorum, ad quos inclinantur, æquales erunt: Diſtantia vero poli illius circuli, qui magis inclinatur, à polo circuli, ad quem inclinatur, minor erit.

SI namq; circuli BND, FOH, ad circulos ABCD, EFGH, æqualiter inclinentur, erunt anguli AIN, EKO, æquales, ex defin. 7. lib. 11. Eucl.[i] ac propterea & arcus AN, EO, æquales erunt. Additis igitur quadrantibus NP, OQ, æquales erunt arcus AP, EQ, ac propterea & reliqui, CP, GQ, ex ſemicirculis æquales erunt.

i 26. tertij.

SI vero circulus BND, ad circulum ABCD, magis inclinetur, quam circulus FOH, ad circulum EFGH, erit minor angulus AIN, angulo EKO, vt in definitionem 7. lib. 11. Eucl. ſcripſimus;[k] ac propterea & arcus AH, minor erit arcu FO. Additis igitur quadrantibus NP, OQ, minor erit arcus AP, arcu EQ, ac proinde reliquus CP, ex ſemicirculo ANC, reliquo GQ, ex ſemicirculo FOG, maior erit.

k Schol. 26. tertij.

l Corol 16. 1.huius. RVRSVS, ſi circuli æqualiter inclinentur, erunt arcus CP, GQ, vt proxime oſtendimus, æquales. [l] Cum ergo quadrantes ſint CL, GM; erunt & arcus LP, MQ, æquales.

SI denique circulus BND, magis inclinetur, erit ex proxime demonſtratis, arcus PC, maior arcu GQ. Reliquus igitur LP, ex quadrante CL, minor erit reliquo MQ, ex quadrante GM, &c.

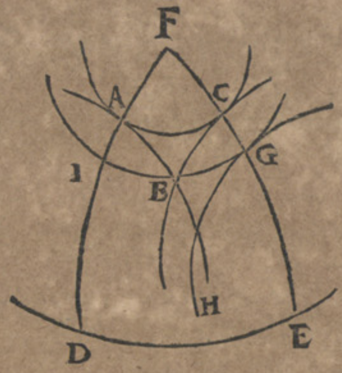
DVO quoque alia Theoremata in alia verſione hoc loco adiecta ſunt, videlicet.

xxvj.

I.

CIRCVLI maximi tangentes eundem parallelum, ęqualiter inclinantur ad maximum parallelorum: qui vero maiorem parallelum tangit, inclinatior eſt ad maximum parallelorum. Et circuli ęqualiter inclinati ad maximum parallelorum, tangunt eundem parallelum: Qui vero inclinatior eſt ad maximum parallelorum, maiorem parallelum tangit.

MAXIMI circuli AB, CB, tangant eundem parallelum AC: ſitque parallelorum maximus DE. Dico circulos AB, CB,
a 20.1.hui. æqualiter inclinari ad circulum DE. Sit enim F, polus parallelorum,[a] & per F, & contactus A, C, circuli maximi deſcriban-
b 5. huius. tur FAD, FCE, [b] qui per polos circulorum AB, CB, tranſibunt; [c] atque
c 15.1. hui. adeo ipſos ad angulos rectos ſecabunt. Quare arcus, AF, CF, metientur
d 28.tertij. altitudinem poli F, circuli DE, ſupra circulos AB, CB; [d] ac proinde cum arcus AF, CF; æquales ſint, propterea quod rectæ ſubtenſæ FA, FC, æqua-
e 21. huius. les ſunt, ex defin. poli, [e] æqualiter inclinabitur circulus DE, ad circulos AB, CB; & hi viciſsim ad illum æqualiter inclinabuntur.



TANGAT iam maximus circulus GH, maiorem parallelum GI. Dico maiorem eſſe inclinationem circuli GH, ad maximum parallelorum DE, quam circuli AB. [f] Deſcripto enim per F, & contactum G, circulo
f 20. 1.hui. maximo FGE, metietur eodem modo, vt proxime demonſtratum e[st, ar]cus FG, altitudinem poli F, circuli DE, ſupra circulum GH. Eſt autem arcus FG, maior arcu FA, quod circulus GI, maior ponatur circulo AC, ac proinde à polo F, remotior. [g] Igitur magis inclinabitur circulus DE, ad
g 21.1. hui. circulum GH, quam ad circulum AB; & viciſsim GH, magis ad DE, inclinabitur, quam AB.

RVRSVS circuli maximi AB, CB, æqualiter inclinentur ad circulum DE, maximum parallelorum. Dico illos eundem
h 20.1.hui. parallelum tangere.[h] Per F, enim polum parallelorum, & polos circulorum AB, CB, circuli maximi deſcribantur FAD, FCE,
i 15.1 huius ſecantes circulos AB, CB, in A, C.[i] Et quoniam eos ſecans ad angulos rectos; metientur arcus FA, FC, altitudinem poli F, cir-
k Schol.21. huius. culi DE, ſupra circulos AB, CB. [k] Sunt autem arcus FA, FC, æquales, quod circuli AB, CB, æqualiter ponantur inclinari ad circulum DE, atque adeo & hic viciſsim ad illos. Si igitur ex polo F, interuallo FA, vel FC, circulus deſcribatur AC.[l] tanget hic
l 3.huius. circulos AB, CB, propterea quod circulus AC, & circuli AB, CB, in eiſdem punctis A, C, ſecant circulos maximos FD, FE, qui per eorum polos tranſeunt.

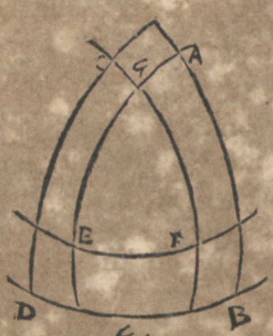
m 20.1.hu. IAM vero circulus maximus GH, magis inclinatus ſit ad circulum DE. Dico illum tangere maiorem parallelum.[m] De-
n 15.1. hui. ſcripto enim per F, polum parallelorum, & per polum circuli GH, circulo maximo FG, [n] qui circulum GH, ſecabit ad angulos
o Scho. 21. huius. rectos, nimirum in puncto G; metietur rurſus arcus FG, altitudinem poli F, circuli DE, ſupra circulum GH: [o] Eſt autem FG, maior quam FA, quod magis inclinatus ponatur circulus GH, quam AB. Igitur circulus ex polo F, & interuallo FG, deſcriptus
p 3. huius. maior erit circulo ex eodem polo F, & interuallo FA, deſcripto.[p] Cum ergo AB, AC, ſe mutuo tangant in A, & GH, GI, ſe mutuo quoq; tangant in G, conſtat propoſitum.

xxvij.

II.

CIRCVLI maximi ad maximum parallelorum æqualiter inclinati, polos habent in circumferentia eiuſdem paralleli. Et circuli maximi, qui polos habent in circumferentia eiuſdem paralleli, ad maximum parallelorum æqualiter inclinantur.

CIRCVLI maximi AB, CD, quorum poli E, F, æqualiter ſint inclinati ad DB,
a 20.1. hui. maximum parallelorum. Dico eorum polos E, F, eſſe in eodem parallelo.[a] Deſcriptis enim per G, polum parallelorum, & per E, F, polos circulorum AB, CD, maximis
b 15. 1. hui. circulis GE, GF,[b] qui recti erunt ad circulos AB, CD; erunt arcus EG, FG, diſtantiæ
c Schol. 21. huius. polorum E, F, à polo G:[c] ſunt autem æquales, quod circuli AB, CD, ponantur æqualiter in huius linati ad circulum DB. Igitur circulus EF, ex polo G, & interuallo GE,
d 2. huius. vel GF, deſcriptus,[d] parallelus eſt circulo DB; in quo quidem parallelo EF, circuli AB, CD, polos E, F, habent. Quod eſt propoſitum.



SED iam circuli maximi AB, CD, habeant polos E, F, in parallelo, EF. Dico eos æqualiter inclinari ad DB, maximum parallelorum. Erunt enim ex defin. poli, re-
e 28. tertij. ctæ GE, GF, æquales,[e] atque ob id arcus EG, FG, æquales quoque erunt. Cum ergo
f Schol. 21. huius. ijdem arcus ſint diſtantiæ polorum E, F, à G, polo parallelorum,[f] æqualiter inclinati erunt circuli AB, CD, ad DB, parallelorum maximum.



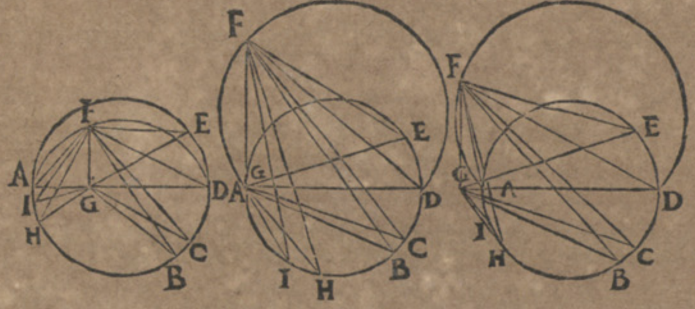
SEQVITVR iam in codice græco propoſitio 22. cuius demonſtratio longiſſima eſt. Vnde quoniam in alia verſione multo breuius, dilucidiusque eadem demonſtratur., viſum eſt hoc loco inſerere alia tria theoremata alterius verſionis, vt facilius deinde propoſitionem 22. huius libri demonſtremus. Eſt autem primum Theorema ſecunda pars propoſ. 1. libr. 3. Theodoſii, quamuis magis vniuerſale ſit, vt hic proponitur. Primum ergo Theorema, quod ordine tertium eſt in hoc ſcholio, ita ſe habet.

III. SI

III. xxviii.

SI ſuper diametro circuli conſtituatur rectum circuli ſegmentum, diuidatur auten ſegmenti inſiſtentis circumferentia in duas inęquales partes, & à puncto ſectionis ad circumferentiam circuli primi plurimę rectę lineę cadant; erit recta ſubtendens minorem partem inſiſtentis ſegmenti omnium minima: quę autem maiorem ſubtendit, omnium maxima. Reliquarum vero propinquior maximę remotiore ſemper maior eſt: At propinquior minimę remotiore ſemper minor eſt. Duę vero rectę lineę ęquales ab eodem puncto in circumferentiam circuli cadunt, à maxima ęqualiter diſtantes.

SVPER diametro AD, circuli ABCDE, conſtituatur rectum circuli ſegmentum AFD, quod ſecetur non bifariam in F, ſitque minor pars AF, & maior DF: Cadant autem ex F, plurimæ rectæ lineæ FA, FI, FH, FB, FC, FD, FE. Dico omnium minimam eſſe FA: maximam vero FD: At FC, maiorem, quam FB, &c. Et FI, minorem, quam FH, &c. Denique duas FE, FC, æquales eſſe, ſi æqualiter diſtent à maxima FD, hoc eſt, ſi arcus DE, DC, æquales ſint. [a] Demittatur enim ex F, in planum [a 21. vnd.] *circuli ABCDE, perpendicularis FG, [b] quæ in AD, communem ſectionem cadet:* [b 38. vnde.] *eritque punctum G, vel inter puncta A-D, vt in prima figura. (Id quod ſemper continget, quando ſegmentum AFD, ſemicirculo maius non eſt, quamuis idem accidere poſſit in ſegmento maiore,) vel idem quod A; vel extra circulum in diametro DA, protracta, vt poſteriores duæ figuræ indicant. Id quod ſolum in ſegmento, quod ſemicirculo maius ſit, contingere poteſt. In prima autem figura non erit G, centrum circuli ABCDF, quod GF, non diuidat bifariam ſegmentum AFD: Multo minus in poſterioribus duabus figuris erit G, centrum circuli ABCDE. Iungantur rectæ GI, GH, GB, GC, GE; eruntq; omnes anguli ad G, recti, ex definit. 3. lib. 11. Euclid. Quoniam vero rectarum ex G, in circulũ ABCDE, cadentium in prima figura, & tertia [c] minima eſt, GA; In omnibus autem figuris [d] maxima* [c 7. vel 8. tertij.] [d 7. vel 15. vel 8. tertij.] *e[illegible] GD; & GC, maior, quam GB; atq; GI, minor, quam GH; duæ deniq; GC, GE, æquales: erunt propterea in prima, & tertia figura duo quadrata rectarum AG, GF, minora duobus quadratis rectarum IG, GF: [e] quibus cum æqualia ſint quadrata rectarum FA, FI; minus quoq; erit qua-*



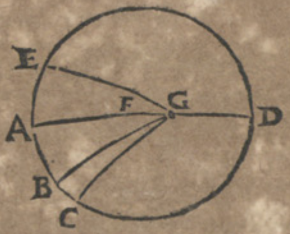
[e 47. prim.]

dratum ex FA, quadrato ex FI; atq; adeo & recta FA, minor erit quam FI. Eodem modo oſtendemus FA, in eadem figura prima, & tertia minorem eſſe, quam FH, &c. In ſecunda vero figura [f] minor quoque eſt FA, quam FI, vel FH, &c. propterea [f 19. primi.] *quod in triangulis AIF, AHF, (in quibus angulus A, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. Euclid. ac proinde alii acuti.) recta FA, ſubtendit angulum acutum I, vel H, at recta FI, vel FH, &c. angulum rectum A. Minima ergo omnium eſt recta FA. Rurſus in omnibus figuris erunt duo quadrata ex GD, GF, maiora duobus quadratis ex GC, GE, [g] quibus cum æqualia ſint quadrata ex* [g 47. prim.] *FD, FC; maius quoq; erit quadratum ex FD, quadrato ex FC; ac proinde & recta FD, maior erit, quam recta FC. Non aliter oſtendemus, rectam FD, maiorem eſſe, quam FB, &c. Maxima ergo omnium eſt recta FD. Præterea in omnibus figuris erunt duo quadrata ex GC, GF, maiora duobus quadratis ex GB, GF, [h] quibus cum æqualia ſint quadrata ex FC, FB; erit* [h 47. prim.] *quoque quadratum ex FC, maius quadrato ex FB; ac proinde & recta FC, maior erit, quam FB. Non aliter oſtendemus, rectam FC, quæ propinquior eſt maximæ FD, maiorem eſſe quacunque alia remotiore, &c. Adhuc in omnibus figuris erunt duo quadrata ex GI, GF, minora duobus quadratis ex GH, GF: [i] quibus cum æqualia ſint quadrata ex FI, FH; erit quoq; quadratum ex FI, minus quadrato ex FH;* [i 47. prim.] *proptereaq; & recta FI, minor, quam FH, erit. Eodemque modo demonſtrabimus, rectam FI, quæ propinquior eſt minimæ FA, minorem eſſe quacunque alia remotiore, &c. Poſtremo erunt duo quadrata ex GC, GF, æqualia duobus quadratis ex GE, GF: [k] quibus cum æqualia ſint quadrata ex FC, FE, æqualia quoque erunt quadrata ex* [k 47. pri.] *FC, FE; atq; adeo & rectæ FC, FE, æquales erunt. Conſtat ergo id, quod proponitur. Cæterum vt ex demonſtratione patet, eam rectam dicimus propinquiorem maximæ FD, quæ cadit in punctum vicinius puncto D: Illam vero propinquiorem minimæ FA, quæ cadit in punctum propinquius puncto A.*

IV. xxxi.

SI in ſphæræ ſuperficie intra circuli cuiuſque peripheriam punctum ſignetur præter eius polum, ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus circulorum maximorum ducantur ſemicirculo minores; maximus eſt, qui per circuli polum ducitur; minimus autem, qui ei adiacet: Reliquorum vero propinquior maximo remotiore ſemper maior eſt: Duo vero arcus ab eodem maximo, vel minimo æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

SIT in ſphæra circulus ABCDE, cuius polus F, ſigneturque in ſphæræ ſuperficie intra peripheriam circuli præter polum F, punctum quodlibet G, à quo plurimi arcus maximorum circulorum ad circumferentiam circuli ABCDE, ducantur, quorum GA, in vtramque partem eductus tranſeat per polum F; arcus vero GB, propinquior ſit ipſi GA, quam GC; duo deniq; GB, GE, æqualiter diſtent ab eodem GA, vel à GD; ſintq; omnes hi arcus ſemicirculo minores: quod tum demum erit, cum ſe mutuo non interſecabunt in alio puncto, quam in G, [a] Cum enim circuli maximi ſe mutuo diuidant bifariam, erunt arcus GA, GE, ſemicirculo minores, cum nondũ ſe interſecent. Eademq; rõe erunt alij arcus ex G, exeuntes minores ſemicirculo, ſi ſe mutuo non interſecent. Quod ſi vnus eorũ, vt v.g. arcus GA, eſſet ſemicriculus, tranſirent omnes alij per punctũ A, eſſentq; ſemicirculi quoq;: Si vero GA, eſſet ſemicirculo maior, ſecarent eum omnes alij, antequam ad circũ-



[a 11. 1. hui.]

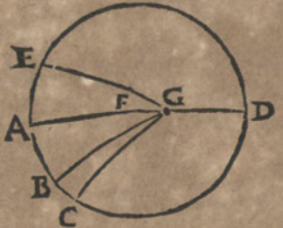
ferentiam

ferentiam peruenirent, eſſentq; ſemicirculo maiores, vt patet. Vnde nihil colligi poſſet. Dico arcum GA, omnium eſſe maximum, & GD, minimum: GB, vero maiorem eſſe arcu GC; duos denique GB, GE, eſſe æquales.

b 15. 1. hui. *[b] Quoniam enim arcus AD, ſecat circulum ABC, bifariam, & ad angulos rectos; erit recta ſubtenſa AD, diameter circuli ABC; & ſuper ipſam rectum circuli ſegmentum AGD, conſtitutum, quod quidem inæqualiter ſecatur in G, (Nam quia, ex de. poli, rectæ ſubtenſæ FA, FD, æquales ſunt,*

c 28. tertij. *[c] erunt quoque arcus FA, FD, æquales ac proinde arcus AD, ſectus erit bifariam in F, atque ob id in G, non bifariam) maiorq; pars eſt GA, & minor GD.*

d Schol. 21. huius. *[d] Igitur rectarum ductarum ex G, ad circumferentiam circuli ABC, maxima eſt GA, & minima GD: GB, vero maior quàm GC: & GB, GE, æquales. Quare cum arcus, quibus ſubtenduntur, ponantur ſemicirculo minores,*



e Schol. 28. tertij. *[e] erit & arcus, GA, maximus, & GD, minimus: GB, vero maior, quam GC;*

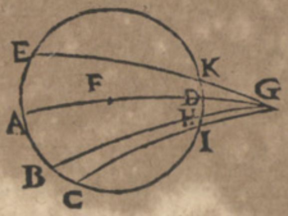
f 28. tertij. *[f] Arcus denique GB, GE, æquales.*

V.

xxxij. SI in ſphærę ſuperficie extra circuli cuiuſque peripheriam punctum ſignetur præter eius polum, ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus circulorum maximorum ducantur ſemicirculo minores, ſecanteſque circumferentiam circuli; maximus eſt, qui per circuli polum ducitur; Reliquorum vero maximo propinquior, remotiore ſemper maior eſt: Minimus autem eſt ille maximi, qui inter punctum, & circuli circumferentiam extra circulum interijcitur; Reliquorum vero minimo propinquior, remotiore ſemper minor eſt: Duo vero arcus ab eodem maximo, vel minimo æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

IN ſphæra circulus ſit ABCDE, cuius polus F, ſigneturq; in ſphæræ ſuperficie extra peripheriam circuli, punctum quoduis G, præter alterum polũ circuli ABCDE: & à G, plurimi arcus maximorum circulorum ducantur ad circumferentiam circuli ABCDE, ipſam ſecantes; quorum GDFA, per polum F, tranſeat; arcus vero GHB, propinquior ſit ipſi GDFA, quam GIC: duo denique GHB, GKE, æqualiter diſtent ab eodem GDFA, vel à GD, ſintq; omnes hi arcus ſemicirculo minores: quod tum demum erit, cum ſe mutuo non interſecabunt in alio puncto, quam in G, veluti in antecedenti theoremate eſt oſtenſum. Dico arcum GA, eſſe omnium maximum; & GB, maiorem quam GC: Minimum autem eſſe GD; & GH, minorem quam GI: Deniq; duos arcus GB, GE, Item GH, GK, æquales eſſe.

a 15. 1. hui. *[a] Quoniam enim arcus GA, ſecat circulum ABCDE, bifariam, & ad angulos rectos; erit recta ſubtenſa AD, diameter circuli ABCDE, & ſuper ipſam rectum circuli ſegmentum conſtitutum DG, quod initium ſumens à D, per G, ducitur, donec in alio puncto A, circulum ABCDE, iterum ſecet: quod quidem non bifariam ſectum eſt in G, (quod G, non ponatur polus circuli ABCDE, in quo dictum ſegmentum bifariam diuiditur, vt in præcedenti theoremate oſtenſum eſt) maiorque pars eſt à puncto G, vſque ad A, cum in ea ſit reliquus polus, (alias arcus GDA, per vtrumque polum duceretur, ac proinde maior eſſet ſemicirculo, cum arcus inter duos polos ſemicirculus ſit.) minor vero DG.*



b Schol. 21. huius. *[b] Igitur rectarum ex G, ad circumferentiam circuli ABCDE, ductarum, maxima eſt GA, & minima GD, GB, vero maior quam GC; & GB, GE, æquales. Item GH, minor quam GI; & GH, GK, æquales. Quapropter cum arcubus ſemicirculo minoribus ſubtendantur, ex hypotheſi,*

c Schol. 28. tertij. *[c] erit quoque arcus GA, omnium maximus, & GD, minimus: at GB, maior, quam GC; & GH, minor quam GI.*

d 28. tertij. *[d] Denique GB, GE, necnon GH, GK, æquales inter ſe. Quod eſt propoſitum.*

PERSPICVVM autem eſt in proximis duobus theorematibus arcus ſingulos ex G, ductos non debere eſſe maiores ſemicirculo: alias non auferrent maiores lineæ maiores arcus, & contra, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. Euclid.

THEOR. 20. PROP. 22.

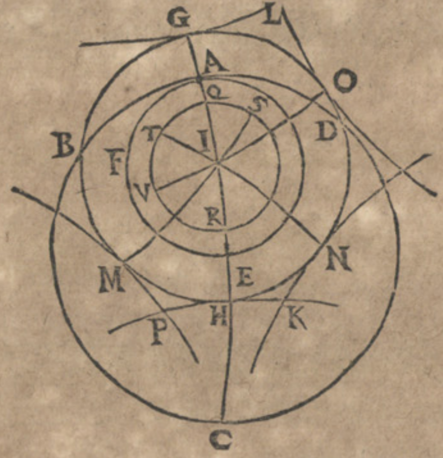
xxxiii. SI in ſphæra maximus circulus vnum quidem circulum tangat, alium vero ei parallelum ſecet, poſitum inter ſphæræ centrum, & eum circulum, quem tangit maximus circulus, polus autem maximi circuli fuerit inter vtrumque parallelorum, deſcribanturque maximi circuli tangentes duorum parallelorum maiorem: hi omnes erunt inclinati ad maximum circulum, & eorum rectiſſimus quidem erit ille, cuius contactus erit in eo puncto, in quo maius ſegmentum paralleli maioris bifariam diuiditur; humillimus vero & maxime inclinatus, cuius contactus erit in eo puncto, in quo minus ſegmentum bifariam diuiditur: Reliquorum autem illi quidem, qui æqualiter diſtant ab alterutro eorum punctorum, in quibus ſegmenta bifariam ſecantur, ſunt ſimiliter inclinati: qui vero contactum remotiorem habet à puncto, in quo maius ſegmentum bifariam ſecatur, inclinatior perpetuo eſt, quam qui contactum eidem puncto propiorem habet. Poli denique maximorum circulorum erunt in vno circulo, qui & minor erit eo circulo, quem tangit maximus in principio circulus, & eidem parallelus erit.

IN ſphæra maximus circulus ABCD, cuius polus E, tangat circulum AF, ſecet autem alium huic parallelum GHBD, poſitum inter ſphæræ centrum, & circulum AF, ita vt circulus GBHD, maior ſit, quam AF; ſitque E, polus circuli maximi ABCD, inter vtrumque circulum AF, GBHD. Quoniam vero maximus circulus ABCD, ſecat circulum GBHD, non bifariam, cum non tranſeat per eius polos, hoc eſt, per polos parallelorum,

a 19. huius. [a] erit ſegmentum BHD, ad polum conſpicuum, qui ſit I, maius ſemicirculo, & BGD, minus.

b 20. 1. hui. [b] Ducatur per E, polum

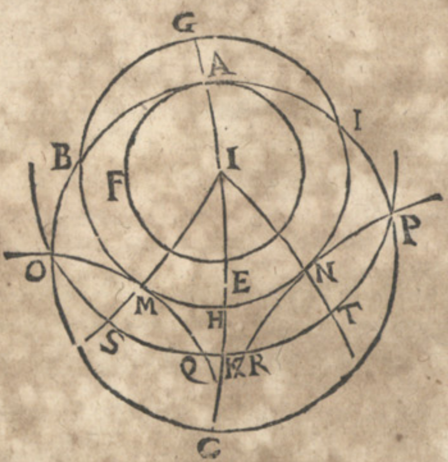
polum circuli ABCD, & I, polum parallelorum circulus maximus GAC, [c] qui ſecabit ſegmenta BGD, BH- c 9. huius.
D, bifariam: puncta autem M, N, æqualiter diſtent ab H; & O, magis diſtet ab H, quam N, [d] Tangant autem d 14. huius
parallelum GBHD, in punctis G, H, M, N, O, circuli maximi GL, Hk, MP, Nk, OL, qui quidem omnes inclinati erunt ad maximum circulum ABCD, cum non tranſeant per E, polum ipſius. Cum enim E, polus ponatur inter parallelos AF, GBHD, non poterunt circuli tangentes circulum GBHD, per E, tranſire, alias ſecarent ipſum, cum alter polus, [e] per quem etiam neceſſario tranſeunt, ſit extra dictos parallelos, vt patet. Dico e Corol. 10. 1. huius.
circulum Hk, eſſe rectiſſimum, hoc eſt, minime inclinatum, humilimum autem, id eſt, maxime inclinatum eſſe GL; At MP, Nk, ſimiliter inclinari, & OL, magis quam Nk: Polos denique horum circulorum tangentium eſſe in vno eodemque parallelo, qui minor ſit, quam AF. Quoniam enim E, polus eſt circuli ABCD, [f] erit f Coroll. 16. 1. huius.
EA, quadrans maximi circuli; ſumatur ei æqualis arcus HQ; eritque punctum Q, inter puncta A, & I, cum arcus HA, maior ſit quadrante, (quod EA, quadrans ſit oſtenſus,) & HI, quadrante minor, [g] propterea quod g Coro. 16. 1. huius.
arcus ex I, polo per H, vſque ad maximum parallelorum porrectus ſit quadrans. Si igitur ex polo I, ad interuallum IQ, circulus deſcribatur QTR, [h] erit is ipſi AF, parallelus, & eo minor. In hoc ergo parallelo QTR, dico h 2. huius.
eſſe polos omnium circulorum parallelum GBHD, tangentium. [i] Per polum enim I, & puncta contactuum i 20. 1. hui.
deſcribantur circuli maximi MIS, NIT, OIV; [k] qui tranſibunt quoque per polos tangentium. [l] Quia vero k 5. huius. l 28. tertij.
arcus HI, MI, NI, OI, GI, æquales ſunt, quod ex definitione poli, rectæ illis arcubus ſubtenſæ æquales ſint, eademq; ratione & arcus IQ, IS, IT, IV, IR, æquales ſunt; erunt toti arcus HQ, MS, NT, OV, GR, æquales;



atque adeo cum HQ, ſit quadrans, omnes illi arcus quadrantes erunt. Quare cum demonſtratum ſit eos tranſire per polos tangentium, [m] erunt puncta Q, S, T, V, R, poli circulorum tangentium, quæ quidem omnia ſunt in parallelo QTR, quod vltimo loco proponebatur demonſtrandum. m Coro. 16. 1. huius.
Iam vero quia arcus circulorum maximorum ex E, polo circuli maximi ABCD, ad Q, S, T, V, R, polos tangentium ducti metiuntur diſtantias poli E, à polis tangentium; (quod hi duo à maximo EQ, æqualiter diſtent, propter arcus QS, QT, qui æquales ſunt. [n] Nã arc⁹ paralleli *VR*, inter maximos circulos HI, MI, NI, ſimiles ſunt arcubus MH, NH: ac proinde cũ hi æquales ponantur, erũt & illi æquales: qui cũ æquales ſint arcubus QS, QT, ſinguli ſingulis; [o] propterea quod comes ſectiones paralleli VR, & maximorũ circulorũ HQ, MS, NT, per eius polos ductorum diametri ſunt ipſius. Ex quo fit, cum arcus inter has diametros prope R, ſint inter ſe æquales, n 10. huius o 15. 1. hui.
[p] arcus quoque oppoſitos illis QS, QT, æquales eſſe, propter angulos in centro à prædictis diametris contentos, [q] qui æquales ſunt vtpote qui æqualibus arcubus prope R, inſiſtant. Hinc enim fit, & angulos ad verticem p 26. tertij.
arcubus QS, QT, inſiſtentes eſſe æquales,) eſtque [r] omnium maximus EQ, minimus autem ER; æquales vero q 27. tertij. r Scho. 21. huius.
ES, ET, & deniq; ET, maior, quam EV, quod omnes hi arcus ſint ſemicirculo minores;) eſt enim EQ, quadrante EA, minor; atque adeo reliqui cum non ſecabunt circa punctum Q, ideoque ſemicirculo minores erunt.) [s] erit circulus Hk, minime inclinatus ad circulum maximum ABCD; & GL, maxime; at MP, Nk, æqualiter, ſeu ſimiliter; & OL, magis quam Nk, quod primo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca ſi in ſphæra maximus circulus, &c. Quod erat demonſtrandum. s Schol. 21. huius.

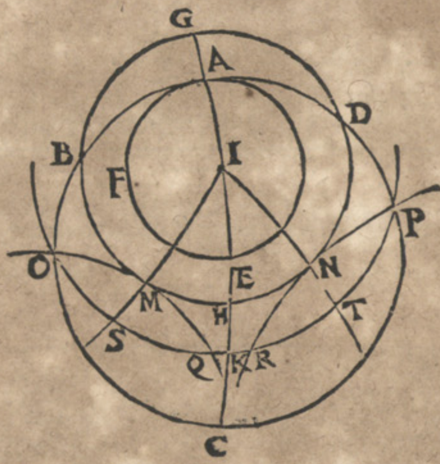
THEOR. 21. PROP. 23. XXXIV.

IISDEM poſitis, ſi circumferentiæ circulorum tangentium à contactibus ad nodos ſint æquales; prædicti circuli maximi ſimiliter inclinati erunt.



RVRSVS in ſphæra maximus circulus ABCD, cuius polus E, tangat circulum AF, ſecet autem alium huic parallelum GBHD, poſitum inter ſphæræ centrum, & circulum AF, ita vt GBHD, maior ſit, quam AF; ſitque E, polus maximi circuli ABCD, inter vtrumque circulum AF, GBHD: Tangant deinde in punctis M, N, circuli maximi MO, NP, circulum GBHD, ſecantes ABCD, in O, P, nodis, ſintque arcus MO, NP, æquales. Dico circulos MO, NP, ſimiliter inclinari ad maximum circulum ABCD. [a] a 20. 1. hui.
Ducatur enim per E, polum circuli ABCD, & I, polum parallelorum circulus maximus GAC: Item per I, polum parallelorum & puncta contactuum circuli maximi IM, IN, [b] qui per polos quoque circulorum tangentium tranſibunt, [c] b 5. huius. c 15. 1. hui.
atque adeo ipſos ad angulos rectos ſecabunt. Quoniam igitur ſegmenta circulorum æqualia, nempe ſemicirculi,

culi, qui tendunt ex M, & N, per I, donec iterum ſecent circulos tangentes MO, NP, inſiſtunt diametris circu-
d 11. 1. hui. lorum MO, NP, (eſt enim communis ſectio circulorum maximorum IM, MO, diameter vtriuſque, [d] cum



ſe mutuo ſecent bifariam) ad angulos rectos, & diuiduntur non bifariam in I, quod I, polus parallelorum non ſit polus tangentium; ponunturque arcus MO, NP, æquales; [e] erunt ductæ rectæ IO, IP, æquales. Si igitur ex I, polo parallelus deſcribatur Ok, ad interuallum IO, tranſibit is quoque per P. Et quia circulus maximus IM, tranſiens per polos circulorum MO, OQ, ſe ſecantium in O, Q, [f] ſecat eorum ſegmenta bifariam, ęquales erunt arcus MO, MQ, & SO, SQ; Eodemque argumento æquales erunt arcus NP, NR, & TP, TR; nec non kO, kP, & CO, CP; propterea quod circulus maximus IkC, tranſiens per polos circulorum OkP, OCP, [g] ſecat eorum ſegmenta bifariam in k, & C. Cum ergo arcus MO, NP, ponantur æquales, erunt & toti OMQ,

e 12. huius.
f 9. huius.
g 9. huius.

h 29. tertij. PNR, quorum ipſi dimidii ſunt, æquales; [h] atq; adeo & rectæ ſubtenſæ OQ, PR, æquales erunt. [i] Igitur &
i 28. tertij. arcus OSQ, PTR, æquales erunt; ac proinde & eorum dimidii OS, PT, æquales erunt. Sunt autem & toti k-
O, kP, oſtenſi æquales. Reliqui ergo kS, kT, æquales erunt; atque adeo, cum ſint vnius eiuſdemque circuli, ſi-
k 10. huius. miles inter ſe erunt. [k] Quia vero arcubus kS, kT, ſimiles ſunt arcus HM, HN; erunt quoque æquales arcus
l 9. huius. HM, HN. [l] Itaque cum ſegmentum BHD, bifariam ſecetur in H, ſintque æquales arcus HM, H-
m 22. hui. N; [m] erunt circuli MO, NP, ſimiliter inclinati ad circulum ABCD. Quare iiſdem
poſitis, ſi circumferentiæ à contactibus, &c. Quod erat
demonſtrandum.

FINIS LIBRI II. THEODOSII.

THEO-

THEODOSII SPHÆRICORVM LIBER TERTIVS.

THEOR. 1. PROP. 1.

SI recta linea circulum in partes inæquales ſecet, ſuper qua conſtituatur rectũ circuli ſegmentum, quod non ſit maius ſemicirculo; diuidatur autem ſegmẽti inſiſtentis circumferentia in duas inæquales partes: Recta linea ſubtendens earum minorem, minima eſt linearum rectarum ductarum ab eodem puncto ad maiorem partem circumferentiæ primi circuli: Rectarum vero ductarum ab eo ipſo puncto ad circumferentiam interceptam inter illam minimam rectam, & diametrum, in quam cadit perpendicularis deducta ab illo pũcto ſempr minimæ propior remotiore minor eſt. Omnium autem maxima eſt ea, quæ ab illo eodem puncto ducitur ad extremitatem eiuſdem diametri: Item recta ſubtendens maiorem circumferentiam ſegmenti inſiſtentis, minima eſt earum, quæ cadunt in circumferentiam interceptam inter ipſam, & diametrum, ſemperque huic propior remotiore minor eſt. Si vero recta linea ſubiectum circulum ſecans ſit eius diameter, & reliqua omnia eadem ſint, vt ſupra; recta linea ſubtendens minorem partem circumferentiæ ſegmenti inſiſtentis, minima eſt rectarum ductarum ab illo eodem puncto ad primi, & ſubiecti circuli circumferentiam; ea vero, quæ maiorem partem circumferentiæ ſegmenti inſiſtentis ſubtendit, maxima eſt.

RECTA linea AB, ſecet circulum ACBD, cuius centrum E, in partes inæquales, quarum maior ſit ACB: Inſiſtat autem ipſi AB, rectum circuli ſegmentum AFB, ſemicirculo non maius, quod in partes inæquales diuidatur in F; ſitque minor pars BF: Ex F, [a] demittatur in circulum ACBD, perpendicularis EL, [b] quæ *a 11. vnde.*
b 38. vnde.
in AB. communem ſectionem cadet: Per E, autem, & L, diameter agatur CD; & ex F, in circumferentiam ACB, maioris ſegmenti circuli ACBD, plurimæ rectæ cadant FB, FG, FH, FC, FA, FI, FK. Dico omniũ minimã eſſe FB, & FG, minorem, quã FH; omnium autem maximam eſſe FC. Item FA, eſſe omnium minimam, quæ ex F, in portionem AC, cadent; & FI, minorem, quam FK. Ducantur ex L, lineæ rectæ LG, LH, LI, LK; eruntq; ex def. 3. lib. 11. Euclid. omnes anguli ad L, quos recta FL, facit, recti. [c] Quoniam igitur recta LD, eſt omnium rectarum ex



c 7. tertij.
L, cadentium minima, & LB, minor, quam LG, LH, LC, LK, LI, LA; erunt quadrata ex FL, LB, minora quadratis ex FL, LG: [d] Eſt autem tam quadratum ex FB, quadratis ex FL, LB, quam quadratum ex FG, quadratis ex FL, LG, æquale. Igitur erit quoque quadratum ex FB, minus quadrato ex FG; atq; adeo & recta FB, minor erit quam FG. Non aliter oſtendemus rectam FB, minorem eſſe, quam FH, FC, FK, FI, FA. Quare FB, omnium minima eſt, *d 47. prim.*

RVRSVS [e] quia LG, minor eſt, quam LH, erunt quadrata ex FL, LG, minora quadratis ex FL, LH: *e 7. tertij.*
[f] Eſt autem tam quadratum ex FG, quadratis ex FL, LG, quam quadratum ex FH, quadratis ex FL, LH, æquale. Igitur & quadratum ex FG, quadrato ex FH, minus erit; atq; adeo & recta FG, minor erit, quam recta FH. *f 47. prim.*

AMPLIVS

g 7. tertij. h 47. prim. AMPLIVS [g] quia LC, omnium ex L, cadentium maxima eſt; erunt quadrata ex FL, LC, maiora quadratis ex FL, LK. [h] Eſt autem tam quadratum ex FC, quadratis ex FL, LC, quam quadratum ex FK, quadratis ex FL, LK, æquale. Igitur & quadratum ex FC, maius erit quadrato ex FK; ac proinde & recta FC, maior erit, quam recta FK. Non aliter demonſtrabimus, rectam FC, maiorem eſſe, quam FI, & FA. Eſt ergo recta FC, omnium maxima.

i 7. tertij. k 47. prim. ITEM [i] quia LA, minor eſt, quam LI, LK, LC; erunt quadrata ex FL, LA, minora quadratis ex FL, LI. [k] Eſt autem tam quadratum ex FA, quadratis ex FL, LA, quam quadratum ex FI, quadratis ex FL, LI, æquale. Igitur & quadratum ex FA, minus erit quadrato ex FI; atque ob id recta quoque FA, minor erit, quam recta FI. Eodem modo oſtendemus, rectam FA, minorem eſſe, quam FK, FC. Eſt ergo FA, omnium rectarum ex F, in arcum AC, cadentium minima.

l 7. tertij. DENIQVE [l] quia LI, minor eſt, quam LK; erunt quadrata ex FL, LI, minora quadratis ex FL, Lk; eſt autem tam quadratum ex FI, quadratis ex FL, LI, quam quadratum ex Fk, quadratis ex FL, Lk, æquale. Igitur & quadratum ex FI, minus erit quadrato ex FK, ideoque & recta FI, minor erit, quam recta Fk.

QVOD ſi recta AB, ſecet circulum ABCD, bifariam, ita vt ſit eius diameter, demonſtratum à nobis iam eſt theoremate tertio ſcholii propoſ. 21. præcedentis libri, rectam FB, minimam eſſe, & FA, maximam. Vnde non eſt neceſſe, idem hoc loco demonſtrare. Imo plura ibi ſunt demonſtrata quam hic proponuntur. Si recta igitur linea circulum in partes inæquales ſecet, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 2. PROP. 2.

SI recta linea ſecans circulum ſegmentum auferat, quod ſemicirculo minus non ſit, ſuper ipſa autem recta linea ſtatuatur aliud circuli ſegmentum, quod & ſemicirculo maius non ſit, & inclinatum ſit ad alterum ſegmentum, quod ſemicirculo maius non eſt; diuidatur vero inſiſtentis ſegmenti circumferentia in partes inæquales: Recta linea ſubtendens minorem circumferentiæ partem minima eſt rectarum omnium ductarum ab illo puncto, à quo ipſa ducitur, ad ſubiecti circuli circumferentiam illam, quæ ſemicirculo minor non eſt: & reliqua omnia, quæ in præcedenti, ſequuntur.

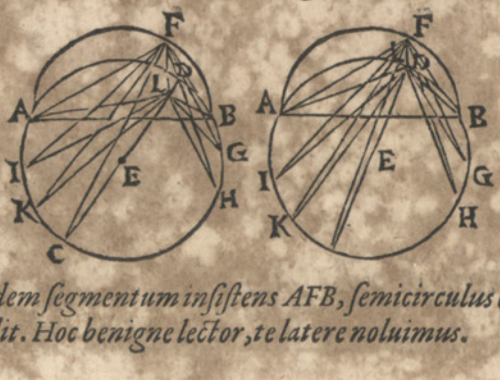
RECTA linea AB, à circulo ABCD, cuius centrum E, auferat ſegmentum ACB, ſemicirculo non minus, ſed vel ſemicirculo æquale, vt in prima figura, vel maius, vt in aliis figuris; & ſuper recta AB, ſtatuatur ſegmentum aliud circuli AFB, ſemicirculo non maius, ſed vel ſemicirculo æquale, vt in poſtrema trium figurarum, vel minus, vt in primis duabus figuris, & inclinatum ad ſegmentum alterum ADB, quod ſemicirculo maius non eſt, cum ACB, vel ſemicirculo æquale, vel maius ponatur. Diuidatur quoque circumferentia AFB, in F, in partes inæquales, & ſit FB, minor. Ex F, demittatur in planum circuli ACBD, perpendicularis FL, quæ ad partes ſegmenti ADB, cadet, propterea quod ſegmentum AFB, ad ſegmentum ADC, eſt inclinatum, ita vt punctum L, ſit vel intra ſegmentum ADB, vel extra, vel certe in ipſa circumferentia ADB. Per centrum autem E, & punctum L, diameter agatur CD, & ex F, in circumferentiam ACB, plurimæ rectæ cadant *EB, FG*, &c. Dico omnium minimam eſſe FB; & FG, minorem quam FH: omnium autem maximam eſſe FC: Item FA, eſſe omnium minimam, quæ ex F, in circumferentiam AC, cadunt; & FI, minorem quam FK.



a 7. vel 8. vel 15. tert. Ducantur ex L, rectæ lineæ LB, LG, LH, LA, LI, Lk, eruntq; omnes anguli ad L, quos facit perpendicularis FL, recti, ex def. 3. lib. 11. Eucl. [a] Quoniam igitur recta LD, eſt omnium minima, (hæc autem linea nihil eſt omnino in ea figura, vbi punctum L, cadit in D.) & LB, minor, quam LG, LH, LC, Lk, LI, LA, & omnium maxima LC, &c. demonſtrabimus, vt in præcedenti, rectam FB, eſſe omnium minimam, & FG, minorem quam FH: Item FC, omnium maximam, & FA, minimam omnium ex F, in circumferentiam AC, cadentium; & FI, minorem quam Fk. Si igitur recta linea ſecans circulum, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

ADDANTVR, hæ duæ figuræ tribus huius propoſitionis ſecundæ, vt omnes caſus lineæ perpendicularis FL, perſpiciantur. In prima namque harum figurarum ſegmentum inſiſtens AFB, eſt ſemicirculus, caditque perpendicularis FL, intra ſegmentum ADB: In poſteriore autem eadem FL, in ipſam circumferentiam ADB, cadit, exiſtente eodem ſegmento inſiſtente AFB, ſemicirculo; quemadmodum & in tertia figura dictæ propoſitionis idem ſegmentum inſiſtens AFB, ſemicirculus eſt, lineaq; perpendicularis FL, extra ſegmentum ADB, cadit. Hoc benigne lector, te latere noluimus.



THEOR. 3. PROPOS. 3. I.

SI in ſphæra duo circuli maximi ſe mutuo ſecent, ab eorum vero vtroq; æquales circumferentiæ ſumantur vtrinque à puncto, in quo ſe ſecant: Rectæ lineæ, quæ extrema puncta circumferentiarum connectunt ad eaſdem partes, æquales inter ſe ſunt.

IN ſphæra duo circuli maximi A B C, D B E, ſe mutuo ſecent in B, & in vno quoque vtrinque à B, ſumantur duo arcus æquales BA, BC, & BD, BE, iunganturque rectæ AD, CE. Dico rectas AD, CE, æquales eſſe. Polo enim B, & interuallo BA, circulus deſcribatur, qui etiam per C, tranſibit, ob æqualitatem arcuum BA, BC. Aut igitur idem circulus tranſit etiam per D, atq; adeo & per E, ob æqualitatem arcuum BD, BE, aut non. Tranſeat primum per D, & E, vt in priori figura; ſintq; communes ſectiones circulorum maximorum, & circuli ADCE, rectæ AC, DE. Et quoniam circuli maximi ABC, DBE, per B, polum circuli ADCE, tranſeuntes [a] ſecant ipſum bifariam, erunt AC, DE, diametri circuli ADCE, & F, centrum; ac proinde rectæ FA, FD, rectis FC, FE, æquales. [b] Cum ergo & angulos æquales comprehendant ad verticem F; [c] erunt & rectæ AD, CE, æquales.





a 15. 1. hui.
b 15. primi.
c 4. prim.

SED non tranſeat iam circulus ex B, polo deſcriptus ad interuallum BA, per D, ſed vltra punctum D, atq; adeo & vltra punctum E, excurrat. Quod ſi circulus AGCH, citra punctũ D, tranſiret, (quod quidẽ contingeret, ſi arcus BD, maior foret arcu BA,) deſcribendus eſſet circulus ex B, ad interuallum maioris arcus BD, vt vltra punctum A, excurrat. Producantur arcus BD, BE, ad G, H. [d] Quoniam igitur arcus BG, BH, æquales ſunt, quod ex defin. poli, rectæ ſubtenſæ BG, BH, æquales ſint: Sunt autem & BD, BE, ex hypotheſi, æquales; erunt & reliqui DG, EH, æquales. Et quoniam rectæ ductæ AG, CH, æquales ſunt, vt proxime demonſtratum eſt in prima parte huius prop. [e] erunt & arcus AG, CH, æquales. Quia igitur circulus maximus GBH, per polum B, ductus [f] ſecat circulum AG, CH, bifariam, & ad angulos rectos, inſiſtet ſegmentum GH, rectum diametro circuli AG, CH. Cum ergo arcus DG, EH, æquales ſint, & minores dimidio arcu GDH; ſintque arcus GA, HC, oſtenſi quoq; æquales, [g] erunt rectæ DA, EC, inter ſe æquales. Si igitur in ſphæra duo maximi circuli ſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.

d 28. tertij.
e 28. tertij.
f 15. 1. hui.
g 12. 2. hui.

THEOR. 4. PROPOS. 4. ij.

SI in ſphæra duo maximi circuli ſe mutuo ſecent, ab eorumque altero æquales circumferentiæ ſumantur vtrinque à puncto, in quo ſe interſecant, & per puncta terminantia æquales circumferentias ducantur duo plana parallela, quorum alterum conueniat cum communi ſectione ipſorum circulorum extra ſphæram verſus prædictum punctum; ſit vero vna illarum æqualium circumferentiarum maior vtralibet circumferentiarum in altero maximo circulo interceptarum inter prædictum punctum, & vtrumque planorum parallelorum: Ea circumferentia, quæ eſt inter illud punctum, & planum, quod non conuenit cum communi ſectione ipſorum circulorum, maior eſt, quam ea eiuſdem circuli circumferentia, quæ eſt inter idem punctum, & planum, quod conuenit cum communi ſectione circulorum.

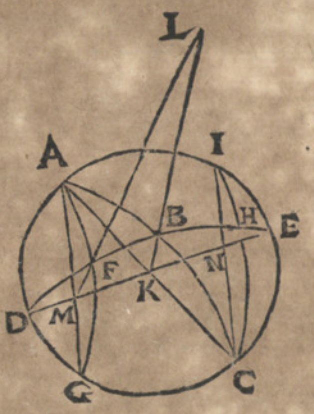
IN ſphæra duo maximi circuli ABC, DBE, ſe mutuo ſecent in B, & in ABC, ſumantur arcus BA, BC, æquales, & per A, C, puncta duo plana parallela inter ſe ducantur [a] facientia in ſuperficie ſphæræ circumferentias circulorum AFG, CHI, quæ ſecent circumferentiam DBE, in punctis F, H; ſit vero arcus BA, vel BC, maior vtralibet circumferentiarum BF, BH, inter punctum B, & plana parallela interceptarum. Ex polo deinde B, & interuallo BA, vel BC, circulus deſcribatur ADCE, qui puncta F, H, tranſcendet, propterea quod arcus BF, BH, minores ponuntur arcubus B A, B C. Producantur arcus BF, BH, vſque ad circumferentiam circuli ADCE, ad puncta, D, E; ſintque communes ſectiones circuli ADCE, & circulorum AFG, CHI, rectæ AG, CI; communes autem ſectiones circulorum maximorum, & circuli ADCE, rectæ AC, DE; quæ ipſius diametri erunt, atque adeo eiuſdem centrum K, [b] cum circuli maximi ipſum per B, polum bifariam ſecent: Secet autem recta DE, rectas AG, CI, in M, N. Sit quoque maximorum circulorum communis ſectio KB, recta, cum qua producta ad partes B, conueniat planum AFG, productum extra ſphæram in puncto L. Quo poſito, non conueniet alterum planum CHI, cum recta KB, ad partes B, ne cum ſibi parallelo plano AFG, conueniat. Dico arcum BH, maiorem eſſe arcu BF. Sint enim rectæ FM, HN, communes ſectiones circuli DBE, & circulorum AFG, CHI. Et quoniam planum AFG, conuenit productum cum recta

a 1. 1. hui.



b 15. 1. hui.

recta KB; producta in L, erit L, punctum tam in plano DBE, quam in plano AFG; atque adeo in communi eorum ſectione, nempe in recta MF. Producta ergo MF, coibit cum KB, producta in L. Quoniam vero planum
c 16. vnde. DBE, ſecat plana parallela AFG, CHI, [c] erunt ſectiones factæ ME, NH, parallelæ. Rurſus quia planum AD-
d 16. vnde. e 19. primi. CE, eadem plana parallela ſecat, [d] erunt quoq; ſectiones factæ AG, CI, parallelæ. [e] Anguli ergo alterni KAM,
f 15. primi. KCN, æquales [f] ſunt. Sunt autem & anguli AKM, CKN, ad verticē æquales, & latera KA, KC, æqualia, cum ſint ſemidiametri circuli ADCE.
g 26. prim. [g] Igitur & latera KM, KN, æqualia erunt: ſunt autem & ſemidiametri KD, KE, æquales. Reliquæ ergo rectæ DM, EN, æquales erunt. Rurſus quoniam recta BK, ex B, polo circuli ADCE, ad
h Schol. 8. 1. huius. eiuſdem centrum K, ducta, [h] recta eſt ad planum circuli, erit angulus MKL, in triangulo KLM, rectus, ex de-
i 17. prim. fin. 3. lib. 11. Euclidis. [i] Angulus igitur KML, acutus
k 19. prim. erit. [k] Cum ergo duo anguli FMN, HNM, duobus ſint rectis æquales; erit angulus HNM, obtuſus. Qua-
l 28. tertij. re, vt mox, lemmate ſequenti oſtendemus, arcus EH, minor erit, arcu DF; atque adeo, [l] cum æquales ſint arcus BD, BE, quod rectæ ſubtenſæ BD, BE, ex definit. poli, ſint æquales, maior erit arcus BH, arcu BF. Si igitur in ſphæra duo maximi circuli ſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.



LEMMA.

QVOD autem arcus EH, arcu DF, minor ſit, facile demonſtrabimus, hoc propoſito theoremate prius demonſtrato.

SI arcui circuli recta ſubtendatur, ad quam ex arcu duæ perpendiculares demittantur auferentes verſus terminos arcus duos arcus æquales; auferent eædem duas rectas ex recta ſubtenſa æquales. Et ſi duæ perpendiculares ad rectam ſubtenſam ducantur auferentes duas rectas æquales; auferent eædem duos arcus æquales.

ARCVI circuli ABCD, ſubtendatur recta AD, ad quam ex arcu demittantur duæ perpendiculares BE, CF, auferentes duos arcus AB, DC, æquales. Dico eaſdem auferre æquales rectas AE, DF. Du-
m Scho. 27 tertij. *cta enim recta BC,* m *erunt AD, BC, parallelæ, ob æqualitatem arcuum AB, DC:* n *ſunt autem &*
n 28. primi. *BE, CF, parallelæ. Parallelogrammum igitur eſt BEF-*
o 34. prim. *C,* o *atque adeo & rectæ BE, CF, æquales.* p *Et quo-*
p 29. tertij. *niam æqualibus arcubus AB, DC, rectæ ſubtenſæ AB, D-*
q 47. prim. *C, æquales ſunt; erunt quadrata ex AB, DC, æqualia.* q *Cum ergo tam illud æquale ſit quadratis ex AE, BE, quam hoc quadratis ex DF, CF; ſi auferantur æqualia quadrata rectarum BE, CF, æqualia erunt quadrata rectarum AE, DF; ac proinde & rectæ AE, DF, æquales erunt. Quod primo loco proponebatur.*



SED iam perpendiculares BE, CF, auferant æquales rectas AE, DF. Dico eaſdem auferre æquales arcus AB, DC, Si enim non ſunt æquales, ſit, ſi fieri poteſt, maior arcus AB, à quo æqualis abſcindatur AG, & ex G, ad AD, perpendicularis ducatur GH: Erit igitur, vt proxime demonſtratum eſt, recta AH, rectæ DF, æqualis, atque adeo & rectæ AE, pars toti: Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo arcus AB, maior arcu DC: eademque ratione neque minor erit. Aequalis ergo eſt. Quod eſt propoſitum. Ex his conſtat, arcum HE, in figura propoſitionis minorem eſſe arcu DF. Nam cum angulus FMK, acutus ſit, & HMK, obtuſus, ſi ex M, N, ad DE, perpendiculares ducerentur, caderent hæ in arcus DF, BH, auferrentq;, vt in proximo lemmate oſtendimus, arcus æquales. Quare arcus HE, minor eſt arcu DF.

iij.

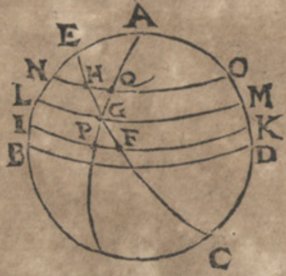
THEOR. 5. PROP. 5.

SI in circumferentia maximi circuli ſit polus parallelorum, huncque maximum circulum ſecent ad angulos rectos duo alii maximi circuli, quorum alter ſit vnus parallelorum, alter vero obliquus ſit ad parallelos; ab hoc autem obliquo circulo æquales circumferentiæ ſumantur deinceps ad eandem partem maximi parallelorum, perque illa puncta terminantia æquales circumferentias deſcribantur paralleli circuli: Circumferentiæ maximi illius circuli primo poſiti inter parallelos interceptæ inæquales erunt, ſemperque ea, quæ propior fuerit maximo parallelorum, remotiore maior erit.



IN circumferentia maximi circuli ABCD, ſit A, polus parallelorum, eumque ſecent duo maximi circuli BD, EC, ad angulos rectos, quorum BD, ſit maximus parallelorum, & EC, ad parallelos obliquus: & per F, G, H, puncta, quæ ex obliquo circulo arcus æquales auferunt FG, GH, deſcribantur paralleli IK, LM, NO, ex polo A. Dico arcum IL, maiorem eſſe arcu LN. [a] Per
a 20. 1. huius. polum enim A, & punctum G, circulus maximus deſcribatur AP, ſecans parallelos in P, Q. Quoniam igitur in ſphæræ ſuperficie intra peripheriam circuli IK, punctum G, ſignatum eſt præter polum A, & ex G, duo arcus GP, GF, circulorum maximorum caduntin circumferentiam circuli

circuli IK; [b] erit arcus GP, omnium minimus atque adeo minor quam GF: quod arcus GP, GF, minores ſint ſemicirculo, cum ſe non interſecent, antequam parallelum IK, diuidunt. Cum enim GP, ſit pars quadrantis ex A, per G, vſque ad maximum parallelorum BD, tendentis, non poterit arcum GF, ſecare, niſi vltra circulum IK, ne GP, ſit vel ſemicirculus, vel ſemicirculo maior, pro vt videlicet ſecaret GF, vel in F, vel citra F. Rurſus quia in ſuperficie ſphæræ extra peripheriam circuli NO, punctum G, ſignatum eſt præter eius polum; [c] erit & arcus GQ, omnium ex G, cadentium minimus, hoc eſt, minor, quam GH: quod arcus GQ, GH, minores ſint ſemicirculo, cum ſe non interſecent, antequam parallelo NO, occurrant, quod demonſtrabitur, vt paulo ante de arcubus GP, GF, dictũ eſt. Vterque igitur arcus FG, GH, vtroque GP, GQ, maior eſt. Et quoniam recta per G, & centrum ſphæræ ducta, id eſt, communis ſectio cirlorum maximorum AP, EC, ſecant paralleli IK, planum intra ſphæram; (non enim recta illa ad centrum ſphæræ perueniet, hoc eſt, ad centrum maximi circuli BD, niſi prius planum circuli IK, ſecet; quod parallelus IK, poſitus ſit inter maximum parallelorum, & punctum G.) ſecabit eadem recta plana paralleli NO, extra ſphæram, ſi recta illa, & planum circuli ad partes G, producantur: propterea quod punctum G, poſitum eſt inter maximum parallelorum, & parallelum NO. Quoniam igitur duo circuli maximi AP, EC, ſe mutuo ſecant in G, puncto, & à circulo EC, vtrinque à puncto G, duo arcus æquales ſumpti ſunt GF, GH, & per F, H, plana parallela circulorum IK, NO, ducta, quorum NO, occurrit communi ſectioni circulorum maximorum AP, EC, extra ſphæram, vt oſtenſum eſt, eſtque vterque arcuum GF, GH, maior vtroque arcuum GP, GQ: [d] erit arcus GP, maior arcu GQ: [e] Eſt autem arcus GP, arcui IL, & arcus GQ, arcui LN, æqualis. Igitur & arcus IL, arcu LN, maior erit. Quare ſi in circumferentia maximi circuli ſit polus, &c. Quod demonſtrandum erat.

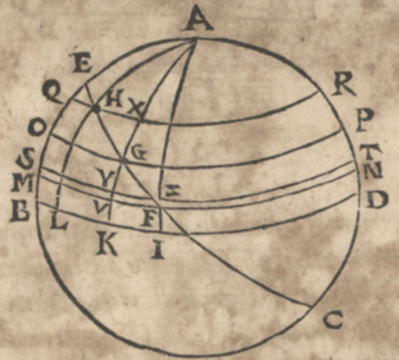


b Schol. 21. 2 huius.
c Schol. 21. 2. huius.
d 4. huius.
e 10. 2. hui.

THEOR. 6. PROP. 6. iv.

SI in circumferentia maximi circuli ſit polus parallelorum, huncque maximum circulum, ad angulos rectos ſecent duo alii circuli maximi, quorum alter ſit vnus parallelorum, alter vero obliquus ſit ad parallelos; ſumantur autem ab obliquo circulo æquales circumferentiæ deinceps ad eaſdem partes maximi illius paralleli, & per puncta terminantia ęquales circumferentias, perque polum, deſcribantur maximi circuli: Hi circumferentias inæquales intercipient de maximo parallelorum, quarum propior maximo circulo primo poſito ſemper erit remotiore maior.

IN circumferentia maximi circuli ABCD, ſit A, polus parallelorum, eumque ſecent duo maximi circuli BD, EC, ad angulos rectos, quorum BD, ſit parallelorum maximus, ad EC, ad paralleros obliquus, ex quo ſumantur arcus æquales FG, GH; & per puncta F, G, H, [a] perque polum A, circuli maximi deſcribantur AI, AK, AL, ſecantes BD, in I, K, L, Dico arcum KL, maiorem eſſe arcu IK, Deſcribantur enim per eadem puncta F, G, H, paralleli MN, OP, QR, ſecantes AK, in V, G, X, [b] Erit igitur arcus MO, maior arcu OQ; atque adeo, [c] cum arcui MO, arcus VG, & arcui OQ, arcus GX, ſit æqualis; erit & VG, maior, quàm GX. Sumatur arcus GY, ipſi GX, æqualis, & per Y, parallelus deſcribatur ST, ſecans circulum AI, in Z. Quoniam igitur arcus GY, GX, æquales ſunt, nec non GF, GH, [d] erunt ductæ rectæ HX, YF, æquales. Et quia circulus maximus AI, per polum A, [e] ſecat circulum ST, ad angulos rectos, & bifariam, erit communis ſectio, nempe recta ex Z, ad alteram ſectionem ducta diameter circuli ST, ſuper quam inſiſtit ſemicirculus rectus ad circulum AI, nempe ſemicirculus à puncto Z, incipiens, & per S, vſque ad alteram ſectionem progrediens, (hoc eſt, ſegmentum circuli, quod ſemicirculo maius non eſt.) aufertque recta illa ex circulo AI, ſegmentum ſemicirculo maius, quod nimirum à puncto Z, per I, vſque ad alteram ſectionem cum circulo ST, ducitur, atque eſt YZ, arcus inſiſtẽtis ſemicirculi quadrãte minor, (propterea quod arcus IK, [f] qui illi eſt ſimilis, quadrante quoque minor eſt, quod ita oſtendi poteſt. Quoniam circuli maximi BD, EC, recti ſunt ad maximum circulum ABCD, erit hic viciſſim ad illos rectos, ac proinde per illorum polos tranſibit. Quare eorum ſegmentum, [g] quæ ſemicirculi ſunt, [h] bifariam ſecabit, id eſt, in quadrantes. Quadrans ergo eſt arcus circuli BD, poſitus inter B, & illud punctum, vbi ſe mutuo ſecant circuli BD, EC, ideoque IK, quadrante minor. Nam circulus AK, cadit inter puncta B, I, cũ circulũ ABCD, ſecet in altero polo.) atque adeo reliquus arcus ex ſemicirculo inſiſtente interceptus inter Y, & alteram ſectionem cum circulo AI, quadrante maior; [i] erit recta YZ, omnium rectarum ex Y, cadentium in circumferentiam ZI, minima; atque adeo minor quam YF, hoc eſt, quam HX, quam æqualem oſtendimus eſſe rectæ YF. Quocirca cum circulus QR, minor ſit circulo ST, auferet recta HX, maior maiorem arcum ex ſuo circulo, quam recta YZ, minor ex ſuo, vt mox oſtendemus. Maior igitur eſt arcus HX, quam vt ſimilis eſſe poſſit arcui YZ. [k] Eſt autum arcui HX, arcus KL, & arcui YZ, arcus IK, ſimilis. Igitur & KL, maior eſt, quam vt ſimilis ſit ipſi IK; ac proinde, cum ſint in eodem circulo, maior erit arcus KL, quam IK. Quamobrem, ſi in circumferentia maximi circuli ſit polus parallelorum, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 20. 1. hui.
b 5. huius.
c 10. 2. hui.
d 3. huius.
e 15. 1. hui.
f 10. 2. hui.
g 11. 1. hui.
h 9. 2. hui.
i 1. huius.
k 10. 2. hui.

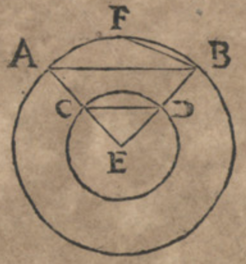
LEMMA.

QVOD autem recta HX, maiorem arcum auferat ex ſuo circulo quam recta YZ, ex ſuo, perſpicuum fiet, ſi prius theorema, quod ſequitur, demonſtretur.

ÆQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; eſt arcus minoris circuli, quam vt ſimilis ſit arcui maioris circuli.

SINT circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, deſcripti ducantur autem ex E, duæ rectæ vtcunq; EA, EB, ſecantes circulum CD, in punctis C, D. a *eruntq; arcus AB, CD, ſimiles, cum illis idem angulus E, inſiſtat ad centrum. Et quoniam rectæ EA, EB, proportionaliter ſunt ſectæ in punctis C, D, quod EA, EB, æquales ſint, nec non EC, ED;* b *erunt rectæ ductæ AB, CD, parallelæ;* c *atque adeo triangula EAB, ECD, ſimilia, habentia angulos EAB, ECD, inter ſe æquales, nec non & angulos EBA, EDC, & angulum E, communem.* d *Quare erit vt EA, ad AB, ita EC, ad CD: Eſt autem EA, maior quam EC.* e *Igitur & AB, maior erit, quam CD.* f *Accommodetur igitur ipſi CD, in circulo AB, æqualis BF,* g *eritque arcus AB, maior, quam FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, ſit ſimilis, erit arcus CD, maior, quam vt ſimilis ſit ipſi FB. Aequales igitur rectæ FB, CD, ex circulis inæqualibus AB, CD, inæquales arcus auferunt, maiorq; eſt arcus CD, circuli minoris, quam vt ſimilis ſit arcui FB, circuli maioris. quod eſt propoſitum.*

a Scho. 33. ſexti.
b 2. ſexti.
c Coroll. 4. ſexti.
d 4. ſexti.
e 14. quin.
f 1. quarti.
g Schol. 28. tertij.

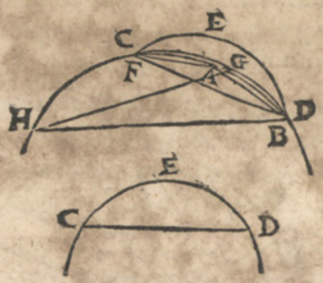


HINC perſpicuum eſt, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quam vt ſimilis ſit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta CD, æqualis ipſi FB, auferat arcum CD, maiorem, quam vt ſimilis ſit arcui FB; multo magis linea maior quam CD, auferet maiorem arcum, quam vt ſimilis ſit arcui FB; h *cum illa maior maiorem arcum abſcindat, quam, CD. Quare in propoſ. hac ſexta etiam recta HX, maior exiſtens, quam recta YZ, auferet ex circulo minore QR, arcum HX, maiorem, quam vt ſimilis ſit arcui YZ, quem recta YZ, aufert ex ST, circulo maiore.*

h Schol. 28. tertij,

HAEC autem demonſtratio intelligenda tantum eſt de arcubus ſemicirculo minoribus: quales ſunt BF, CD, vt ex ipſa demonſtratione liquet. Nam alias non conſtrueretur angulus in centro E, communi: quod tamen ad demonſtrationem requiritur. Verum erit tamen, ſi arcus minor circuli minoris maior eſt, quam vt ſimilis ſit arcui minori circuli maioris, multo maiorem eſſe arcum maiorem circuli minoris, quam vt ſimilis ſit arcui minori circuli maioris. Quod ſi quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre ſemicirculum, hoc eſt, eſſe eius diametrum, liquido conſtat, ſemicirculum minoris circuli maiorem eſſe, quam vt ſimilis ſit arcui minori circuli maioris: neque opus tunc erit alia demonſtratione.

HOC autem lemmate demonſtrato, facile etiam oſtendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus inæquales ſimpliciter, ita vt arcus minoris circuli ſimpliciter maior ſit arcu circuli maioris, & non ſolum maior, quam vt ſimilis ſit. Sint enim rectæ lineæ CD, BF, æquales, auferatque CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli maioris FGB. Dico ſimpliciter arcum CED, maiorem eſſe arcu FGB. Congruente enim recta CD, rectæ FB, cadet neceſſario arcus CED, extra arcum FGB; atque adeo arcus CED, maior erit arcu FGB, cum ille hunc totum intra ſe contineat, ſintque ambo arcus in eandem partem caui, atque eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in ſuppoſitionibus ante lib. 1. de ſphæra & cylindro. Neq; vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipſum cadet. Nam ſi dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atque adeo æquales erunt circuli. Quod eſt abſurdum, cum inæquales ponantur: Si vero arcus CED, dicatur cadere intra arcum FGB, cuiuſmodi eſt arcus CAD, quoniam vt paulo ante in hoc lemmate oſtenſum eſt, arcus CED, id eſt, CAD, maior eſt, quam vt ſimilis ſit arcui FGB, ſumatur arcus HFB, arcui CAD, ſimilis, atque adeo maior arcu FGB: Aſſumpto autem in arcu CAD, puncto A, vtrumq;, ducantur rectæ AF, AB; productaq; recta FA, donec arcum FGB, ſecet in G, ducantur rectæ GH, GB. Itaq; quoniam arcus CAD, HFB, ſimiles ſunt, erunt anguli CAD, HGB, in illis ſegmentis exiſtentes, æquales. i *Quia vero angulus CAD, angulo CGB, maior eſt, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque, totum parte; erit multo maior angulus CAD, angulo HGB. Quod eſt abſurdum. Oſtenſus enim eſt æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB: ſed neq; ei cōgruit, vt demonſtratū eſt. Cadet ergo extra, atq; adeo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictū eſt.*



i 16. prim.

HINC etiam liquido conſtat, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem ſimpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore aufert.

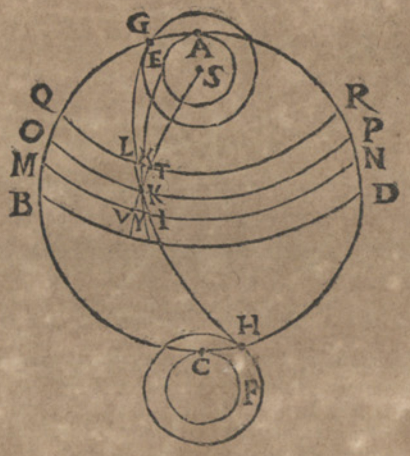
THEO-

THEOR. 7. PROP. 7.

V.

SI in ſphæra maximus circulus tangat aliquem ſphæræ circulum, alius autem maximus circulus ad parallelos obliquus ſit, tangatque circulos maiores illis, quos tangit maximus circulus primo poſitus, fuerintque eorum contactus in maximo circulo primo poſito, & ſumantur à circulo obliquo circumferentiæ, æquales, & continuæ ad eaſdem partes maximi parallelorum; per puncta autem terminantia æquales circumferentias deſcribantur paralleli circuli: Hi circumferentias inæquales intercipient de maximo circulo primo poſito, quarum ea, quæ propior erit maximo parallelorum, erit maior remotiore.

IN ſphæra maximus circulus ABCD, tangat circulum AE, in puncto A; [a] atque adeo & alium CF, illi æqualem: Alius autem circulus maximus GH, ad parallelos obliquus tangat alios duos circulos maiores illis, quos ABCD, tangit, ſintque puncta contactuum G, H, in maximo circulo ABCD; ſitque BD, maximus parallelorum: Ex obliquo denique circulo GH, ſumantur arcus æquales IK, KL, & per puncta I, K, L, paralleli deſcribantur MN, OP, QR. Dico arcum MO, maiorem eſſe arcu OQ. [b] Nam per K, & S, polum parallelorum circulus maximus deſcribatur SK, ſecans parallelos in punctis T, V. [c] Item per K, deſcribatur maximus circulus KE, tangens parallelum AE, in E, ſecansque parallelos alios in X, Y; ita tamen, vt hæc puncta X, Y, ſint inter puncta L, T, & V, I. quod ita fiet. [d] Quoniam per K, duo circuli deſcribi poſſunt tangentes circulum AE, quorum vnus inter arcus KG, KS, cadit, alter vero extra ipſos; (Nam ſi ambo ex eadem parte circulum AE, tangerent, ſecarent ſeſe mutuo prope puncta contactuum, quod alter alteri occurreret. Quod eſt abſurdum; cum ſe interſecent in puncto, quod ipſi K, opponitur inter alterum polum, & maximum parallelorum. Tanget igitur, alter eorum circulum AE, ad dextram ipſius KS, qui circulum AE, bifariam ſecat, alter vero ad ſiniſtram, inter KG, & KS, cadens: qualis eſt KE. Si namque extra KG, caderet non poſſet tangere parallelum AE; propterea quod ipſi KG, non prius occurrit, quam in puncto ipſi K, oppoſito, vbi ſe bifariam diuidunt.) ſi prior ſumatur, cadent puncta X, Y, inter puncta L, T, & V, I, vt patet, cum in K, vtrumque KG, KS, ſecet. Igitur quoniam in ſphæræ ſuperficie intra peripheriam circuli MN, punctum K, ſignatum eſt præter polum S, & ex K, tres arcus cadunt in eius circumferentiam KV, KY, KI; [e] erit KV, omnium minimus, & KY, minor, quam KI. Rurſus quia in ſuperficie ſphæræ extra peripheriã circuli QR, ſignatum eſt punctum K, præter eius polum, & ex K, in eius circumferentiã cadunt tres arcus KT, kX, KL, [f] erit KT, omnium minimus, & KX, minor quam KL. Vterq; igitur arcus KI, KL, vtroque KY, KX, maior eſt. Et quoniam recta per K, & ſphæræ centrum ducta, id eſt, communis ſectio maximorum circulorum GH, EY, ſecat planum paralleli QR, extra ſphæram, ſi recta illa, & planum circuli QR, producantur ad partes K, vt in demonſtratione propoſ. 5. huius lib. dictum eſt; [g] erit arcus kY, maior arcu kX. [h] Sed arcui kY, arcus MO, & arcui kX, arcus OQ, æqualis eſt; Sunt enim ſemicirculi, quorum vnus ex A, per B, alter vero ex E, per k, ducitur, non conuenientes, vt ex iis, quę in demonſtratione propoſ. 13. ſecundi lib. diximus, perſpicuum eſt. Igitur & arcus MO, maior erit arcu OQ. Si ergo in ſphæra maximus circulus tangat, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 6. 2. hui.
b 20. 1. hui.
c 15. 2. hui.
d Schol. 15. 2 huius.
e Scho. 21. 2. huius.
f Scho. 21. 2. huius.
g 4. huius.
h 13. 2. hui.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

VI.

SI in ſphęra maximus circulus aliquem ſphęrę circulum tangat, aliquis autem alius maximus circulus obliquus ad parallelos tangat circulos maiores illis, quos tangebat maximus circulus primo poſitus, fuerintque eorum contactus in maximo circulo primo poſito; ſumantur autem de obliquo circulo ęquales circumferentię continuę ad eaſdem partes maximi parallelorum, perque puncta terminantia ęquales circumferentias deſcribantur maximi circuli, qui & tangant eundem circulum, quem tangebat maximus circulus primo poſitus, & ſimiles parallelorum circumferentias intercipiant, habeantque eos ſemicirculos, qui tendunt à punctis contactuum ad puncta terminantia ęquales obliqui circuli circumferentias, per quę deſcribuntur, eiuſmodi, vt minime conueniant cum illo circuli maximi primo poſiti ſemicirculo, in quo eſt contactus obliqui circuli inter apparentem polum, & maximum parallelorum: Inęquales intercipient circumferentias de maximo parallelorum, quarum propior circulo maximo primo poſito ſemper erit maior remotiore.

IN ſphæra maximus circulus AB, tangat circulum AC, in A; [a] atque adeo alium illi æqualem, & parallelum: & alius circulus maximus DE, ad parallelos obliquus tangat alios parallelos maiores, ſintque contactus in circulo AB, cuiuſmodi eſt punctum D; & ſit BE, parallelorum maximus: Ex obliquo autem circulo DE, ſumantur arcus æquales FG, GH; & per puncta F, G, H, circuli maximi deſcribantur CI, kL, MN, tangentes

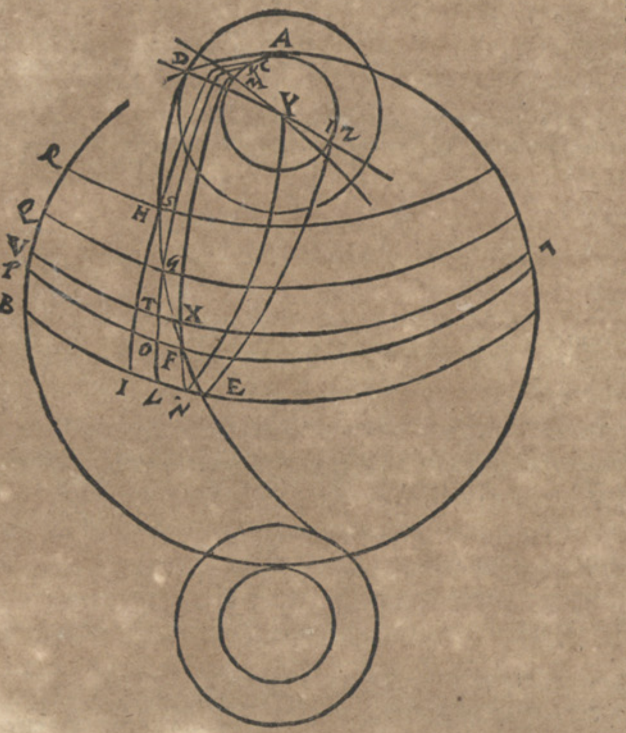
a 6. 2. hui.

paralle-

parallelum AC,in C,K,M, ſecanteſq; BE, maximum parallelorum in I, L, N, ita vt ſimiles arcus parallelorum intercipiant,eorumque ſemicirculi à punctis C, K, M, incipientes, & per F, G, H, tranſeuntes non conueniant cum ſemicirculo circuli AB,ab A,incipiente,& per B,tranſeunte. Dico arcum IL, maiorem eſſe arcu LN.

b 7. huius. Deſcribantur enim per F,G,H,paralleli PF,QG,RH,ſecantes circulum KL, in O, S. [b] Erit ergo arcus PQ, maior arcu QR; [c] quibus cum ſint æquales arcus GO,GS,erit & GO, maior, quam GS. Fiat GT, ipſi GS, æqualis, & per T, parallelus deſcribatur VT,ſecans circulum MN,in X. Et quoniam communis ſectio circulorum MN,VX,hoc eſt,recta ab X,ſectione, ad alteram ſectionem ducta aufert ſegmentum,quod incipit ab X, & tranſit per V, vſque ad alteram ſectionem,ſemicirculo minus; [d] Nam circulus maximus MN,ſecans parallelum VX,non per polos aufert ſegmentum maius ſemicirculo, quod nimirum eſt inter maximum parallelorum,& polum conſpicuum,quale eſt ſegmentũ incipiens ab X,& tranſiens per ✱, vſque ad alteram ſectionem cum circulo MN.) aufertque ex maximo circulo MN, ſegmentum maius ſemicirculo, quod nimirum ab X, incipiens per N, ad alteram ſectionem tranſit; eſtque ſegmentum XV, ad ſegmentum XM, inclinatum verſus partes. Nam ſi per N,&Y, polum parallelorum circulus maximus deſcribatur YN, [e] erit hic rectus ad BE. Ergo MN, qui inter hos duos eſt poſitus. [f] (Quoniam enim ex puncto F, duo circuli tangentes parallelum AC, duci poſſunt, vnus ad ſiniſtram circuli maximi YN, &ad dexteram alter, nos priorem eligimus, vt nimirum ponatur inter maximos circulos YN,BE.)ad eundemBE, inclinatus eſt ad partes R,& viciſſim BE, atque adeo & ſibi parallelus VX,ad MN, ad eaſdem partes R,erit inclinatus. Item ſegmentum incipiens ab X, & per V, vſque ad alteram ſectionem tranſiens ſectum eſt inæqualiter in T, eſtque minor pars TX,vt mox oſtendemus. [g] Igitur recta TX,minor eſt, quam recta TF: [h] Sed recta TF, æqualis eſt rectæ HS. Igitur & recta TX,minor erit quam recta HS; atque adeo, vt in lemmate propoſ. 6. huius lib. demonſtratum eſt,maior erit arcus HS, quam vt ſimilis eſſe poſſit arcui TX. [i] Cum ergo arcus IL, arcui HS, & arcus LN, arcui TX, ſit ſimilis, maior erit quoque arcus IL, quam vt ſimilis ſit arcui LN; atque adeo, cum in eodem circulo ſint, erit IL,maior,quam LN. Si igitur in ſphæra maximus circulus aliquem ſphæræ circulum tangat,&c. Quod erat oſtendendum.

c 13.2. hui.
d 19.2. hui.
e 15. 1 hui.
f Scho.15.2. huius.
g 2. huius.
h 3. huius.
i 13. 2. hui.



LEMMA I.

QVOD autem arcus TX, minor ſit ſemiſſe ſegmenti, quod ab X, incipit, & per V, vſque ad alteram ſectionem protenditur, ita demonſtrabimus. Per E, ducatur circulus maximus EZ, tangens parallelum AC, in Z, puncto, quod ſit ad dexteram circuli maximi NY: k *cum ex E, duo circuli tangentes AC, deſcribi poßint, vnus ad ſiniſtram circuli NY, & ad dexteram alter. Eritque EZ, quadrans. Nam circulus maximus ZY, per Y, polum circuli AC, & per Z, contactum deſcriptus* l *tranſit quoque per polũ circuli tangentis EZ.* m *Quare idem circulus YZ, ſecabit ſegmenta circulorũ BE, EZ, bifariam.* n *Cum ergo hi maximi circuli ſe bifariam ſecent, ſecabitur ſegmentum à puncto E, per Z, vſque ad alteram ſectionem, in duos quadrantes in puncto Z; atque adeo EZ, quadrans erit. Eodem modo quadrans erit ED, ſi per polum Y, & contactum D, circulus maximus YD, deſcribatur.* o *Eſt autem & arcus circuli maximi inter E, & Y, polum, quadrans. Igitur circulus maximus ex E, tanquam polo, & interuallo EZ, deſcriptus tranſibit per puncta Y, D. Non aliter oſtendemus NM, eſſe quadrantem; atque adeo circulum maximum ex N, polo, & interuallo NM, deſcriptum tranſire per Y, polum parallelorum, qualis eſt MY, atq; adeo ſecare arcum BD, vltra punctum D, & arcum NB, vltra arcum DB, ideoq; & arcũ XV, vltra eundem arcum DB: propterea quod maximi circuli ZYD, MY, ſe mutuo ſecant in Y, polo; & punctum M, eſt vltra circulum DYZ, vt oſtendemus. Quoniam vero circulus maximus MY, ductus per Y, polum paralleli AC, & per contactum M,* p *tranſit etiam per polum circuli tangentis NM; tranſibit per polos circulorum XV, & NM, ſe mutuo ſecantium in X,* q *Quare bifariam ſecabit ipſorum ſegmenta. Cum ergo vltra punctum V, ſecet ſegmentum ab X, per V, vſq; ad aliud punctum, vbi ſe mutuo ſecant circuli XV, NM, vt proxime eſt oſtenſum; erit XV, arcus minor ſemiſſe ſegmenti ab X, per V, vſq; ad alteram ſectionem; ac proinde multo minor ſemiſſe eiuſdem ſegmenti erit TX. Quod eſt propoſitum. Quod autem punctum contactus M, ſit vltra circulum maximum DYZ, ita demonſtrabitur. Quoniam tam arcus maximi parallelorum EB, inter E, & circulum YD,* r *eſt quadrans, quam arcus eiuſdem inter N, & circulum YM; Eſt autem punctum N, vltra E, verſus B; erit quoq; circulus YM, vltra YD; ac proinde M, vltra YD, exiſtet.*

k Scho.15.2 huius.
l 5. 2. hui.
m 9. 2. hui.
n 11. 1. hui.
o Corol 16. 1. huius.
p 5. 2. hui.
q 9. 2. hui.
r Coro. 16. 1. huius.

LEM-

LEMMA II.

PROROSITIS duabus magnitudinibus inæqualibus, reperire aliam mediam, quæ datæ cuicunque magnitudini commenſurabilis ſit.

SINT propoſitæ duæ magnitudines inæquales AB, AC, & data alia quæcunque DG: oporteatque inuenire aliam mediam, hoc eſt, quæ maior quidem ſit, quam AC, minor vero, quam AB, & ipſi DG, commenſurabilis. Sit primum DG, minor quam BC, exceſſus inter magnitudines AB, AC; & E, multiplex ipſius DG, proxime maior quam AC. Quo poſito, erit E, minor, quã AB. Si enim æqualis eſſet, ſi detraheretur ex E, vna magnitudo ipſi DG, æqualis (quæ quidem minor ponitur, quam BC,) maneret adhuc reliqua multiplex ipſius DG, maior quam AC. Non ergo E, eſſet multiplex ipſius DG, proxime maior, quam AC. Quod eſt abſurdum. Non ergo æqualis eſt E, ipſi AB; atq; adeo multo magis neque maior erit. Minor igitur eſt, quam AB; atq; adeo cum maior quoque ſit quam AC, & ipſi DG, commenſurabilis, quod eius multiplex ſit, conſtat propoſitum.



SED iam data magnitudo DG, non minor ſit, quam BC. Diuiſa igitur DG, bifariam, & dimidia parte rurſus bifariam, & ſic deinceps, a donec relinquatur pars DF, minor quam BC; ſit E, ipſius DF, multiplex proxime maior, quam AC; eritque E, ipſi DF, commenſurabilis; b atque adeo & ipſi DG: propterea quod vtraque E, & DG, ipſi DF, commenſurabilis eſt. Rurſus eodem pacto, vt paulo ante demonſtrauimus, erit E, minor, quam AB. Cum ergo maior quoque ſit, quam AC, & ipſi DG, commenſurabilis, conſtat propoſitum.

a 1. decim.
b 12. deci.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

viij.

SI polus parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli, quem duo alij maximi circuli ad angulos rectos ſecent, quorum circulorum alter ſit vnus parallelorum, alter vero ad parallelos obliquus ſit: & ab hoc obliquo circulo ſumantur æquales circumferentiæ, quæ continuæ quidem non ſint, ſed tamen ſint ad eaſdem partes maximi illius paralleli; per polum autem, & ſingula puncta æquales circumferentias terminantia deſcribantur maximi circuli: Inæquales circumferentias de maximo parallelo intercipient, quarum ea, quæ propior erit maximo circulo primo poſito, ſemper erit maior remotiore.



IN circumferentia maximi circuli AB, ſit A, polus parallelorum, cumque ſecent duo maximi circuli BC, DC, ad angulos rectos, quorum BC, ſit maximus parallelorum, & DC, ad parallelos obliquus; ex quo ſumantur arcus æquales non continui EF, GH: [a] & per puncta E, F, G, H, & polum A, deſcribantur maximi circuli AEI, AFK, AGL, AHM. Dico arcum ML, maiorem eſſe arcu KI. Aut enim intermedius arcus FG, vtriq; æqualium EF, GH, commenſurabilis eſt, aut incommenſurabilis. Sit primum commenſurabilis. [b] Inuenta autem maxima communi menſura X, diuidantur tres arcus EF, FG, GH, in partes ipſi X, æquales, vt in prima figura apparet; [c] & per puncta diuiſionum, & polum A, circuli maximi ducantur. Quoniam igitur arcus EQ, QF, FP, &c. æquales ſunt, [d] maior erit arcus MR, arcu RL, & RL maior, quam LS, &c. Igitur cum MR, maior ſit quã KV, & RL, maior quã VI, erit & totus ML, maior toto KI. Quod eſt propoſitũ.

a 20. 1. huius.
b 4. decim.
c 20. 1. hui.
d 6. huius.

SED iam ſit arcus intermedius FG, incommenſurabilis vtrique arcuum æqualium EF, GH. Dico rurſus arcum ML, maiorem eſſe arcu KI. Si enim maior non eſt, erit vel minor, vel æqualis. Sit primum, ſi fieri poteſt, ML, minor quam KI, vt in ſecunda figura; & ex KI, ſumatur KN, ipſi ML, æqualis; [e] & per N, & A, circulus maximus deſcribatur AON, ſecans circulũ CD, in O. Deinde per lẽma 2. præcedentis propoſ. inueniatur arcus FP, maior quidem, quam FO, minor vero quam FE, & ipſi FG, commenſurabilis: ſitq; GQ, ipſi FP, (qui minor eſt, quam EF, atq; adeo minor etiam quam GH, ipſi EF, æqualis.) æqualis, [f] & per P, Q, & A, circuli maximi deſcribãtur APR, AQS. Quoniam igitur arcus PF, GQ, æquales ſunt non continui, eſtq; vtriq; illorum commenſurabilis arcus intermedius FG; erit, vt demonſtratum iam eſt in prima figura, arcus SL, maior arcu KR. Igitur & multo maior erit, quam KN; ac proinde & ML, multo maior erit, quam KN: Sed & KN, ipſi ML, æqualis poſitus eſt. Quod eſt abſurdũ. Non ergo ML, minor eſt quam KI.



e 20. 1. huius.
f 20. 1. huius.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, arcus ML, æqualis arcui KI, vt in tertia figura. Diuiſis autem arcubus EF, GH, bifariam in N, O, [g] deſcribantur per N, O, & A, circuli maximi ANP, AOQ. [h] Erit igitur arcus MQ, maior arcu QL, & KP, maior quam PI. Quare QL, minor erit quam dimidium ipſius MLK; & KP maior quam dimidium ipſius KI. Cum ergo ML, KI, ponantur æquales; erit QL, minor quam KP, quod eſt abſurdum. Quoniam enim arcus FN, GO, dimidij æqualium arcuum EF, GH, æquales ſunt non continui, non poterit QL, minor eſſe quam KP, vt proxime in ſecunda figura demonſtratum eſt. Non ergo arcus ML, arcui KI, æqualis eſt: ſed neque minor eſt oſtenſus. Maior ergo eſt. Si igitur polus parallelorum ſit in circumferẽtia, &c. Quod erat demonſtrandum.



g 20. 1. hui.
h 6. huius.

S C H O L I V M.

SICVT Theodoſius in hac propoſitione 9. idem demonſtrauit de arcubus non continuis, quod de continuis propoſ. 6. docuit, ita in alia verſione demonſtrantur tribus Theorematibus eadem de arcubus non continuis, quæ Theodoſius de continuis demonſtrauit propoſ. 5. 7. & 8. Primum autem theorema eiuſmodi eſt.

I.

vij. SI polus parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli, quem duo alii maximi circuli ad angulos rectos ſecent, quorum circulorum alter ſit vnus parallelorum, alter vero ad parallelos obliquus ſit, & ab hoc obliquo circulo ſumantur æquales circumferentiæ, quæ continuæ quidem non ſint, ſed tamen ſint ad eaſdem partes maximi illius paralleli; per ſingula autem pũcta æquales circumferentias terminantia, deſcribantur paralleli circuli. Circumferentiæ maximi illius circuli primo poſiti inter parallelos interceptæ, inæquales erunt, ſemperque ea, quæ propior fuerit maximo parallelorum, remotiore maior erit.

IN circumferentia maximi circuli AB ſit polus parallelorum, quem alij duo maximi BC, AC, ſecent ad angulos rectos, ſitque BC, parallelorum maximus, & AC, ad parallelos obliquus. Sumantur arcus non continui æquales DE, FG; ac per D, E, F, G, paralleli ducantur DH, EI, FK, GL. Dico arcum HI, maiorem eſſe arcu KL. Aut enim arcus intermedius EF, vtrique æqualium DE, FG, commenſurabilis eſt, aut incommenſurabilis. Sit primum commenſurabilis. [a] *Inuenta antem maxima menſura V, ſecentur tres arcus DE, EF, FG, in partes ipſi V, æquales, & per puncta diuiſionum paralleli deſcribantur, vt in prima figura apparet. Quoniam igitur arcus continui DP, PE, EO, &c. æqua-*



a 4. decim.

b 3. huius. *les ſunt;* [b] *erit arcus HT, maior arcu TI, & TI, maior, quam IS, &c. Quare cum HT, maior ſit, quam KQ, & TI, maior quam QL; erit totus HI, maior toto kL. Quod eſt propoſitum.*

SED iam EF, incommenſurabilis ſit vtrique DE, FG. Dico adhuc arcum HI, maiorem eſſe arcu kL. Si enim maior non eſt, erit vel minor, vel æqualis. Sit primum minor; & ex kL, (vt in ſecunda figura) auferatur ipſi HI, æqualis kM; & per M, parallelus ducatur MN. Deinde per Lemma 2. propoſ. 8. huius lib. reperiatur arcus FO, maior quidem, quam FN, minor vero quã FG, & commenſurabilis intermedio arcui EF: Sitq; EP, ipſi FO, (qui minor eſt, quam FG, atque adeo minor etiam, quam DE, ipſi FG, æqualis) æqualis, ac per O, P, paralleli deſcribantur OR, PQ. Quoniam igitur arcus non continui PE, FO, æquales ſunt, eſtq; vtrique illorum commenſurabilis arcus intermedius EF; erit, vt iam eſt demonſtratum in prima figura, arcus QI, maior arcu kR. Ergo & multo maior erit, quam KM; ac proinde multo magis arcus HI, maior erit quam KM: Sed & HI, æqualis ponitur ipſi KM. Quod eſt abſurdum. Non ergo HI, minor eſt, quam KL.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, arcus HI, arcui KL, æqualis, vt in tertia figura. Diuiſis autem arcubus DE, FG, bifariã in M, N,
c 5. huius. *ducantur per M, N, paralleli MO, NP.* [c] *Erit igitur arcus HO, maior, quam OI; & KP, maior, quam PL. Quare OI, minor erit, quam dimidium ipſius HI, & KP, maior dimidio ipſius KL. Cum ergo HI, KL, ponantur æquales, minor erit OI, quam KP. Quod eſt abſurdum. Quia enim arcus EM, FN, dimidij æqualium DE, FG, æquales ſunt, & non continui, non poterit OI, minor eſſe, quam KP, vt in ſecunda figura demonſtratum eſt. Non ergo arcus HI, arcui KL, æqualis eſt: Sed neque minor eſt oſtenſus. Maior igitur eſt. Quod eſt propoſitum.*

II.

ix. SI in ſphera maximus circulus tangat aliquem ſphęrę circulum, alius autem maximus circulus ad parallelos obliquus ſit, tangatque circulos maiores illis, quos tangit maximus circulus primo poſitus, fuerintque eorum contactus in maximo circulo primo poſito; & ſumantur à circulo obliquo circumferentię ęquales, quę continuę quidem non ſint, ſed tamen ſint ad eaſdem partes maximi parallelorum; per puncta autem terminantia ęquales circumferentias deſcribantur paralleli circuli: Hi circumferentias inęquales intercipient de maximo circulo primo poſito, quarum ea, quę propior erit maximo parallelorum, maior erit remotiore.

HOC Theorema demonſtrabitur ex propoſ. 7. huius lib. quemadmodum præcedens Theorema ex propoſ. 5. demonſtratum fuit: dummodo duo circuli maximi AB, AC, præcedentis Theorematis tangant duos parallelos, vt in propoſ. 7. huius lib. dictum eſt. Reliqua conſtructio figuræ à conſtructione præcedentis Theorematis non differt, &c.

III.

x. SI in ſphæra maximus circulus aliquem ſphęrę circulum tangat, aliquis autem alius maximus circulus obliquus ad parallellos tangat circulos maiores illis, quos tangebat maximus circulus primo poſitus, fuerintque eorum contactus in maximo circulo primo poſito; ſumantur autem de obliquo circulo ęquales circumferentię, quę continuę quidem non ſint, ſed tamen ſint ad eaſdem partes maximi parallelorum, per quę puncta terminantia ęquales circumferentias

ferentias deſcribantur maximi circuli, qui & tangant eundem circulum, quem tangebat maximus circulus primo poſitus, & ſimiles parallelorum circumferentias intercipiant, habeantq; eos ſemicirculos, qui tendunt à punctis contactuum ad puncta terminantia æquales obliqui circuli circumferentias, per quæ deſcribuntur, eiuſmodi, vt minime conueniant cum illo circuli maximi primo poſiti ſemicirculo, in quo eſt contactus obliqui circuli inter apparentem polum, & maximum parallelorum: Inæquales intercipient circumferentias de maximo parallelorum, quarum propior circulo maximo primo poſito, ſemper erit maior remotiore.

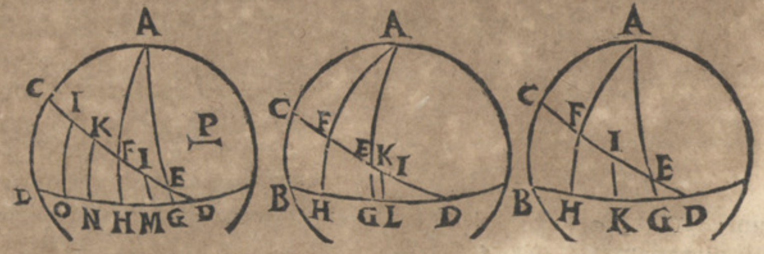
HOC etiam Theorema demonſtrabitur ex propoſ. 8. huius lib. quemadmodum propoſitio 9. ex propoſ. 6. fuit oſtenſa, dummodo maximi circuli propoſ. 9. ex A, prodeuntes tangant eundem circulum minorem illo, quem DC, tangere debet, &c.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

xj.

SI polus parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli, quem duo alij maximi circuli ad angulos rectos ſecent, quorum alter ſit vnus parallelorum, alter vero ſit obliquus ad parallelos; in hoc autem obliquo circulo ſumantur duo quælibet puncta ad eaſdem partes maximi illius paralleli, perque polum parallelorum, & per vtrumque illorum punctorum deſcribantur maximi circuli: Erit, vt circumferentia maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primo poſitum, & proximum maximum circulum per polum, & per vnum punctorum deſcriptum, ad circumferentiam obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptã, ita circumferentia maximi parallelorum intercepta inter duos magnos circulos per polum, perq; vtrumque punctorum deſcriptos, ad circumferentiam aliquam, quæ ſit minor, quam circumferentia obliqui circuli inter vtrumque punctum intercepta.

SIT polus A, parallelorum in circumferentia maximi circuli AB, quem duo alii maximi circuli BD, CD, ſecent ad angulos rectos, & ſit BD, parallelorum maximus, & CD, ad parallelos obliquus; in quo ſumptis duobus punctis vtcunque E, F,[a] deſcribantur per A, polum, & per E, F, circuli maximi AEG, AFH. Dico, vt eſt arcus BH, ad arcum CF, ita eſſe arcum HG, ad arcum minorem arcu FE. Aut enim arcus CF, FE, commenſurabiles ſunt, aut incommenſurabiles. Sint primum commenſurabiles, vt in prima figura, [b] & inuenta eorum maxima menſura P, diuidantur arcus CF, FE, in arcus maximæ menſuræ æquales, [c] perq; puncta diuiſionũ, & polum A, circuli maximi ducantur IM, KN, LO. Quoniam igitur arcus continui CL, LK, KF, FI, IE, æquales ſunt, [d] erit arcus BO, maior quam ON, & ON, maior quam NH, &c. [e] Igitur maior erit proportio BO, ad CL, quam ON, ad LK; & maior proportio ON, ad LK, quã N ad KF, &c. Quare, cum ſint quotcunque magnitudines BO, ON, NH, & totidem numero CL, LK, KF, ſitque maior proportio primæ BO, ad primam CL, quam ſecundæ ON, ad ſecundam LK; & maior ſecundæ ON, ad ſecundam LK, quam tertiæ NH, ad tertiam KF; [f] maior erit proportio BH, ad CF, quam NH, ad KF:[g] Sed proportio NH, ad KF, maior adhuc eſt proportione HM, ad FI, vt oſtenſum eſt. Multo ergo maior eſt proportio BH, ad CF, quam HM, ad FI: [h] Sed adhuc maior eſt proportio HM, ad FI, quam HG, ad FE; propterea quod arcus HM, MG, multitudine æquales ſunt arcubus FI, IE, [i] eſtque maior proportio primæ HM, ad primam FI, quam ſecundæ MG, ad ſecundam IE, vt dictum eſt. Multo igitur maior eſt proportio BH, ad CF, quã HG, ad FE. Sit vt BH, ad CF, ita HG, ad P. Erit ergo maior proportio quoque HG, ad P, quam HG, ad FE, [k] ac proinde P, arcus minor erit arcu FE. Quare eſt, vt arcus BH, ad arcum CF, ita arcus HG, ad arcum P, arcu FE, minorem. Quod eſt propoſitum.



a 30.1. hui.
b 3. decim.
c 20.1. hui.
d 6. huius.
e 8. quinti.
f 34. quint.
g 8. quinti.
h 34. quin.
i 8. quinti.
k 10. quin.

SED iam ſint arcus CF, FE, incommenſurabiles, vt in ſecunda figura. Dico adhuc, vt eſt arcus BH, ad ar- CF, ita eſſe arcum HG, ad arcum arcu FE, minorem. Si enim non ita ſit, erit, vt BH, ad CF, ita HG, vel ad arcum arcu FE, maiorem, vel ad ipſummet FE. Sit primum, ſi fieri poteſt, vt BH, ad CF, ita HG, ad arcum FI, arcu FE, maiorem. Inueniatur per lemma 2. propoſ. 8. huius lib. arcus FK, maior quidem quam FE, minor autem quam FI, & ipſi CF, commenſurabilis, [l] ducaturque per K, & A, polum circulus maximus KL. Quoniam igitur commenſurabiles ſunt arcus CF, FK: erit, vt demonſtratum iam eſt in prima figura, vt BH, ad CF, ita HL, ad arcum arcu FK. minorem: Sed vt BH, ad CF, ita ponebatur HG, ad FI. Igitur erit quoque, vt HG, ad FI, ita HL, ad arcum arcu FK, minorem: & permutando, vt HG, ad HL, ita FI, ad arcum arcu FK, minorem: Sed HG, arcus minor eſt arcu HL. Igitur & arcus FI, minor erit, quam arcus arcu FK, minor, totum quam pars. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt, vt BH, ad CF, ita HG, ad arcum arcu FE, maiorem.

l 20.1. huiu.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, vt BH, ad CF, ita HG, ad FE, vt in tertia figura. Diuiſo arcu FE, bifariam in I, [m] deſcribatur per I, & per A, polum circulus maximus IK. Quoniam igitur arcus continui FI, IE, æquales ſunt, [n] erit HK, maior quam KG; atque adeo HK, maior erit dimidio ipſius HC. [o] Quare maior erit proportio HK, ad FI, quam arcus dimidii ipſius HG, ad FI, [p] Sed vt dimidium arcus HG, ad FI, dimidium arcus FE, ita eſt totus arcus HG, ad totum arcum FE. Igitur maior erit proportio HK, ad FI, quam HG, ad FE: Ponitur autem, vt HG, ad FE, ita BH, ad CF. Igitur maior erit quoque proportio HK, ad FI, quam BH, ad CF; [q] atque adeo arcus HK, ad arcum arcu FI, maiorem erit, vt BH, ad CF. Quod eſt abſurdum. Demonſtratum enim proxime fuit in ſecunda figura, non poſſe eſſe, vt eſt arcus BH, ad CF, ita arcum HK, ad arcum arcu FI; maiorem. Non ergo eſt, vt BH, ad CF, ita HG, ad FE: ſed neque, vt BH, ad CF, ita eſt HG, ad arcum arcu FE, maiorem, vt demonſtratum eſt. Igitur erit, vt BH, ad CF, ita HG, ad arcum arcu FE, minorem. Quare ſi polus parallelorum ſit in circumferentia, &c. Quod demonſtrandum erat.

m 20.1. hu.
n 6. huius.
o 8. quinti.
p 15. quint.
q 10. quint.

COROL-

COROLLARIVM.

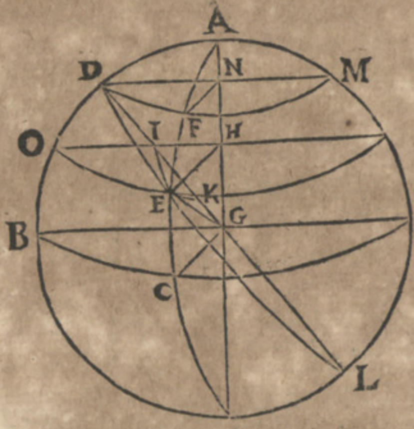
HINC fit, maiorem eſſe proportionem arcus BH, ad arcum CF, quam arcus HG, ad arcum FE. [r] Cum
r 10. huius. enim ſit, vt BH, ad CF, ita HG, ad arcum arcu FE, minorem: [s] Sit autem maior proportio arcus HG, ad arcum
s 8. quinti. arcu FE, minorem, quam ad FE; erit quoque maior proportio BH, ad CF, quam HG, ad FE.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

xij.

SI polus parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli, quem duo alij maximi circuli ad angulos rectos ſecent, quorum alter ſit vnus parallelorum, alter vero ſit obliquus ad parallelos; alius autem maximus circulus per polos parallelorum tranſiens obliquum circulum ſecet inter maximum parallelorum, & eum, quem obliquus circulus tangit: Diameter ſphæræ ad diametrum eius circuli, quem tangit obliquus circulus, maiorem rationem habet, quam circumferentia maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primo poſitum, & maximum circulum per polos parallelorum tranſeuntem, ad circumferentiam obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam.

IN circumferentia maximi circuli AB, ſit parallelorum polus A, eumq; duo alij circuli maximi BC, DE, ad angulos rectos ſecent, quorum BC, ſit maximus parallelorum, & DE, ad parallelos obliquus tangens parallelum DF. Per polum quoque A, alius circulus maximus deſcribatur AE, ſecans obliquum DE, in puncto E, inter maximum parallelorum BC, & parallelum DF, quem obliquus tangit, poſito. Dico diametrum ſphæræ ad diametrum paralleli DF, maiorem habere rationem, quam circumferentiam BC, ad circumferentiam DE. Sit AG, recta communis ſectio circulorum AB, AE; & BG, communis ſectio circulorum AB, BC; eruntque AG,



a 11. 1. hui. BG, ſemidiametri ipſorum, [a] (cum ſe mutuo ſecent bifariam circuli maximi in ſphæra) atque adeo & ſphæræ, ſecantes ſe ſe in G, centro ſphæræ, & circulorum maximorum. Sit quoque DL, communis ſectio circulorum AB, DE, quæ quoque diameter ſphæræ erit tranſiens per centrum G. Rurſus DM, ſit communis ſectio circulorum AB, DF; eritque DM, diameter circuli DF, [b] propterea quod
b 15. 1. hui. circulus AB, parallelum DF, ſecet bifariã per polos. Item FN, CG, ſint communes ſectiones circulorum DF, BC, cum circulo AE. Ex polo A, interuallo vero AE, parallelus deſcribatur OE, ſintq; OH, EH, communes eius ſectiones cum circuli AB, AE; Eruntque & FN, EH, CG, ſemidiametri circulorum DF, OE, BC, [c] quod ipſos
c 15. 1. hui. bifariam ſecet circulus maximus AE, per polos; atque adeo communes ſectiones diametri ſint occurrentes diametris DM, OH, BG, in cẽtris N, H, G. Eſt enim & OH, diameter circuli OE, [d] cum
d 15. 1. hui. eum circulus AB, per polum A, bifariam ſecet. Sit rurſum EG, communis ſectio circulorum maximorum AE, DE, quæ etiam diameter erit tranſiens per G, çentrum ſphæræ. Denique EI, communis ſit ſectio circulorum
e 10. 1. hui. DE, OE. [e] Et quoniam recta AG, ducta per polos paralleli OE, recta eſt ad planum paralleli, caditque in eius centrum H; erit angulus OHG, ex defin. 3. lib. 11. Eucl. in triangulo GHI, rectus; atque adeo angulus HGI, acu-
f 19. primi. tus. [f] Latus igitur GI, maius erit latere HI. Auferatur recta IK, rectæ IH, æqualis, iungaturque recta EK. Rurſus
g 19. vnde. quia vterque circulus DE, OE, rectus eſt ad circulum AB; [g] erit & EI, communis eorum ſectio ad eundem perpendicularis; ac proinde, ex defin. 3. lib. 11. Eucl. vterque angulus EIH, EIK, rectus. Quoniam igitur duo latera EI, IH, trianguli EIH, duobus lateribus EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt, anguloſq; continent æquales, nem-
h 4. primi. pe rectos, vt oſtendimus, [h] erunt anguli quoque IHE, IKE, æquales. Quia vero maior eſt proportio rectæ GI, ad
i 10. vndec. rectam IK, quam anguli IKE, hoc eſt anguli OHE, ſibi æqualis, ad angulum IGE, vt mox demõſtrabimus: [i] Eſt
k 15. vnde. autem angulus OHE, angulo BGC, æqualis; [k] (ſunt enim rectæ OH, BG, communes ſectiones planorum parallelorum OE, BC, factæ à plano AB, parallelæ; necnon & rectæ EH, CG, communes ſectiones eorundem planorum factæ à plano AE,) erit quoque maior proportio rectæ GI, ad rectam IK, hoc eſt, ad rectam ſibi æqua-
l 33. ſexti. lem IH, quam anguli BGC, ad angulum DGE: [l] Vt autem angulus BGC, ad angulum DGE, ita eſt arcus BC,
m 4. ſexti. ad arcum DE. Maior igitur proportio quoq; erit rectæ GI, ad rectam IH, quam arcus BC, ad arcum DE: [m] Eſt
n 15. quint. autem, vt GI, ad IH, ita GD, ad DN, hoc eſt, [n] ita tota diameter DL, ad totam diametrũ DM, [o] (ſunt enim DN,
o 16. vnde. OH, communes ſectiones planorum parallelorum DF, OE, factæ à plano AB, parallelæ.) Igitur maior quoque proportio erit DL, diametri ſphæræ ad DM, diametrum paralleli DF, quam arcus BC, ad arcum DE. Quapropter, ſi polus parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli, &c. Quod demonſtrandum erat.

L E M M A.

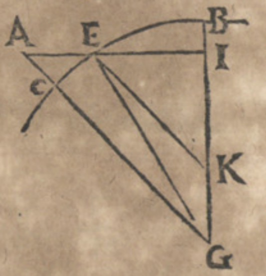
QVOD autem maior ſit proportio rectæ GI, ad rectam IK, quam anguli IKE, ad angulum IGE, hoc theoremate propoſito demonſtrabimus.

IN omni triangulo rectangulo, ſi ab vno acutorum angulorum vtcunque ad latus oppoſitum linea recta ducatur; erit maior proportio huius lateris ad eius ſegmentum, quod prope angulum rectum exiſtit, quam anguli acuti, quem linea ducta cum prædicto latere, effecit, ad reliquum angulum acutum trianguli.

SIT triangulum rectangulum EGI, habens angulum I, rectum, ducaturque ab angulo acuto IGE, ad latus oppoſitum GI, recta linea EK, vtcunque. Dico maiorem eſſe proportionem rectæ GI, ad IK, quam
p 31. primi. *anguli acuti IKE, ad angulum acutum IGE.* p *Ducatur enim per G, recta GA, ipſi EK, parallela, occurrens rectæ IE, protractæ in A. Et quoniam angulus I, rectus eſt, erit angulus IEG, acutus, & propterea AEG,*
q 19. prim *obtuſus.* q *Latus igitur EG, in triangulo GEI, maius eſt latere GI; in triangulo vero AEG, minus latere*

AG. Qua

AG. Quare arcus circuli ex centro G, ad interuallum GE, deſcriptus ſecabit rectam GI, productam vltra I, nempe in B, rectam vero GA, citra A, vt in C. Quoniam igitur triangulum GAE, maius eſt ſectore GCE, [r] *maior erit proportio trianguli GAE, ad triangulum GEI, quam ſectoris GCE, ad triangulum GEI:* [s] *Eſt autem maior adhuc proportio ſectoris GCE, ad triangulum GEI, quam ad ſectorem GEB; quod triangulum GEI, minus ſit ſectore GEB. Multo igitur maior erit proportio trianguli GAE, ad triangulum GEI, quam ſectoris GCE, ad ſectorem GEB:* [t] *ac proinde & componendo maior erit proportio trianguli GAI, ad triangulum GEI, quam ſectoris GCB, ad ſectorem GEB:* [u] *Eſt autem vt triangulum GAI, ad triangulum GEI, ita recta AI, ad rectam, IE;* [x] *& vt ſector GCB, ad ſectorē GEB, ita angulus BGC, ad angulū BGE. Maior igitur erit quoque proportio AI, ad IE, quam anguli BGA, hoc eſt,* [y] *quam anguli ſibi æqualis IKE, ad angulum IGE:* [z] *Vt autem AI, ad IE, ita eſt GI, ad IK. Igitur & maior erit proportio rectæ GI, ad rectam IK, quam anguli IKE, ad angulum IGE. Quod eſt propoſitum.*



r 8. quinti.
s 8. quinti.
t 28. quint.
u 1. ſexti.
x Cor. 1. 33. ſexti.
y 29. prim.
z 2. vel 4. ſexti.

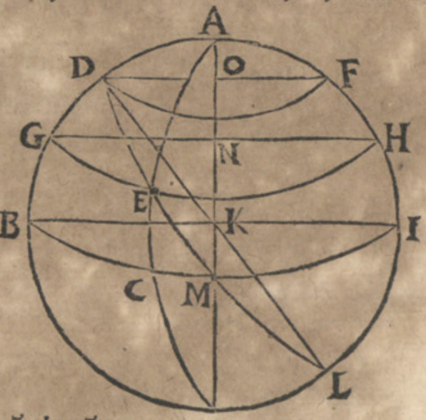
SCHOLIVM.

xiij.

ADDITVR in alia verſione hoc loco ſequens Theorema.

IISDEM poſitis, Diameter ſphęrę ad diametrū paralleli per punctū obliqui circuli, p quod maximus circulus è polo tranſit, deſcripti, minorē rationē habet quam circūferentia maximi parallelorū intercepta inter maximū circulū primo poſitū, & maximū circulū per polos parallelorum tranſeuntem, ad circumferentiam obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam.

SINT deſcripti circuli, vt in præcedenti propoſ. Dico minorem eſſe proportionem diametri ſphæræ ad diametrum paralleli GE; quam circumferentiæ BC, ad circumferentiam DE. Sint GH, BI, communes ſectiones circulorum GE, BC, cum circulo AB, quæ diametri illorum erunt, [a] *cum AB, per eorum polos ductus ipſos ſecet bifariam, & ad angulos rectos. Erit ergo BI, diameter etiam ſphæræ. Et quoniam circulus DE, ponitur rectus ad AB,* [b] *tranſibit DE, per polos ipſius AB. Eodem modo BC, per polos eiuſdem AB, tranſibit, cum rectus ad ipſum ponatur. Quare M, punctum, vbi ſe mutuo ſecant, polus erit circuli AB, ac propterea ſegmentum DEL, quod rectum eſt ad circulum AB, inæqualiter diuidetur in E, puncto, vbi circuli DE, GE ſe interſecant, minorque pars erit ED:* [c] *quandoquidem arcus MD, ML, æquales ſunt, quod rectæ illis ſubtenſæ, ex defi. poli, æquales ſint.* [d] *Recta igitur ducta ED, minor erit, quā recta EG; ac proinde cum circulus GE, minor ſit circulo DE, maior erit circumferentia EG, quam circumferentia DE.* [e] *Si enim recta rectæ ED, æqualis aufert ex circulo GE, maiorem arcum, quam recta DE, ex circulo DE, multo magis recta EG, quæ maior eſt, quam recta ED, vt oſtendimus, maiorem arcū auferet, &c.* [f] *Quare minor erit proportio arcus BC, ad arcum GE, quā ad arcū DE. Quonia vero eſt, vt arcus BC, ad totā circumferentiā circuli BC, ita arcus GE, ad totam circumferentiā circuli GE, propter ſimilitudinē arcuum BC, GE; (In hoc n. conſiſtit ſimilitudo arcuū, vt ad ſuorū circulorum circumferentias integras eandem habeant proportionem, vt in ſchol. propoſ. 33. lib. 6. Eucl. tradidimus) atq; adeo permutando, vt arcus BC, ad arcū GE, ita tota circumferentia circuli BC, ad totā circumferentiā circuli GE; erit quoq; minor proportio circūferentiæ circuli BC, ad circumferentiā circuli GE, quam arcus BC, ad arcū DE: Vt autē circūferentia circuli BC, ad circūferentiā circuli GE, ita eſt diameter BI, (quæ ſphæræ etiā diameter eſt) ad diametrū GH, vt Pappus demonſtrauit, & nos in libello Archimedis de dimenſione circuli oſtēdimus. Igitur minor quoq; erit proportio diametri ſphæræ BI, ad GH, diametrū paralleli GE, quā arcus BC, ad circumferentiam DE. Quod eſt propoſitū.*



a 15. 1. hui.
b 13. 1. hui.
c 28. tertij.
d Sch. 21. 2 huius.
e lemma 6. huius.
f 8. quinti.

COROLLARIVM.

HINC fit, iiſdem poſitis, maiorem eſſe rationem circumferentiæ BC, maximi parallelorum interceptæ inter maximum circulum AB, primo poſitum, & maximum circulum AC, per polos parallelorum tranſeuntē, ad circumferentiam DE, obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam, quam ſinus totius ad ſinum circūferentiæ AE, maximi circuli per polos parallelorum tranſeuntis; minorem vero, quam ſinus totius ad ſinum circumferentiæ AD, maximi circuli primo poſiti inter polos parallelorum, & obliquum circulum interceptæ. Quoniam enim hoc Theoremate oſtenſum eſt, maiorem eſſe rationem arcus BC, ad arcum DE, quam diametri ſphæræ ad diametrum paralleli GE, [g] vt autem diameter BI, ſphæræ ad GH, diametrum circuli GE, ita eſt BK, ſemidiameter, hoc eſt, ſinus totus, ad GN, ſemidiametrum, hoc eſt, ad ſinum arcus AE. [h] Cum n. arcus AG, AE, æquales ſint, ſitque GN, ſinus arcus AG; erit quoq; GN, ſinus arcus AE.) Maior igitur erit quoque ratio arcus BC, ad arcum DE, quam ſinus totius BK, ad GN, ſinum arcus AE.

g 15. quint.
h 10. 2. hui.

[i] RVRSVS, quoniā oſtenſū eſt, minorē eſſe rationē arcus BC, ad arcū DE, quā diametri ſphæræ ad diametrū paralleli DF. [k] Vt autē diameter ſphærę BI, ad DF, diametrū paralleli DF, ita eſt BK, ſinus totus ad DO, ſinū arcus AD. Minor igitur quoq; eſt, ꝓportio arcus BC, ad arcū DE, q̃ ſinus totius ad ſinū arcus AD. Quod eſt propoſitū.

i 11. huius.
k 15. quin.

CÆTERVM quid ſit ſinus, ex ſequenti tractatione intelligetur.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

xiv.

SI in ſphæra maximi circuli tangant vnum, eundemq; parallelorum, intercipiantq; ſimiles parallelorum circumferentias inter vtrumq; maximorum circulorum interiectas; alius autem maximus circulus ad parallelos obliquus circulos tangat maiores illis, quos tangunt maximi circuli primo poſiti, ſecetq; obliquus idem circulus eoſdem maximos circulos primo poſitos in punctis poſitis inter maximum parallelorū, & circulū, quem tangunt circuli maximi primo poſiti: Diameter ſphæræ ad diametrū circuli, quē tangit obliquus circulus, maiorē rationē habet, quam circumferentia maximi paralleli intercepta inter circulos primo poſitos, eundemque circulum tangentes ad circumferentiam obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam.

IN ſphæra duo maximi circuli AB, CD, tangant eundem parallelum AC, intercipiantque ſimiles parallelorum circumferentias inter ipſos interiectas; alius autem circulus maximus EF, tangat parallelū EG, maiorē



parallelo AC, in E, ſitque obliquus ad parallelos, & ſecet duos priores AB CD, inter maximũ parallelorum HF, & parallelum AC, in punctis IK. Dico maiorem eſſe rationem diametri ſphæræ ad diametrũ paralleli EG, quã circũferẽtiæ BD, ad circumferentiam IK. [a] Per L, enim polum parallelorum, & puncta E, I, K maximi circuli deſcribantur LH, LM, LN; ac per K, parallelus KO, ſecans circulum AB, in P. [b] Quoniam igitur maior eſt ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli EG, quam arcus HM, ad arcũ EI; ratio autem arcus HM, ad arcum EI, [c] maior eſt, quam arcus MN, ad arcum IK; erit quoque maior ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli EG, quam arcus MN, ad arcum IK. Et quia arcus PK, ſimilis eſt arcui BD, ex hypotheſi, [d] & arcus OK, ſimilis arcui MN; eſtque arcus PK, minor arcu OK; erit quoque arcus BD, minor arcu MN; [e] ac proinde minor erit ratio arcus BD, ad arcum IK, quam arcus MN, ad eundem arcum IK. Cum ergo oſtenſum ſit, rationem diametri ſphæræ ad diametrum circuli EG, maiorem eſſe, quam arcus MN, ad arcum IK; Multo maior erit ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli EG, quam arcus BD, ad arcum IK. Si igitur in ſphæra maximi circuli tangant vnum, &c, Quod erat demonſtrandum.

a 20.1.hui. b 21.huius. c Corol.10. huius. d 10.2.hui. e 8. quinti.

S C H O L I V M.

IN exemplari græco habetur, maiorem eſſe rationem duplæ diametri ſphæræ ad diametrum circuli EG, quam arcus BD. ad arcum IK. Quod quidem ex noſtra demonſtratione liquido conſtat. Cum enim diameter ſphæræ maiorem habeat rationem ad diametrum circuli EG, quam arcus BD, ad arcum IK; multo maiorem rationem habebit dupla diametri ſphæræ ad diametrum circuli EG, quam arcus BD, ad arcum IK; [f] *propterea quod dupla diametri ſphæræ ad diametrum circuli EG, maiorem rationem habet, quam diameter ſphæræ ad eandem diametrum circuli EG.*

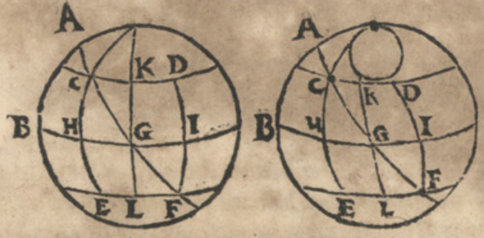
f 8. quinti.

XV.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI in ſphæra paralleli circuli intercipiant circumferentias maximi alicuius circuli vtrinq; æquales ab illo puncto, in quo ipſe maximus circulus ſecat maximum parallelorum; per puncta autem terminantia æquales circumferentias, & per parallelorum polos deſcribantur maximi circuli, aut ſi diſcribantur maximi circuli qui vnum eundemq; parallelorum tangant: æquales intercipient circumferentias de maximo parallelorum.

IN ſphæra AB, paralleli circuli CD, EF, auferant de maximo circulo AF, duas circumferentias æquales GC, GF, vtrinque à puncto G, in quo circulus AF, ſecat maximum parallelorum BG; & per puncta C, G, F, ducãtur maximi circuli ſiue per polos parallelorum, vt in priori figura, ſiue tangentes vnum eundemque parallelum, vt in figura poſteriori, ſecantes maximum parallelorum in H, I. Dico arcus GH, GI, æquales eſſe. Quoniã enim arcus GC, GF, æquales ponuntur, [a] erunt paralleli CD, EF, æquales [b] Igitur & arcus GK, GL, æquales erũt. [c] Quare rectæ ductæ CK, FL, æquales erunt; [d] ac proinde in circulis æqualib. CD, EF, arcus æquales auferent CK, FL; & idcirco inter ſe ſimiles erunt arcus CK, FL: [e] Eſt autem arcus GH, arcui CK, & arcus GI, arcui FL, ſimilis. Igitur & arcus GH, GI, ſimiles inter ſe erunt, ac proinde, cum ſint eiuſdem circuli, æquales inter ſe. Si igitur in ſphæra maximus circulus, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 17. 2. hui. b 18.2.hui. c 3. huius. d 28.tertij. e 10. vel 13. 2. huius.

S C H O L I V M.

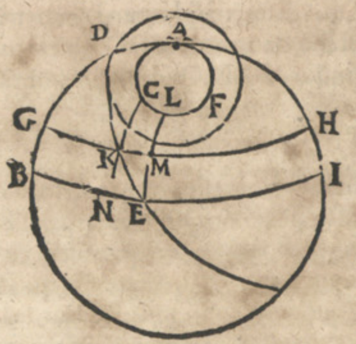
HINC etiam conſtat, iiſdem poſitis, omnes arcus maximorum circulorum inter parallelos interceptos inter ſe æquales eſſe, quales ſunt CH, HE, KG, GL, DI, IF. Cum enim arcus GC, GH, arcubus GF, GI, æquales ſint, [f] *erunt & rectæ CH, FI, æquales;* [g] *ac propterea & arcus CH, FI, æquales erunt:* [h] *Sunt autem arcui CH, arcus KG, DI, & arcui FI, arcus LG, EH, æquales. Igitur omnes illi ſex arcus æquales erunt.*

f 3. huius. g 28. tertij. h 10. vel 13. 2. huius.

xvj.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI in ſphæra maximus circulus aliquem circulum tangat, alius autem maximus circulus obliquus ad parallelos tangat circulos maiores illis, quos tangebat maximus circulus primo poſitus: inæquales intercipient circumferentias parallelorum circulorum, quarum propiores vtriuis polorum maiores erunt, quam vt ſimiles ſint remotioribus.



IN ſphæra maximus circulus AB, tangat circulum AC; & alius maximus DE, tangat alium maiorem DF, ſecetque duos parallelos quoſcunque GH, BI, in KE. Dico arcus KH, EI, inæquales eſſe, maioremq; eſſe KH, polo conſpicuo propiorem, quam vt ſimilis ſit arcui EI, remotiori: vel ipſum EB, polo occulto propiorem eſſe maiorem, quam vt arcui KG, remotiori ſimilis ſit. [a] Per puncta enim E, K, deſcribantur maximi circuli LE, CN, tangentes circulum AC, ita vt ſemicirculi à C, per N, & ab A, per B, procedentes non conueniant: item ſemicirculi ab L, per E, & ab A, per I, tendentes non coeant. [b] Erunt igitur arcus MH, EI, ſimiles. Quare KH, maior eſt, quam vt arcui EI, ſimilis ſit. Eodem modo, quoniam ſimiles ſunt arcus BN, GK, erit BE, alteri polo propior maior, quam vt ſimilis ſit arcui GK, ab eodem polo remotiori. Itaque ſi in ſphæra maximus circulus aliquem circulum tangat, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 15. 2. hui. b 13. 2. hui.

FINIS LIBRI III. THEODOSII.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

SINVS VEL SEMISSES RECTARVM IN CIRCVLO SVBTENSARVM:

LINEÆ TANGENTES ATQVE SECANTES.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

SINVS, VEL SEMISSES RECTARVM IN CIRCVLO SVBTENSARVM:

LINEÆ TANGENTES, ATQVE SECANTES.

PRÆFATIO.

Sinuum vtilitas.

DICI vix poteſt, quantam in rebus tam Aſtronomicis, quam Geometricis, vtilitatem habeat Sinuum cognitio: cum innumerabilia pene problemata Aſtronomica, & Geometrica ad vſum per calculum & rationem Sinuum reuocentur, vt tum ex noſtris triangulis rectilineis, ac ſphæricis, tum ex Almageſto Ptolemæi, ex noſtra Gnomonica, & ex alijs variorum Aſtronomorum libris manifeſtum eſt. Quare, cum à paucis admodum Sinuum demonſtrationes ſint explicatæ, operæ pretium me facturum arbitror, ſi, quanta potero breuitate, ac perſpicuitate, ex varijs auctoribus, præſertim ex Ptolemæo, Purbachio, atque Iohanne Regiomontano, demonſtrationes colligam, quibus omnium arcuum ſinus & chordas cognitas habeamus, vt & tabulas Sinuum, ac chordarum iam à multis ſcriptoribus ſupputatas examinare, (facile enim error in numerorum impreſſione committitur) & nouas alias, quando res tulerit (poſito Sinu toto vel diametro quotcunque particularum) condere poſsimus.

QVONIAM vero Recentiores ſumma felicitate ex ſinubus alias lineas collegerunt, nimirum Tangentes, atque Secantes, vt facilius quædam ac breuius demonſtrarent; de hiſce etiam lineis agemus. Habent enim lineæ hæ egregium vſum in rebus Aſtronomicis & Geometricis, vt ex noſtris triangulis planis, ac ſphæricis fiet perſpicuum. Initium autem ſumemus à definitionibus.

DEFI-

DEFINITIONES.

I.

COMPLEMENTVM arcus alicuius, eſt exceſſus, quo quadrans eum ſuperat, ſi arcus minor eſt quadrante, vel ab eo ſuperatur, ſi eſt quadrante maior.

Complementũ arcus quid.

II.

CHORDA (quam alij ſubtenſam, alij inſcriptam dicunt) eſt linea recta arcum quemcunque in circulo ſubtendens.

Chorda quid.

III.

SINVS rectus (qui alijs ſinus rectus primus dicitur) eſt dimidium chordæ ſubtendentis duplum eius arcus, cuius dicitur ſinus rectus.

Sinus rectus quid.

Vel aliter.

SINVS rectus eſt linea perpendicularis cadens ab vno extremo arcus, cuius dicitur ſinus rectus, in diametrum circuli ab altero extremo eiuſdem arcus ductam.

IV.

SINVS verſus (quem ſagittam alij vocant) eſt pars diametri circuli inter extremum dati arcus, cuius dicitur ſinus verſus, & ſinum rectum eiuſdem arcus intercepta.

Sinus verſus quid.

V.

SINVS complementi alicuius arcus (qui quibuſdam ſinus rectus ſecundus dicitur) eſt ſinus rectus alterius arcus, qui complementum eſt illius arcus, cuius dicitur ſinus complemẽti.

Sinus complementi quid.

VI.

SINVS totus eſt radius, ſiue ſemidiameter circuli, hoc eſt, ſinus rectus, vel verſus quadrantis circuli.

Sinus totus quid.

VII.

SINVS tam rectus, & verſus, quàm complementi alicuius anguli rectilinei eſt ſinus illius arcus, qui in circulo deſcripto ex angulo inter duas rectas angulum conſtituentes interiicitur.

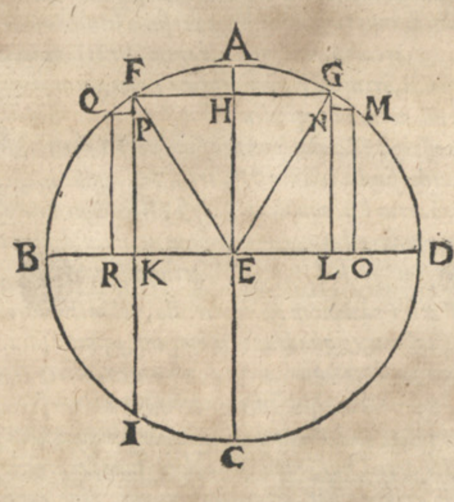
Sinus anguli rectilinei quid.

EXPONATVR *circulus* ABCD, *cuius centrum* E, *per quod ducantur duæ diametri* AC, BD, *ſeſe ad rectos angulos ſecantes,* [a] *& totum circulum in quatuor quadrantes æquales diuidentes, vtpote qui angulis rectis æqualibus in centro ſubtenduntur: ſumanturque arcus æquales* AF, AG: *Item* BF, BI; *& rectæ ducantur* FG, FI, *ſecantes diametros in* H, *&* K. *Arcus igitur* FB, *dicitur complementum arcus* FA; *quia quadrans* AB, *arcum* FA, *ſuperat arcu* FB. *Eadem ratione arcus* FA, *complementum nominatur arcus* FB. *Item arcus* BI, *complementum appellatur arcus* AI; *quia arcu* BI, *ſuperatur quadrans* AB, *ab arcu* AI.

a 26 tert.

Exempla definitionum.

RECTA *deinde* FG, *chorda dicitur arcus* FAG; *& recta* FI, *chorda arcus* FBI. *Et quia diameter* AC, *ſecans arcum* FAG, *bifariam, ſecat quoque rectam* FG, *bifariam, vt ex coroll. 1. propoſ. 10. lib. 13. Euclid. conſtat, (quod tamen in lemmate ſequenti breuius oſtendemus.) erit recta* FH, *ſinus rectus arcus* FA, *iuxta priorem defin. ſinus recti: quia eſt dimidium chordæ* FG, *ſubtendentis arcum* FAG, *duplum arcus* FA, *cuius* FH, *dicitur ſinus. Itaque ſi quemlibet arcum, eiuſque chordam bifariam ſecemus, dimidium chordæ dicetur ſinus rectus dimidiati arcus. Hinc factum eſt, vt Sinus recti à plerisque dicantur Semiſſes rectarum in circulo ſubtenſarum. Eadem quoque recta* FH, *erit ſinus rectus eiuſdem arcus* FA, *ſecundum poſteriorem defin. ſinus recti: quoniam perpendicularis eſt, ducta ab* F, *extremo dicti arcus ad diametrum* AC, *ab altero extremo* A, *eiuſdem arcus ductam;* [b] *propterea quod recta* EA, *ſecans rectam* FG, *bifariam, ſecat eandem ad angulos rectos.*



Sinus recti cur dicantur ſemiſſes rectarum in circulo ſubtenſarum.

b 3. tertij.

RECTA *vero* AH, *ſinus verſus eſt eiuſdem arcus* FA; *cum ſit pars diametri* AC, *inter* A, *extremum dicti arcus, & ſinum eius rectum* FH, *intercepta. Dicitur autem verſus hic Sinus, quia verſo modo collocatur, ſi cum ſinu recto conferatur. Hunc nonnulli dicunt ſagittam, quoniam inſtar ſagittæ eſt in arcu* FAG, *à chorda* FG, *excuſſæ.*

Sinus verſus cur dicatur ſagitta.

RECTA *porro* FK, *eſt ſinus complementi arcus* FA; *quia eſt ſinus rectus arcus* FB, *qui complementum eſt arcus* FA.

RECTA *autem* KB, *eſt ſinus verſus complementi arcus* FA, *hoc eſt, ſinus verſus arcus* FB, *qui complementum eſt arcus* FA.

Sinus verſus complementi alicuius arcus quid.

Sinus rectus primus ac ſecundus: Item ſinus primus & ſinus ſecūdus apud quoſdam quid.

NONNVLLI porro Aſtronomi Sinum, quem nos rectum diximus, appellant Sinum rectum primum; Sinum vero, quem Sinum complementi diximus, vocant Sinum rectum ſecundum. Vt rectam FH, appellant ſinum rectum primum arcus FA; rectam vero FK, ſinum rectum ſecundum eiuſdem arcus. Sunt alij etiam, qui ſinum rectum ſimpliciter appellent ſinum primum, verſum autem dicant ſinum ſecundum. Quod dixerim, vt intelligas auctores, qui varie de ſinubus ſunt locuti. Nos communem modum loquendi retinuimus. Cæterum cum ſcriptores de ſinu aliquo lequuntur, ſemper intelligunt ſinum rectum: niſi illum vocent ſinum complementi, aut verſum.

Quando fit mentio alicuius ſinus abſolute, intelligitur ſinus rectus.

Sinus totus vel maximus cur ſic dicatur.

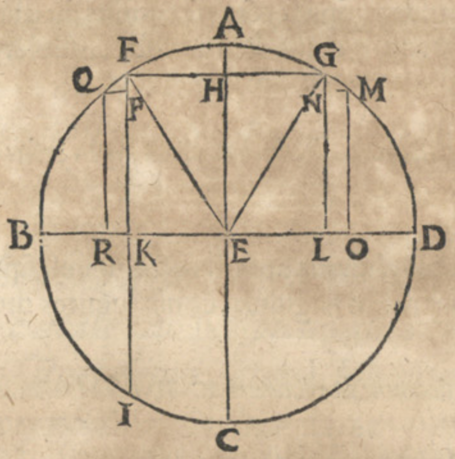
SEMIDIAMETER deinde AE, ſinus eſt tam rectus, quam verſus quadrantis AB: qui totus dicitur, ſiue maximus, propterea quod maximus ſit omnium ſinuum tam rectorum, quam complementorum, immo vero & maior omnibus ſinubus verſis illorum arcuum, qui quadrante minores ſunt: Solum minor eſt ſinubus verſis illorum arcuum, qui quadrante ſunt maiores, vt infra dicemus, qui quidem rarius in vſum veniunt, quam alij. Vel certe dicitur totus, ſiue maximus, quia in tabula Sinuum, in qua ſinus recti tantummodo ponuntur, omnium Sinuum maximus eſt ille, qui quadranti, ſeu gradibus 90. reſpondet, vt ex tabula Sinuum, quam infra ponemus, perſpicuum erit.

POSTREMO, ducta recta EF, erit recta FH, ſinus rectus anguli FEH; recta autem FK, ſinus complementi eiuſdem anguli; & recta AH, eiuſdem anguli ſinus verſus: quoniam recta FH, eſt ſinus rectus arcus FA, in circulo deſcripto ex angulo FEH, interceptus inter rectas EF, EA, angulum dictum conſtituentes: recta autem FK, eſt ſinus complementi eiuſdem arcus; & recta AH, ſinus verſus,

Duo arcus ſemicirculum conficientes eūdē habent ſinum, quemadmodū & duo arcus circulum conficientes, eandē chordam: ſinus tamen verſos habent differētes, conficientes totam diametrū.

CÆTERVM duo arcus ſemicirculum conſtituentes eundem prorſus habent ſinum, tam rectum quam complementi; quemadmodum & duo arcus circulum conficientes vnam eandemque chordam habent: ſinus tamen verſi eorum differunt, conficiuntq; totam circuli diametrum. Vt duo arcus FA, FC, conficientes ſemicirculum ABC, eundem habent ſinum rectum FH, quemadmodum & duo arcus FAG, FCG, eorum dupli, circulum conficientes, eandem habent chordam FG, cuius dimidium eſt ſinus rectus FH, vt vult prior definitio ſinus recti; qui quidem ſinus rectus FH, linea perpendicularis eſt, ducta à communi extremo F, vtriuſque arcus FA, FC, ad diametrum AC, ab extremis reliquis A, C, eorundem arcuum ductam, vt vult poſterior ſinus recti definitio. Iidem duo arcus FA, FC, eundem ſinum complementi habent FK; propterea quod arcus FB, cuius ſinus rectus eſt FK, eſt complementum vtriuſque arcus. Sinus tamen verſi iidem non ſunt, ſed AH, eſt ſinus verſus arcus FA; & CH, eſt ſinus verſus arcus FC: qui quidem duo ſinus verſi diametrum AC, conſtituunt. Vbi vides ſinum verſum CH, arcus FC, quadrantem ſuperantis maiorem eſſe ſemidiametro, ſeu ſinu toto CE.

Sinus verſus arcus quadrātis maioris maior eſt ſinu toto.



SIC etiam duo anguli duobus rectis æquales eundem ſinum habent tam rectum, quam complementi. Vt patet in angulis AEF, FEC, quorum vtriuſque ſinus rectus eſt FH; ſinus autem complementi FK: propterea quod arcubus AF, FC, inſiſtunt, quorum vtriuſque ſinus rectus eſt FH, complementi autem ſinus FK, vt dictum eſt. Sinus tamen verſi eorundem angulorum iidem non ſunt, ſed AH, ſinus verſus eſt anguli AEF, nempe arcus AF; & HC, eſt ſinus verſus anguli FEC, puta arcus FC. Conficiunt autem ambo ſinus verſi totam diametrum AC.

Duo anguli duobus rectis æquales eūdem ſinū habēt, ſed ſinus verſos differētes, vtpote qui totam diametrū conficiāt.

Sinus tam rectus, q̃ complemēti, cui ſegmento diametri ſit æqualis.

RVRSVM ſinus rectus cuiuſuis arcus æqualis eſt ſegmento diametri inter centrum, & ſinum rectum complementi eiuſdem arcus interiecto: Sinus autem complementi cuiuslibet arcus æqualis eſt ſegmento diametri inter centrum, & ſinum rectum eiuſdem arcus poſito. [c] Vt FH, ſinus rectus arcus FA, æqualis eſt ſegmento diametri EK: & FK, ſinus complementi eiuſdem arcus FA, æqualis eſt ſegmento diametri EH; ob parallelogrammum HK; [d] ſunt enim tam rectæ HE, EK, quam rectæ KF, EH, parallelæ, propter rectos angulos H, E, K, F. Hinc fit, ſi ſint duo arcus, quorum vnus alterius ſit complementum, vtriuſuis ſinum rectum æqualem eſſe complemento ſinus verſi alterius arcus. Vocamus autem complementum ſinus verſi ſegmentum diametri, quo ipſe ſinus verſus a ſemidiametro ſuperatur, ſi eius arcus quadrante minor eſt, vel ſemidiametrum ſuperat, ſi eius arcus maior eſt quadrante. Vt HE, dicimus complementum tam ſinus verſi AH, arcui FA, reſpondentis, quam ſinus verſi CH, arcui FC, reſpondentis. Vides igitur, duorum arcuum FA, FB, quorum vnus alterius eſt complementum, [e] ſinum rectum FK, arcus FB, æqualem eſſe ipſi HE, complemento ſinus verſi AH, alterius arcus FA, & ſinum rectum FH, arcus FA, æqualem eſſe ipſi EK, complemento ſinus verſi BK, alterius arcus FB. Eadem ratione, quoniam arcus FB, complementum eſt arcus FC, vides ſinum rectum FH, arcus FC, æqualem eſſe ipſi EK, complemento ſinus verſi BK, alterius arcus FB. Et ſinum rectum FK, arcus FB, æqualem eſſe ipſi EH, complemento ſinus verſi CH, alterius arcus FC. Sic etiam ſinus complementi arcus cuiuſuis æqualis eſt complemento ſinus verſi eiuſdem arcus. Vt FK, ſinus complementi arcus AF, vel FC, æqualis eſt ipſi HE, complemento ſinus verſi AH, vel CH, arcus AF, vel FC.

c 34. pri.
d 28. pri.
e 34. pri.

Duorum arcuum, quorum vnus alterius eſt complemētum, ſinus rectus vtriuslibet æqualis eſt complemento ſinus verſi alterius arcus.

Complementum ſinus verſi quid.

PARI ratione in eodem circulo, vel in circulis æqualibus, ſinus tam recti, quam verſi, aut ſinus complementorum arcuum æqualium, & quadrante minorum, æquales ſunt. Et contra, æqualium ſinuum tam rectorum, quam verſorum, aut ſinuum complementorum, arcus quadrante minores æquales ſunt. Arcuum vero inæqualium, & quadrante minorum, ſinus inæquales ſunt, ſinus quidem tam rectus quam verſus maioris maior, minoris vero minor; ſinus autem complementi maioris arcus minor, & minoris maior; Et contra, inæqualium ſinuum tam rectorum, quam verſorum, aut ſinuum complementorum, inæquales arcus ſunt, maioris quidem ſinus tam recti quam verſi maior arcus, & minoris minor; maioris autem ſinus complementi arcus minor, & minoris maior. Sint enim arcus æquales BF, DG. Dico eorum ſinus rectos FK, GL, æquales eſſe; Item ſinus verſus KB, LD, nec non ſinus complementorum EK, EL. Cum enim arcus BF, DG, æquales ſint, [f] erunt quoque anguli BEF, DEG, æquales. Sunt autem & recti anguli K, L, æquales, nec non & latera EF, EG, æqualia, vtpote ſemidiametri. [g] Igitur & tam latera FK, GL, quam latera EK, EL, inter ſe æqualia erunt, nempe ſinus recti inter ſe, & ſinus complementorum

In eodem circulo, aut æqualibus, arcuum æqualium ſinus æquales ſunt; & contra. At arcuum inæqualium ſinus inæquales ſunt; & contra.

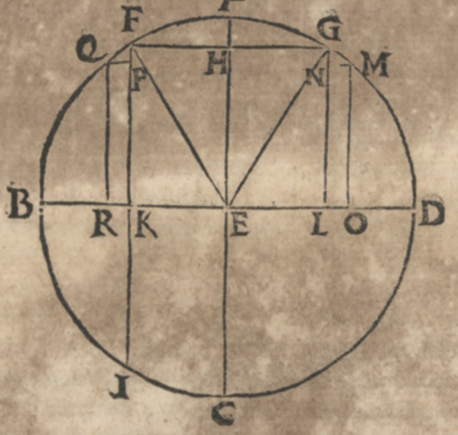
f 27. tertij. g 26. primi.

torum inter ſe. Detractis autem EK, EL, æqualibus ex ſemidiametris EB, ED, reliqui erunt ſinus verſi KB, LD, æquales.
Quod eſt propoſitum. Sint iam ſinus æquales ſiue recti FK, GL, ſiue verſi KB, LD, ſiue ſinus complementorum EK, EL. Dico ar-
cus BF, DG, eſſe æquales. Nam ſi FK, GL, ſint æquales, erunt eorum quadrata æqualia. Cum ergo quadrata rectarum EF, EG.
æqualia quoque ſint, [h] & illi quidem æqualia ſint quadrata ex FK, KE, huic vero quadrata ex GL, LE; ac proinde duo quadra- h 47.pri.
ta ex FK, KE, duobus quadratis ex GL, LE, æqualia: ſi auferantur duo æqualia quadrata rectarum FK, GL, æqualia remane-
bunt quadrata ex EK, EL; ac proinde & rectæ EK, EL, æquales erunt. Quare cum latera EF, EK, lateribus EG, EL, æqualia
ſint, & baſis FK, baſi GL, æqualis; [i] erunt anguli FEB, GED, æquales; [k] ac proinde & arcus BF, DG, æquales erunt. Quod i 8. primi.
ſi ſinus complementorum EK, EL, ſint æquales, oſtendemus eodem modo, rectas FK, GL, æquales eſſe. Quare vt prius, erunt k 26. tert.
arcus BF, DG, æquales. Si tandem ſinus verſi KB, LD, ponantur æquales; ijs ablatis ex ſemidiametris EB, ED, relinquen-
tur ſinus complementorum EK, EL, æquales. Quare rurſus oſtendemus, vt prius, arcus BF, DG, æquales eſſe. Quod erat oſten-
dendum. Iam vero ſit arcus BF, maior arcu DM, & ducatur ſinus MO. Dico ſinum rectum FK, maiorem eſſe ſinu recto MO:
Item ſinum verſum KB, maiorem ſinu verſo OD: ſinum vero complementi EK, minorem ſinu complementi EO. Poſito enim
arcu DG, æquali arcui BF, erunt, vt demonſtrauimus, tam ſinus recti FK, GL, quam verſi KB, LD, & ſinus complementorum
EK, EL, æquales. Cum ergo LD, maior ſit, quàm OD, erit quoque ſinus verſus KB, ſinu verſo OD, maior: Item cum EL, minor
ſit, quam EO, erit quoque ſinus complementi EK, minor ſinu complementi EO. Ducatur MN, ad GL, perpendicularis, [l] eritque l 34. pri.
NL, ipſi MO, æqualis. Cum ergo GL, maior ſit, quam NL, hoc eſt, quam MO, erit quoque ſinus rectus FK, maior ſinu recto MO.
Quod demonſtrandum erat. Sit denique tam ſinus rectus FK, maior ſinu recto MO, quam ſinus verſus KB, ſinu verſo OD; &
ſinus complementi EO, maior ſinu complementi EK. Dico ſinui maiori tam recto, quam verſo reſpondentem arcum BF, maio-
rem eſſe arcu DM, qui minori ſinui tam recto, quam verſo reſpondet. At maiori ſinui complementi arcum reſpondentem DM,
minorem eſſe arcu BF, qui minori ſinui complementi reſpondet. Nam ſi FK, maior ſit, quam MO, auferatur KP, ipſi MO, æqua-
lis, & ducatur PQ, ad FK, perpendicularis, ducaturque QR, ad BE, perpendicularis, [m] quæ ipſi PK, hoc eſt, ipſi MO, æqua- m 34. pri.
lis erit; ac proinde, vt paulo ante oſtenſum eſt, erunt arcus BQ, DM, æquales, propter æqualitatem ſinuum rectorum QR,
MO. Cum ergo arcus BF, arcu BQ, maior ſit, erit idem arcus BF, arcu DM, maior. Quod ſi KB, maior ſit, quam OD, abſcinda-
tur BR, ipſi DO, æqualis, ducaturque RQ, ad BE, perpendicularis: Eruntque arcus BQ, DM, vt paulo ante monſtrauimus, æ-
quales, ob æqualitatem ſinuum verſorum RB, OD. Quare cum arcus BF, maior ſit arcu BQ, erit idem arcus BF, arcu DM,
maior. Si tandem maior ſit EO, quam EK, detrahatur EL, ipſi EK, æqualis, ducaturque ad ED, perpendicularis LG: Eruntque
arcus BF, DG, ob æqualitatem ſinuum complementorum EK, EL, æquales, vt paulo ante fuit oſtenſum. Quam ob rem ar-
cus DM, arcu DG, ſit minor, erit idem arcus DM, arcu BF, minor. Quod eſt propoſitum.

Anguli æquales habent ſinus æquales, &c.

IDEM prorſus dicendum eſt de ſinubus angulorum. Nam & anguli æquales habent ſinus æquales tam rectos, quam complementorum, & verſos, &c. propterea quod æquales anguli inſiſtunt in centro æqualibus arcubus, &c.

Si in triangulo rectãgulo latus recto angulo oppoſitum ſit ſinus totus, erit vtrumuis laterum reliquorũ ſinus rectus anguli acuti oppoſiti.



POSTREMO in omni triangulo rectangulo, ſi latus recto angulo oppoſitum ponatur ſinus totus, reliqua duo latera ſunt ſinus recti reliquorũ angulorum acutorũ, quibus opponuntur. Vt in triãgulo rectãgulo EKF, in quo EF, eſt ſin⁹ totus, vtpote ſemidiameter circuli ex E, deſcripti, latus FK, eſt ſinus rectus anguli FEK, ex defin. 7. Sic quoque ſi idem circulus ex F, deſcriberetur, eſſet latus EK, ſinus rectus anguli EFK, ex eadem defin. 7. Quod etiam hinc patet, quod angulus EFK, [n] æqualis eſt angulo alterno AEF; cuius ſinus rectus eſt, ex defin. 7. recta FH, [o] quæ quidem æqualis eſt lateri EK. Eodem pacto vtrumuis reliquorum laterum in triangulo rectangulo eſt ſinus complementi anguli acuti ſibi adiacentis, nempe ſinus complementi illius arcus, cuius alterum latus eſt ſinus rectus. Vt in eodem triangulo rectangulo EKF, latus FK, eſt ſinus complementi anguli EFK, ſiue arcus FA, cuius ſinui recto FH, alterum latus EK, æquale eſt. Item latus EK, æquale eſt ipſi FH, ſinui complementi anguli FEK, ſiue arcus FB, cuius alterum latus FK, ſinus rectus eſt. Sed iam lemma, cuius ſupra fecimus mentionem, demonſtremus.

n 29. pri.
o 34. pri.

Si in trigulo rectãgulo latus recto angulo oppoſitum ſit ſinus totus, erit vtrumuis reliquorum laterum ſinus complementi anguli ſibi adiacentis, cuius nimirum alterum latus ſinus rectus eſt.

LEMMA.

SI in circulo recta linea è centro ducta aliam rectam non per centrum ductam bifariam ſecet, ſecabit eadem & arcum, cui illa recta ſubtenditur, bifariam: Et ſi arcum ſecet bifariam, ſecabit quoque rectam ei ſubtenſam bifariam.

Recta linea è centro ducta ſecans aliam rectã bifariam ſecat quoque arcũ, cui illa ſubtenditur, bifariam: Et contra.

SECET in eadem figura recta EA, rectam FG, bifariam in H. Dico eandem ſecare quoque arcum EG, bifariam in A, & contra. Ducta enim recta EG; quoniam duo latera EF, EH, trianguli EFH, æqualia ſunt duobus lateribus EG, EH, trianguli EGH, vtrumq; vtrique; baſiſque HF, baſi HG, ponitur æqualis; [p] erit angulus FEH, angulo GEH, æqualis: [q] Igitur arcus AF, arcui AG, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

VERVM ſecet iam recta EA, arcum FG, bifariam in A. Dico eandem ſecare quoque rectam FG, bifariam in H; Quoniam enim arcus AF, AG, æquales ſunt, [r] erunt quoque anguli FEH, GEH, æquales. Igitur cum & duo latera EF, EH, trianguli EFH, duobus lateribus EG, EH, trianguli EGH, æqualia ſint; [s] erunt & baſes HF, HG, æquales. Quod eſt propoſitum.

p 8. primi.
q 26. tert.
r 27. tert.
s 4. primi.

EX hoc ſequitur rectam EA, quæ arcum FG, bifariam ſecat in A, ſecare quoque rectam FG, bifariam in H; vt ſupra poſuimus.

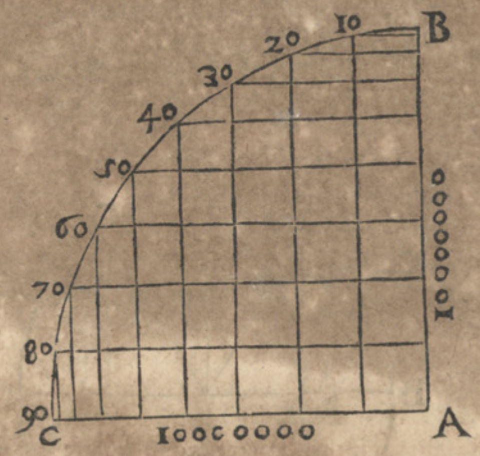
Omnes ſinus exprimuntur in partibus, in quas ſinus totus concipitur eſſe diuiſus. Semidiameter circuli, in quot partes ſecetur à Ptolemæo & Arzahele.

QVONIAM *vero Sinus totus (hoc eſt, ſemidiameter cuiuſuis circuli) intelligitur ab Aſtronomis diuiſus in aliquot partes æquales, vt ratione harum partium omnes alios ſinus metiantur, proportionesue omnium ſinuum ad ſinum totum, ſiue ad ſemidiametrum in numeris exprimant; explicandum paucis erit, in quot partes ſemidiametrum diſtribuerint: Neque enim omnes eodem modo eam ſunt partiti. Ptolemæus namque ſemidiametrum ſecat in 60. partes æquales, totam vero diametrum in 120. Quamlibet deinde partem concipit diuiſam eſſe in 60. Minuta, & quoduis Minutum in 60. Secunda. Hanc diuiſionem omnes ferme antiqui, & nonnulli ex recentioribus, inter quos eſt Orontius, ſecuti ſunt. Supputauit autem Ptolemæus lib. 1. Almageſti tabulam omnium chordarum, quæ arcubus ſemicirculo dimidiato gradu ſeſe ordine ſuperantibus, initio facto ab arcu 30. Minutorum, reſpondent, in partibus, quarum 120. tota diameter continet. Orontius vero tabulã condidit omnium ſinuum, qui arcubus quadrantis vno Minuto ſeſe ordine ſuperantibus initio facto ab arcu 1. Minuti, reſpondẽt, in partibus, quarum 60. ſemidiameter, ſeu ſinus totus continet. Arzahel vero Arabs conſtituit ſemidiametrum partium 150. ac proinde totam diametrum partium 300 quas quidem partes rurſus diſtribuit in Minuta, & Secunda, vt Ptolemæus. Sed vtrouis modo ſemidiameter, ſiue diameter diuidatur, permoleſtum eſt, alios omnes ſinus ſiue chordas in eiuſmodi partibus inueſtigare, cum ſemper multiplicatio, diuiſio, extractioque radicum per fractiones Aſtronomicas inſtituenda ſit; Vel certe Partes in Minuta, ac Secunda conuertendæ, & contra, Minuta ac ſecunda in Partes: quæ res valde laborioſa eſt non ſolum parum exercitatis in Arithmeticis, verum etiam peritiſſimis.*

Commodior eſt diuiſio ſemidiametri, vel ſinus totius in particulas 10000000. vel 100000 quàm in 60.

QVAMOBREM *alij Aſtronomi, inter quos eſt Georgius Purbachius, Ioannes Regiomontanus, Petrus Appianus, ſemidiametrum, hoc eſt, ſinum totum, in multo plures particulas æquales partiti ſunt, vtpote in partes 10000000. vel 100000. Ita enim opus non erit partes has in Minuta, ac Secunda diſtribuere; cum vna harum partium ſit vel multo minor, quam vnum Secundum ſemidiametri in partes 60. ſecundum Ptolemæum diuiſæ, vel certe non multo maior. Nam vnum Secundum eſt* $\frac{1}{216000}$ *totius ſemidiametri diuiſæ in 60. partes, cum 60. partes contineant 216000. Secunda: At vna particula ſemidiametri diuiſæ in partes 10000000. vel 100000. eſt* $\frac{1}{10000000}$. *vel* $\frac{1}{100000}$. *totius ſemidiametri. Conſtat autem minutiam hanc* $\frac{2}{10000000}$. *eſſe multo minorem illa* $\frac{1}{216000}$. *hanc vero* $\frac{1}{100000}$. *non eſſe multo maiorem illa eadem* $\frac{1}{216000}$. *Itaq; etiamſi in ſinu aliquo negligatur interdum vna ferme particula ex 10000000 particulis ſinus totius, multo tamen minor error committetur, quàm ſi negligatur vnum ferè ſecundum ex 216000. Secundis, in quæ ſinus totus intelligitur eſſe diuiſus: Si vero negligatur vna ferè particula ex 100000 particulis ſinus totius, non multo maior error committetur, quàm ſi negligatur vnum fere ſecundum ex 216000. ſecundis, in quæ ſinus totus diſtribuitur.*

Quantus ſit ſinus totus ſecundum communem vſum, & quantus ab auctore ſtatuatur. Item eo fieri calculũ accuratiorem, quo maior fuerit ſinus totus.



SVNT *etiam, qui diſtribuant ſinum totum in partes 6000000. vel 60000. extantque tabulæ ſinuum à Ioan. Regiom. compoſitæ, in quibus ſinus totus tot particulas ponitur continere: ſed magis in vſu eſt apud Aſtronomos diuiſio ſinus totius in particulas 10000000. vel 100000. Immo cõmunis fere vſus omniũ obtinuit, vt in ſupputationibus, quæ ex ſinubus depromuntur, ſinus totus ſtatuatur particularum 100000. qualem & nos tam in ſphæra, quàm in Gnomonica alijſque operibus conſtituimus: quamuis, quo maior fuerit ſinus totus, eo etiam accuratior ſupputatio atque calculus reddatur. Conſtruxit porro Ioan. Regiom. tabulam omniũ Sinuum, qui arcubus quadrantis vno Minuto ſeſe ordine ſuperantibus reſpondẽt, in partibus ſinus toti⁹ in partes 10000000 diuiſi, initio facto ab arcu 1. Minuti: quam nos ſumma cura ac diligentia examinauimus, & in quibuſdam locis correximus, quoniam propter typographorum incuriam mendis omnino non carebat, Hanc tabulam emendatam infra ſubijciemus, ſi prius demonſtrationes ex Ioanne Regiomontano potiſſimum decerptas exponamus, quibus omnium arcuum ſinus numeris exprimi poſſint in partibus ſinus totius in quotuis partes diſtributi. Poſt tabulæ vero vſum ſubijciemus quoque Ptolemæi & aliorum demonſtrationes, quibus omnium arcuum chordæ numeris exprimantur, ex quibus rurſus facili negotio tabula Sinuum conſtrui poteſt.*

Quo pacto omnes ſinus poſſint cognoſci in maximo aliquo quadrante, ſine vllo ſupputationis labore, aut moleſtia.

ATQVE *in primis, ſi in plano aliquo Quadrans tantæ magnitudinis conſtrueretur, vt eius arcus commode in 90 gradus, & ſinguli gradus in 60. Minuta; itemque vtraque eius ſemidiameter, ſiue ſinus totus, in 10000000. partes æquales, vel etiam in plures, paucioresue diuidi poſſet, facili negotio ſine vlla ſupputationis moleſtia, aut labore, omnium ſinuum magnitudines cognoſcerentur, ſi ex ſingulis arcus Minutis rectæ ad vtramque ſemidiametrum perpendiculares ducerentur. Vt in quadrante hoc ABC, ſi arcus BC, in Gradus, ac Minuta ſecetur; (Nos ob ſpatij anguſtias eum in nouem partes ſecuimus, vt ſingulæ denos complectantur gradus.) Item vtraque ſemidiameter in 10000000. particulas, vel in plures, paucioresue diſtribuatur, atque ad vtramque ſemidiametrum perpendiculares ducantur: erunt perpendiculares ad ſemidiametrum AB, ductæ, ſinus recti arcuum quadrantis à puncto B, incipientium, [t] quibus æquales ſunt portiones ſemidiametri AC, inter punctum A, & perpendiculares ad ſemidiametrum AC, ductas. Quot ergo particulas continebunt hæ portiones ex illis 10000000. tot particularum erunt ſinus recti arcum quadrantis. Eodem modo tam ſinus complementorum arcuum eorundem, quam ſinus verſi cognoſcentur. Perpendiculares enim ad ſemidiametrum AC, demiſſæ ſunt ſinus complementorum, [u] quibus æquales ſunt portiones ſemidiametri AB, inter punctum A, & perpendiculares ad ſemidiametrum AB, ductas: Portiones vero eiuſdem ſemidiametri AB, inter punctum B, & dictas perpendiculares ſunt ſinus verſi eorundem arcuum à puncto B, incipientium. Sed quoniam fieri non poteſt, vt Quadrans tantæ magnitudinis reperiatur, qui commode tot diuiſiones recipiat, inueſtigabimus ſinuum magnitudines per demonſtrationes Geometricas, poſito ſinu toto quotcunque particularum, ſequentibus propoſitionibus. Satis autem erit, ſinus rectos omnium arcuum inquiramus: ex his enim cognitis & ſinus complementorum, & verſi eorundem arcuum pateſient, vt in vſu tabulæ Sinuum exponemus.*

t 34. pri.
u 34. pri.

THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Perpendiculares ex arcubus quadrantis æqualibus ad alterutram ſemidiametrorum, vel ad rectam ſemidiametro parallelam ductæ auferunt ſegmenta inæqualia, maiusq; eſt illud, quod alteri ſemidiametro propinquius eſt.

IN Quadrante circuli ſumptis arcubus æqualibus, ſi ab eorum terminis ad alterutram ſemidiametrorum, vel ad rectam ſemidiametro parallelam, perpendiculares ducantur; erunt ſegmenta ſemidiametri, vel illius parallelæ inter illas perpendiculares intercepta, inæqualia, maiusq; erit illud, quod alteri ſemidiametro propinquius eſt.

SIT Quadrans ABC, in quo arcus æquales ſint DE, EF, à quorum terminis ad ſemidiametrum A C, vel ad rectam RS, ipſi AC, parallelā perpendiculares ducantur DKG, ELH, FMI. Dico ſegmenta GH, HI, vel KL, LM, inæqualia eſſe, maiusq; eſſe GH, quā HI, vel KL, maius, quàm L M. Completo n. ſemicirculo BCN, producantur rectæ DG, EH, FI, vſq; ad O, P, Q. Ductis quoq; rectis ET, FV, ad DO, EP, perpendicularibus, iungātur rectæ EO, EP. Et quoniā arcus DE, EF, æquales ſunt, [a] erūt anguli quoq; DOE, EPF, illis inſiſtentes, æquales: Sunt autē & recti anguli T, V, æquales. [b] Igitur cum tres anguli trianguli EOT, tribus angulis trianguli FPV, ſint æquales; quod tam illi, quàm hi duobus rectis ſint æquales; erit & reliquus angulus TEO, reliquo angulo VFP, æqualis: ac propterea æquiangula erunt triangula E O T, EPV. [c] Quare erit vt O E, ad E T, ita P F, ad F V: [d] Eſt autem recta O E, maior, quàm recta P F; quod illa centro propinquior ſit, quam hæc, [e] Igitur & recta ET, maior eſt, quam recta FV. [f] Cum ergo recta E T, æqualis ſit ſegmentis GH, K L, ob parallelogramma TH, TL; & recta FV, ſegmentis H I, L M, ob parallelogramma VI, VM; erit quoque ſegmentum GH, maius ſegmento HI, & ſegmentum KL, ſegmento LM. In quadrante ergo circuli ſumptis arcubus æqualibus, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 27. tert.
[b] 32. pri.
[c] 4. ſexti.
[d] 5. tertij.
[e] 14. quin.
[f] 34. pri.

BREVIVS. Ducatur recta D F, ſecans ſemidiametrum ductam EL, in Z, & rectam EH, in a, producaturque recta F V, vſque ad b. Quoniam igitur arcus D F, ſectus eſt bifariam in E, ſecta quoque erit recta D F, bifariam in Z, ex lemmate in definitionibus poſito, ac proinde D a, maior erit quàm aF. [g] Cum ergo ſit vt D a, ad a F, ita b V, ad VF, erit quoque b V, maior, quam VF, hoc eſt, GH, maior, quam HI, & KL, maior quam LM.

[g] 2. ſexti.

COROLLARIVM.

Differentiæ ſinuū rectorum à principio quadrantis vſque ad eius finem ſenſim decreſcunt: adeo vt ſinus minorum arcuum maiores habeant differentias, quā ſinus arcuū maiorū, dummodo arcus habeant differentias æquales.

CONSTAT ex hac propoſitione, ſi quotcunque arcus quadrantis à ſemidiametro eadem incipientes habeant æquales differentias, exceſſusue; ſinus rectos minorum arcuum habere maiores differentias, quam ſinus arcuum maiorum: adeo vt differentiæ ſinuum à principio Quadrantis ad finem vſque ſemper decreſcant. Nam ſi in eadem figura huius propoſ. accipiatur arcus FX, arcubus DE, EF, æqualis, ducaturq; recta XY, ad ſemidiametrum AC, perpendicularis, habebunt quatuor arcus BX, BF, BE, BD, æquales exceſſus, cum BX, ipſum BF, ſuperet arcu FX: & BF, ipſum BE, arcu EF, qui arcui FX, poſitus eſt æqualis: & arcus BE, arcum B D, arcu DE, qui arcui EF, æqualis eſt. Sinus autem recti eorum arcuum ſunt AY, AI, A H, AG, vt ſupra in expoſitione definitionum docuimus, cum ſint partes ſemidiametri AC, inter centrum A, & ſinus complementorum interiectæ, vt patet. Et quoniam in hac propoſ. demonſtrauimus, rectam GH, maiorem eſſe, quam HI, & HI, maiorem, quam IY; liquet, exceſſum GH, inter ſinus arcuum minorum BE, BD, maiorem eſſe exceſſu HI, inter ſinus arcuum maiorum B F, B E: Item exceſſum H I, inter ſinus arcuum minorum B F, B E, maiorem eſſe exceſſu IY, inter ſinus maiorum arcuum BX, BF. Eademque ratio eſt de cæteris. Conſtat igitur, differentias ſinuum rectorum ſenſim decreſcere à principio quadrantis vſque ad eius finem: Id quod perſpicuè ex ſinuum tabula apparet. Quod autem interdum proximi ſinus aliquot, præſertim in principio quadrantis, eandem habeant differentiam, vel etiam (licet rarò) poſteriores duo maiorem, quam duo priores, id ex eo prouenit, quod ſinus ſequentis tabulæ non ſint omnino accurati, vt ex eorum inuentione conſtat. Si ſinus totus poneretur maior quàm 10000000. differentiæ ſinuum clarius apparerent.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

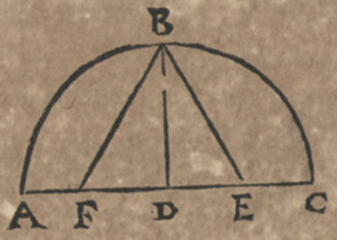
Latera Decagoni, & Pentagoni in vno eodemq; circulo quo pacto inueniātur.

LATERA Decagoni & Pentagoni æquilateri in vno eodemque circulo inueſtigare.

QVAMVIS hæc latera inueniantur per ea, quæ ab Euclide lib. 4. ſunt demonſtrata: nihilominus eadem à Ptolemæo lib. 1. Almageſti cap. 9. inueſtigantur ratione alia, quæ ad plurimorum ſinuum inuentionem multum conducit. Eſt autem hæc ratio. Sit circulus, vel (quod ſatis eſt) ſemicirculus ABC, ad cuius diametrum A C, ex D, centro educatur perpendicularis D B. Diuiſa quoque ſemidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta EB, cui æqualis abſcindatur E F, iungaturque recta FB. Dico rectam B F, eſſe latus Pentagoni, & DF, latus Decagoni in circulo ABC. Cum enim recta C D, ſecta ſit bifariam in E, eique addita D F; [a] erit rectangulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ E F, ideoque quadrato rectæ E B, quæ ipſi EF, æqualis eſt: [b] Eſt autem quadratum rectæ E B, æquale quadratis rectarum BD, D E. Igitur rectangulum ſub C F, D F, vna cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadratis rectarum BD, DE: Ac proinde, dempto communi quadrato rectę DE, relinquetur rectangulum ſub CF, DF, æquale quadrato rectæ B D, hoc eſt, quadrato rectæ CD: [c] Quamobrem erit,



[a] 6. ſecun.
[b] 47. pri.
[c] 17. ſexti.



e 10. tertijdec.

f 47. pri.

erit, vt CF, ad CD, ita CD, ad DF; proptereaque recta CF, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius ſegmentum CD, ſit latus Hexagoni in circulo A B C, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Euclid. erit minus ſegmentum DF, latus Decagoni in eodem circulo, vt ad propoſ. 9. lib. 13. Euclid. demonſtrauimus. [e] Rurſus quoniam quadrato lateris Hexagoni B D, vna cum quadrato lateris Decagoni D F, æquale eſt quadratum lateris Pentagoni in eodem circulo. [f] Eſt autem eiſdem quadratis rectarum B D, DF, æquale quadratum rectæ BF; erit quadratum lateris Pentagoni æquale quadrato rectæ B F; ac propterea recta BF, lateri Pentagoni æqualis. Latera igitur Decagoni, & Pentagoni æquilateri in vno eodemque circulo inueſtigauimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

Ex ſinu recto cuiuſuis arcus quo pacto ſinus complementi eiuſdem arcus, & ex chorda cuiuſuis arcus qua ratione chorda reliqui arcus ſemicirculi cognoſcatur.
a 47. pri.
b 34. pri.

EX ſinu recto cuiuſuis arcus quadrante minoris cognito, ſinum complementi eiuſdem arcus; Item ex chorda cuiuſuis arcus ſemicirculo minoris, chordam reliqui arcus ſemicirculi cognoſcere.

SIT primo cognitus ſinus rectus DE, arcus BD, cuius arcus complementi ſinus ſit DF, quem cognoſcere debemus. Ducta recta D A, [a] erit quadratum rectæ D A, æquale quadratis rectarum D E, E A. Si igitur ex quadrato ſinus totius DA, noti (Ponitur enim ſinus totus particularum certo numero comprehenſarum) detrahatur quadratum ſinus recti DE, cogniti in partibus ſinus totius DA, relinquetur quadratum rectæ EA, notum; ac proinde per radicem quadratam recta E A, in eiſdem partibus nota erit. [b] Cum ergo recta E A, æqualis ſit ſinui complementi arcus BD, hoc eſt, rectæ DF, cognitus erit D F, ſinus complementi arcus BD, cuius ſinus rectus DE, notus eſt poſitus.





SIT deinde cognita chorda A B, arcus AB, & chorda B C, ſubtendens reliquum arcum B C, ſemicirculi, quam iubemur inueſtigare. [c] Quoniam angulus B, rectus eſt in ſemicirculo, [d] erit quadratum diametri A C, æquale quadratis chordarum AB, BC. Si igitur ex quadrato diametri AC, notæ (Ponitur enim diameter diuiſa in particulas certo numero comprehenſas) dematur quadratum chordæ AB, notæ in partibus diametri A C, notum relinquetur quadratum chordæ BC; ac proinde per radicem quadratam chorda B C, in eiſdem partibus nota efficietur. Ex ſinu igitur recto cuiuſuis arcus, &c. cognouimus. Quod faciendum erat.

c 31. tertij.
d 47. pri.

COROLLARIVM.

Sinus verſus cognoſcitur ex cognito ſinu recto.

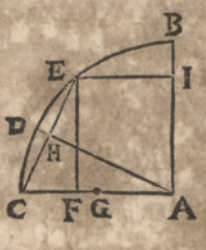
HINC efficitur, ſinum verſum cuiuſuis arcus cognoſci quoque ex cognito ſinu recto. Quoniam enim e ſinu recto DE, cognoſcitur ſinus complementi DF, hoc eſt, AE; ſi ſinus complementi dati arcus BD, auferatur ex ſinu toto AB, notus relinquetur ſinus verſus E B, dati arcus BD. Pari ratione, ſi ſinus rectus DE, hoc eſt, A F, dati arcus B D, dematur ex ſinu toto A C, notus relinquetur ſinus verſus C F, complementi dati arcus BD.

THEOR. 2. PROPOS. 4.

Cuiuſuis arcus quadrante minoris ſinus rectus medio loco proportionalis eſt inter ſemiſſem ſinus totius & ſinum verſum alterius arcus, qui prioris duplus eſt, & quadrante quoque minor.
a 3. tertij.

SINVS rectus cuiuſlibet arcus quadrante minoris medio loco proportionalis eſt inter ſemiſſem ſemidiametri, ſeu ſinus totius, & ſinum verſum arcus alterius, qui prioris arcus duplus eſt, & quadrante quoque minor. Item ſinus totus ad duplum ſinus dati eandem proportionem habet, quam datus ſinus ad ſinum verſum dupli arcus.

SIT arcus quicunque C E, quadrante minor, cuius dimidium ſit CD. Diuiſa autem ſemidiametro AC, bifariam in G, ducatur ex E, ad A C, perpendicularis EF, iungaturque recta A D, quæ ductam chordam CE, ſecabit in H, bifariam, ex lemmate à nobis ad definitiones ſupra demonſtrato, [a] atque adeo & ad angulos rectos. Erit igitur CH, ſinus rectus arcus C D, & C F, ſinus verſus arcus CE, qui duplus eſt arcus C D, cum E F, ſit eiuſdem arcus CE, ſinus rectus: vt ex definitionibus conſtat. Dico CH, ſinum rectum arcus CD, medio loco eſſe proportionalem inter C G, dimidium ſinus totius, & C F, ſinum verſum arcus C E, qui arcus C D, duplus eſt. Item ita eſſe A C, ſinum totum ad CE, duplum ſinus CH, vt eſt ſinus datus CH, ad CF, ſinum verſum dupli arcus CE. Quoniam enim duo anguli A C H, A H C, trianguli A C H, æquales ſunt duobus angulis E C F, E F C, trianguli E C F, quod angulus C, vtrique triangulo ſit communis, & anguli H, F, recti; [b] æquiangula erunt triangula A C H, E C F. [c] Igitur erit, vt A C, ad C H, ita E C, ad C F: Et permutando, vt A C, ad C E, ita C H, ad C F: [d] Vt autem A C, ad C E, ita eſt C G, dimidium ipſius A C, ad C H, dimi



b 32. pri.
c 4. ſexti.
d 15. quin.

dimidium ipſius C E. Igitur erit quoque vt C G, ad CH, ita C H, ad C F: ac propterea CH, ſinus rectus arcus CD, medio loco proportionalis eſt inter C G, ſemiſſem ſinus totius, & CF, ſinum verſum arcus C E, qui arcus CD, duplus eſt. Igitur ſinus rectus cuiuslibet arcus quadrante minoris, &c. Quod demonſtrandum erat. Altera pars conſtat, cum oſtenſum ſit, eſſe vt AC, ſinum totum ad CE, duplum ſinus CH, ita CH ſinum datum ad CF, ſinum verſum arcus CE, qui arcus CD, duplus eſt.

Ex ſinu recto cuiuſuis arcus cognito notus ſit ſinus rectus alterius arcus, qui illius dimidium ſit

C O R O L L A R I V M.

COLLIGITVR hinc, ſi ſinus rectus alicuius arcus cognitus ſit, notum etiam fieri ſinum rectum alterius arcus, qui illius dimidium ſit: ita vt ex EF, ſinu recto arcus CE, cognito, cognoſcatur etiam CH, ſinus rectus arcus CD, qui dimidiū eſt arcus C E. Nam ex noto ſinu recto E F, notus fiet ſinus EI, complementi: quo ablato ex ſinu toto AC, [e] æqualis enim eſt ſinus EI, rectæ A F.) notus relinquetur ſinus verſus CF, arcus CE, vt in coroll. præcedentis propoſ. dictum eſt. [f] Cum ergo ſinus CH, ſit medio loco proportionalis inter medietatem ſinus totius, & ſinum verſum CF, vt oſtendimus, [g] erit rectangulum ſub dimidio ſinus totius, & ſinu verſo CF, contentum æquale quadrato ſinus C H. Quare ſi multiplicetur medietas ſinus totius in ſinum verſum CF, producetur quadratus numerus ſinus C H, cuius radix quadrata notum dabit ſinum rectum CH. Eademque ratio eſt de cæteris.

e 34 pri. f 4. huius. g 17. ſexti.

IDEM hac etiam ratione oſtendi poteſt. Quoniam enim E F, ſinus rectus arcus C E, notus ponitur, [h] cognoſcetur & EI, ſinus complemēti eiuſdem arcus, hoc eſt, recta AF, [i] illi æqualis. Detracta igitur recta AF, hoc eſt, ſinu complemēti arcus CE, ex ſinu toto AC, cognitus erit ſinus verſus FC, arcus eiuſdem CE, vt etiam in coroll. propoſ. 3. oſtendimus. Quia vero quadratum rectæ CE, æquale eſt quadratis rectarum EF, FC; ſit, vt quadrata rectarum E F, F C, notarum in vnam ſummam collecta efficiant quadratum rectæ C E: cuius radix quadrata ipſam rectam C E, reddet notam; ac proinde huius radicis dimidium dabit CH, ſinum rectum arcus CD, qui dimidium eſt dati arcus CE, notum.

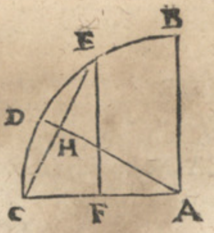
h 3. huius. i 34. primi

VICISSIM ex hac eadem propoſ. 4. colligitur, ſi ſinus rectus alicuius arcus cognitus ſit, notum etiam fieri ſinum rectum alterius arcus, qui illius duplus ſit, dummodo quadrante ſit minor: ita vt ex CH, ſinu recto arcus C D, cognito cognoſcatur etiam E F, ſinus rectus arcus CE, qui arcus C D, eſt duplus. Cum enim ſinus CH, ſit medio loco proportionalis inter medietatem ſinus totius, & ſinum verſum FC, vt oſtendimus; erit rectangulum ſub dimidio ſinus totius, & ſinu verſo F C, contentum æquale quadrato ſinus recti CH. Quare quadratum ſinus C H, noti erit illud rectangulum; quo diuiſo per dimidium ſinus totius, notus euadet ſinus verſus F C. Quia vero recta C E; cum ſit dupla ſinus C H, noti nota eſt, erit & eius quadratum notum: à quo ſi auferatur quadratum ſinus verſi F C, noti, relinquetur etiam quadratum rectæ E F, notum; (cum quadratum rectæ CE, quadratis rectarum CF, F E, ſit æquale.) ac proinde radix quadrata illius notum dabit ſinum rectum EF.

Ex ſinu recto cuiuſuis arcus cognito notus ſit ſinus rectus alterius arcus, qui illius ſit duplus, dummodo quadrāte minor ſit.

S C H O L I V M.

QVOD ſi quando perpendicularis EF, ſemidiametrum A C, ſecet bifariam, vt in hac figura contingit, erit adhuc C H, ſinus arcus CD, medio loco proportionalis inter CF, ſemiſſem ſinus totius, & CF, ſinum verſus arcus CE, qui arcus CD, duplus eſt. Erunt enim rurſum triangula ACH, ECF, æquiangula; [k] ac proinde, vt AC, ad CH, ita EC, ad CF: Et permutando, vt AC, ad CE, ita CH, ad CF. [l] Cum ergo ſit, vt AC, ad CE, ita CF, dimidium ipſius AC, ad CH, dimidium ipſius CE; erit quoque vt CF, ad CH, ita CH, ad CF: propterea que CH, ſinus rectus arcus C D, medio loco proportionalis eſt inter C F, ſemiſſem ſinus totius, & CF, ſinum verſum arcus CG, qui duplus eſt arcus CD.



k 4. ſexti. l 15. quin.

HINC ſit, ſi perpendicularis EF, ſemidiametrum AC, ſecet bifariam, rectam CH, æqualem eſſe rectæ CF. Si enim maior eſſet, aut minor non poſſet eſſe, vt CF, ad CH, ita CH, ad CF: cum vna proportio eſſet maioris inæqualitatis, & altera minoris inæqualitatis.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

Sinus rectus grad. 54. æqualis eſt ſemiſſi ſinus totius, & ſinui grad. 18. ſimul. Sinus autem verſus grad. 72. æqualis eſt ſemiſſi ſinus totius, & ſinui verſo grad. 36 ſimul.

SINVS rectus arcus graduum 54. componitur ex ſemiſſe ſinus totius, & ſinu recto arcus grad. 18. Sinus autem verſus arcus grad. 72. componitur ex ſemiſſe ſinus totius, & ſinu verſo arcus grad. 36.

IN quadrante ABC, ſit BD, arcus grad. 54. ac proinde eius complementum C D, grad. 36. quod diuidatur bifariam in H, vt vterque arcuum CH, HD, habeat grad. 18. Ducatur DM, ad AB, perpendicularis pro ſinu arcus grad. 54. & DE, ad AC, perpendicularis pro ſinu arcus grad. 36. Iungatur quoque recta A H, quæ per lemma in definitionibus demonſtratum ſecabit rectam C D, in I, bifariam, [a] ac proinde & ad angulos rectos: eritque propterea C I, ſinus rectus arcus C H, grad. 18. Sumpta tandem recta E F, ipſi EC, æquali diuidantur AC, A F, bifariam in G, K, & ex K, ad A C, perpendicularis ducatur K L. Dico ſinum rectum D M, arcus grad. 54. hoc eſt, rectam A E, [b] illi æqualē, componi ex A G, dimidio ſinus totius, & ex CI,



a 3. tertij. b 34. pri.

ex CI, ſinu recto arcus grad. 18. hoc eſt, rectam G E, (quæ cum A G, conſtituit totam rectam AE,) æqualem eſſe ſinui recto CI. Item ſinum verſum arcus grad. 72. componi ex dimidio ſinus totius, & ex C E, ſinu verſo arcus CD, grad. 36. hoc eſt, rectam EK, (quæ cum ſinu verſo C E, rectã Ck, componit) æqualem eſſe dimidio ſinus totius, ipſam vero CK, eſſe ſinum verſum arcus grad. 72. hoc eſt, arcum CL, (cuius ſinus verſus eſt CK,) eſſe grad. 72. Ducta enim recta L N, ad A B, perpendiculari, pro ſinu arcus B L, iungantur rectæ A D, D F. Quoniam igitur arcus



CH, grad. 18. continet $\frac{1}{5}$. quadrantis B C, (quod quinquies 18. faciant 90.) continebit arcus C D, $\frac{2}{5}$. eiuſdem quadrantis, ac proinde
c 33. ſexti. proportio arcus C D, ad arcum BC, erit vt 2. ad 5. [c] Eſt autem, vt arcus CD, ad arcum B C, ita angulus CAD, ad rectum angulum B A C. Igitur proportio anguli C A D, ad angulum rectum B A C, erit quoque, vt 2. ad 5. ac proinde angulus C A D, continebit $\frac{2}{5}$. vnius anguli recti. Cum ergo tres anguli trianguli C A D, contineant $\frac{10}{5}$. vnius recti, hoc eſt, [d] æquales ſint duobus rectis, [e] ſintque inter ſe æqua-
d 32. pri. les duo anguli A C D, A D C; continebit vterque eorum $\frac{4}{5}$. vnius recti. [f] Et quoniam angulus D F C, an-
e 5. primi. gulo D C F, eſt æqualis, quod & rectæ D F, D C, æquales ſint; (cum enim D E, E F, latera trianguli D E F,
f 5. primi. æqualia ſint lateribus D E, E C, trianguli D E C, angulosque ad E, contineant æquales, vtpote rectos, [g] æ-
g 4. pri. quales erunt baſes D F, D C,) continebit quoq; angulus D F C, $\frac{4}{5}$. vnius recti; ac proinde reliquus angulus D F A, ex duobus rectis, hoc eſt, ex $\frac{10}{5}$. vnius recti continebit $\frac{6}{5}$. vnius recti. Cum ergo angulus D A F,
h 31. pri. oſtenſus ſit continere $\frac{2}{5}$. vnius recti, [h] & omnes tres anguli in triangulo A F D, contineant $\frac{10}{5}$. vnius recti, continebit angulus ADF, $\frac{2}{5}$. vnius recti, proptereaque angulo DAF, æqualis erit. [i] Quare æqualia erunt late-
i 6. pri. ra DF, AF. Cum ergo recta DF, rectæ DC, oſtenſa ſit æqualis, erit & recta A F, rectæ D C, æqualis: ideoque & KF, medietas ipſius AF, ipſi CI, medietati ipſius DC, æqualis erit.

RVRSVS quoniam A K, K F, æquales ſunt; additis æqualibus EC, FE, erit recta compoſita ex A K, E C, æqualis rectæ K E: ac proinde K E, medietas erit ſemidiametri A C; quandoquidem A C, diuiſa eſt in duas partes æquales, quarum vna eſt K E, altera vero, recta ex A K, E C, compoſita. Eſt igitur K E, æqualis ipſi C G. Ablata ergo communi recta G E, remanebunt æquales G K, EC. Eſt autem E C, ſumpta ipſi E F, æqualis. Igitur & G K, ipſi EF, æqualis erit; additaque communi recta F G, erit E G, ipſi F K, æqualis, hoc eſt, ipſi C I, cui oſtendimus ſupra rectam K F, eſſe æqualem. Componitur ergo A E, (quæ ſinui D M, arcus grad. 54. æqualis eſt.) ex A G, medietate ſinus totius, & G E, quæ æqualis eſt oſtenſa ſinui C I, arcus grad. 18. Quod eſt primum.

IAM vero, quoniam KF, ipſi EG; & E G ipſi C I, oſtenſa eſt æqualis: erit K F, ſinui recto C I, æqualis:
k 34. pri. Eſt autem KF, ipſi Ak, æqualis. Igitur erit quoque AK, ipſi CI, æqualis. [k] Cum ergo A K, ſinui LN, ſit æqualis, erit etiam ſinus LN, ſinui CI, æqualis. Eſt autem CI, ſinus arcus grad. 18. Igitur & L N, ſinus erit arcus grad. 18. ac proinde arcus B L, cuius ſinus eſt L N, continebit grad. 18. ideoque eius complementum C L; continebit grad. 72. cuius ſinus verſus K C, componitur ex C G, medietate ſinus totius, & ex G k, quæ ſinui verſo EC, arcus CD, grad. 36. oſtenſa eſt æqualis. Quod eſt ſecundum. Itaque Sinus rectus arçus gradum 54. componitur, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

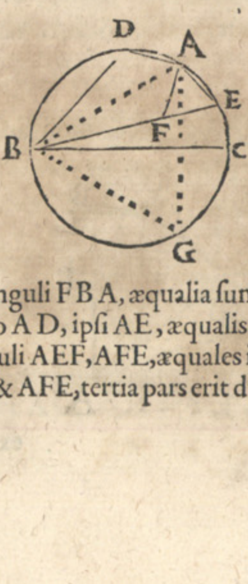
CONSTAT ex his, triangulum A C D, cuius baſis C D, ſubtendit gradus 36. verticemque habet in centro, eſſe Iſoſceles, cuius vterque æqualium angulorum C, D, reliqui anguli ad centrum duplus eſt. Nam angulus CAD, oſtenſus eſt continere $\frac{2}{5}$. vnius recti, vtrumque vero C, & D, $\frac{4}{5}$.

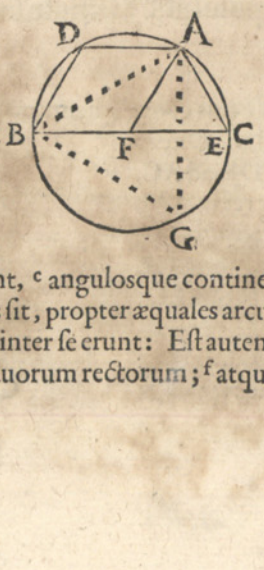
Differentia inter chordas duorum arcuum, quorum alter tanto ſit minor arcu grad. 120. quanto alter maior eſt, æquatur chorda arcus, quo alteruter dictorum arcuum differt ab arcu grad. 120.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

DIFFERENTIA chordarum duorum arcuum ſemicirculi, quorum alter tanto minor ſit arcu grad. 120. quanto alter maior eſt, æqualis eſt chordæ arcus, quo alteruter dictorum arcuum ab arcu grad. 120. differt.

IN ſemicirculo ABC, ſit arcus BA, grad. 120. arcus vero BD, eo tanto minor, quanto arcus BE, maior eſt; quorum chordæ B D, B E: abſcindaturque BF, ipſi B D, æqualis, & iungantur rectæ AD, AE, AF. Dico E F, differentiam duarum chordarum B D, B E, æqualem eſſe chordæ A E, vel A D. Completo enim circulo, & inſcripto triangulo æquilatero ABG, cuius vnum latus eſt A B, chorda arcus grad. 120. cum ſubtendat tertiam circumferentiæ partem; [a] erit angulus A G B, tertia pars duorũ rectorum. [b] Cum ergo ei æqualis ſit angulus AEB, in eodem cum illo exiſtens ſegmento AGB; erit & A E B, tertia pars duorum rectorum. Deinde, quoniam latera DB, BA, trianguli DBA, lateribus FB, BA,





a 32. pri. trianguli F B A, æqualia ſunt, [c] angulosque continent æquales; erunt baſes AD, AF, inter ſe æquales. [d] Cum
b 21. tert. ergo A D, ipſi AE, æqualis ſit, propter æquales arcus AD, AE; erit & AF, eidem A E, æqualis; [e] ac propterea
c 27. tert. anguli AEF, AFE, æquales inter ſe erunt: Eſt autem AEF, vt oſtendimus, tertia pars duorum rectorum. Igi-
d 29 tert. tur & AFE, tertia pars erit duorum rectorum; [f] atque adeo & reliquus EAF, tertia pars erit duorum rectorum.
e 5. primi.
f 32. pri.
Quare

Quare triangulum AEF, æquilaterum erit, ex coroll. propoſ. 6. lib. 1. Euclid. ideoque recta EF, differentia chordarum BD, BE, chordæ A E, vel A D, æqualis erit. Differentia ergo chordarum duorum arcuum ſemicirculi, &c. Quod erat demonſtrandum.

Du[...] chordæ duoru[m] arcuũ conficientium grad. 120. ſimul æquales sũt chordæ arcus compoſiti ex arcu grad. 120. & arcu minore illorum duorum.

COROLLARIVM.

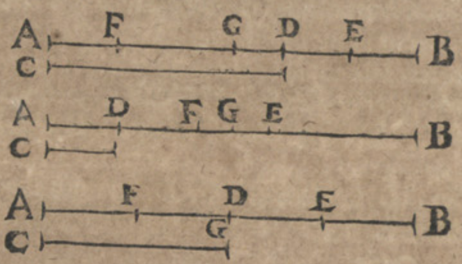
SEQVITVR hinc, ſi duorum arcuum, qui ſimul grad. 120. conficiant, chordæ ſimul iungantur, effici chordam arcus compoſiti ex arcu grad. 120. & arcu minore illorum duorum, ſi inæquales ſint. Ita namque vides chordas BD, DA, arcuum BD, DA, conficientium grad. 120. ſimul ſumptas æquari chordæ BE, arcus BAE, compoſiti ex arcu BA, grad. 120. & arcu AE, qui minori AD, æqualis eſt: propterea quod vt demonſtratum eſt, differentia EF, inter chordas BD, BE, æqualis eſt chordæ AD.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI quantitas quantitatẽ excedat, ſemiſsis illius ſemiſſem huius ſuperabit exceſſus ſemiſſe.

Si quantitas ſuperet quantitatem ſemiſsis, ſemiſſem ſuperabit exceſſus ſemiſſe.

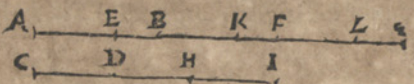
SVPERET quantitas A B, quantitatem C, exceſſu DB, qui bifariam ſecetur in E, & ipſi E B, æqualis ponatur AF. Quoniam igitur AF, EB, toti exceſſui DB, æquales ſunt, erit reliqua F E, ipſi C, æqualis. Secetur F E, bifariam in G. Quia ergo GE, GF, æquales ſunt; additis æqualibus EB, FA, æquales quoque erunt GB, GA; ac proinde & A B, in G, ſecta erit bifariam. Semiſsis igitur BG, ipſius AB, ſuperat GE, ſemiſſem ipſius FE, hoc eſt, ipſius C, exceſſu EB, qui ſemiſsis eſt exceſſus DB. Si quantitas ergo quantitatem excedat, &c. Quod demonſtrandum erat.



IDEM aliter demonſtrabimus, hoc propoſito theoremate.

SI quantitas quantitatem ſuperet erit exceſſus earum æque multipliciũ æque, multiplex prioris exceſſus.

SVPERET quantitas A B, quantitatem C D, exceſſu EB; ſintque AG, CI, æquemultiplices ipſarum AB, CD. Dico AG, ſuperare ipſam CI, exceſſu, qui ita multiplex ſit exceſſus EB, vt eſt multiplex AG, ipſius AB, vel CI, ipſius CD. Diuiſis n. B G, DI, in magnitudines B F, FG; DH, HI, ipſis AB, CD, æquales; excedent BF, FG, ipſas DH, HI, exceſſibus KF, L G, qui exceſſui E B, æquales ſint: eruntque AE, BK, FL, toti CI, æquales. Ergo AG, ipſam CI, ſuperabit tot exceſſibus ipſi E B, æqualibus, quotuplex eſt AG, ipſius AB, vel CI, ipſius CD. Quod erat demonſtrandum.



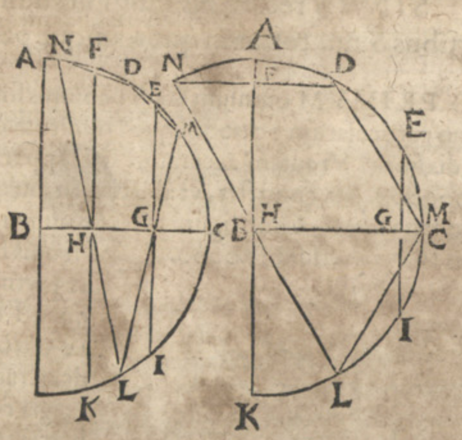
HINC manifeſta eſt veritas huius propoſ. 7. Quocunque enim exceſſu ſemiſsis ipſius A B, ſemiſſem ipſius CD, ſuperet, ſuperabit tota AB, totam CD, duplo illius exceſſus, vt proxime oſtendimus. Eſt ergo exceſſus EB, quo A B, ipſam CD, ſuperat, duplus exceſſus, quo ſemiſsis ipſius AB, ſemiſſem ipſius CD, ſuperat: ac proinde ſemiſsis ſemiſſem ſemiſſe exceſſus ſuperat. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

DIFFERENTIA ſinuum duorum arcuum quadrantis, quorum alter tanto minor ſit arcu grad. 60. quanto alter maior eſt, æqualis eſt ſinui arcus, quo alteruter dictorum arcuum ab arcu grad. 60. differt.

Differentia inter ſinus duorum arcuum, quorum alter tanto ſit minor arcu grad. 60. quanto alter maior eſt, æquatur ſinui arcus, quo alteruter dictorum arcuum differt ab arcu grad. 60.

IN quadrante ABC, ſit arcus CD, grad. 60. arcus vero CE, eo tanto minor, quanto arcus C E, maior eſt: quorum ſinus recti EG, FH. Dico horum ſinuum differentiam æqualem eſſe ſinui arcus DE, vel DF. Producto enim quadrante, vna cum ſinubus E G, F H, ad I, K; ſumatur arcus CL, arcui CD, æqualis; ita vt totus arcus DCL, contineat grad. 120. Et quia & arcus CI, CK, æquales ſunt arcubus C E, CF; quod per lemma in definitionibus poſitũ recta BC, ſecet arcus ECI, FCK, bifariã [a] cum & rectas EI, FK, bifariã ſecet: erunt quoq; reliqui arcus LI, LK, reliquis arcubus D E, D F, æquales. Sumptis quoq; arcubus EM, FN, qui arcubus DE, DF, æquales ſint, ducantur chordæ LM, LN. Et quoniam arcus FN, arcui LK, & arcus EM, arcui L I, æqualis eſt; additis communibus FL, MI, erit tam arcus NL, arcui FK, quam arcus ML, arcui E I, æqualis: ac [b] proinde tã chorda NL, chordæ FK, quã chorda ML, chordæ EI, æqualis. Quoniam igitur arcus LM, tanto minor eſt arcu LD, grad. 120. quanto arcus LN, eodem maior eſt; erit per propoſ. 6. differentia chordarum LN, LM, chordæ DN, vel DM, æqualis; hoc eſt, recta KF, rectam IE, ſuperabit chorda DN, vel DM. Quare per antecedentẽ propoſ. ſemiſsis HF, hoc eſt, ſinus arcus CF, ſuperabit ſemiſſem GE, id eſt, ſinum arcus CE, ſemiſſe chordæ DN, vel DM, hoc eſt, ſinu arcus DF, vel DE. Quod demonſtrandum erat.

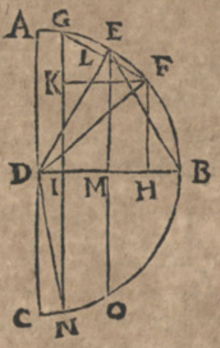


a 3. tertij.
b 29. tert.

ALITER. In quadrante A B D, arcus B E, ſit grad. 60. & arcus E F, E G, æquales, ac proinde arcus BF, tanto minor arcu B E, quanto arcus B G, eodem arcu B E, maior eſt: ducanturque F H, G I, ad BD, perpendiculares, quæ ſinus erunt arcuum B F, B G. Ducta autem chorda F G, ſecet eam ſemidiameter ducta D E, in L. Et quoniam arcus F G, bifariam ſectus eſt in E, erit quoque recta F G, bifariam

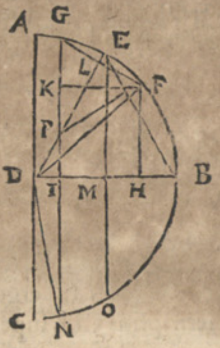
ſecta

c 3. tert. ſecta in L, ex lemmate in definitionibus demonſtrato; [c] ac propterea & ad angulos rectos. Eſt ergo FL, ſi-
d 34. pri. nus arcus E F; & GL, ſinus arcus EG. Ducta quoque recta FK, ad GI, perpendiculari, [d] erit IK, rectæ FH, æ-



qualis, ob parallelogrammum FI. Quare GK, differentia erit ſinuum FH, GI. Dico hanc differentiam GK, æqualem eſſe ſinui FL, vel GL. Ducta enim re-cta BE, quæ latus hexagoni eſt, ac propterea, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Euclid. ſemidiametro D E, æqualis; ſecetur B D, bifariam in M, iungaturque recta EM. Quoniam igitur latera DM, ME, lateribus BM, ME, æqualia ſunt, & ba-
e 8. primi. ſis DE, baſi BE, æqualis, [e] erunt anguli ad M, æquales, atque adeo recti. Com-pleto autem ſemicirculo ABC, & productis rectis GI, EM, ad N, O, erit arcu-s NO, arcui GE, hoc eſt, arcui E F, æqualis, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. Euclid.
f 28. pri. [f] propterea quod rectæ GN, EO, parallelæ ſunt, ob rectos angulos I, M. Ad-dito ergo communi arcu FO, erit arcus FN, arcui EO, æqualis. Sed arcus EO duplus eſt arcus BE. (Nam recta D B, rectam E O, ſecans ad angulos rectos
g 3. tert. [g] ſecat eandem bifariam: ac proinde & arcum EO, bifariam, ex ſcholio in de-
h 33. ſexti. finitionibus poſito.) Igitur & arcus F N, eiuſdem arcus B E, duplus erit. Quare ductis rectis DF, DN, [h] eri-t
i 20. tert. quoque angulus FDN, anguli EDB, duplus: [i] Eſt autem idem angulus F D N, in centro anguli F G N, in cir-cumferentia duplus. Igitur æquales ſunt anguli EDM, FGK: Sunt autem & recti M, K, æquales. Æquiangul-a
k 4. ſexti. ergo ſunt triangula E D M, F G K: [k] atque idcirco erit vt ED, ad DM, ita FG, ad GK. Cum ergo ED, dupla ſi-t ipſius DM, (ſecta enim eſt DB, ipſi DE, æqualis, bifariam in M.) erit & FG, ipſius GK, dupla: Eſt autem & FG ipſius FL, vel GL, dupla. Igitur recta GK, differentia ſinuum FH, GI, æqualis eſt rectæ FL, ſinui arcus EF, v-el rectæ G L, ſinui arcus E G. Differentia ergo ſinuum duorum arcuum quadrantis, &c. Quod erat demon-ſtrandum.

SCHOLIVM.



l 4. pri. *ALITER ſecet ſinus GI, ſemidiametrum DE, in P, iungaturq; recta FP:* [l] *au-*
ipſi GP, æqualis erit, propter triangula GLP, FLP, habentia latera GL, LP, laterib-
m 5. primi. *FL, LP, æqualia, & angulos ad L, æquales:* [m] *Igitur anguli G, F, æquales erunt in Iſ-*
n 4. pri. *ſcele FGP,* [n] *nec non & duo ad P.* [o] *Cum ergo angulus EPG, æqualis ſit interno ED-*
o 29. pr. *qui eſt grad. 30. erit totus FPG, grad. 60. Ergo & vterque G, F, continebit grad. 60.*
omnes tres contineant grad. 180. Æquilaterum ergo eſt triangulum FGP; ac proin-
GL, GK, ſemiſſes laterum æqualium GF, GP, æquales erunt.

QVOD autem GK, ſit ſemiſſis rectæ GP, conſtat ex eo, quod FK, perpendicular-
ad latus GP, ſecet ipſum bifariam, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 1. Euclidis.

COROLLARIVM.

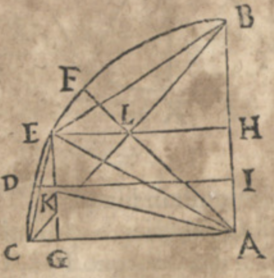
HINC ſequitur, ſi duorum arcuum conficientium grad. 60. ſinus ſi-mul componãtur, effici ſinum arcus compoſiti ex arcu grad. 60. & arcu mi-nore illorum duorum, ſi inæquales ſunt. Ita enim vides in figura poſterioris demonſtrationis huius propoſ. ſi-nus rectos FH, FL, arcuum BF, FE, conficientium grad 60. ſimul ſumptos æquari ſinui recto G I, arcus BEG compoſiti ex arcu BE, grad. 60. & arcu EG, qui minori EF, æqualis eſt: propterea quod, vt demonſtratum eſt, differentia GK, inter ſinus FH, GI, æqualis eſt ſinui FL.

Duo ſinus duorũ arcuum conficientium grad. 60. æquales ſunt ſinui arcus compoſiti ex arcu grad. 60. & arcu minore illorum duorum. Qua ratione omnium arcuũ ſinus recti ſupputentur.

PROBL. 3. PROPOS. 9.

SINVS rectos omnium arcuum quadrantis ſeſe ordine ſuperantium vno Minuto, in partibus Sinus totius in quotcunque particulas diſtributi, ſupputare.

PRIMVM omnium ſupputabimus ſinus rectos arcuum ſeſe 15. gradibus ſuperantium, reſpectu Sinus totius particularum 100000. quot nimirum communiter ab omnibus, & à nobis etiam conſtituitur, vt ſu-pra diximus. Vt autem accuratior fiat ſupputatio, ponemus in hiſce ſupputationibus Sinum totum partium 10000000. Ita enim fiet, vt abiectis duabus primis figuris ad dexteram, ex ſingulis ſinubus inuentis, (addi-ta tamen vnitate, ſi duæ figuræ abiectæ numerum 50. ſuperent) relinquantur ſinus magis exquiſiti reſpectu ſinus totius partium 100000. Quod ſi quis ſinus deſideret plurium particularum, poſito nimirum ſinu to-

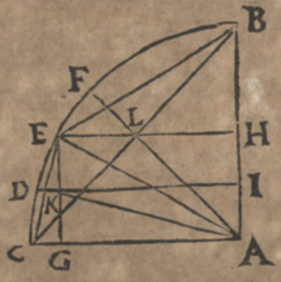


to partium 10000000. quot eum Ioan. Regiom. poſuit, & nos in ſe-quenti tabula ſtatuemus, conſtituendus erit ſinus totus partium 1000000000. Nam hac ratione, abiectis duabus primis figuris ad dexteram ex ſingulis ſinubus inuentis, vt dictum eſt, remanebunt Sinus magis exquiſiti reſpectu Sinus totius partium 10000000. Ratio hu-ius rei eſt, quod in ſinum inueſtigatione error ſolum contingere poteſt in vna aut altera figura ad dexteram: quare abiectis duabus figuris ad dextram, relinquentur ſinus reſpectu ſinus totius minoris exquiſitiſſi-mi. Id quod in ſupputationibus ſinuum quiuis facile experietur, & nos infra demonſtrabimus. Pari ratione, ſi inueſtigandi ſint ſinus re-ſpectu alterius Sinus totius, qui plures, aut pauciores particulas contineat, quã 100000. vel 10000000. conſti-tuendus erit in ſupputatione Sinus totus, qui ad dexteram illum ſuperet duabus figuris his, 00; adeo vt illius ſit centu-

Sinus totus in cuius partibus alij ſinus computantur, quot particularũ ponendus ſit, vt alij ſinus inueniantur magis exquiſiti reſpectu Sinus totius partium 100000. vel pauciorũ plurimue.

centuplus, quemadmodum & hic 10000000. quem in calculo aſſumimus, centuplus eſt illius 100000. quem nos cum alijs Aſtronomis in vſu recipimus.

SIT igitur in quadrante ABC, arcus CD, grad. 15. CE, 30. CF, 45. ac proinde EB, grad. 60. & DB, 75. vtpote complementa arcuum grad. 30. & 15. Horum ergo arcuum ſinus rectos ita ſupputabimus. Ducantur EH, DI, ad AB, perpendiculares, quæ ſinus recti erunt arcuum grad. 60. & grad. 75. Ductam autem chordam BC, ſecet recta AF, in L, bifariam, ex lemmate in definitionibus demonſtrato; [a] ac proinde ad angulos rectos: eritque BL, ſinus rectus grad. 45. hoc eſt, arcus BF. Ducatur rurſus EG, ad AC, perpendicularis pro ſinu grad. 30. Item ductam chordam CE, ſecet recta AD, in K, bifariam, ex dicto lemmate; ac propterea ad angulos rectos; eritque CK, ſinus rectus grad. 15. Denique rectæ iungantur AE, EB. Quoniam igitur arcus BE, grad. 60. ſexta pars eſt totius circumferentiæ circuli, cum ſexies 60. faciant 360. grad. erit recta BE, latus Hexagoni; atque adeo, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Euclid. ſemidiametro AE, æqualis. [b] Anguli ergo EAB, EBA, æquales erunt: Sunt autem & anguli ad H, æquales, vtpote recti. Igitur cum duo anguli EAH, EHA, trianguli AEH, æquales ſint duobus angulis EBH, EHB, trianguli BEH, latusque AE, lateri BE, æquale; [c] erit latus AH, lateri BH, æquale; ac proinde AH, medietas erit ſemidiametri AB. [d] Quare cum EG, ſinus rectus grad. 30. ſit ipſi AH, æqualis, erit ſinus rectus grad. 30. medietati ſemidiametri, ſiue ſinus totius, æqualis. Cum ergo ſinus totus ponatur 10000000. erit EG, ſinus grad. 30. talium particularum 5000000. nempe medietas ſinus totius.



a 3. tert.

Supputatio ſinuũ arcuum gradibus 15. ſeſe ſuperantiũ quales ſũt arcus gra. 15. 30. 45. 60. 75. & 90.

b 5. primi.
c 26. pri.
d 34. pri.

SEMISSEM ſinus totius eſſe ſinum arcus grad. 30. facillime ita oſtendemus. Quoniam ſinus totus æqualis eſt chordæ arcus grad. 60. nimirũ lateri hexagoni, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Eucl. erit ex defin. ſinus recti, ſemiſſis ſinus totius, ſiue chordæ arcus grad. 60. ſinus arcus grad. 30. qui ſemiſſis eſt arcus grad. 60.

Sinus rectus grad. 30. æqualis eſt medietati ſinus totius.

EX hoc ſinu, per propoſ. 3. cognoſcetur ſinus complementi arcus grad. 30. nempe ſinus EH, grad. 60. ſi nimirum quadratum ſinus 5000000. ex quadrato ſinus totius 10000000. auferatur, & reliqui numeri radix quadrata accipiatur, quæ eſt 8660254. fere.

DEINDE, quoniam recta AF, ſecans arcum BC, bifariam, ſecat quoque, ex lemmate definitionum rectam BC, bifariam, [e] atque adeo & ad angulos rectos; erit CL, ſinus arcus CF, grad. 45. quem ita inueniemus. Cum in triangulo CAL, angulus L, rectus ſit, & angulus CAL, ſemirectus, [f] erit & angulus ACL, ſemirectus. atque adeo angulo CAL, æqualis. [g] Igitur rectæ AL, CL, æquales erunt. [h] Cum ergo quadratum rectæ AC, æquale ſit quadratis rectarum AL, CL, ſimul; erit quadratum ſinus totius AC, duplum quadrati ſinus CL, grad. 45. Medietas igitur quadrati ſinus totius erit quadratum rectæ CL, cuius radix quadrata dabit ſinum CL, 7071068. fere pro arcu grad. 45. Qui etiam hoc modo reperietur. [i] Quoniam quadratum rectæ BC, æquale eſt quadratis rectarum AB, AC; atque adeo duplum quadrati ſinus toti us AC, ſi quadratum ſinus totius duplicetur, habebitur quadratum rectæ BC, cuius quadrati radix dabit rectam BC, partium 14142136. fere, & huius dimidium 7071068. dabit ſinũ CL, grad. 45.

e 3. tert.
f 32. pri.
g 6. pri.
h 47. pri.
i 47. pri.

RVRSVS, quia recta AD, ſecans arcum CE, bifariam, ſecat quoque rectam CE, bifariam in K, ex lemmate definitionum, [k] atque adeo & ad angulos rectos; erit CK, ſinus arcus CD, grad. 15. quem ſic inueniemus. Quoniam ex propoſ. 4. ſinus CK, medio loco proportionalis eſt inter medietatem ſinus totius, & ſinum verſum CG; (qui quidẽ habetur, ſi EH, ſinus grad. 60. ex ſinu toto AC, detrahatur, vt in coroll. propoſ. 3. diximus) fit vt per corol. prop. 4. notus fiat ſinus CK, arcus CD, qui dimidiũ eſt arcus CE. Nam ſi medietas ſinus totius multiplicetur in ſinum verſum CG, cognitum, producetur quadratum rectæ CK, [l] quod rectangulũ ſub medietate ſinus totius, & ſinu verſo CG, contentum, æquale ſit quadrato mediæ proportionalis CK. Si igitur quadrati rectæ CK, radix eruatur, habebitur ſinus CK, partium 2588190. vt in dicto coroll. propoſ. 4. docuimus. Quem ſinum hoc etiam modo inueſtigabimus. [m] Quoniam quadratis rectarum notarum EG, GC, æquale eſt quadratum rectæ EC; fiet notum quadratum rectæ EC; cuius quadrati radix quadrata dabit rectam EC, notam, & huius medietas erit ſinus CK, cognitus.

k 3. tert.
l 17. ſexti.
m 47. pri.

EX ſinu autem grad. 15. cognito cognoſcetur quoque, per propoſ. 3. ſinus DI, complementi arcus CD, hoc eſt, ſinus arcus BD, grad. 75. qui quidem deprehendetur partium 9659258. Itaque inuenti ſunt hactenus ſinus recti arcuum continentium grad. 15. 30. 45. 60. 75. & 90. vt in hac formula apparet.

Arcus. G.	Sinus
15	2588190
30	5000000
45	7071068
60	8660254
75	9659258
90	10000000

HORVM autem ſinuum beneficio ad aliorum inueſtigationem ita progrediemur. Quoniam per coroll. propoſ. 4. ex ſinu recto cuiuſuis arcus noto cognoſcitur quoque ſinus rectus dimidij illius arcus; cognoſcemus ex ſinu arcus grad. 15. ſinum arcus grad. 7. Min. 30. Atque ex hoc ſinum arcus grad. 3. Min. 45. qui arcus amplius bifariam ſecari non poteſt ſine Secundis, (continet enim eius medietas grad. 1. Min. 52. Sec. 30.) quæ in Sinuũ tractatione negliguntur. Deinde quia per propoſ. 3. ex ſinu recto cuiuslibet arcus cognito notus quoque efficitur ſinus complementi illius arcus, cognoſcemus ex ſinu arcus grad. 7. Min. 30. ſinum arcus grad. 82. Min. 30. Ex hoc autem, per coroll. propoſ. 4. ſinum arcus grad. 41. Min. 15. Atque ex hoc, per propoſ. 3. ſinum arcus grad. 48. Min. 45. Item ex ſinu arcus grad. 3. Min. 45. cognoſcemus, per propoſ. 3. ſinum arcus grad. 86. Min. 15. Quod ſi alij arcus, quorum ſinus inuenti ſunt, bifariam quoque ſecentur, & eorum medietates rurſus bifariam, & ita deinceps, donec ad Minuta numero imparia, quæ amplius bifariam diuidi ſine Secundis nequeunt, peruentum ſit; Itemque harum medietatum complementa accipiantur, quæ rurſus, eodem modo continue bifariam ſecentur, donec ad Minuta numero imparia ſit peruentum; & medietatum complementa ſumantur, &c. cognoſcemus, per coroll. propoſ. 4. & per propoſ. 3. ſinus omnium harum medietatum, & complementorum. Qui ſinus cum illis ſex primo inuentis conſtituent ſinus 24. arcuum ſeſe ordine ſuperantium gradibus 3. Min. 45. vt in hac tabula vides.

Supputatio ſinuũ arcuum gradibus 3. Min. 45. ſeſe ſuperantium.

Arcus G	M	Sinus	Arcus G	M	Sinus	Arcus G	M	Sinus	Arcus G	M	Sinus.
3	45	654031	26	15	4422887	48	45	7518398	71	15	9469301
7	30	1305262	30	0	5000000	52	30	7933533	75	0	9659258
11	15	1950903	33	45	5555702	56	15	8314696	78	45	9807853
15	0	2588190	37	30	6087614	60	0	8660254	82	30	9914449
18	45	3214395	41	15	6593458	63	45	8968727	86	15	9978589
22	30	3826834	45	0	7071068	67	30	9238795	90	0	10000000

Supputatio ſinuũ arcuus grad.36.

POST hæc, per ea, quæ propoſ. 2. de inuentione lateris Decagoni, & pentagoni æquilateri in eodem circulo demonſtrauimus, inquiremus ſinum arcus grad.36. hac ratione. Repetatur figura propoſitionis 2. vbi



demonſtratum eſt, DF, eſſe latus Decagoni, & BF, latus Pẽtagoni æquilateri. Et quoniã quadrata rectarum BD, DE, notarum (Eſt n. BD, ſinus totus, & DE, eius medietas.) a & æqualia quadrato rectæ EB; notũ erit quadratũ rectę EB, ac propterea & ipſa recta EB, hoc eſt, recta E F, illi æqualis, nota erit, nẽpe partũ fere 11180339. Ex qua ſi detrahatur recta ED, medietas ſinus toti9 partiũ 5000000. nota fiet recta DF, partiũ 6180339. cuius quadratũ ſi addatur quadrato ſinus totius B D, notum fiet aggregatum quadratorum ex rectis D F, B D, deſcriptorum; atque adeo & quadratum rectæ B F, b quod illis duobus æquale eſt, cognitum erit; cuius radix quadrata notam reddet rectam BF: quæ cum ſubtendat grad.72. in circulo ABC, vtpote quintam partem circumferentiæ, quod ſit latus pentagoni, nota erit chorda arcus grad. 72. cuius medietas partium 5877852. dabit ſinum rectum arcus grad.36. qui illius dimidium eſt.

a 47.pri.

b 47.pri.

Supputatio ſinuũ arcuum gradibus 2. Min.15. ſeſe ſuperantium, & aliorũ quorundam.

PORRO ex hoc ſinu arcus grad.36. inueniemus, per propoſ.3. ſinum eius complementi, hoc eſt, ſinum arcus grad.54. Quos duos arcus ſi bifariam ſecemus, eorumque medietates rurſus bifariam, & ita deinceps, donec ad minuta numero imparia veniamus, quæ amplius diuidi nequeunt, reperiemus quoq; per coroll. propoſ. 4. harum medietatum ſinus, nec non, per propoſ.3. ſinus earum complementorum: quæ complementa ſi rurſus bifariam ſecemus, quoad poſſumus, & harum medietatum complementa accipiamus, quæ rurſus ſecemus bifariam, &c. inueniemus eodem modo ſinus omnium arcuum in hac tabella contentorum. Quos ſinus ſi cum

Arcus G	M	Sinus	Arcus G	M	Sinus	Arcus G	M	Sinus	Arcus G	M	Sinus
36	0	5877852	2	15	392598	40	30	6494480	15	45	2714405
54	0	8090170	87	45	9992290	49	30	7604060	74	15	9624552
18	0	3090170	27	0	4539905	20	15	3461171	38	15	6190940
72	0	9510565	63	0	8910065	69	45	9381913	51	45	7853169
9	0	1564345	13	30	2334454	42	45	6788007	24	45	4186597
81	0	9876883	76	30	9723699	47	15	7343225	65	15	9081432
4	30	784591	6	45	1175374	31	30	5224986	29	15	4886212
85	30	9969173	83	15	9930685	58	30	8526402	60	45	8724960

præcedentibus hactenus inuentis in ordinem redigamus, habebimus ſinus rectos omnium arcuum ſeſe ordine ſuperantium gradibus 2. & Min. 15. initio facto ab arcu grad. 2. Min. 15. vſque ad arcum grad. 87 Min. 45. incluſiue; & inſuper ſinus aliorum 17. arcuum, qui non ſeruant huiuſmodi incrementum. Vt in hac tabella apparet.

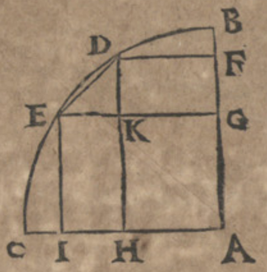
Arcus G	M	Sinus	Arcus G	M	Sinus	Arcus G	M	Sinus	Arcus G	M	Sinus
2	15	392598	33	45	5555702	65	15	9081432	18	45	3214395
4	30	784591	36	0	5877852	67	30	9238795	26	15	4422887
6	45	1175374	38	15	6190940	69	45	9381913	30	0	5000000
9	0	1564345	40	30	6494480	72	0	9510565	37	30	6087614
11	15	1950903	42	45	6788007	74	15	9624552	41	15	6593458
13	30	2334454	45	0	7071068	76	30	9723699	48	45	7518398
15	45	2714405	47	15	7343225	78	45	9807853	52	30	7933533
18	0	3090170	49	30	7604060	81	0	9876883	60	0	8660254
20	15	3461171	51	45	7853169	83	15	9930685	63	45	8968727
22	30	3826834	54	0	8090170	85	30	9969173	71	15	9469301
24	45	4186597	56	15	8314696	87	45	9992290	75	0	9659250
27	0	4539905	58	30	8526402	3	45	654031	82	30	9914449
29	15	4886212	60	45	8724960	7	30	1305262	86	15	9978589
31	30	5224986	63	0	8910065	15	0	2588190	90	0	10000000

Vbi manifeſtum eſt, ſinum grad. 54. hoc eſt, 8090170. componi præciſe ex ſinubus grad. 18. & 30. hoc eſt, ex 3090170. & 5000000. Et quia ſinus grad.30. æqualis eſt ſemiſſi ſinus totius, vt ſupra oſtenſum eſt, liquet ſinum grad.54. componi ad vnguem ex ſemiſſe ſinus totius, & ſinu recto grad.18. Id quod prop. 6. à nobis eſt demonſtratum.

IAM

IAM vero ſinum arcus gr. 12. beneficio ſinuum gr.30. & 54.qui iam noti facti ſunt,ita inueſtigabimus.Sit in quadrante ABC,arcus BD,gr.30. & BE, gr.54.atq; adeo arcus DE,corũ differentia,gr.24. ducanturq; rectæ DF,EG,ad AB,perpendiculares,quæ ſinus recti, erunt arcuũ BD, BE;Itẽ rectæ DH, EI, ad AC,perpendiculares,quæ ſinus recti erũt arcuum CD,CE,gr. 60. &36.qui complementa ſunt arcuum BD, BE.Secet autem recta DH,rectam EG,in K. Et quoniam ſinus DF, [a] hoc eſt,KG, illi æqualis,& EG,noti ſunt;erit quoq; eorum differentia EK,nota.Similiter quia ſinus EI, [b] hoc eſt,KH,illi æqualis, & DH, noti quoq; ſunt, per propoſ.3. cum ſint ſinus complementorum arcuum BE, BD; erit etiam eorum differentia DK,nota ; ac proinde duo quadrata rectarum notarum EK, DK, nota erunt: [c] quæ cum æqualia ſint quadrato rectæ DE, notum quoq; erit quadratum rectæ DE, propterea que & ipſa recta DE,nota erit, nempe chorda arcus grad.24. Hinc & eius medietas nota erit,nimirum ſinus rectus arcus gr.12.continebitque particulas 2079117.Hac eadem arte;ſi duorum arcuum quorumcunque ſinus cogniti ſint, cognoſcetur etiam ſinus medietatis differentiæ illorum arcuum. Vt ſi ſinus arcuum BD,BE, quorumcunque etiamſi non contineant gr.30. & 54. noti ſint, erunt & ſinus cõplementorum CD,CE,per propoſ.3.noti. Quare,vt modo demonſtrauimus,nota fiet chorda DE;ac proinde eius medietas nota quoque erit, nempe ſinus medietatis arcus DE.

Supputatio ſinus arcus gra. 12.



a 34.pri.
b 34.pri.
c 47.pri.

Ex duorũ arcuũ ſinubus notis notus quoque fit ſinus medietatis differentiæ arcuũ.

CÆTERVM ex ſinu arcus gr.12. (ſi hunc arcũ bifariã ſecemus continue,quoad poſſumus,medietatumque complementa accipiamus,vna cum ſinu complementi arcus gr.12 . quæ rurſus ſecemus bifariam continue, &c.)reperiemus per corol.prop.4. & per prop.3. ſinus omnium horum arcuum,qui in hac tabella continentur. Quos ſinus ſi cum ſinubus proxime antecedentis tabellę in ordinem redigamus, habebimus ſinus arcuũ n.120.

Supputatio ſinuũ arcuum Minutis 45. ſeſe ſuperantium.

Arcus G	Arcus M	Sinus	Arcus G	Arcus M	Sinus	Arcus G	Arcus M	Sinus	Arcus G	Arcus M	Sinus.
12	0	2079117	42	0	6691306	12	45	2206974	33	0	5446390
78	0	9781476	48	0	7431448	77	15	9753423	57	0	8386706
6	0	1045285	21	0	3583679	35	15	5771452	16	30	2840153
84	0	9945219	69	0	9335804	54	45	8166416	73	30	9588197
3	0	523360	10	30	1822355	24	0	4067366	8	15	1434926
87	0	9986295	79	30	9832549	66	0	9135455	81	45	9896514
1	30	261769	5	15	915016	34	30	5664062	27	45	4656145
88	30	9996573	84	45	9958049	55	30	8241262	62	15	8849876
0	45	130896	43	30	6883546	17	15	2965416	28	30	4771588
89	15	9999143	46	30	7253744	72	45	9550199	61	30	8788171
39	0	6293204	21	45	3705574	39	45	6394390	14	15	2461533
51	0	7771460	68	15	9288096	50	15	7688418	75	45	9692309
19	30	3338069	44	15	6977905	23	15	3947439	36	45	5983246
70	30	9426415	45	45	7163019	66	45	9187912	53	15	8012538
9	45	1693495	25	30	4305111	32	15	5336145	30	45	5112931
80	15	9855561	64	30	9025853	57	45	8457278	59	15	8594064

qui ſe ordine continuo ſuperant 45.Minutis,quorum primus eſt arcus grad.0. Min.45.vltimus vero totus quadrans grad.90.cuiuſmodi ſunt arcus ſequentis tabellæ.Omnium enim illorum arcuum ſinus inuentos eſſe comperies in proximis duabus tabellis antecedentibus,licet non eo ordine ſint collocati.

Arcus G	Arcus M	Arcus G	Arcus M	Arcus G	Arcus M	Arcus G	Arcus M	Arcus G	Arcus M	Arcus G	Arcus M	Arcus G	Arcus M	Arcus G	Arcus M	Arcus G	Arcus M	Arcus M	Arcus G
0	45	9	45	18	45	27	45	36	45	45	45	54	45	63	45	72	45	81	45
1	30	10	30	19	30	28	30	37	30	46	30	55	30	64	30	73	30	82	30
2	15	11	15	20	15	29	15	38	15	47	15	56	15	65	15	74	15	83	15
3	0	12	0	21	0	30	0	39	0	48	0	57	0	66	0	75	0	84	0
3	45	12	45	21	45	30	45	39	45	48	45	57	45	66	45	75	45	84	45
4	30	13	30	22	30	31	30	40	30	49	0	58	30	67	30	76	30	85	30
5	15	14	15	23	15	32	15	41	15	50	15	59	15	68	15	77	15	86	15
6	0	15	0	24	0	33	0	42	0	51	0	60	0	69	0	78	0	87	0
6	45	15	45	24	45	33	45	42	45	51	45	60	45	69	45	78	45	87	45
7	30	16	30	25	30	34	30	43	30	52	30	61	30	70	30	79	30	88	30
8	15	17	15	26	15	35	15	44	15	53	15	62	15	71	15	80	15	89	15
9	0	18	0	27	0	36	0	45	0	54	0	63	0	72	0	81	0	90	0

POSTREMO aliorum arcuum ſinus ita inueniemus. Ponatur in quadrante ABC, arcus BD, grad. 1. & arcus BE, grad.1.Min.30.& arcus BH,grad.0.Min.45.Ducta autem recta EK,ad AB,perpendiculari, diuiſoque arcu BH,in tres partes ęquales BF,FG,GH,& arcu DE,in duas DI,IE, vt ſinguli arcus contineant 15. Min. ducantur ad EK,perpendiculares FL,GM,HN,DO,IP. Eritque EK,ſinus rectus arcus BE,& OK,ſinus rectus

 arcus

d 34. pri. *Supputatio ſinus grad.* [gloss partly lost to damage]

arcus BD, [d] cum æqualis ſit rectæ ex D, ductæ ad AB, perpendiculari, quæ quidem ſinus eſt arcus BD. Eademq; ratione erit NK, ſinus rectus arcus BH. Sit ergo propoſitum inuenire ſinum OK, arcus BD, grad. 1. Quoniam NK, ſinus grad. 0. Min. 45. eſt inuentus 130896. erit eius tertia pars, nempe 43632. maior, quam MN: propterea quod, per propoſ. 1. maior eſt KL, quam LM, & LM, maior quam MN, adeo vt MN, minor ſit, quam tertia pars ipſius NK, hoc eſt, minor, quam 43632. Multo igitur maior erit eadem tertia pars rectæ NK, nempe 43632. quam NO: quod, per eandẽ propoſ. 1. maior quoque ſit MN, quam NO. Quare ſi addamus 43632. ad 130896. id eſt, ad NK, ſinum Minutorum 45. efficiemus numerum 174528. qui maior erit, quam OK, ſinus rectus grad. 1. quandoquidem ad NK, plus addimus, quam rectam NO, vt dictum eſt. Rurſus quia EK, ſinus grad. 1. Min. 30. inuentus eſt 261769. ſi ex eo detrahamus ſinum NK, Minutorum 45. nempe 130896. relinquetur recta EN, partiũ 130873. cuius tertia pars, nempe 43624. fere, minor erit, quam NO: propterea quod, per propoſ. 1. maior eſt NO, quam OP, & OP, maior, quam PE, adeo vt NO, maior ſit, quã tertia pars ipſius EN, hoc eſt, maior, quã 43624. Quare ſi addamus 43624. ad 130896. id eſt, ad NK, ſinũ Min. 45. efficiemus numerũ 174520. qui minor erit, q̃ OK, ſinus rectus grad. 1. quandoquidẽ ad NK, minus addimus, q̃ rectam NO. Conſtat igitur, ſinũ rectũ grad. 1. conſiſtere inter hos duos numeros, 174528. 174520. cũ ille maior ſit, hic autẽ minor. Statuamus ergo eũ eſſe, 174524. inter illos numeros omnino mediũ. Ita n. non differet ſenſibiliter hic numer⁹ à vero ſinu gra. 1.



Supputatio ſinus grad. 89.

EX hoc ſinu grad. 1. inueniemus per propoſ. 3. ſinũ eius complementi, hoc eſt, ſinum arcus grad. 89. eſſe 9998477. Quem hoc etiam modo reperiemus. Quoniam numerus 174528. maior eſt, quam ſinus grad. 1. vt diximus: fit, vt per eum inueſtigatus, iuxta doctrinam propoſ. 3. ſinus complementi grad. 1. hoc eſt, ſinus grad. 89. ſit numerus 9998476. & paulo amplius, qui minor erit neceſſario, quam verus ſinus arcus grad. 89. quandoquidem pro ſinu grad. 1. numerum ſumpſimus vero ſinu maiorem. Rurſus quia numerus 174520. minor eſt, quam ſinus grad. 1. vt diximus; fit, vt per eum inueſtigatus, iuxta doctrinam propoſ. 3. ſinus eius complementi, nimirum ſinus grad. 89. ſit numerus 9998477. & paulo amplius, qui maior erit neceſſario, quam verus ſinus grad. 89. quandoquidẽ pro ſinu grad. 1. numerum accepimus vero ſinu minorem. Conſtitutus ergo erit ſinus grad. 89. inter duos hos numeros 9998476. & paulo amplius, atque 9998477. & paulo amplius: ac proinde ſine notabili errore eum ſtatuemus eſſe 9998477. quantum videlicet eundem inuenimus ex ſinu grad. 1. Ex quo conſtat, recte conſtitutum eſſe ſinum grad. 1. partium 174524. cum ex eo, per propoſ. 3. repertus ſit ſinus complementi ipſius tot particularum, quot vere ac re ipſa continere debet.

Supputatio ſinus Min. 30. & ſinus grad. 89. Min. 30. Item ſinus Min. 15. & ſinus gra. 89. Min. 45.

PRÆTEREA ex ſinu arcus grad. 1. reperiemus, per coroll. propoſ. 4. ſinũ rectum arcus Min. 30. & ex hoc, per propoſ. 3. ſinum complementi, nempe ſinum grad. 89. Min. 30. Item ex ſinu arcus Min. 30. inueniemus, per coroll. propoſ. 4. ſinum arcus Min. 15. atq; ex hoc ſinum complementi, hoc eſt, ſinum grad. 89. Min. 45.

QVEMADMODVM autem ſupra ex ſinubus rectis grad. 30. & 54. indagauimus ſinũ rectum grad. 12. qui dimidium eſt chordæ arcus grad. 24. quo dicti arcus grad. 30. & 54. inter ſe differunt: ita quoque ex ſinubus rectis arcus Min. 30. & arcus grad. 52. Min. 30. cognitis cognoſcemus ſinum rectum grad. 26. qui dimidium eſt chordæ arcus grad. 52. quo dicti arcus Min. 30. & grad. 52. Min. 30. inter ſe differunt, vt ſupra oſtendimus; atq; ex ſinu grad. 26. fiet, per propoſ. 3. notus quoque ſinus complementi, nimirum ſinus grad. 64.

Supputatio ſinus grad. 26. & grad. 64.

QVOD ſi arcus grad. 26. & grad. 64. & grad. 89. Min. 30. quorum ſinus inuenti ſunt, ſecemus continue bifariam, quoad poſſumus, accipiamusque medietatum complementa, quæ rurſus continue bifariam diuidamus, &c. adhibeamusq; doctrinam illam, qua ex duorum arcuum ſinubus notis cognoſcitur ſinus medietatis differentiæ illorum arcuum, reperiemus ſinus arcuum numero 240. qui in ordinẽ redacti cum ſinubus arcuum numero 120. prius inuentis, conſtituent ſinus arcuum numero 360. ſeſe ordine ſuperantium Minutis 15.

Supputatio ſinuũ arcuum Minutis 15. ſeſe ſuperantiũ. Alia ſupputatio ſinuum arcuũ Minutis 15. ſeſe ſuperantium.

VERVM quia laborioſum eſt, atq; moleſtum tot ſinus ea ratione indagare, ſatis erit, tanta difficultate inueniſſe ſinus illos arcuum ſuperiorum numero 120. ſeſe ordine ſuperantium Minutis 45. Ex illis enim facile per regulam proportionum reperiemus ſinus arcuum ſe ordine ſuperantium Minutis 15. Deinde ex his ſinus arcuum, qui ordine ſe ſuperant Minutis 5. Ac deniq; ex iſtis ſinus arcuum per ſingula Minuta extenſorum; neq; vnquam in hac ſupputatione error ſenſibilis continget. Cum enim ſinum totũ poſuerimus centies maiorem, quam 100000. fit vt abiectis primis duabus figuris ad dexterã, vt ſupra dictum eſt, exquiſitiſſimi relinquantur ſinus reſpectu ſinus totius 100000. quod totus error, qui in hac ſupputatione cõtingere poteſt, conſiſtat in prima figura ad dexteram, vel ad ſummum in duabus primis. Quare abiectis duabus primis figuris, remanebunt ijdem ſinus, qui inuenti eſſent priori illo modo Geometrico reſpectu eiuſdem ſinus totius 100000. ſi in ſupputatiõne poneretur ſinus totus cẽties etiã maior, nempe partiũ 10000000. & ex inuẽtis ſinubus duæ figuræ reiicerẽtur. Id quod experiẽtia docebit. Ita autẽ rem exequemur. Statuãtur ordine illi arcus cũ ſinubus, & ad dexterã cuiuſq; ſinus aſcribatur differẽtia, q̃ à præcedenti ſinu differt; vt hic factum eſſe vides, in quinq, arcubus. Deinde dic. Si Minuta 45. requirũt differentiã 130896. addendã ad ſinũ Minuti 0. vt fiat ſinus Minutorũ 45. Minuta 15. quantã poſtulant differentiã addẽdam eidẽ ſinui Minut. 0. vt fiat ſinus Minutorũ 15? Inuenies n. requiri differentiã 43632. quæ addita ſinui Minuti 0. conſtituet ſinũ Minut. 15. partiũ 43632. Rurſus dic. Poſitis iiſdẽ, quantã differentiã exigunt Min. 30. addendã eidem ſinui Min. 0. vt fiat ſinus Min. 30?

Arcus G	Arcus M	Sinus	Differentiæ
0	0	000000	
0	45	130896	130896
1	30	261769	130873
2	15	392598	130829
3	0	523360	130762
3	45	654031	130671

Reperies n. differentiã 87264. q̃ addita ſinui Min. 0. faciet 87264. ſinũ Min. 30. Item dic. Si Min. 45. quibus arcus Min. 45. ab arcu ſequẽti grad. 1. Min. 30. differt, requirũt differentiam 130873. addendã ſinui Min. 45. vt fiat ſinus grad. 1. Min. 30. quantã differentiã poſtulant Min. 15. addendã eidem ſinui Min. 45. vt fiat ſinus Min. 60. hoc eſt, ſinus grad. 1? Inuenies n. differentiã 43624. q̃ addita ad 130896. ſinũ Min. 45. faciat 174520. ſinũ grad. 1. qui licet minor aliquanto ſit illo, quẽ alio modo inuenimus, abiectis tñ duabus primis figuris 20. relinquetur ſinus 1745. exquiſitiſſimus grad. 1. reſpectu ſinus totius 100000. Dic præterea. Iiſdem poſitis, quantã differentiam poſcunt Min. 30. addendã eidem ſinui Min. 45. vt fiat ſinus Min. 75. hoc eſt, ſinus grad. 1. Min. 15? Inuenies n. differentiam 87249. quę addita ad 130896. ſinum Min. 45. faciet 218145. ſinũ grad. 1. Min. 15. qui licet ſit aliquanto minor illo, quẽ prior ille modus exhibet, tamẽ abiectis duabus primis figuris 45. remanebit ſinus 2181. exquiſitiſſimus grad. 1. Min. 15. reſpectu ſinus totius 100000. Itẽ dic, Si Min. 45. quibus arcus grad. 1. Min. 30. differt ab arcu ſeq. grad. 2.

Min.15.requirunt differentiam 130829.addendam ſinui grad.1.Min.30.vt fiat ſinus grad.2.Min. 15. quãtam differentiam poſcũt Minuta 15. addendam eidem ſinui grad.1.Min.30.vt fiat ſinus grad.1,Min.45? quãtam prætereà differentiam flagitant Minuta 30. addendam eidem ſinui grad.1. Min. 30. vt fiat ſinus grad. 2? Reperies enim priorem differentiam eſſe 43610. quæ addita ad 261769. ſinum grad.1.Min.30.efficiet 305379. ſinũ grad.1. Min. 45. Poſteriorem vero differentiam inuenies eſſe 87219. quæ addita ad 261769. ſinum eundem grad. 1. Min. 30. componet 348988. ſinum grad, 2. qui duo ſinus quamuis minores ſint, quam illi, quos prior ille modus exhibet, reiectis tamen duabus figuris primis ex vtroque, reliqui erunt ſinus 3053.3489. exquiſitiſſimi reſpectu ſinus totius 100000. Hac eadem arte progrediendum erit in cæteris, donec inuenti ſint ſinus omnium arcuum per 15. Minuta extenſorum vſque ad arcum grad.45. Vltra hunc etenim progredi hac via non expedit, cum magis exquiſite ſinus complementorum arcuum illorũ, per prop.3, inueſtigari poſſint, reſpectu ſinus totius 10000000. quam per regulam proportionum; propterea quod, vt ſupra oſtendimus in coroll propoſ.1. differentiæ ſinuum verſus finem quadrantis minores ſunt, quam prope initium quadrantis; ac proinde ſæpius differentiæ ſinuum mutantur prope finem quadrantis, quam iuxta principium. Ex quo fit rectius prope quadrantis initium reperiri ſinus per regulam proportionum, quam prope finem: quandoquidem ibi vna eademque differentia plurib. ſinubus deſeruit, quam hic, vt dictum eſt. Id quod experientia apertiſſime quoque demonſtrat.

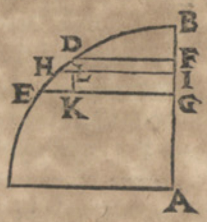
Sinus cur magis exquiſitè per regulã proportionum inueniãtur prope quadrãtis initium quã prope finem.

QVOD ſi omnes ſinus arcuum per 15. Minuta progredientium, initio facto ab arcu Min. 0. in ordinem redigantur, vna cum eorum differentiis; reperiemus eodem artificio ſinus omnium arcuum per 5. minuta extenſorum: Ex quibus demum eadem ratione ſinus omnium arcuum per ſingula minuta progredietium explorabimus; ac proinde tabulam ſinuum conficiemus vſque ad arcum grad.45. Per ſinus autem horum arcuum eliciemus, per propoſ.3. ſinus complementorum arcuum eorundem. Quare tota ſinuum tabula confecta erit: ac proinde ſinus rectos omnium arcuum Quadrantis ſeſe ordine ſuperantium vno Minuto, in partibus Sinus totius in quotcunque particulas diſtributi, ſupputauimus. Quod faciendum erat.

Supputatio ſinuum arcuum per 5. Minuta, & per ſingula Minuta extenſorum.

SCHOLIVM.

CÆTERVM vt rationem ſupputationis ſinuum per proportionum regulam videas, ſint in Quadrante ABC, arcuum BD, BE, ſinus DF, EG, noti, ex quibus propoſitum ſit elicere ſinum HI, arcus BH, inter duos illos arcus poſiti. Ducta recta DK, perpendiculari ad EG, erunt rectæ LI, KG, ſinui DF, æquales; atque adeo HL, EK, differentiæ inter ſinus HI, EG, & ſinum DF. Quoniam vero arcus DE, ſi exiguus fuerit, qualem nos ponimus, nempe Minutorum 45. vel 15. vel 5. (Ex his enim ſolis intermediorum arcuum ſinus inquirimus) à recta linea, quoad ſenſum, non differt, ac proinde multo minus arcus DH; erunt triangula DEK, DHL, quodammodo rectilinea, & æquiangula inter ſe. [a] *Quamobrem erit, vt DE, differentia inter arcum BD, & arcum BE, ad EK, differentiam inter ſinum DF, & ſinum EG, ita DH, differentia inter arcum BD, & arcum BH, ad HL, differentiam inter ſinum DF, & ſinum HI. Cũ ergo priores tres magnitudines ſint cognitæ, (nẽpe arcus DE, quo arcus BE, arcũ BD, ſuperat; & recta EK, qua ſinus EG, ſinũ DF, excedit, nec non arcus DH, quo arcus BH, cuius ſinus quæritur, ſuperat arcum BD) cognita etiam erit quarta magnitudo, id eſt, recta HL, quæ addenda eſt ſinui DF, vt fiat ſinus HI. Conſtat igitur, ſinus per regulam proportionum inuentos ſenſibiliter non differre à veris ſinubus, præſertim quando arcus DE, quo arcus cognitorum ſinuum inter ſe differunt, valde exiguus eſt, ita vt à recta linea vix differat.*



Demõſtratio ſupputationis ſinuum per regulam proportionum.

a 4. ſexti.

MAGNVM quoque compendium in hoc negotio nobis afferet propoſitio octaua. Ex ea enim plurimos ſinus ex aliis inuẽtis per ſolam additionem, ſubtractionemue nanciſcemur. Nam ſi ſinum cuiuſuis arcus, qui maior non ſit, quam grad.30. addamus ſinui arcus, qui ab arcu grad. 60. ſuperatur ſumpto illo arcu, componemus ſinum arcus qui eodem illo arcu aſſumpto arcum grad.60. ſuperat: propterea quod differentia inter ſinus duorum horum arcuum maiorum æqualis eſt ſinui arcus illius aſſumpti qui maior non ponitur, quam grad.30. vt ibi demõſtrauimus. Vt ſi 3461171 ſinũ arcus grad.20. Min.15. adijciamus ad 6394390. ſinum arcus grad.39. Min.45. qui ab arcu gra.60. ſuperatur dicto arcu grad.20. Min.15. conficiemus 9855561. ſinũ arcus gra.80. Min.15. qui arcum grad.60. eodem arcu grad.20. Min.15 ſuperat. Sic ſi 5000000. ſinum arcus grad. 30. addamus ſinui 5000000. arcus grad.30. quem arcus grad.60. ſuperat dicto illo arcu grad.30. componemus 10000000. ſinum arcus grad.90. qui arcum gra. 60. eodem illo arcu aſſumpto grad.30. ſuperat.

Compendium miri ſicum pro inuentione plurimorũ ſinuum.

ITEM ſi ſinum cuiuslibet arcus, qui arcu grad. 30. maior non ſit, ſubducamus ex ſinu arcus, qui arcum grad. 60. ſumpto illo arcu ſuperat, relinquetur ſinus arcus, qui eodem illo arcu aſſumpto ab arcu grad.60. ſuperatur. Vt ſi 3502075. ſinum arcus grad.20. Min.30. detrahamus ex 9862856. ſinu arcus grad.80. Min.30. qui arcum grad. 60. dicto arcu grad.20. Min.30. ſuperat, reliquus erit 6360781. ſinus arcus grad.39. Min.30. quem arcus grad.60. eodem illo arcu grad.20. Min.30. ſuperat.

RVRSVS, ſi ex ſinu cuiuſuis arcus, qui maior ſit arcu grad.60. detrahatur ſinus arcus, qui tanto minor ſit arcu grad.60 quanto ille maior eſt, relinquetur ſinus arcus, quo vteruis illorum ab arcu grad.60. differt. Vt ſi ex 9781476. ſinu arcus gra.78. auferatur 6691306. ſinus arcus grad.42. reliquus erit 3090170. ſinus arcus grad.18. quo vterq; illorum ab arcu grad.60. differt. Quæ omnia ex dicta propoſ.8. colliguntur.

ITAQVE ſatis eſt, vt inueniantur per regulam proportionum ſinus omnium arcuum à principio quadrantis vſque ad arcum grad.30. Si enim ex his eliciantur ſinus complementorum, & ex his inuentis detrahantur priores illi ſinus, reliqui erũt ſinus omnium arcuum inter arcum grad.30. & arcum grad. 60. Item ſi cogniti eſſent ſinus arcuum omnium ab arcu grad. 30. vſq; ad finem quadrantis, & ſinus omnium arcuum, qui minores ſunt arcu grad.60. detraherentur ex ſinubus omniũ arcuum maiorum, quam grad.60. remanerent ſinus omnium arcuum à principio quadrantis vſque ad arcum grad.30. Denique ſi ſinus omnium arcuum à principio quadrantis vſque ad arcum grad. 60. inuenti eſſent, & ſinus omnium arcuum minorum, quam grad.30. ſinubus omnium arcuum maiorum, quam grad.30. adijcerentur, componerentur ſinus omnium arcuum maiorum, quam grad.60.

SED iam ſubijciamus tabulam ſinuum omnium arcuum quadrantis per ſingula Minuta extenſorum à Ioanne Regiom. ſupputatam, quam tamen pleriſq; in locis ab erroribus, qui incuria typographorum irrepſerant, purgauimus. Continet autem in hac tabula ſinus totus particulas 10000000. ratione cuius omnes alij ſinus inuenti ſunt. Quod ſi à ſingulis reijciantur primæ duæ figuræ ad dexteram, (addita tamen vnitate, ſi duæ figuræ abiectæ numerum maiorem conſtituant, quam 50.) relinquetur ſinus reſpectu ſinus totius 100000. Si tamen quis eandem tabulam per præcepta tradita proprio Marte conſtruere velit, poſito ſinu toto partium 10000000. conſtituendus ei erit ſinus totus in ſupputatione partium 1000000000. Nam ſi ex ſingulis ſinubus

Quid agẽdum, vt ſequens tabula ſinuũ

inuentis

exquiſite cõſtruatur poſi[...] ſinu toto partiũ 10000000.

inu[...]is abijciantur duæ primæ figuræ ad dexteram, vt diximus, reliqui erunt ſinus reſpectu ſinus totius 1000000 ijdem omni[...], qui in tabula Ioannis Regiom. deſcripti ſunt. Hoc idcirco dico, ne mireris, non omnes ſinus per regulam proportionum inuentos ex ſinubus arcuum Minutis 45. ſe ordine ſuperantium, poſito ſinu toto 10000000. ad vnguem reſpondere ſinubus huius tabulæ. Vt enim ſinus exquiſite reperiatur reſpectu alicuius ſinus totius, conſtituendus eſt in ſupputatione ſinus totus centies maior, vt ſupra dictum eſt.

Ratio, cur abiectis duab. primis figuris ex ſinu quocunque reſpectu ſinus totius 10000000. relinquatur idem ſinus reſpectu ſinus totius 100000. [...] licet prior ille non ſit exquiſite inuentus,

QVOD autem, abiectis duabus primis figuris ad dexteram ex ſingulis ſinubus, remaneant ſinus exquiſiti reſpectu ſinus totius 100000. quamuis priores illi non ſint exquiſite inuenti, manifeſtum eſt. Quoniam enim ſinus totus, ſiue ſemidiameter ad ſinum rectum quemcunq; determinatam quandam proportionem habet; fit, vt omnes partes illius, quotcunque illæ ſint, ad partes huius inuentas reſpectu illarum partium ſinus totius eandem habeant proportionem, quam omnes partes eiuſdem ſinus totius pauciores, quam illæ priores, habent ad partes eiuſdem ſinus reſpectu illarum partium ſinus totius pauciorum: alioquin ſinus totus non haberet ſemper ad eundem ſinum eandem proportionem, ſed aliquando eſſet maioris quantitatis reſpectu illius, & aliquando minoris: quod eſt abſurdum. Quocirca ſi ſinus cuiuslibet arcus, vt v. g. illius, qui continet grad. 28. inuentus ſit reſpectu ſinus totius in quotuis particulas diſtributi, facile per regulam proportionum inueniemus eundem ſinum reſpectu eiuſdem ſinus totius in pauciores partes diuiſi, ſi ita dicamus. Si ſinus totus partium 10000000. dat ſinum arcus grad. 28. partium 4694716. Idem ſinus totus partium 100000. quot partium dabit ſinum eiuſdem arcus grad. 28? Inueniemus enim ſinum partium 46947 $\frac{1600000}{10000000}$. Omiſſa autem hac fractione, (quod minor ſit, quam vnitas) continebit idem ſinus partes duntaxat 46947. quemadmodum in tabulis ſinuum ponitur, in quibus ſinus totus continet partes 100000. Vbi vides, ſinum hunc relinqui ſi ex illo duæ primæ figuræ ad dexteram abijciantur. Ratio huius abiectionis eſt; quia vt ſinus ille grad. 28. multiplicatus per ſinum totum 100000. (quæ multiplicatio fit per appoſitionem quinq; cifrarum, hoc modo; 469471600000. vt in cap. 4. Arithmeticæ diximus) diuidatur per ſinum totum 10000000. vt regula proportionum præcipit; ſatis eſt, ſi ex numero producto reijciantur ſeptem figuræ, quot nimirum cifræ ſunt in diuiſore 10000000. vt in cap. 5. Arithmeticæ docuimus. Quare reijciendæ ſunt quinque illæ cifræ appoſitæ, & præterea duæ figuræ primæ, nempe hic numerus 1600000. qui cum diuiſore hanc minutiam $\frac{1600000}{10000000}$ conſtituit, quæ vnitate minor eſt; propterea quod numerator continet ſeptem figuras, denominator autem o[...]. Eademque ratio eſt in omnibus alijs ſinubus. Hinc fit, ſinum relictum poſt, abiectionem duarum primarum figurarum ſatis exquiſitum eſſe reſpectu ſinus totius 100000. etiamſi ille, à quo duæ figuræ abijciuntur, reſpectu ſinus totius 10000000. non eſſet exquiſite inuentus. Cum enim totus error, qui in ſupputatione contingere poteſt, (quando nimirum conſtituendus eſt ſinus inter duos numeros, quorum vnus vero ſinu maior eſt, & alter minor; Vel quando per regulam proportionum ſinus inquiritur: hic enim maius periculum errandi eſſe poteſt. Nam quando ſinus inuenitur per extractionem radicis quadratæ, error vnitatem non excedit) conſiſtat vel in prima ſola figura ad dexteram, vel in duabus primis, ita vt ad ſummum error ſit in 99. vnitatibus, quibus ſinus inuentus verum ſinum excedat, vel ab eo deficiat; (quis enim pluribus vnitatibus à ſcopo aberret, niſi plane rerum Geometricarum, atque Arithmeticarum ſit ignarus?) Duæ vero primæ figuræ cum quinque cifris aoppoſitis conſtituant numeratorem fractionis, quam diuiſio exhibet, minorem denominatore, ita vt fractio minor ſit, quam vnitas; liquet, ſatis exquiſitum ſinum relinqui.

Si ad ſinũ quemcunque reſpectu ſinus totius 100000. adijciantur duæ cifræ ad dexterã, fit idem ſinus reſpectu ſinus totius 10000000.

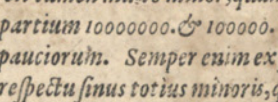
EADEM ratione, ſi cuilibet ſinui reſpectu ſinus totius partium 100000. inuento apponantur duæ cifræ ad dexteram, habebitur idem ſinus reſpectu ſinus totius partium 10000000. Nam ſi dicamus verbi gratia; Sinus totus partium 100000. dat ſinum arcus grad. 28. partium 46947. Sinus ergo totus partium 10000000. quot partium dabit eundem ſinum arcus grad. 28? reperiemus ſinum partium 4694700. Vbi vides, ſinum hunc [...]creari, ſi illi duæ cifræ ad dexteram adijciantur. Ratio huius adiectionis eſt; quia vt ſinus ille grad. 28. multiplicatus per ſinum totum 10000000. (quæ multiplicatio fit per appoſitionem ſeptem cifrarum, vt in cap. 4. Arithmeticæ tradidimus) diuidatur per ſinum totum 100000. vt regula proportionum præcipit, ſatis eſt. ſi ex numero producto 469470000000. auferantur quinque cifræ, vt ex cap. 5. noſtræ Arithmeticæ conſtat. Quocirca relinquetur prior ſinus cum duabus cifris ad dextram appoſitis. Quod autem ex ſinu 46947. non ſit inuentus ſiuus 4694716. ille idem, ex quo prius illum elicuimus, ſed ſolum hic 4694700. cauſa eſt, quod ſinus 46947. non eſt omnino exquiſitus reſpectu ſinus totius 100000. Deberet namq; eſſe 46947. & inſuper $\frac{1600000}{10000000}$. vt ex dictis patet, ex quo præciſe inuenietur ſinus ille 4694716. Sed licet hæ 16. vnitates negligantur, accipiaturque ſinus 4694700. qualem inuenimus, non tamen fit error notabilis, cũ 16. vnitates reſpectu ſinus totius ſint $\frac{16}{10000000}$. quæ minutia multo minor eſt, quam $\frac{1}{216000}$. hoc eſt, quam vnum ſecundũ reſpectu ſinus totius 60. vt merito negligi poſſit. Ad ſummum poterit aliquando contingere error, quamuis valde raro, in $\frac{99}{10000000}$. quæ minutia licet ſit aliquanto maior, quam $\frac{1}{216000}$. hoc eſt, quam vnum Secundum reſpectu ſinus totius 60. eſt tamen multo minor, quam $\frac{1}{3600}$. hoc eſt, quam vnum Minutum reſpectu ſinus totius 60. Id vero, quod de ſinubus totis partium 10000000. & 100000. diximus, intelligendum quoque eſt de alijs ſinubus totis quotcunque partium ſiue plurium, ſiue pauciorum.

Quo pacto ex ſinubus maioribus fiant minores, & contra, quotcunq; particularum ſinus totus ſtatuatur.

Semper enim ex ſinubus reſpectu ſinus totius maioris inuentis abijciendæ ſunt tot figuræ, vt relinquantur ſinus reſpectu ſinus totius minoris, quot cifris ſinus totus maior ſinum totum minorem ſuperat: Item ſinubus reſpectu ſinus totius minoris inuentis adijciendæ ſunt tot cifræ, vt fiant ſinus reſpectu ſinus totius maioris, quot cifris minor ſinus totus à ſinu toto maiore ſuperatur. Quod eodem modo demonſtrabitur. Vt ſi ſupputentur ſinus reſpectu ſinus totius 100000000. & ex ſingulis abijciantur tres primæ figuræ ad dexteram, reliqui erunt ſinus reſpectu ſinus totius 100000. & quidem multo exquiſitiores, quam ſi ſinus ſupputentur reſpectu ſinus totius 10000000. & ex ſingulis duæ figuræ abijciantur. Quod ſi ſinubus reſpectu ſinus totius 100000. inuentis adijciantur tres cifræ, fient ſinus reſpectu ſinus totius 100000000. atque ita de cæteris.

Cognitis duab. lineis rectis reſpectu alicuius menſuræ, deinde vero vna earum reſpectu alterius menſuræ cognita, quo pacto altera reſpectu huius alterius menſuræ cognoſcatur. Id quod Aſtronomis eſt familiariſſimum.

EX his patet ratio illius operationis, qua frequenter & in mea Gnomonica, & alijs in locis vſus ſum; cum duabus lineis cognitis reſpectu alicuius lineæ rectæ, tanquam ſinus totius, deinde vero vna earum iterum cognita reſpectu alterius lineæ rectæ maioris vel minoris veluti ſinus totius, vel reſpectu alterius cuiuſpiam menſuræ, alteram reſpectu huius alterius ſinus totius, vel reſpectu alterius huius menſuræ inueſtigo. Id quod & Ptolemæus, & alij Aſtronomi non raro etiam faciunt. Exempli gratia; cum duabus lineis rectis A, B, cognitis reſpectu lineæ rectæ C, tanquam ſinus totius continentis particulas 100000. linea quidem A, partium 91354. linea vero B, partium 40673. Deinde vero recta A, reſpectu alterius lineæ maioris D, veluti ſinus totius complectentis quoq; particulas 100000. deprehenſa iterum ſit partium 80901. vel palmorum 4. reſpectu menſuræ E, quæ palmo ſit æqualis, vel reſpectu menſuræ F, quæ plures palmos, nempe quinque, contineat, inquiro, quot partes, aut palmos linea B contineat reſpectu poſterioris ſinus totius, aut reſpectu dictæ illius menſuræ E, vel F.



Quod quidem expedio per regulam proportionum hoc modo Si linea A, partium 91354. dat lineam B, partium 40673. Eadem linea A, partium 80901. vel palmorum 4. quot partium, aut palmorum dabit eandem lineam B? Inuenietur namque linea B, partium 36019. & paulo amplius, vel palmorum 1 $\frac{35660}{45677}$. Cuius operationis ratio à ſuperiori non differt, cum recta A, ad rectam B, habeat ſemper vnam & eandem, determinatamque proportionem.

SEQVI-

SEQVITVR

TABVLA SINVVM RECTORVM PER SINGVLA QVADRANTIS MINVTA EXTENSA, ET

à Ioan. Regiomontano quondam ſupputata, nunc autem per me examinata, & pleriſque in locis caſtigata, atque correcta.

TABVLA

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	0		1		2		3		4		
0	0000		174524		348995		523360		697565		60
1	2909	48. 5	177433	48. 5	351902	48. 4	526265	48. 5	700467	48. 3	59
2	5818		180341		354809		529170		703369		58
3	8727		183250		357716		532075		706270		57
4	11636		186158		360623		534980		709172		56
5	14544		189066		363530		537884		712073		55
6	17453		191975		366437		540789		714975		54
7	20362		194883		369344		543694		717876		53
8	23271		197792		372251		546598		720777		52
9	26180		200700		375158		549503		723678		51
10	29088		203608		378064		552407		726579		50
11	31997		206517		380971		555312		729480		49
12	34906		209425		383878		558216		732381		48
13	37815		212333		386785		561120		735282		47
14	40724		215241		389692		564024		738183		46
15	43632		218149		392598		566928		741084		45
16	46541		221057		395505		569832		743985		44
17	49450		223965		398412		572736		746886		43
18	52359		226873		401318		575640		749787		42
19	55268		229781		404225		578544		752688		41
20	58177		232689		407131		581448		755588		40
21	61086		235597		410038		584352		758489		39
22	63995		238505		412944		587256		761389		38
23	66904		241413		415851		590160		764290		37
24	69813		244321		418757		593064		767190		36
25	72721		247229		421663		595967		770090		35
26	75630		250137		424570		598871		772991		34
27	78539		253045		427476		601775		775891		33
28	81448		255953		430382		604678		778791		32
29	84357		258861		433288		607582		781691		31
30	87265	48. 5	261769	48. 5	436194	48. 4	610485	48. 4	784591	48. 3	30
31	90174		264677		439100		613389		787491		29
32	93083		267585		442006		616292		790391		28
33	95992		270493		444912		619196		793291		27
34	98901		273401		447818		622099		796191		26
35	101809		276308		450724		625002		799090		25
36	104718		279216		453630		627905		801990		24
37	107627		282124		456536		630808		804889		23
38	110536		285032		459442		633711		807789		22
39	113445		287940		462348		636614		810688		21
40	116353		290847		465253		639517		813587		20
41	119262		293755		468159		642420		816486		19
42	122171		296663		471065		645323		819385		18
43	125079		299570		473970		648226		822284		17
44	127988		302478		476876		651129		825183		16
45	130896		305385		479781		654031		828082		15
46	133805		308293		482687		656934		830981		14
47	136714		311200		485592		659837		833880		13
48	139622		314108		488498		662739		836778		12
49	142531		317015	48. 4	491403		665642		839677		11
50	145439		319922		494308		668544		842576		10
51	148348		322830		497214		671447		845474		9
52	151257		325737		500119		674349		848372		8
53	154165		328645		503024		677251		851271		7
54	157074		331552		505929		680153		854169		6
55	159982		334459		508834		683055		857067		5
56	162891		337367		511740		685957		859965		4
57	165799		340274		514645		688859		862863		3
58	168708		343181		517550		691761		865761		2
59	171616		346088		520455		694663		868659		1
60	174524	48. 5	348995	48. 4	523360	48. 4	697565	48. 4	871557	48. 3	0
	89		88		87		86		85		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	5		6		7		8		9		
0	871557	48. 3	1045285	48. 2	1218693	48. 1	1391731	48. 0	1564345	47. 9	60
1	874455		1048178		1221580		1394612		1567218		59
2	877353		1051071		1224467		1397492		1570091		58
3	880250		1053964		1227354		1400373		1572964		57
4	883148		1056857		1230241		1403253		1575837		56
5	886045		1059749		1233128		1406133		1578709		55
6	888943		1062642		1236015		1409013		1581581		54
7	891840		1065534		1238901		1411893		1584453		53
8	894737		1068426		1241788		1414772		1587325		52
9	897634		1071318		1244674		1417652		1590197		51
10	900531		1074210		1247560		1420531		1593069		50
11	903428		1077102		1250446		1423410		1595941		49
12	906325		1079994		1253332		1426289		1598812		48
13	909222		1082886		1256218		1429168		1601684		47
14	912119		1085778		1259104		1432047		1604555	47. 8	46
15	915016		1088669		1261990		1434926		1607426		45
16	917913		1091561		1264876		1437805		1610297		44
17	920809		1094452		1267761		1440684		1613168		43
18	923706		1097344		1270647		1443562		1616038		42
19	926602		1100235		1273532		1446441		1618909		41
20	929498		1103126		1276417		1449319		1921779		40
21	932395		1106017		1279302		1452197		1624649		39
22	935291		1108908		1282187		1455075		1627519		38
23	938187		1111799		1285072		1457953		1630389		37
24	941083		1114690		1287957		1460831		1633259		36
25	943979		1117580		1290841		1463708		1636129		35
26	946875		1120471		1293726		1466586		1638999		34
27	949771		1123361		1296610		1469463	47. 9	1641868		33
28	952667		1126252		1299495		1472340		1644738		32
29	955563		1129142		1302378		1475217		1647607		31
30	958458		1132032		1305262		1478094		1650476		30
31	961354	48. 2	1134922		1308146		1480971		1653345		29
32	964249		1137812		1311030		1483848		1656214		28
33	967144		1140702		1313914		1486724		1659082		27
34	970039		1143592		1316798		1489601		1661951		26
35	972934		1146482		1319681	48. 0	1492477		1664819		25
36	975829		1149372		1322564		1495353		1667687		24
37	978724		1152261		1325447		1498229		1670555		23
38	981619		1155151		1328330		1501105		1673423		22
39	984514		1158040	48. 1	1331213		1503981		1676291		21
40	987408		1160929		1334096		1506857		1679159		20
41	990303		1163818		1336979		1509733		1682027		19
42	993198		1166707		1339862		1512608		1684894		18
43	996092		1169596		1342744		1515484		1687761		17
44	998987		1172485		1345627		1518359		1690628		16
45	1001881		1175374		1348509		1521234		1693495		15
46	1004775		1178263		1351392		1524109		1696362		14
47	1007669		1181151		1354274		1526984		1699229		13
48	1010563		1184040		1357156		1529859		1702095		12
49	1013457		1186928		1360038		1532734		1704962		11
50	1016351		1189816		1362920		1535608		1707828		10
51	1019245		1192704		1365802		1538482		1710694		9
52	1022139		1195592		1368683		1541356		1713560		8
53	1025032		1198480		1371564		1544230		1716426		7
54	1027926		1201368		1374446		1547104		1719292		6
55	1030819		1204255		1377327		1549978		1722157	47. 7	5
56	1033713		1207143		1380208		1552852		1725022		4
57	1036606		1210031		1383089		1555725		1727887		3
58	1039499		1212198		1385970		1558599		1730752		2
59	1042392		1215806		1388851		1561472		1730617		1
60	1045285	48. 2	1218693	48. 1	1391731	48. 0	1564345	47. 9	1736482	47. 7	0
	84		83		82		81		80		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro ſinubus rectis complementorũ arcuum eiuſdem Quadrantis.

T A B V L A

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	10		11		12		13		14		
0	1736482	47. 7	1908090	47. 6	2079117	47. 4	2249511	47. 2	2419219	47. 0	60
1	1739347		1910945		2081962		2252345		2422041		59
2	1742211		1913800		2084807		2255179		2424863		58
3	1745075		1916655		2087652		2258013		2427685		57
4	1747939		1919510		2090497		2260847		2430507		56
5	1750803		1922365		2093342		2263680		2433329		55
6	1753667		1925220		2096186		2266513		2436150		54
7	1756531		1928074		2099030		2269346		2438971		53
8	1759394		1930928		2101874		2272179		2441792		52
9	1762258		1933782		2104718		2275012		2444613		51
10	1765121		1936636		2107562		2277844		2447434		50
11	1767984		1939490		2110405		2280676		2450254		49
12	1770847		1942344		2113248		2283508		2453074		48
13	1773710		1945197	47. 5	2116091		2286340		2455894		47
14	1776563		1948050		2118934		2289172		2458714		46
15	1779435		1950903		2121777		2292004		2461533		45
16	1782298		1953756		2124620		2294835		2464352		44
17	1785160		1956609		2127462		2297666		2467171		43
18	1788022		1959462		2130304		2300497		2469990		42
19	1790884		1962314		2133146		2303328		2472809		41
20	1793746		1965166		2135988		2306159		2475628		40
21	1796608		1968018		2138830	47. 3	2308985		2478446		39
22	1799469		1970870		2141671		2311819		2481264		38
23	1802331		1973722		2144512		2314649		2484082		37
24	1805192		1976574		2147353		2317479		2486900	46. 9	36
25	1808053		1979425		2150194		2320309	47. 1	2489717		35
26	1810914		1982276		2153035		2323138		2492534		34
27	1813774		1985127		2155876		2325967		2495351		33
28	1816634		1987978		2158716		2328796		2498168		32
29	1819495		1990829		2161556		2331625		2590984		31
30	1822355		1993679		2164396		2334454		2503800		30
31	1825215		1996530		2167236		2337282		2506616		29
32	1828075		1999380		2170076		2340110		2509431		28
33	1830935		2002230		2172916		2342938		2512248		27
34	1833795	47. 6	2005080		2175755		2345766		2515064		26
35	1836654		2007930		2178594		2348594		2517879		25
36	1839513		2010780		2181433		2351421		2520694		24
37	1842372		2013629		2184272		2354248		2523509		23
38	1845231		2016478		2187111		2357075		2526324		22
39	1848090		2019327		2189949		2359902		2529138		21
40	1850949		2022176		2192787		2362729		2531952		20
41	1853808		2025025		2195625		2365555		2534766		19
42	1856666		2027874		2198463		2368381		2537580		18
43	1859524		2030722		2201300		2371207		2540393		17
44	1862382		2033570		2204137		2374033		2543206		16
45	1865240		2036418		2206974		2376859		2546019		15
46	1868098		2039266		2209811		2379684		2548832		14
47	1870956		2042114		2212648		2382509		2551645		13
48	1873813		2044962		2215485		2385334		2554458		12
49	1876670		2047809	47. 4	2218322		2388159		2557270		11
50	1879527		2050656		2221158		2390983		2560082		10
51	1882384		2053503		2223994		2393808		2562894		9
52	1885241		2056350		2226830		2396632		2565706		8
53	1888098		2059197		2229666		2399456		2568517	46. 8	7
54	1890954		2062043		2232502	47. 2	2402280		2571328		6
55	1893810		2064889		2235337		2405104	47. 0	2574139		5
56	1896666		2067735		2238172		2407927		2576950		4
57	1899522		2070581		2241007		2410750		2579760		3
58	1902378		2073427		2243842		2413573		2582570		2
59	1905234		[illegible]76272		2246677		2416396		2585380		1
60	1908090	47. 6	2079117	47. 4	2249511	47. 2	2419219	47. 0	2588190	46. 8	0
	79		78		77		76		75		

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrant is

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	15		16		17		18		19		
0	2588190	46. 8	2756373	46. 6	2923717	46. 4	3090170	46. 1	3255682	45. 8	60
1	2591000		2759169		2926499		3092936		3258532		59
2	2593809		2761965		2929280	46. 3	3095702		3261182		58
3	2596618		2764761		2932061		3098468		3263931		57
4	2599427		2767556		2934842		3101234		3266681		56
5	2602236		2770351		2937623		3103999		3269430		55
6	2605045		2773146		2940403		3106764		3272179		54
7	2607853		2775941		2943183		3109529		3274927		53
8	2610661		2778735		2945963		3112294		3277675		52
9	2613469		2781529		2948743		3115058		3280423		51
10	2616277		2784323		2951523		3117822		3283171		50
11	2619084		2787117		2954302		3120586		3285918		49
12	2621891		2789911	46. 5	2957081		3123349	46. 0	3288665		48
13	2624698		2792704		2959860		3126112		3291412		47
14	2627505		2795497		2962638		3128875		3294159		46
15	2630312		2798290		2965416		3131638		3296906		45
16	2633118		2801082		2968194		3134400		3299652		44
17	2635924		2803874		2970972		3137162		3302398		43
18	2638730		2806666		2973750		3139624		3305144		42
19	2641536		2809458		2976527		3142686		3307889	45. 7	41
20	2644342	46. 7	2812250		2979304		3145448		3310634		40
21	2647147		2815041		2982081		3148209		3313379		39
22	2649952		2817832		2984857		3150970		3316123		38
23	2652757		2820623		2987633		3153731		3318867		37
24	2655562		2823414		2990409		3156491		3321611		36
25	2658366		2826204		2993185	46. 2	3159251		3324355		35
26	2661170		2828994		2995960		3162011		3327098		34
27	2663974		2831784		2098735		3164770		3329841		33
28	2666777		2834574		3001510		3167529		3332585		32
29	2669580		2837264		3004284		3170288		3335327		31
30	2672383		2840153		3007058		3173047		3338069		30
31	2675186		2842942		3009832		3175805		3340811		29
32	2677989		2845731		3012606		3178563		3343553		28
33	2680792		2848520		3015380		3181321		3346294		27
34	2683595		2851308		3018153		3184079		3349035		26
35	2686397		2854096		3020926		3186837	45. 9	3351776		25
36	2689199		2856884		3023699		3189594		3354516		24
37	2692001		2859672	46. 4	3026472		3192351		3357256		23
38	2694802		2862459		3029244		3195108		3359996		22
39	2697603		2865246		3032016		3197864		3362736		21
40	2700404		2868033		3034788		3200620		3365475	45. 6	20
41	2703205		2870819		3037559		3203375		3368214		19
42	2706005		2873605		3040330		3206130		3370953		18
43	2708805		2876391		3043101		3208885		3373691		17
44	2711605		2879177		3045872		3211640		3376429		16
45	2714405	46. 6	2881963		3048643		3214395		3379167		15
46	2717204		2884748		3051413		3217150		3381905		14
47	2720003		2887533		3054183		3219904		3384642		13
48	2722802		2890318		3056953		3212658		3387379		12
49	2725601		2893103		3059723	46. 1	3225412		3390116		11
50	2728400		2895888		3062492		3228165		3392852		10
51	2731198		2898672		3065261		3230918		3395588		9
52	2733996		2901456		3068030		3233671		3398324		8
53	2736794		2904240		3070798		3236423		3401060		7
54	2739592		2907023		3073566		3239175		3403795		6
55	2742389		2909806		3076334		3241927		3406530		5
56	2745186		2912589		3079102		3244679	45. 8	3409265		4
57	2747983		2915371		3081869		3247430		3411999		3
58	2750780		2918153		3084636		3250181		3414733		2
59	2753577		2920935		3087403		3252932		3417467		1
60	2756373	46. 6	2923717	46. 4	3090170	46. 1	3255682	45. 8	3420201	45. 6	0
	74		73		72		71		70		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	20		21		22		23		24		
0	3420201		3583679	45. 3	3746066	44. 9	3907311	44. 6	4067366		60
1	3422934	45. 5	3586395		3748763		3909989		4070023	44. 3	59
2	3425667		3589110		3751460		3912666		4072680		58
3	3428400		3591825	45. 2	3754156		3915343		4075337		57
4	3431133		3594540		3756852		3918020		4077993		56
5	3433865		3597254		3759548		3920696		4080649		55
6	3436597		3599968		3762243		3923372		4083305		54
7	3439329		3602682		3764938		3926048		4085960	44. 2	53
8	3442060		3605395		3767633		3928723		4088615		52
9	3444791		3608108		3770327		3931398		4091269		51
10	3447522		3610821		3773021		3934072		4093923		50
11	3450253		3613533		3775715		3936746		4096577		49
12	3452983		3616245		3778408		3939420		4099231		48
13	3455713		3618957		3781101		3942093	44. 5	4101884		47
14	3458442		3621669		3783794		3944766		4104537		46
15	3461171		3624380		3786486		3947439		4107189		45
16	3463900		3627091		3789178		3950112		4109841		44
17	3466629		3629802		3791870		3952784		4112493		43
18	3469357		3632512		3794562	44. 8	3955456		4115144		42
19	3472085		3635222		3797253		3958128		4117795		41
20	3474813		3637932		3799944		3960799		4110446		40
21	3477540	45. 4	3640642		3802635		3963470		4123096		39
22	3480267		3643351	45. 1	3805325		3966140		4125746		38
23	3482994		3646060		3808015		3968810		4128395	44. 1	37
24	3485721		3648768		3810704		3971480		4131044		36
25	3488447		3651476		3813393		3974149		4133693		35
26	3491173		3654184		3816082		3976818		4136341		34
27	3493899		3656892		3818771		3979487		4138989		33
28	3496624		3659599		3821459		3982155		4141637		32
29	3499349		3662306		3824147		3984823		4144285		31
30	3502075		3665012		3826834		3987491		4146932		30
31	3504799		3667718		3829521		3990159		4149579		29
32	3507523		3670424		3832208		3992826	44. 4	4152226		28
33	3510247		3673130		3834895		3995493		4154872		27
34	3512971		3675835		3837581		3998159		4157518		26
35	3515694		3678541		3840267		4000825		4160163		25
36	3518417		3681246		3842953	44. 7	4003491		4162808		24
37	3521140		3683951		3845638		4006156		4165453		23
38	3523862		3689955		3848323		4008821		4168097		22
39	3526584		3689359		3851008		4011486		4170741		21
40	3529306		3692062	45. 0	3853692		4014150		4173385		20
41	3532027	45. 3	3694765		3856376		4016814		4176028	44. 0	19
42	3534748		3697468		3859060		4019478		4178671		18
43	3537469		3700170		3861743		4022141		4181313		17
44	3540190		3702872		3864426		4024804		4183955		16
45	3542910		3705572		3867109		4027467		4186597		15
46	3545630		3708276		3869791		4030130		4189239		14
47	3548350		3710977		3872473		4032792		4191880		13
48	3551070		3713678		3875155		4035454		4194521		12
49	3553789		3716379		3877837		4038115	44. 3	4197162		11
50	3556508		3719080		3880518		4040776		4199802		10
51	3559227		3721780		3883199		4043437		4020442		9
52	3561945		3724480		3885880		4046097		4205081		8
53	3564663		3727179		3888560		4048757		4207720		7
54	3567380		3729878		3891240		4051416		4210359		6
55	3570097		3732577		3893919	44. 6	4054075		4212997		5
56	3572814		3735275		3890598		4056734		4215635		4
57	3575531		3737973		3899277		4059392		4218273		3
58	3578247		3740671		3901955		4062050		4220910	43. 9	2
59	3580963		3743369		3904633		4064708		4223547		1
60	3583679	45. 3	3746066	44. 9	3907311	44. 6	4067366	44. 3	4226183	43. 9	0
	69		68		67		66		65		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	29		28		27		26		25		
0	4226183	43. 9	4383712	43. 6	4539905	43. 2	4694716	42. 8	4848096	42. 4	60
1	4228819		4386326		4542497		4697284		4850640		59
2	4231455		4388940		4545088		4699852		4853184		58
3	4234090		4391554	43. 5	4547679		4702419		4855727		57
4	4236725		4394167		4550270		4704986		4858270		56
5	4239360		4396780		4552860		4707553		4860812		55
6	4241994		4399392		4555450	43. 1	4710119		4863354	42. 3	54
7	4244628		4402004		4558039		4712685	42. 7	4865895		53
8	4247362		4404616		4560628		4715250		4868436		52
9	4249895		4407227		4563216		4717815		4870977		51
10	4252528		4409838		4565804		4720380		4873517		50
11	4255161		4412449		4568392		4722944		4876057		49
12	4257793		4415059		4570979		4725508		4878596		48
13	4260425	43. 8	4417669		4573566		4728071		4881135		47
14	4263056		4420278		4576153		4730634		4883674		46
15	4265687		4422887		4578739		4733197		4886212		45
16	4268318		4425496		4581325		4735759		4888750		44
17	4270949		4428104		4583911		4738321		4891287		43
18	4273579		4430712		4586496		4740882		4893824		42
19	4276209		4433320	43. 4	4589081		4743443		4896361		41
20	4277838		4435927		4591665		4746004		4898897		40
21	4281467		4438534		4594249		4748564		4901433	42. 2	39
22	4284096		4441140		4596833	43. 0	4751124		4903968		38
23	4286724		4443746		4599416		4753683	42. 6	4906503		37
24	4289352		4446352		4601999		4756242		4909037		36
25	4291979		4448957		4604581		4758801		4911571		35
26	4294606		4451562		4607163		4761359		4914105		34
27	4297233		4454167		4609744		4763917		4916638		33
28	4299859		4456771		4612325		4766474		4919171		32
29	4302485		4459375		4614906		4769031		4921703		31
30	4305111	43. 7	4461978		4617486		4771588		4924235		30
31	4307736		4464581		4620060		4774144		4926767		29
32	4310361		4467184		4622646		4776700		4929298		28
33	4312986		4469786		4625225		4779255		4931829		27
34	4315610		4472388		4627804		4781810		4934359		26
35	4318234		4474990	43. 3	4630382		4784365		4936889		25
36	4320858		4477591		4632960		4786919		4939418	42. 1	24
37	4323481		4480192		4635538		4789473		4941947		23
38	4326104		4482792		4638115	42. 9	4792026	42. 5	4944476		22
39	4328726		4485392		4640692		4794579		4947004		21
40	4331348		4487992		4643268		4797132		4949532		20
41	4333970		4490591		4645844		4799684		4952059		19
42	4336591		4493190		4648420		4802236		4954686		18
43	4339212		4495788		4650995		4804787		4957113		17
44	4341833		4498386		4653570		4807338		4959639		16
45	4344453		4500984		4656145		4809888		4962165		15
46	4347073		4503582		4658719		4812438		4964690		14
47	4349693	43. 6	4506179		4661293		4814988		4967215		13
48	4352312		4508776		4663866		4817537		4969740		12
49	4354931		4511372		4666439		4820086		4972264		11
50	4357549		4513968	43. 2	4669012		4822635		4974788	42. 0	10
51	4360167		4516563		4671584		4825183		4977311		9
52	4362785		4519158		4674156		4827731	42. 4	4979834		8
53	4365402		4521753		4676727	42. 8	4830278		4982356		7
54	4368019		4524347		4679298		4832825		4984878		6
55	4370635		4526941		4681869		4835371		4987399		5
56	4373251		4529535		4684439		4837917		4989920		4
57	4375867		4532128		4687009		4840462		4992441		3
58	4378482		4534721		4689578		4843007		4994961		2
59	4381097		4537313		4692147		4845552		4997481		1
60	4383712	43. 6	4539905	43. 2	4694716	42. 8	2848096	42. 4	5000000	42. 0	0
	64		63		62		61		60		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	30		31		32		33		34		
0	5000000	42. 0	5150381		5299192	41. 1	5446390	40. 6	5591929	40. 2	60
1	5002519		5152874	41. 5	5301659		5448829		5594340		59
2	5005038		5155367		5304125		5451268		5596751		58
3	5007556		5157859		5306591		5453707		5599161		57
4	5010074		5160351		5309056		5456145		5601571		56
5	5012591	41. 9	5162843		5311521		5458583		5603981		55
6	5015108		5165334		5313985		5461020		5606390	40. 1	54
7	5017624		5167825		5316449		5463456		5608798		53
8	5020140		5170315		5318913		5465892		5611206		52
9	5022656		5172805		5321376	41. 0	5468328		5613614		51
10	5025171		5175294		5323839		5470763		5616021		50
11	5027686		5177783		5326301		5473198		5618427		49
12	5030200		5180271		5328763		5475632		5620833		48
13	5032714		5182759		5331224		5478066		5623239		47
14	5035227		5185246	41. 4	5333685		5480499	40. 5	5625644		46
15	5037740		5187733		5356145		5482932		5628049		45
16	5040253		5190220		5338605		5485364		5630453		44
17	5042765		5192706		5341065		5487796		5632857		43
18	5045277		5195192		5343524		5490228		5635260	40. 0	42
19	5047788	41. 8	5197677		5345983		5492659		5637663		41
20	5050299		5200162		5348441		5495090		5640066		40
21	5052809		5202646		5350898	40. 9	5497520		5642468		39
22	5055319		5205130		5353355		5499950		5644869		38
23	5057829		5207614		5355812		5502379		5647270		37
24	5060338		5210097		5358268		5504808		5649670		36
25	5062847		5212580		5360724		5507236		5652070		35
26	5065355		5215062		5363179		5509664		5654469		34
27	5067863		5217544		5365634		5512091	40. 4	5656868		33
28	5070370		5220025	41. 3	5368088		5514518		5659266		32
29	5072877		5222506		5370542		5516944		5661664		31
30	5075384		5224986		5372996		5519370		5664062		30
31	5077890		5227466		5375449		5521795		5666459	39. 9	29
32	5080396		5229946		5377902		5524220		5668856		28
33	5082901	41. 7	5232425		5380354		5526645		5671252		27
34	5085406		5234904		5382806		5529069		5673648		26
35	5087911		5237382		5385258	40. 8	5531493		5676043		25
36	5090415		5239860		5387709		5533916		5678438		24
37	5092619		5242337		5390159		5536338		5680832		23
38	5095422		5244814		5392609		5538760		5683226		22
39	5097925		5247290		5395058		5541182		5685619		21
40	5100427		5249766		5397507		5543603	40. 3	5688012		20
41	5102929		5252241	41. 2	5399955		5546024		5690404		19
42	5105430		5254716		5402403		5548444		5692796		18
43	5107931		5257191		5404851		5550864		5695187	39. 8	17
44	5110431		5259665		5407298		5553283		5697578		16
45	5112931		5262139		5409745		5555702		5699968		15
46	5115431		5264612		5412191		5558120		5702358		14
47	5117930	41. 6	5267085		5414637	40. 7	5560538		5704747		13
48	5120429		5269557		5417082		5562956		5707136		12
49	5122927		5272029		5419527		5565373		5709524		11
50	5125425		5274501		5421972		5567790		5711912		10
51	5127922		5276972		5424416		5570206		5714299		9
52	5130419		5279443		5426859		5572622		5716686		8
53	5132919		5281913		5429302		5575037	40. 2	5719072		7
54	5135412		5284383		5431745		5577452		5721458		6
55	5137908		5286852	41. 1	5434187		5579866		5723844		5
56	5140403		5289321		5436629		5582280		5726229	39. 7	4
57	5142898		5291789		5439070		5584693		5728613		3
58	5145393		5294257		5441510		5587106		5730997		2
59	5147887		5296725		5443950		5589518		5733381		1
60	5150381	41. 6	5299192	41. 1	5446390	40. 7	5591929	40. 2	5735764	39. 7	0
	59		58		57		56		55		

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	35		36		37		38		39		
0	5735764	39. 7	5877852	39. 2	6018150	38. 7	6156615	38. 2	6293204	37. 7	60
1	5738147		5880205		6020473		6158907		6295464		59
2	5740529		5882558		6022796		6161198		6297724	37. 6	58
3	5742911		5884910		6025118		6163489		6299983		57
4	5745292		5887262		6027439		6165780		6302242		56
5	5747672		5889613		6029760	38. 6	6168070		6304501		55
6	5750052		5891964		6032080		6170359	38. 1	6306759		54
7	5752432		5894314		6034400		6172648		6309016		53
8	5754811	39. 6	5896664	39. 1	6036719		6174936		6311273		52
9	5757190		5899013		6039038		6177224		6313529		51
10	5759568		5901361		6041357		6179512		6315784		50
11	5761946		5903709		6043675		6181799		6318039		49
12	5764323		5906056		6045992		6184085		6320293		48
13	5766700		5908403		6048309		6186371		6322547	37. 5	47
14	5769076		5910750		6050625		6188656		6324800		46
15	5771452		5913096		6052940		6190940		6327053		45
16	5773827		5915442		6055255		6193224		6329305		44
17	5776202		5917787		6057570		6195508		6331557		43
18	5778576		5920132		6059884		6197791	38. 0	6333808		42
19	5780950		5922476		6062198	38. 5	6200074		6336059		41
20	5783324	39. 5	5924820	39. 0	6064511		6202356		6338310		40
21	5785697		5927163		6066824		6204638		6340560		39
22	5788069		5929505		6069136		6206919		6342809		38
23	5790441		5931847		6071448		6209199		6345058		37
24	5792812		5934189		6073759		6211479		6347306	37. 4	36
25	5795183		5936530		6076069		6213758		6349553		35
26	5797553		5938871		6078379		6216037		6351800		34
27	5799923		5941211		6080688		6218315		6354046		33
28	5802292		5943551		6082997		6220593		6356292		32
29	5804661		5945890		6085306		6222870	37. 9	6358537		31
30	5807030		5948228		6087614		6225146		6360782		30
31	5809398		5950566		6089922	38. 4	6227422		6363026		29
32	5811766		5952904	38. 9	6092229		6229698		6365270		28
33	5814133	39. 4	5955241		6094536		6231973		6367513		27
34	5816499		5957578		6096842		6234248		6369756		26
35	5818865		5959914		6099147		6236522		6371999		25
36	5821230		5962250		6101452		6238796		6374241		24
37	5823595		5964585		6103756		6241069		6376482		23
38	5825959		5966919		6106060		6243342		6378722	37. 3	22
39	5828323		5969253		6108364		6245614		6380962		21
40	5830687		5971586		6110667		6247885	37. 8	6383201		20
41	5833050		5973919		6112970		6250156		6385440		19
42	5835412		5976251	38. 8	6115272		6252426		6387678		18
43	5837774		5978583		6117573	38. 3	6254696		6389916		17
44	5840136		5980915		6119873		6256966		6392153		16
45	5842497	39. 3	5983246		6122173		6259235		6394390		15
46	5844858		5985577		6124473		6261593		6396626		14
47	5847218		5987907		6126772		6263771		6398862		13
48	5849578		5990237		6129071		6266038		6401097	37. 2	12
49	5851937		5992566		6131369		6268305		6403332		11
50	5844195		5994894		6133667		6270572		6405566		10
51	5856653		5997222		6135964		6272838		6407799		9
52	5859010		5999549		6138261		6275103	37. 7	6410032		8
53	5861367		6001876		6140557		6277368		6412264		7
54	5863724		6004202		6142853		6279632		6414496		6
55	5866080		6006528		6145148	38. 2	6281895		6416728		5
56	5868436		6008853	38. 7	6147442		6284158		6418959		4
57	5870791	39. 2	6011178		6149736		6286420		6421189		3
58	5873145		6013502		6152030		6288682		6423419	37. 1	2
59	5875499		6015826		6154323		6290943		6425648		1
60	5877852	39. 2	6018150	38. 7	6156615	38. 2	6293204	37. 7	6427876		0
	54		53		52		51		50		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	40		41		42		43		44		
0	6427876	37. 1	6560590	36. 6	6691306	36. 0	6819984		6946584	34. 8	60
1	6430104		6562785		6693468		6822111	35. 4	6948676		59
2	6432331		6564979		6695629		6824237		6950767	34. 8	58
3	6434558		6567173		6697789		6826363		6952858		57
4	6436785		6569367		6699949		6828489		6954949		56
5	6439011		6571560	36. 5	6702108		6830614		6957039		55
6	6441236		6573753		6704267		6832738		6959128		54
7	6443461		6575945		6706425		6834861		6961216		53
8	6445685		6578136		6708582	35. 9	6836984		6963304		52
9	6447909		6580326		6710739		6839107		6965392		51
10	6450132	37. 0	6582516		6712895		6841229		6967479		50
11	6452355		6584705		6715051		6843350	35. 3	6969565		49
12	6454577		6586894		6717206		6845471		6971651	34. 7	48
13	6456799		6589082		6719361		6847591		6973736		47
14	6459020		6591270		6721515		6849711		6975821		46
15	6461240		6593458	36. 4	6723668		6851830		6977905		45
16	6463460		6595645		6725821		6853949		6979988		44
17	6465679		6597831		6727973		6856067		6982071		43
18	6467898		6600016		6730125		6858184		6984153		42
19	6470116		6602201		6732276	35. 8	6860301		6986235		41
20	6472333	36. 9	6604386		6734427		6862417		6988316		40
21	6474550		6606570		6736577		6864533	35. 2	6990396		39
22	6476766		6608753		6738726		6866648		6992476		38
23	6478982		6610936		6740875		6868762		6994555	34. 6	37
24	6481198		6613118		6743024		6870876		6996634		36
25	6483413		6615300	36. 3	6745172		6872989		6998712		35
26	6485628		6617481		6747319		6875102		7000789		34
27	6487842		6619661		6749465		6877214		7002866		33
28	6490055		6621841		6751611		6879325		7004942		32
29	6492268		6624021		6753757	35. 7	6881436		7007018		31
30	6494480		6626200		6755902		6883546		7009093		30
31	6496692	36. 8	6628379		6758047		6885656	35. 1	7011167		29
32	6498903		6630557		6760191		6887765		7013241		28
33	6501114		6632734		6762334		6889874		7015314	34. 5	27
34	6503324		6634911		6764477		6891982		7017387		26
35	6505533		6637087		6766619		6894089		7019459		25
36	6507742		6639263	36. 2	6768760		6896196		7021530		24
37	6596950		6641438		6770901		6898302		7023601		23
38	6512158		6643612		6773041		6900408		7025671		22
39	6514365		6645786		6775181		6902513		7027741		21
40	6516572		6647959		6777320	35. 6	6904617		7029810		20
41	6518778		6650132		6779459		6906721	35. 0	7031879		19
42	6520984		6652304		6781597		6908824		7033947		18
43	6523189	36. 7	6654476		6783734		6910927		7036014	34. 4	17
44	6525394		6656647		6785871		6913029		7038081		16
45	6527598		6658817		6788007		6915131		7040147		15
46	6529801		6660987		6790143		6917232		7042213		14
47	6532004		6663156	36. 1	6792258		6919332		7044278		13
48	6534206		6665325		6794413		6921432		7046342		12
49	6536408		6667493		6796547		6923531		7048406		11
50	6538609		6669661		6798681		6925630		7050469		10
51	6540809		6671828		6800814	35. 5	6927728		7052432		9
52	6543009		6673994		6802946		6929725	34. 9	7054594		8
53	6545208	36. 6	6676160		6805078		6931922		7056655	34. 3	7
54	6547407		6678326		6807209		6934018		7058716		6
55	6549606		6680491		6809340		6936114		7060776		5
56	6551804		6682655		6811470		6938209		7062836		4
57	6554001		6684818	36. 0	6813599		6940303		7064895		3
58	6556198		6686981		6815728		6942397		7066953		2
59	6558394		6689144		6817856		6944491		7069011		1
60	6560590	36. 6	6691306	36. 0	6819984	35. 5	6946584	34. 9	7071068	34. 3	0
	49		48		47		46		45		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	45		46		47		48		49		
0	7071068	34. 3	7193398	33. 7	7313537	33. 1	7431448	32. 4	7547096	31. 8	60
1	7073125		7195418		7315521		7433394		7549004		59
2	7075181		7197438		7317504	33. 0	7435339		7550911		58
3	7077236	34. 2	7199457	33. 6	7319486		7437284		7552818		57
4	7079291		7201476		7321468		7439229		7554724		56
5	7081345		7203494		7323449		7441173		7556630	31. 7	55
6	7083399		7205511		7325429		7443116		7558535		54
7	7085452		7207527		7327409		7445058		7560439		53
8	7087504		7209543		7329388		7447000		7562343		52
9	7089556		7211559		7331367		7448941	32. 3	7564246		51
10	7091607		7213574		7333345	32. 9	7450882		7566148		50
11	7093658		7215588		7335322		7452822		7568050		49
12	7095708	34. 1	7217601	33. 5	7337298		7454761		7569951		48
13	7097757		7219614		7339274		7456699		7571851		47
14	7099806		7221627		7341250		7458637		7573751		46
15	7101854		7223639		7343225		7460574		7575650	31. 6	45
16	7103902		7225651		7345199		7462511		7577548		44
17	7105949		7227662		7347173		7464447		7579446		43
18	7107995		7229672		7349146		7466382	32. 2	7581343		42
19	7110041		7231681		7351118		7468317		7583240		41
20	7112086		7233689		7353090	32. 8	7470251		7585136		40
21	7114131		7235697		7355061		7472184		7587031		39
22	7116175		7237704	33. 4	7357031		7474117		7588925		38
23	7118218	34. 0	7239711		7359001		7476249		7590819		37
24	7120261		7241718		7360970		7477981		7592713	31. 5	36
25	7122303		7243724		7362939		7479912		7594606		35
26	7124344		7245729		7364907		7481842		7596498		34
27	7126385		7247733		7366874		7483771	32. 1	7598389		33
28	7128425		7249737		7368841		7485700		7600280		32
29	7130465		7251741		7370807		7487629		7602170		31
30	7132504		7253744		7372773	32. 7	7489557		7604060		30
31	7134543		7255746	33. 3	7374738		7491484		7605949		29
32	7136581		7257747		7376702		7493410		7607837		28
33	7138618	33. 9	7259748		7378666		7495336		7609725	31. 4	27
34	7140655		7261749		7380629		7497262		7611612		26
35	7142691		7263749		7382592		7499187		7613498		25
36	7144727		7265748		7384554		7501111		7615384		24
37	7146762		7267746		7386515		7503034	32. 0	7617269		23
38	7148796		7269744		7388475		7504957		7619153		22
39	7150830		7271741		7390435	32. 6	7506879		7621037		21
40	7152863		7273737		7392394		7508801		7622920	31. 3	20
41	7154895		7275733	33. 2	7394353		7510722		7624802		19
42	7156927		7277728		7396311		7512642		7626683		18
43	7158958	33. 8	7279722		7398268		7514561		7628564		17
44	7160989		7281716		7400225		7516480		7630445		16
45	7163019		7283710		7402181		7518398		7632325		15
46	7165049		7285703		7404137		7520316		7634204		14
47	7167078		7287695		7406092		7522233	31. 9	7636082		13
48	7169106		7289687		7408046		7524149		7637960		12
49	7171134		7291678		7410000		7526065		7639838		11
50	7173161		7293668		7411953	32. 5	7527980		7641715		10
51	7175187		7295658		7413905		7529894		7643591	31. 2	9
52	7177213	33. 7	7297647	33. 1	7415856		7531808		7645466		8
53	7179238		7299635		7417807		7533721		7647341		7
54	7181263		7301623		7419758		7535634		7649215		6
55	7183287		7303610		7421708		7537546	31. 8	7651088		5
56	7185310		7305597		7423657		7539457		7652961		4
57	7187333		7307583		7425605		7541367		7654833		3
58	7189355		7309568		7427553		7543277		7656704		2
59	7191377		7311553		7429501		7545187		7658575		1
60	7193398	33. 7	7313537	33 1	7431448	32 4	7547090	31. 8	7660445	31. 1	0
	44		43		42		41		40		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

TABVLA

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	50		51		52		53		54		
0	7660445		7771460	30. 5	7880108	29. 8	7986355	29. 2	8090170	28. 5	60
1	7662314	31. 1	7773290		7881898		7988105		8091879		59
2	7664183		7775120		7883688		7989855		8093588		58
3	7666051		7776949		7885477		7991604	29. 1	8095296		57
4	7667919		7778777		7887266		7993352		8097004		56
5	7669786		7780605		7889054		7995100		8098711	28. 4	55
6	7671652		7782432	30. 4	7890841		7996847		8100417		54
7	7673517		7784258		7892927		7998593		8102122		53
8	7675382		7786084		7894413		8000339		8103827		52
9	7677246		7787909		7896198	29. 7	8002084		8105531		51
10	7679110		7789833		7897983		8003828		8107234		50
11	7680973	31. 0	7791557		7899767		8005571	29. 0	8108936		49
12	7682835		7793380		7901550		8007314		8110638	28. 3	48
13	7684697		7795202		7903332		8009056		8112339		47
14	7686558		7797024		7905114		8010797		8114040		46
15	7688418		7798845	30. 3	7906895		8012538		8115740		45
16	7690278		7800665		7908676		8014278		8117439		44
17	7692137		7802485		7910456		8016017		8119137		43
18	7693995		7804304		7912235	29. 6	8017756		8120835		42
19	7695853		7806123		7914014		8019494		8122532		41
20	7697710	30. 9	7807941		7915792		8021232		8124229		40
21	7699566		7809758		7917569		8022969	28. 9	8125925	28. 2	39
22	7701422		7811574		7919345		8024705		8127620		38
23	7703277		7813390		7921121		8026440		8129314		37
24	7705132		7815205	30. 2	7922896		8028175		8131008		36
25	7706986		7817020		7924671		8029909		8132701		35
26	7708839		7818834		7926445	29. 5	8031642		8134393		34
27	7710692		7820647		7928218		8033375		8136084		33
28	7712544	30. 8	7822569		7929990		8035107	28. 8	8137775		32
29	7714395		7824271		7931762		8036838		8139465		31
30	7716246		7826082		7933533		8038569		8141155		30
31	7718096		7827892		7935303		8040299		8142844	28. 1	29
32	7719945		7829702		7937073		8042028		8144532		28
33	7721794		7831511	30. 1	7938842		8043757		8146220		27
34	7723642		7833320		7940611		8045485		8147907		26
35	7725490		7835128		7942379		8047212		8149593		25
36	7727337		7836935		7944146	29. 4	8048938		8151278		24
37	7729183	30. 7	7838741		7945912		8050664		8152963		23
38	7731028		7840547		7947678		8052389	28. 7	8154647		22
39	7732872		7842352		7949443		8054114		8156330	28. 0	21
40	7734716		7844157		7951208		8055838		8158013		20
41	7736559		7845961	30. 0	7952972		8057561		8159695		19
42	7738402		7847764		7954735		8059283		8161376		18
43	7740244		7849566		7956497		8061005		8163057		17
44	7742085		7851368		7958259		8062726		8164737		16
45	7743926		7853169		7960020	29. 3	8064446		8166416		15
46	7745766		7854970		7961780		8066166		8168094		14
47	7747606	30. 6	7856770		7963540		8067885	28. 6	8169772		13
48	7749445		7858569		7965299		8069603		8171449	27. 9	12
49	7751283		7860368		7967057		8071321		8173126		11
50	7753121		7862166		7968815		8073038		8174802		10
51	7754958		7863963	29. 9	7970572		8044754		8176477		9
52	7756794		7865759		7972328		8076470		8178151		8
53	7758630		7867555		7974084		8078185		8179825		7
54	7760465		7869350		7975839	29. 2	8079899		8181498		6
55	7762299		7871145		7977593		8081613		8183170		5
56	7764132	30. 5	7872939		7979347		8083326	28. 5	8184841	27. 8	4
57	7765965		7874732		7981100		8085038		8186512		3
58	7767797		7876525		7982852		8086749		8188182		2
59	7769629		7878317		7984604		8088460		8189851		1
60	7771460	30. 5	7880108	29. 8	7986355	29. 2	8090170	28. 5	8191520	27. 8	0
	39		38		37		36		35		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

	55		56		57		58		59		
0	8191520	27. 8	8290376	27. 1	8386706	26. 4	8480481	25. 7	8571673	25. 0	60
1	8193188		8292002		8388290		8482022		8573171		59
2	8194855		8293628		8389873		8483562		8574668	24. 9	58
3	8196522		8295253		8391456		8485102	25. 6	8576164		57
4	8198188		8296877		8393038		8486641		8577660		56
5	8199854	27. 7	8298501	27. 0	8394619	26. 3	8488180		8579155		55
6	8201519		8300124		8396199		8489718		8580649		54
7	8203183		8301746		8397778		8491255		8582142		53
8	8204846		8303367		8399357		8492791		8583635		52
9	8206508		8304987		8400935		8494326		8585127		51
10	8208170		8306607		8402513		8495860		8586619	24. 8	50
11	8209831		8308226		8404090		8497394	25. 5	8588110		49
12	8211491		8309844		8405666		8498927		8589600		48
13	821[illegible]151	27. 6	8311462	26. 9	8407241	26. 2	8500459		8591089		47
14	8214810		8313079		8408816		8501991		8592577		46
15	8216469		8314696		8410390		8503522		8594064		45
16	8218127		8316312		8411963		8505052		8595551		44
17	8219784		8317927		8413536		8506582		8597037		43
18	8221440		8319541		841510[illegible]		8508111		8598523	24. 7	42
19	8223096		8321155		8416679		8509639		8600008		41
20	8224751		8322768		8418250		8511167	25. 4	8601492		40
21	8226405	27. 5	8324380	26. 8	8419820		8512694		8602975		39
22	8228058		8325991		8421389	26. 1	8514220		8604457		38
23	8229711		8327602		8422957		8515745		8605939		37
24	8231363		8329212		8424525		8517270		8607420		36
25	8233015		8330822		8426092		8518794		8608901		35
26	8234666		8332431		8427658		8520317		8610381	24. 6	34
27	8236316		8334039		8429223		8521839		8611860		33
28	8237965		8335646		8430788		8523361	25. 3	8613338		32
29	8239614		8337252		8432352		8524882		8614815		31
30	8241262	27. 4	8338858	26. 7	8433915	26. 0	8526402		8616292	24. 6	30
31	8242909		8340463		8435477		8527921		8617768		29
32	8244556		8342067		8437039		8529440		8619243		28
33	8246202		8343671		8438600		8530958		8620718		27
34	8247847		8345244		8440161		8532476		8622192	24. 5	26
35	8249492		8346877		8441721		8533993		8623665		25
36	8251136		8348479		8443280		8535509	25. 2	8625137		24
37	8252779		8350080		8444838		8537024		8626608		23
38	8254421	27. 3	8351680	26. 6	8446396	25. 9	8538538		8628079		22
39	8256062		8353279		8447953		8540052		8629549		21
40	8257703		8354878		8449509		8541565		8631019		20
41	8259343		8356476		8451064		8543077		8632488		19
42	8260982		8358073		8452618		8544588		8633956	24. 4	18
43	8262621		8359670		8454172		8546099		8635423		17
44	8264259		8361266		8455725		8547609		8636889		16
45	8265897		8362862		8457278		8549119	25. 1	8638355		15
46	8267534		8364457		8458830	25. 8	8550628		8639820		14
47	8269170		8366051	26. 5	8460381		8552136		8641284		13
48	8270806	27. 2	8367644		8461932		8553643		8642748		12
49	8272441		8369236		8463482		8555149		8644211		11
50	8274075		8370828		8465031		8556655		8645673	24. 3	10
51	8275708		8372419		8466579		8558160		8647134		9
52	8277340		8374009		8468126		8559664		8648595		8
53	8278972		8375599		8469673		8561168	25. 0	8650055		7
54	8280603		8377188		8471219		8562671		8651514		6
55	8282234		8378776	26. 4	8472765	25. 7	8564173		8652673		5
56	8283864	27. 1	8380363		8474310		8565675		8654431		4
57	8285493		8381950		8475854		8567176		8655888		3
58	8287121		8383536		8477397		8568676		8657344	24. 2	2
59	8288749		8385121		8478939		8570175		8658799		1
60	8290376	27. 1	8386706	26. 4	8480481	25. 7	8571673	25. 0	8660254		0
	34		33		32		31		30		

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdẽ Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

	60		61		62		63		64		
0	8660254	24. 2	8746197	23. 5	8829476		8910065	22. 0	8987940		60
1	8661708		8747607		8830841	22. 7	8911385		8989215	21. 2	59
2	8663162		8749016		8832205		8912704		8990489		58
3	8664615		8750425		8833569		8914023		8991762		57
4	8666067		8751833	23. 4	8834932		8915341		8993035		56
5	8667518		8753240		8836295		8916659	21. 9	8994307		55
6	8668968	24. 1	8754646		8837657		8917976		8995578		54
7	8670417		8756051		8839018		8919292		8996848		53
8	8671866		8757456		8840378	22. 6	8920607		8998117	21. 1	52
9	8673314		8758860		8841737		8921921		8999386		51
10	8674762		8760263		8843095		8923234		9000654		50
11	8676209		8761665		8844452		8924546		9001921		49
12	8677655		8763067	23. 3	8845809		8925858		9003187		48
13	8679100		8764468		8847165		8927169	21. 8	9004453		47
14	8680544		8765868		8848521		8928479		9005718		46
15	8681988	24. 0	8767268		8849876		8929789		9006982		45
16	8683431		8768667		8851230	22. 5	8931098		9008245	21. 0	44
17	8684874		8770065		8852583		8932406		9009508		43
18	8686316		8771462		8853936		8933714		9010770		42
19	8687757		8772859		8855288		8935021		9012031		41
20	8689197		8774255	23. 2	8856639		8936327		9013292		40
21	8690636		8775650		8857989		8937632	21. 7	9014552		39
22	8692074		8777044		8859338		8938936		9015811		38
23	8693512	23. 9	8778437		8860687		8940240		9017069		37
24	8694949		8779830		8862035		8941543		9018326	20. 9	36
25	8696386		8781222		8863383		8942845		9019582		35
26	8697822		8782613		8864730	22. 4	8944146		9020833		34
27	8699257		8784003		8866076		8945446		9022093		33
28	8700691		8785393		8867421		8946746		9023347		32
29	8702124		8786782	23. 1	8868765		8948045	21. 6	9024600		31
30	8703557		8788171		8870108		8949344		9025853		30
31	8704989	23. 8	8789559		8871451	22. 3	8950642		9027105	20. 8	29
32	8706420		8790946		8872793		8951939		9028356		28
33	8707851		8792332		8874134		8953235		9029606		27
34	8709281		8793717		8875475		8954530		9030856		26
35	8710710		8795102		8876815		8955824	21. 5	9032105		25
36	8712138		8796486	23. 0	8878154		8957117		9033353		24
37	8713565		8797869		8879492		8958410		9034600		23
38	8714992		8799251		8880830		8959702		9035847		22
39	8716418		8800633		8882167		8960994		9037093	20. 7	21
40	8717844	23. 7	8802014		8883503	22. 2	8962285		9038338		20
41	8719269		8803394		8884838		8963575		9039582		19
42	8720693		8804773		8886172		8964804		9040825		18
43	8722116		8806152		8887506		8966152		9042068		17
44	8723538		8807530	22. 9	8888839		8967440	21. 4	9043310		16
45	8724960		8808907		8890171		8968727		9044551		15
46	8726381		8810283		8891502		8970013		9045791		14
47	8727801		8811659		8892833		8971299		9047031		13
48	8729221	23. 6	8813034		8894163	22. 1	8972584		9048270	20. 6	12
49	8730640		8814408		8895492		8973868		9049508		11
50	8732058		8815782		8896821		8975151		9050746		10
51	8733475		8817155		8898149		8976433		9051983		9
52	8734891		8818527	22. 8	8899476		8977715	21. 3	9053219		8
53	8736307		8819898		8900802		8978996		9054454		7
54	8737722		8821268		8902127		8980276		9055688		6
55	8739137		8822638		8903452		8981555		9056922	20. 5	5
56	8740551	23. 5	8824007		8904776	22. 0	8982833		9058155		4
57	8741964		8825375		8906099		8984111		9059387		3
58	8743376		8826743		8907422		8985388		9060618		2
59	8744787		8828110		8908744		8986664		9061848		1
60	8746197	23. 5	8829476	22. 8	8910065	22. 0	8987940	21. 3	9063078	20. 5	0
	29		28		27		26		25		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

	65		66		67		68		69		
0	9063078	20. 5	9135455	19. 7	9205049	18. 9	9271836		9335804	17. 4	60
1	9064307		9136638		9206185		9272928	18. 1	9336846		59
2	9065535		9137820		9107321		9274017		9337887		58
3	9066763	20. 4	9139001		9208456		9275105		9338928	17. 3	57
4	9067990		9140181		9209590		9276192		9339968		56
5	9069216		9141361		9210723		9277278		9341007		55
6	9070441		9142540	19. 6	9211855		9278363		9342045		54
7	9071665		9143718		9212986	18. 8	9279448		9343082		53
8	9072889		9144895		9214117		9280532		9344119		52
9	9074112		9146072		9215247		9281615	18. 0	9345155		51
10	9075334		9147248		9216376		9282697		9346190	17. 2	50
11	9076555	20. 3	9148423		9217504		9283778		9347224		49
12	9077775		9149597	19. 5	9218631		9284859		6348257		48
13	9078995		9150770		9219758		9285939		9349289		47
14	9080214		9151943		9220884		9287018		9350321		46
15	9081432		9153115		9222010		9288096		9351352		45
16	9082649		9154286		9223135	18. 7	9289173	17. 9	9352382		44
17	9083866		9155457		9224259		9290250		9353411		43
18	9085082		9156627		9225382		9291326		9354440	17. 1	42
19	9086297	20. 2	9157796		9226504		9292401		9355468		41
20	9087512		9158964	19. 4	9227625		9293476		9356495		40
21	9088726		9160131		9228746		9294550		9357521		39
22	9089939		9161297		9229866		9295623		9358546		38
23	9091151		9162463		9230985	18. 6	9296695		9359571		37
24	9092362		9163628		9232103		9297766	17. 8	9360595		36
25	9093572	20. 1	9164792		9233220		9298836		9361618	17. 0	35
26	9094781		9165955		9234337		9299905		9362640		34
27	9095990		9167117		9235453		9300974		9363662		33
28	9097198		9168279	19. 3	9236568		9302042		9364683		32
29	9098406		9169440		9237682	18. 5	9303109		9365703		31
30	9099613		9170601		9238795		9304176		9366722		30
31	9100819		9171761		9239908		9305242	17. 7	9367740		29
32	9102024		9172920		9241020		9306307		9368758		28
33	9103228		9174078		9242131		9307371		9369775	16. 9	27
34	9104432		9175235		9243242		9308434		9370791		26
35	9105635	20. 0	9176391		9244352		9309497		9371806		25
36	9106837		9177547	19. 2	9245461		9310559		9372820		24
37	9108038		9178702		9246569		9311620		9373834		23
38	9109238		9179856		9247670	18. 4	9312680		9374847		22
39	9110438		9181009		9248782		9313739	17. 6	9375859		21
40	9111637		9182161		9249888		9314798		9376870	16. 8	20
41	9112835	19. 9	9183313		9250993		9315856		9377880		19
42	9114032		9184464		9252097		9316913		9378889		18
43	9115229		9185614		9253200		9317969		9379898		17
44	9116425		9186763	19. 1	9254303		9319024		9380906		16
45	9117620		9187912		9255405	18. 3	9320079		9381913		15
46	9118814		9189060		9256506		9321133	17. 5	9382919		14
47	9120007		9190207		9257606		9322186		9383925		13
48	9121200		9191353		9258706		9323238		9384930	16: 7	12
49	9122392		9192499		9259805		9324290		9385934		11
50	9123584		9193644		9260903		9325341		9386937		10
51	9124775	19. 8	9194788		9262000		9326391		9387939		9
52	9125965		9195931	19. 0	9263096		9327440		9388941		8
53	9127154		9197073		9264192	18. 2	9328488	17. 4	9389942		7
54	9128342		9198215		9265287		9329535		9390942		6
55	9129526		9199356		9266381		9330582		9391941	16. 6	5
56	9130716		9200496		9267474		9331628		9392940		4
57	9131902		9201635		9268566		9332673		9393938		3
58	9133087	19. 7	9202774		9269658		9333717		9394935		2
59	9134271		9203912	18. 9	9270749		9334761		9395931		1
60	9135455	19. 7	9205049		9271839	18. 2	9335804	17. 4	9396926	16. 6	0
	24		23		22		21		20		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

	70		71		72		73		74		
0	9396926	16. 6	9455186	15. 8	9510565	15. 0	9563048	14. 2	9612617		60
1	9397921		9456133		9511464		9563898		9613418	13. 3	59
2	9398915		9457079		9512362		9564747	14. 1	9614219		58
3	9399908	16. 5	9458024	15. 7	9513259	14. 9	9565596		9615019		57
4	9400900		9458968		9514155		9566444		9615818		56
5	9401891		9459911		9515050		9567291		9616616		55
6	9402882		9460854		9515944		9568137		9617413		54
7	9403872		9461796		9516838		9568982		9618209		53
8	9404861		9462737		9517731		9569826		9619005	13. 2	52
9	9405849	16. 4	9463677		9518623		9570670		9619800		51
10	9406836		9464616	15. 6	9519514	14. 8	9571513	14. 0	9620594		50
11	9407822		9465555		9520404		9572355		9621387		49
12	9408808		9466493		9521294		9573196		9622179		48
13	9409793		9467430		9522183		9574036		9622971		47
14	9410777		9468366		9523071		9574875		9623762		46
15	9411760		9469301	—	9523958		9575714		9624552	13. 1	45
16	9412742		9470236		9524844		9576552	13. 9	9625341		44
17	9413724	16. 3	9471170	15. 5	9525730	14 7	9577389		9626129		43
18	9414705		9472103		9526615		9578225		9626917		42
19	9415685		9473035		9527499		9579061		9627704		41
20	9416665		9473967		9528382		9579896		9628490		40
21	9417644		9474898		9529264		9580730		9629275		39
22	9418622		9475828		9530146		9581563		9630059		38
23	9419599		9476757		9531027		9582395	13. 8	9630843	13. 0	37
24	9420575	16. 2	9477685		9531907		9583226		9631626		36
25	9421550		9478612	15. 4	9532786	14. 6	9584057		9632408		35
26	9422525		9479539		9533664		9584887		9633189		34
27	9423499		9480465		9534541		9585716		9633969		33
28	9424472		9481390		9535418		9586544		9634748		32
29	9425444		9482314		9536294		9587371		9635527		31
30	9426415		9483237		9537169		9588197		9636305		30
31	9427386		9484160		9538043		9589023	13. 7	9637082	12. 9	29
32	9428356		9485082		9538917	14. 5	9589848		9637858		28
33	9429325	16. 1	9486003	15. 3	9539790		9590672		9638633		27
34	9430293		9486923		9540662		9591495		9639408		26
35	9431260		9487842		9541533		9592318		9640182		25
36	9432227		9488761		9542403		9593140		9640955		24
37	9433193		9489679		9543272		9593961		9641727	12. 8	23
38	9434158		9490596		9544141		9594781	13. 6	9642498		22
39	9435122		9491512	15. 2	9545009		9595600		9643268		21
40	9436085	16. 0	9492427		9545876	14. 4	9596419		9644038		20
41	9437048		9493341		9546742		9597237		9644807		19
42	9438010		9494255		9547607		9598054		9645575		18
43	9438971		9495168		9548472		9598870		9646342		17
44	9439931		9496080		9549336		9599685		9647108	12. 7	16
45	9440890		9496991		9550199		9600499		9647873		15
46	9441849		9497902		9551061	14. 3	9601313	13. 5	9648638		14
47	9442807	15. 9	9498812		9551922		9602126		9649402		13
48	9443764		9499721	15. 1	9552783		9602938		9650165		12
49	9444720		9500629		9553643		9603749		9650927		11
50	9445676		9501536		9554502		9604559		9651689		10
51	9446631		9502443		9555360		9605368		9652450		9
52	9447585		9503349		9556217		9606177		9653210	12. 6	8
53	9448538		9504254		9557074		9606985	13. 4	9653969		7
54	9449490	15. 8	9505158		9557930		9608792		9654727		6
55	9450441		9506061	15. 0	9558785	14. 2	9608598		9655484		5
56	9451392		9506963		9559639		9609403		9656240		4
57	9452342		9507865		9560492		9610208		9656996		3
58	9453291		9508766		9561345		9611012		9657751		2
59	9454239		9509666		9562197		9611815		9658505	12. 6	1
60	9455186	15. 8	9510565	15. 0	9563048	14. 2	9612617	13. 4	9659258		0
	19		18		17		16		15		

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	75		76		77		78		79		
0	9659258	12. 5	9702957	11. 7	9743700	10. 9	9781476	10. 1	9816272		60
1	9660011		9703660		9744355		9782080		9816827	9.2	59
2	9660163		9704363		9745008		9782684	10. 0	9817381		58
3	9661514		9705065		9745660		9783287		9817934		57
4	9662264		9705766		9746312	10. 8	9783889		9818486		56
5	9663013		9706466	11. 6	9746963		9784490		9819037		55
6	9663761	12. 4	9707165		9747613		9785090		9819587		54
7	9664508		9707863		9748262		9785689		9820137		53
8	9665255		9708561		9748910		9786288		9820686	9.1	52
9	9666001		9709258		9749557		9786886	9.9	9821234		51
10	9666746		9709954		9750203		9787483		9821781		50
11	9667490		9710649		9750849		9788079		9822327		49
12	9668233		9711343	11. 5	9751494	10. 7	9788674		9822872		48
13	9668976		9712036		9752138		9789268		9823417		47
14	9669718	12. 3	9712729		9752781		9789862		9823961	9.0	46
15	9670459		9713421		9753423		9790455		9824504		45
16	9671199		9714112		9754065		9791047		9825046		44
17	9671938		9714802		9754706		9791638	9.8	9825587		43
18	9672677		9715491		9755346		9792228		9826128		42
19	9673415		9716180		9755985	10. 6	9792818		9826668		41
20	9674152		9716868	11. 4	9756623		9793407		9827207		40
21	9674888	12. 2	9717555		9757260		9793995		9827745		39
22	9675623		9718241		9757897		9794582		9828282	8.9	38
23	9676357		9718926		9758533		9795168		9828818		37
24	9677091		9719610		9759168		9795753	9.7	9829354		36
25	9677824		9720294		9759802		9796337		9829889		35
26	9678556		9720977		9760435	10. 5	9796921		9830423		34
27	9679287		9721659	11. 3	9761067		9797504		9830956		33
28	9680017		9722340		9761699		9798086		9831488	8.8	32
29	9680747		9723020		9762330		9798667		9832019		31
30	9681476	12. 1	9723699		9762960		9799247		9832549		30
31	9682804		9724378		9763589		9799827		9833079		29
32	9682931		9725056		9794217		9800406	9.6	9833608		28
33	9683657		9725733		9764845	10. 4	9800984		9834136		27
34	9684383		9726409		9765472		9801561		9834663		26
35	9685108		9727085	11. 2	9766098		9802137		9835189	8. 7	25
36	9685832	12. 0	9727760		9766723		9802712		9835714		24
37	9686555		9728434		9767347		9803287		9836239		23
38	9687277		9729107		9767970		9803861		9836763		22
39	9687998		9729779		9768593		9804434	9.5	9837286		21
40	9688719		9730450		9769215	10. 3	9805006		9837808		20
41	9689439		9731120	11. 1	9769836		9805577		9838329		19
42	9690158		9731789		9770456		9806147		9838850		18
43	9690876	11. 9	9732458		9771075		9806716		9839370	8.6	17
44	9691593		9733126		9771693		9807285		9839889		16
45	9692309		9733793		9772311		9807853	9.4	9840407		15
46	9693025		9734459		9772928		9808420		9840924		14
47	9693740		9735124		9773544	10. 2	9808986		9841440		13
48	9694454		9735789		9774159		9809551		9841956		12
49	9695167		9746453	11. 0	9774773		9810116		9842471		11
50	9695879	11. 8	9737116		9775387		9810680		9842985	8.5	10
51	9696590		9737778		9776000		9811243		9843498		9
52	9697301		9738439		9776612		9811805		9844010		8
53	9698011		9739099		9777223		9812366	9.3	9844521		7
54	9698720		9739759		9777833		9812926		9845032		6
55	9699428		9740418		9778442	10. 1	9813486		9845542		5
56	9700135		9741076	10. 9	9779050		9814045		9846051		4
57	9700842		9741733		9779658		9814603		9846559		3
58	9701548	11. 7	9742389		9780265		9815160		9847066	8.4	2
59	9702253		9743045		9780871		9815716		9847572		1
60	9702957	11. 7	9743700	10. 9	9781476	10. 1	9816272	9.3	9848078	8.4	0
	14		13		12		11		10		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro ſinubus rectis complementorũ arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	80		81		82		83		84		
0	9848078	8.4	9876883	7.6	9902681	6.7	9925461	5.9	9945219	5.1	60
1	9848583		9877338		9903085		9925816		9945523		59
2	9849087		9877792	7.5	9903489		9926169		9945826	5.0	58
3	9849590		9878245		9903892		9926521		9946128		57
4	9850092	8.3	9878697		9904294		9926873	5.8	9946429		56
5	9850593		9879148		9904695		9927224		9946729		55
6	9851093		9879598		9905095	6.6	9927574		9947028		54
7	9851593		9880048		9905494		9927923		9947327		53
8	9852092		9880497		9905893		9928271		9947625		52
9	9852590		9880945	7.4	9006291		9928618		9947922	4.9	51
10	9853087		9881392		9906688		9928965		9948218		50
11	9853583		9881838		9907084		9929311		9948513		49
12	9854079	8.2	9882283		9007479		9929656	5.7	9948807		48
13	9854574		9882728		9907873	6.5	9930000		9949100		47
14	9855068		9883172		9908266		9930343		9949393		46
15	9855561		9883615		9908659		9930685		9949685		45
16	9856053		9884057	7.3	9909051		9931026		9949976	4.8	44
17	9856544		9884498		9909442		9931367		9950266		43
18	9857035		9884938		9909832		9931707	5.6	9950555		42
19	9857525		9885378		9901221		9932046		9950844		41
20	9858014	8.1	9885817		9910610		9932384		9951132		40
21	9858502		9886255		9910998	6.4	9932721		9951419		39
22	9858989		9886692		9911385		9933057		9951705	4.7	38
23	9859475		9887128		9911771		9933393		9951990		37
24	9859961		9887564	7.2	9912156		9933728		9952274		36
25	9860446		9887999		9911540		9934062	5.5	9952557		35
26	9860930	8.0	9888433		9912923		9934395		9952840		34
27	9861413		9888866		9913306		9934727		9953122		33
28	9861895		9889298		9913688		9935058		9953403		32
29	9862376		9889729		9914069	6.3	9935389		9953683	4.6	31
30	9862856		9890159	7.1	9914449		9935719		9953962		30
31	9863336		9890588		9914828		9936048		9954240		29
32	9863815		9891017		9915206		9936376	5.4	9954518		28
33	9864293	7.9	9891445		9915584		9936703		9954795		27
34	9864770		9891872		9915961		9937029		9655071		26
35	9865246		9892298		9916337	6.2	9937355		9955346		25
36	9865722		9892723		9916712		9937680		9955620		24
37	9866197		9893147		9917086		9938004		9955893	4.5	23
38	9866671		9893571	7.0	9917459		9938327		9956165		22
39	9867144		9893994		9917832		9938649	5.3	9956437		21
40	9867616	7.8	9894416		9918204		9938970		9956708		20
41	9868087		9894837		9918575		9939290		9956978		19
42	9868557		9895257		9918945	6.1	9939609		9957247		18
43	9869027		9895677		9919314		9989928		9957515		17
44	9869496		9896096		9919682		9940246		9957782	4.4	16
45	9869964		9896514		9920049		9940563		9958049		15
46	9870431		9896931	6.9	9920416		9940879	5.2	9958315		14
47	9870897	7.7	9897347		9920782		9941194		9958580		13
48	9871362		9897762		9921147		9941509		9958844		12
49	9871827		9898177		9921511		9941823		9959307		11
50	9872291		9898591		9921874	6.0	9942136		9959370		10
51	9872754		9899004		9922236		9942448		9959632	4.3	9
52	9873216		9899416	6.8	9922598		9942759		9959893		8
53	9873677		9899827		9922959		9943069		9960153		7
54	9874137		9900237		9923319		9943379	5.1	9960412		6
55	9874597		9900646		9923678		9943688		9960670		5
56	9875056	7.6	9901055		9924036	5.9	9943996		9960927		4
57	9875514		9901463		9924393		9944303		9961183	4.2	3
58	9875971		9901870		9924750		9944609		9961438		2
59	9876427		9902276	6.7	9925106		9944914		9961693		1
60	9876883	7.6	9902681		9925461	5.9	9945219	5.1	9961947	4.2	0
	9		8		7		6		5		

Gradus Quadrãtis pro ſinubus rectis complementorũ arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis arcuum eiuſdem Quadrantis.

	85		86		87		88		89		
0	9961947	4,2	9975640	3.4	9986295	2.5	9993908	1.7	9998477	0.8	60
1	9962200		9975843		9986447		9994009		9998527		59
2	9962452		9976045	3.3	9986598		9994109	1.6	9998576		58
3	9962703		9976246		9986748		9994208		9998625		57
4	9962954		9976446		9986897		9994307		9998673		56
5	9963204		9976645		9987045		9994405		9998720		55
6	9963453	4.1	9976843		9987193	2.4	9994502		9998766	0.7	54
7	9963701		9977040		9987340		9994598		9998811		53
8	9963948		9977237		9987486		9994693		9998855		52
9	9964194		9977433		9987631		9994787		9998899		51
10	9964440		9977628	3.2	9987775		9994881	1.5	9998942		50
11	9964685		9977822		9987918		9994974		9998984		49
12	9964929	4.0	9978015		9988061		9995066		9999025		48
13	9965172		9978207		9988203	2.3	9995157		9999065	0.6	47
14	9965414		9978398		9988344		9995247		9999104		46
15	9965655		9978589		9988484		9995336		9999143		45
16	9965895		9978779		9988623		9995424		9999181		44
17	9966135		9978968	3.1	9988761		9995512	1.4	9999218		43
18	9966374		9979156		9988899		9995599		9999254		42
19	9966612	3.9	9979343		9989036		9995685		9999289		41
20	9966849		9979530		9989172	2.2	9995770		9999323	0.5	40
21	9967085		9979716		9989307		9995854		9999356		39
22	9967320		9979901		9989441		9995937		9999389		38
23	9967555		9980085		9989574		9996019		9999421		37
24	9967789		9980268	3.0	9989706		9996101	1.3	9999452		36
25	9968022		9980450		9989837		9996182		9999482		35
26	9968254	3.8	9980631		9989968		9996262		9999511		34
27	9968485		9980811		9990098	2.1	9996341		9999539		33
28	9968715		9980991		9990227		9996419		9999566	0.4	32
29	9968944		9981170		9990355		9996496		9999593		31
30	9969173	3.8	9981348	3.0	9990482	2.1	9996573	1.3	9999619	0.4	30
31	9969401		9981525		9990608		9996649		9999644		29
32	9969628		9981701	2.9	9990734		9996724	1.2	9999668		28
33	9969854		9981877		9990859		9996798		9999691		27
34	9970079	3.7	9982052		9990983		9996871		9999713		26
35	9970304		9982226		9991106	1.0	9996943		9999735	0.3	25
36	9970528		9982399		9991228		9997014		9999756		24
37	9970751		9982571		9991349		9997085		9999776		23
38	9970973		9982742	2.8	9991470		9997155	1.1	9999795		22
39	9971194		9982912		9991590		9997224		9999813		21
40	9971414		9983082		9991709		9997292		9999830		20
41	9971633	3.6	9983251		9991827		9997359		9999846		19
42	9971851		9983419		9991944	1.9	9997425		9999862	0.2	18
43	9972069		9983586		9992060		9997491		9999877		17
44	9972286		9983752		9992175		9997556		9999891		16
45	9972502		9983917	2.7	9992290		9997620		9999904		15
46	9972717		9984081		9992404		9997683	1.0	9999916		14
47	9972931		9984245		9992517		9997745		9999927		13
48	9973145		9984408		9992629		9997806		9999938		12
49	9973358	3.5	9984570		9992740	1.8	9997867		9999948	0.1	11
50	9973570		9984731		9992850		9997927		9999957		10
51	9973781		9984891		9992960		9997986		9999965		9
52	9973991		9985050	2.6	9993069		9998044	0.9	9999972		8
53	9974200		9985209		9993177		9998101		9999978		7
54	9974408		9985367		9993284		9998157		9999984		6
55	9974615	3.4	9985524		9993390	1.7	9998212		9999989		5
56	9974822		9985680		9993495		9998267		9999993	0.0	4
57	9975028		9985835		9993599		9998321		9999996		3
58	9975233		9985989		9993703		9998374		9999998		2
59	9975437		9986143	2.5	9993806		9998426		9999999		1
60	9975640	3 4	9986295		9993908	1.7	9998477	0.8	10000000	0.0	0
	4		3		2		1		0		

Minuta Graduum Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſinubus rectis complementorum arcuum eiuſdē Quadrantis.

EXPLICATIO, ATQVE VSVS TABVLÆ præcedentis Sinuum rectorum.

Expoſitio partium tabulæ Sinuum. Complementum cuiuſuis arcus quo pacto ex hac tabula eliciatur.

IN vertice præcedentis tabulæ ordine deſcripti ſunt 90. gradus Quadrantis, & ad ſiniſtram deorſum verſus, 60. Minuta. In infimo deinde latere iidem 90. gradus Quadrantis repoſiti ſunt ordine retrogrado, & ad dexteram ſurſum verſus, 60. Minuta. Quod ideo factum eſt à nobis, vt illico cuiuslibet arcus complementum cognoſcatur. Nam quilibet gradus in vertice tabulæ poſitus cum quouis Minuto ad ſiniſtram collocato, habet pro complemento gradum in infimo latere gradui accepto in vertice reſpondentem cum Minuto, quod ad dextram Minuto ad ſiniſtram accepto reſpondet. Vt quoniam gradui 46. in vertice, & Minuto 0. ad ſiniſtram poſito, reſpondet in infimo latere gradus 43. & Minutum 60. ad dexteram collocatum, erit arcus grad. 43. Min. 60. hoc eſt, arcus, grad. 44. Min. 0. complementum arcus grad. 46. Min. 0. Sic quoque arcus grad. 43. Min. 13. complementum habebit arcum grad. 46. Min. 47 Eadem ratione quilibet gradus in infimo latere poſitus cum quouis Minuto ad dexteram collocato, habet pro complemento gradũ in vertice gradui accepto in infimo latere reſpondentem cum Minuto, quod ad ſiniſtram Minuto ad dextram accepto reſpondet. Poſtremo ſub gradibus in vertice tabulæ deſcriptis poſiti ſunt ſinus recti omniũ arcuum per ſingula Quadrantis Minuta progredientium, quatenus ſinus totus eſt 10000000. Quod ſi ex ſingulis ſinubus binæ priores figuræ ad dexteram abiiciantur, (addita tamen vnitate, ſi duæ figuræ abiectæ numerum 50. excedunt) reliqui erunt ſinus eorundem arcuum, quatenus ſinus totus eſt 100000. vt ſupra diximus. Vnde quicquid in vſu huius tabulæ præcipiemus de ſinubus reſpectu ſinus totius 10000000. intelligendum quoque erit de ſinubus reſpectu ſinus totius 100000. abiectis nimirum duabus primis figuris ad dexteram, vt diximus.

Vſus tabulæ ſinuum duplex. Sinus rectus cuiuſuis arcus quadrãte minoris quo pacto in tabula reperiatur.

HVIVS tabulæ vſus duplex eſt. Nam in ea vel cuiuslibet arcus inquiritur ſinus, vel cuiuſuis ſinus cogniti arcus inueſtigatur. Quando ergo dati arcus Quadrãte minoris ſinum rectum quæris, ſume gradus illius in vertice tabulæ, Minuta vero ad ſiniſtram. In communi enim angulo, procedendo nimirum à Minutis dextram verſus, donec ad locum ſub gradibus acceptis peruenias, illico ſinum rectum inuenies. Ita ſinum rectum arcus grad. 25. ſub grad. 25. è regione Minuti 0. ad ſiniſtram collocati reperies 4226183. Sinum vero rectum arcus grad. 25. Min. 19. inuenies 4276209. Sinum deniq; rectum arcus grad. 25. Min. 50. offendes 4357549. Si vero Sinum rectum arcus Quadrante maioris, ſed ſemicirculo minoris deſideras, detrahe arcum datum ex ſemicirculo, & reſidui arcus ſinum rectum cape, vt prius. Hic enim ſinus erit etiam ſinus rectus arcus quadrante maioris: propterea quod duo arcus ſemicirculum conficientes eundem ſinum rectum habent, vt in definitionum expoſitione diximus. Vt ſi datus ſit arcus grad. 138. Min. 47. detrahe eum ex ſemicirculo, hoc eſt, ex grad. 180. Sinus namq; rectus 6589082. reſidui arcus grad. 41. Min. 13. eſt quoque ſinus rectus arcus grad. 138. Min 47. cum illo arcu grad. 41. Min. 13. ſemicirculum conficientis.

Sinus rectus cuiuſuis arcus quadrãte maioris, qua ratione inueniatur.

Sinus rectus cuiuſuis arcus habentis Secunda, præter Minuta quomodo eliciatur per partẽ ꝓportionalem.

QVOD ſi arcus datus præter gradus, ac minuta habeat etiam Secunda, inquirenda erit pars proportionalis, hoc modo. Accipe differentiam inter ſinũ rectum arcus proxime minoris, & ſinum rectũ arcus proxime maioris, & dic. Si 60. ſecunda (quibus ſinguli arcus proximi in hac tabula inter ſe differunt) requirunt totam eam differentiam addendam ſinui arcus proxime minoris, vt componatur ſinus arcus proxime maioris, quantam differentiam requirunt propoſita ſecunda addendam eidem ſinui arcus proxime minoris, vt fiat ſinus propoſiti arcus? Nam differentia inuenta erit pars proportionalis, quæ ſi addatur ſinui arcus proxime minoris, efficietur ſinus rectus arcus propoſiti. Vt ſi propoſitus ſit arcus grad. 20. Min. 43. Sec. 20. Accipe differentiam 2721. inter ſinum 3537469. arcus grad. 20. Min. 43. proxime minoris, & ſinum 3540190. arcus grad. 20. Min. 44. proxime maioris, & dic. Si 60. ſecunda requirunt differentiam 2721. addendam ſinui 3537469. arcus grad 20. Min. 43. vt efficiatur ſinus 3540190. arcus grad. 20. Min. 44. quantam differentiam poſtulant 20. ſecunda addendam eidem ſinui 3537469. arcus grad. 20. Min. 43. vt fiat ſinus arcus grad. 20. Min. 43. ſec. 20? Inuenies enim differentiam, ſiue partem proportionalem 907. quæ addita ſinui 3537469. efficiet 3538376. ſinum arcus grad. 20. Min. 43. ſec. 20. Communiter tamen ab Aſtronomis negliguntur in hoc negotio Secunda, ſi pauciora ſunt, quàm 30. Si vero plura, addunt pro illis vnum Minutum alijs Minutis. Nullus enim error, qui alicuius momenti ſit, inde oritur. Itaque pro dato arcu grad. 20. Min. 43. Sec. 20. accipiunt ſinum arcus grad. 20. Min. 43. neglectis illis 20. ſec. Pro arcu vero grad. 20. Min. 43. ſec. 48. ſumunt ſinum arcus grad. 20. Min. 44. computatis illis 48. ſec. pro vno Minuto.

Secunda communiter in tractatione ſinuũ negliguntur ab Aſtronomis.

Semicirculi & arcus ſemicirculo maioris, nõ eſt ſinus rectus inquiredus: immo nullus eſt eorum ſinus rectus.

SEMICIRCVLI porro, atq; arcus ſemicirculo maioris, non eſt quod ſinus rectus inueſtigetur, cum nunquam in ſupputationibus Aſtronomicis huiuſmodi arcuum ſinus adhibeantur, quod ijs perſpicuum eſt, qui in triangulis rectilineis, ac ſphæricis, in quibus tota Sinuum ſcientia verſatur, ſunt exercitati. Immo ſemicirculus nullum habet ſinum, vt ex vtraque defin. ſinus recti patet. quod etiam de arcu maiore dici poteſt, niſi quis in prima figura definitionũ rectam FK, ſinum rectum velit appellare arcus DBF, ſecundum poſteriorem defin. ſinus recti; & rectam FH, ſinum rectum arcus ACF, quod non videtur proprie dici, cum huiuſmodi lineis prior definitio ſinus recti nullo modo conuenire poſſit, vt ex eadem figura perſpicuum eſt.

Sinus complementi arcus quadrãte minoris quomodo in tabula reperiatur.

QVANDO autem dati arcus Quadrante minoris ſinum complementi quæris, cape gradus illius in inferiori parte tabulæ, Minuta vero ad dexteram. In communi enim angulo continuo ſinum complementi reperies, hoc eſt, ſinum rectum illius arcus, qui dati arcus complemẽtum eſt. Nam ſinus ille rectus debetur arcui, cuius gradus in vertice tabulæ, & minuta in ſiniſtro latere collocantur, qui quidem dati arcus complementum eſt, vt ſupra diximus. Ita ſinum complementi arcus grad. 30. ſupra grad. 30. infimi lateris tabulæ è regione Minuti 0 ad dexteram collocati inuenies 8660254. qui quidem ſinus rectus eſt arcus grad. 59. Min. 60. hoc eſt, arcus grad. 60. qui complementum eſt arcus grad. 30. Item ſinum complementi arcus grad. 30. Min. 49. reperies 8588110. qui quidem ſinus rectus eſt arcus grad. 59. Min. 11. qui complementum eſt arcus grad. 30. Min. 49. Si vero offeratur arcus Quadrante maior, ſed ſemicirculo minor, ita ſinum complementi ipſius reperies. Detrahe ex eo quadrantem, & reſidui arcus ſinum rectum cape. Cum enim reliquus hic arcus ſit complementum dati arcus, vt in definitionibus dictum eſt, erit eius ſinus rectus, ſinus complementi dati arcus. Vt ſi oblatus ſit arcus grad. 127. Min. 30. Detrahe ex eo quadrantem, hoc eſt, 90. gradus. Sinus namque rectus 6087614. reliqui arcus grad. 37. Min. 30. eſt ſinus complementi dati arcus grad. 127. Min. 30, cum ille arcus ſit huius complementum.

Sinus complementi cuiuſuis arcus quadrãte maioris, qua arte deprehendatur.

* QVOD ſi datus arcus præter gradus, ac Minuta habeat etiam Secunda; ſi quidem Quadrante minor ſit, inueſtigabis eius ſinum complementi per regulam proportionum, quemadmodum ſupra de ſinu recto diximus, niſi quod hic differentia inuenta, ſiue pars proportionalis ſubtrahenda eſt, à ſinu arcus proxime minoris. Si vero arcus datus ſit Quadrante maior, ſed ſemicirculo minor: detracto Quadrante, inquires reſidui arcus ſinum rectum per eandem regulam proportionum, eo modo, quem ſupra de ſinu recto tradidimus. Quamuis Secunda negligi poſſint, vt ſupra docuimus, in hoc ſinuum negotio. Exemplũ. Sit datus

arcus

* *Sinus complementi cuiuſuis arcus habentis Secunda, præter Minuta, quomodo eliciatur per partem proportionalem.*

arcus grad. 69. Min. 16. Sec. 40. Accipe differentiam 2721. inter ſinum 3540190. arcus grad. 69. Min. 16. proxime minoris in parte tabulæ inferiori deſcripti, & ſinum 3537469. arcus grad. 69. Min. 16. proxime minoris in parte tabulæ inferiori deſcripti, & ſinum 3537469. arcus grad. 69. min. 17. proxime maioris in eadem parte inferiori tabulæ poſiti; & dic. Si 60. Secunda requirunt differentiam 2721. ſubtrahendam à ſinu 3540190. arcus grad. 69. Min. 16. in inferiori parte tabulæ poſiti, vt relinquatur ſinus 3537469. arcus grad. 69. Min. 17. in eadem parte inferiori tabulæ deſcripti: quantã differentiam poſtulant 40. Secunda ſubtrahendam ab eodẽ ſinu 3540190. arcus grad. 69. Min. 16. poſiti in parte inferiori tabulæ vt relinquatur ſinus arcus grad. 69. Min. 16. Sec. 40. in eadem parte inferiori tabulæ contenti? Inuenies enim differentiam, ſiue partem proportionalem 1814. quæ ſubtracta ex ſinu 3540190. relinquet ſinum 3538376. arcus grad. 69. Min. 16. Sec. 40. in inferiori parte tabulæ collocati: qui quidem eſt ſinus rectus arcus grad. 20. Min. 40. Sec. 20. hoc eſt, complementi arcus dati grad. 69. Min. 16. Sec. 40. Sit rurſum datus arcus grad. 110. Min. 43. Sec. 20. Detrahe Quadrantem, id eſt, grad. 90. & reſidui arcus grad. 20. Min. 43. Sec. 20. quære ſinum rectum, vt ſupra tradidimus. Inuenies enim per partem proportionalem, ſinum 3538376. qui eſt ſinus complementi arcus propoſiti.

Alia ratio inueſtigandi ſinum complemẽti arcus quadrãte minoris.

HOC etiam modo ſinum complementi arcus propoſiti quadrante minoris reperies. Subtrahe propoſitum arcum ex quadrante, vt habeas eius complementum. Sinus enim rectus eius complementi inuentus, vt de ſinu recto diximus, eſt is, qui quæritur. Vt ſi quæratur ſinus complementi arcus grad. 69. Min. 16. Sec. 40. detrahe hunc arcum ex grad. 90. & reſidui arcus grad 20. Min. 43. ſec. 20. (qui complementum eſt dati arcus grad. 69. Min. 16. Sec. 40.) ſinum rectum, quære, quem inuenies eſſe 3538376. atque hic eſt ſinus complementi dati arcus grad. 69. Min. 16. Sec. 40.

Sinus complementi ſemicirculi, aut arcus maioris, quærendus non eſt.

HIC quoq; ſemicirculi, atq; arcus ſemicirculo maioris ſinus complementi quærendus nõ eſt, ob rationem ſupra dictam.

Sinus verſus cuiuſuis arcus ſiue quadrante minoris, ſiue maioris, quo pacto colligatur.

QVANDO denique propoſiti arcus ſinum verſum deſideras; ſi quidem Quadrante minor eſt, detrahe eius ſinum complementi ex ſinu toto: ſi vero Quadrante eſt maior, ſed ſemicirculo minor, adde eius ſinum complementi ſinui toti. Numerus enim reliquus, vel compoſitus, erit ſinus verſus dati arcus: propterea quod ſinus complementi cuiuſuis arcus æqualis eſt complemento ſinus verſi eiuſdem arcus, vt ſupra in definitionibus oſtendimus. Ex quo fit, vt ſinus complementi arcus cuiuſuis ablatus ex ſinu toto, vel ad eum adiectus relinquat, vel componat eiuſdem arcus ſinum verſum: Id quod perſpicuum eſt ex prima figura, quam in expoſitione definitionum poſuimus. Exemplum. Sit quærendus ſinus verſus arcus grad. 20. Min. 57. Huius ſinus complementi eſt 9338928. qui detractus ex ſinu toto 10000000. relinquet ſinum verſum 661072. dati arcus grad. 20. Min. 57. Rurſus ſit inueſtigandus ſinus verſus arcus grad. 138. Min. 31. Huius ſinus complementi eſt 7491484. qui additus ſinui toti 10000000. efficiet ſinum verſum 17491484. arcus propoſiti grad. 138. Min. 31. Poſtremo ſit inueniendus ſinus verſus arcus grad. 69. Min. 16. Sec. 40. Huius complementi ſinus eſt 3538376. inuentus per partem proportionalem; qui ſubtractus ex ſinu toto 10000000. relinquet ſinum verſum 6461624. dati arcus grad. 69. Min. 16. Sec. 40. Sic quoque ſinus verſus arcus grad. 159. Min. 16. Sec. 40. reperietur 19353068. per partem proportionalem.

Sinus tam rectus, q̃ verſus Quadrantis eſt ſinus totus, ſinus vero complemẽti nihil eſt.

CÆTERVM Quadrantis tam ſinus rectus, quàm verſus eſt ſinus totus; ſinus vero complementi nihil eſt, vt manifeſtum eſt ex prima figura in definitionibus poſita.

Arcus quadrãte minor quo pacto ex ſinu recto cognito eliciatur.

Arcus quadrãte minor magis præciſus, quo pacto per partẽ proportionalem ex dato ſinu eliciatur.

Arcus quadrãte maior qua arte ex ſinu recto eruatur.

IAM vero ex cognito ſinu recto ita arcum inuenies. Quære ſinum rectum propoſitum inter ſinus tabulæ; vel ſi eum non inueneris, ſume proxime maiorem, vel minorem, qui nimirum paucioribus vnitatibus à propoſito ſinu diſtat. Nam in vertice tabulæ reperies gradus, & ad ſiniſtram è regione ſinus accepti, Minuta illus arcus, qui propoſito ſinui reſpondet. Vt ſi cognitus ſit ſinus 7510767. Inuenio ſinum 7510722. proxime minorem, qui paucioribus vnitatibus à ſinu cognito diſtat, quàm ſinus 7512642. proxime maior: Cui ſinui proxime minori reſpondent in vertice tabulæ grad. 48. & ad ſiniſtram Minuta 41. Arcum ergo grad. 48. & Min. 41. dico deberi ſinui propoſito. Nam vnitates illæ, quibus ſinus propoſitus à ſinu dicti arcus differt, non inducunt errorem notabilem. Si tamen arcum cupis præciſiorem, inueſtiganda erit pars proportionalis, hac arte. Cape differentiam inter ſinum proxime minorem, & ſinum proxime maiorem: Item differentiam inter ſinum propoſitum, & illum in tabula repertum, à quo minus differt; & dic. Si differentia inter duos ſinus in tabula repertos dat 60. Secunda addenda arcui ſinus proxime minoris, vel auferenda ab arcu ſinus proxime maioris, (prout videlicet ſumpta fuerit differentia inter ſinum propoſitum, & ſinum proxime minorem, vel proxime maiorem) vt habeatur arcus ſinus proxime maioris, vel proxime minoris; quot Secunda poſtulat differentia inter ſinum propoſitum & ſinum proxime minorem, vel proxime maiorem, addenda arcui ſinus proxime minoris, vel auferenda ab arcu ſinus proxime maioris, vt habeatur arcus propoſiti ſinus? Nam hæc ſecunda inuẽta arcui addita ſinus proxime minoris, vel ablata ab arcu ſinus proxime maioris, dabunt arcũ ſinus propoſiti. Vt in dato exemplo, ſi dicas. Differentia 1920. inter ſinum 7510772. proxime minorem, & ſinum 17512642. proxime maiorem, dat 60. Secunda addenda arcui grad. 48. Min. 41. qui ſinui proxime minori reſpondet, (quoniam propoſitus ſinus minus differt à ſinu proxime minori quàm à ſinu proxime maiori) vt habeatur arcus grad. 48. Min. 41. Sec. 60. hoc eſt, grad. 48. Min. 42. reſpondens ſinui proxime maiori. Quot ergo Secunda poſtulat differentia 45. inter ſinum propoſitum, & ſinum proxime minorem, addenda eidem arcui ſinus proxime minoris, vt fiat arcus dati ſinus? Inuenies enim Secundum 1. & paulo amplius addendum arcus grad. 48. Min. 41. ita vt ſinui propoſito 7510767. reſpondeat arcus grad. 48. Min. 41. Sec. 1. & paulo amplius. Rurſus ſit datus ſinus 455630. quem in tabula quæſitum non inuenio. Accipio ergo proxime maiorem 456536. (Ab hoc enim minus diſtat, quàm à proxime minori 453630.) cui reſpondet arcus grad. 2. Min. 37. Quod ſi magis præciſum arcum deſiderem, inquiram partem proportionalem, hoc modo. Differentia 2906. inter ſinum 456536. proxime maiorem, & ſinũ 453630. proxime minorem, dat 60. Secunda auferenda ab arcu grad. 2. Min. 37. qui ſinui proxime maiori reſpondet, vt reliquus ſit arcus grad. 2. Min. 36. reſpondens ſinui proxime minori: Quot ergo Secunda poſtulat differentia 906. inter ſinum propoſitum, & ſinum proxime maiorem, auferenda ab eodem arcu ſinus proxime maioris, vt fiat arcus dati ſinus? Inuenio enim Secunda 19. fere, quæ ablata ex arcu grad. 2. Min. 37. relinquunt arcum grad. 2. Min. 36. Sec. 41. ſinui dato 455630. debitum. Quoniam vero idem ſinus rectus reſpondet duobus arcubus ſemicirculum conficientibus, vt ſupra diximus, ſi arcus dicta arte ex ſinu recto inuentus ſubducatur ex ſemicirculo, id eſt, ex grad. 180. reliquus erit alter arcus quadrante maior, qui dicto etiam ſinui debetur. Vt ſi arcus grad. 48. Min. 41. Sec. 1. inuentus dematur ex grad. 180. remanebit arcus grad. 131. Min. 18. Sec. 59. eidem ſinui recto 7510767. debitus. Pulchre autem operatio in triangulis tam rectilineis, quàm ſphæricis, docebit, num accipiendus ſit arcus quadrante maior propoſito ſinui reſpondens, an vero minor, vt proprijs locis apparebit.

Arcus quadrãte minor quo pacto ex ſinu complementi eruatur.

SI vero ſinus cognitus, eſt ſinus complementi arcus quæſiti, ſumendi erunt gradus in parte inferiori tabulæ, & Minuta ad dextram. Ita enim habebitur arcus quæſitus. Vel certe inueniendus erit arcus, vt prius diximus, ſinui dato, tanquam recto, reſpondens, isque ex quadrante demendus, vt arcus quæſitus relinquatur. Vt ſi cognitus ſit 7510767. ſinus complementi alicuius arcus. Inuenio ſinum 7510722. proxime minorem; quoniã paucioribus hic vnitatibus à ſinu cognito diſtat, quàm ſinus 7512642.

proxime maior in tabula ſinuum: Cui ſinui proxime minori reſpondent in ima ſede tabulæ grad. 41. & ad dexteram Minuta 19. Arcus igitur grad. 41. Min. 19. eſt is, qui quæritur. Huius enim complementum eſt arcus grad. 48. Min. 41. cui ſinus datus debetur. Idem arcus grad. 41. Min. 19. reperietur, ſi arcus grad. 48. Min. 41. ſinui dato in vertice tabulæ, & ad ſiniſtram reſpondens ex quadrante ſubducatur. Quod ſi partem proportionalem ſupra inuentam, nimirum Sec. 1. detrahas ex arcu reperto gr. 41. Min. 19. (quia maiorem arcum, quam par eſt, dato ſinui 7510767. tribuimus) inuenietur arcus magis præciſus grad. 41. Min. 18. Sec. 59. Qui etiam reperietur, ſi arcum grad. 48. Min. 41. Sec. 1. eidem ſinui, tanquam recto, debitum, & ſecundum partem proportionalem inuentum, detrahas ex quadrante. Rurſus detur 455630. ſinus complementi alicuius arcus, quem in tabula quæſitum non inuenio. Accipio ergo proxime maiorem 456536. (quoniam ab hoc minus diſtat, quã à proxime minore 453630.) cui in parte inferiori tabulæ reſpondet arcus grad. 87. Min. 23. quæſitus; cum huius complementum ſit arcus grad. 2. Min. 37. ſinui dato, tanquam recto, debitus. Quod ſi partem proportionalem ſupra inuentam, nimirum Sec. 19. addas arcui inuento gra. 87. Min. 23. (quia minorem arcum, quam par eſt, dato ſinui 455630. tribuimus) inuenietur arcus magis præciſus grad. 87. Min. 23. Sec. 19. Quem etiam reperies, ſi arcum grad. 2. Min. 36. Sec. 41. eidem ſinui, tanquam recto, debitum, & ſecundum partem proportionalem inuentum, ex quadrante ſubducas. Iam vero ſi ſinus propoſitus, eſt ſinus complementi arcus quadrante maioris, (Quod quando fiat, pulchre operatio in triangulis ſiue rectilineis, ſiue ſphæricis docebit) ſumendus erit arcus ei in vertice tabulæ, tanquam ſinui recto reſpondens, & quadranti adijciendus, vt arcus quæſitus conficiatur. Vt ſi ſinus complementi alicuius arcus quadrante maioris cognitus ſit 7510767. ſumendus erit arcus ei reſpondẽs in vertice tabulæ vna cum parte proportionali, grad. 48. Min. 41. Sec. 1. & quadranti adijciendus. Componetur enim arcus grad. 138. Min. 41. Sec. 1. qui quæritur, cuius nimirum complemento datus ſinus debetur.

Arcus quadrante minor magis præciſus, qua via ex ſinu complementi cognoſcatur.

Arcus quadrante maior quomodo ex ſinu cõplementi inueſtigetur.

DENIQVE ex ſinu verſo cognito ita arcum inquires. Si datus ſinus verſus minor eſt, quam ſinus totus, detrahe eum ex ſinu toto. Reliquus enim erit ſinus complementi arcus quæſiti. Quare ex hoc, vt proxime docuimus, arcum quæſitum inuenies. Si vero datus ſinus verſus ſinum totum ſuperat, ſubtrahe ex eo ſinum totum. Remanebit enim ſinus rectus arcus, qui quadranti adiectus arcum quæſitum conficiet. Exemplum. Detur ſinus verſus 9544370. Hunc detraho ex ſinu toto 10000000. remanebitque 455630. ſinus complementi arcus quæſiti, ex quo inuenietur arcus grad. 87. Min. 23. Vel per partem proportionalem magis præciſus, grad. 87. Min. 23. Sec. 19. Item ſit datus ſinus verſus 10455630. Ex hoc ſubduco ſinum totum 10000000 relinqueturque 455630. ſinus rectus, cuius arcus gra. 2. Min. 37. vel magis præciſus per partem proportionalem inuentus gra. 2. Min. 36. Sec. 41. adiectus quadranti efficiet arcum quæſitum grad. 92. Min. 37. vel magis præciſum grad. 92. Min. 36. Sec. 41. Huius operationis ratio perſpicua eſt ex prima figura in expoſitione definitionũ poſita. In ea enim ſinus verſus AH, ex ſinu toto AE, ſublatus relinquit HE, vel FK, ſinum complementi arcus AF, qui dicto ſinui verſo AH, debetur. Item ex ſinu verſo HC, ſubductus ſinus totus EC, relinquit EH, vel KF, ſinum rectum arcus FB, qui quadranti BC, adiectus componit arcum FC, dicto ſinui verſo HC, reſpondentem.

Arcus quo pacto ex ſinu verſu eruatur.

EX eadem tabula ſinuum rectorum indagabimus quoq; cuiuſque arcus chordam; & contra datæ cuiuſque chordæ arcũ reperiemus. Nam ſi dimidij arcus propoſiti ſinum rectum accipiamus, eumque duplicemus, conſtabimus dicti arcus chordam. Item ſi datæ chordæ dimidium, tanquam ſinum rectum ſumamus, eiuſque arcum eliciamus, dabit hic arcus duplicatus arcum datæ chordæ reſpondentem. Id quod ex eadem figura prima, quam in defintionum explicatione deſcripſimus, manifeſtum eſt. Nam in ea FH, ſinus rectus arcus AF, vel FC, eſt ſemiſſis chordæ FG, arcus FAG, vel FCG, &c.

Chordæ cuiuſq; arcus & contra, arcus chordæ cuiuſq; qua ratione tabula ſinuum eliciatur.

Quia vero partem proportionalem, eo, quo diximus, modo eruere perquam moleſtum eſt, voluimus hoc labore ſtudioſos ſubleuare. Itaque ſupputauimus ipſimet partes proportionales, quæ ſingulis ſecundis congruunt, eaſque per huius tabulæ intercolumnia digeſſimus, quarum vſum breuiter explicabimus.

DE PARTE PROPORTIONALI SINVVM, ET ARCVVM FACILIORE MODO INQVIRENDA.

Explicatio numerorũ pro parte proportionali ſinuũ elicienda.

ANTEQVAM doceamus, qua ratione pars proportionalis ex præcedenti tabula Sinuum facilius eruatur, explicandum prius erit, quidnam bini numeri columnis Sinuum interpoſiti ſignificent, & quo ſint artificio procreati. Prior ergo continet partes differentiæ inter duos ſinus, inter quos ſcriptus eſt, congruentes vni Secundo illius arcus, quem gradus in vertice tabulæ & minutum in latere eiuſdem tabulæ exprimit: poſterior autem numerus decimas particulas vnius partis differentiæ prædictæ complectitur. Vt quoniam inter duos ſinus grad. 16. Min. 12. & grad. 16. Min 13. poſiti ſunt duo hi numeri 46. 5. colligemus vni Secundo inter minutum 12. & 13. gradus 16. congruere particulas $46\frac{5}{10}$. ex differentia 2793. inter duos ſinus 2789911. 2792704. prædictorum arcuum grad. 16. Min. 12. & grad. 16. min. 13. quæ tota differentia Secundis 60. hoc eſt, vni minuto debetur: quod idem intelligendum eſt de ſequentium arcuum ſinubus vſque ad arcus grad. 16. Min. 37. & grad. 16 Min. 38. inter quorum ſinus poſiti ſunt alij hi numeei 46. 4. ita vt iam vni Secundo conueniant ex differentia duorum proximorum Sinuum particulæ tantummodo $46\frac{4}{10}$. & ſic de cæteris.

Numerorũ procreatio ad partem proportionanalẽ ſinuum erumenda.

PROCREATI autem ſunt huiuſmodi numeri inter ſinus poſiti hoc modo. Inuentis differentijs omnium ſinuum, partiti ſumus ſingulas per 60. Secunda, vt particulas vni Secundo debitas produceremus: fractionem autem reliquam ad decimas reduximus, multiplicantes eam per 10. vt in quæſtiuncula 14. cap. 16. noſtræ Arithmeticæ docuimus. Sic enim minori labore pars proportionalis eruetur, vt mox patebit. Verbi gratia. Differentia prædicta 2793. ſi diuidatur per 60. fit Quotiens 46. & ſuperſunt $\frac{33}{60}$. quæ efficiunt 5. decimas & ſemis. Relicta ergo ſemiſſe, (Nam quando fractio vnius decimæ ſuperat $\frac{1}{2}$. addidimus vnam decimam in tabula, quando autem non ſuperat $\frac{1}{2}$. ſed vel æqualis eſt, vel minor, eam neglegimus) ſcripſimus in tabula 46. 5. id eſt, particulas differentiæ integras 46. & $\frac{5}{10}$. vnius, quæ efficiunt 465. decimas vnius particulæ, quæ producuntur etiam, ſi tota differentia 2793. ducatur in 10. & productus numerus 27930. per 60. diuidatur. Et quia in ſequentibus differentiis vſque ad differentiam Sinuum grad. 16. Min. 37. & grad. 16. Min. 38. excluſiue, hac ratione reperitur idem numerus 465. hoc eſt, particulæ 46. & 5. decimæ; inſeruiet nobis hæc pars proportionalis vſque ad grad. 16. Min. 37. & grad. 16. min. 38. excluſiue, vbi iam numerus reperietur minor, nimirum 46. & 4. decimæ. Vt quoniam differentia inter ſinum 2837364. & 2840153. grad. 16. Min. 29. & grad. 16. Min. 33. eſt 2789. Si ea ducatur in 10. & productus numerus 27890. per 60. diuidatur, fiet Quotiens 464. & ſupererunt $\frac{50}{60}$. quæ ſuperant $\frac{1}{2}$. Ergo habebimus iterum partes 46. & 5. decimas. Atque ita de cæteris.

BENE-

Inuentio ſinus recti cum parte proportionali.

BENEFICIO horum numerorum expedite admodum pars proportionalis, per vnicam videlicet vel multiplicationem, vel diuiſionem reperietur. Nam ſi ſinus rectus quærendus ſit alicuius arcus, qui præter minuta complectatur quoque Secunda, accipiendus erit ſinus ex tabula reſpondens gradibus, ac minutis arcus propoſiti in vertice tabulæ poſitis, & ei adijciendus numerus, qui ex multiplicatione numeri interiecti proxime antecedentis in numerum Secundorum producitur. Vt ſi quæratur Sinus rectus grad.19.min.36.Sec.40. quoniam hunc arcum in tabula proxime præcedunt hi numeri 45.7. hoc eſt, 457. decimæ, quæ multiplicatæ in 40. Secunda producunt 18280. decimas, id eſt, particulas integras 1828. addemus 1828. ad 3354516. ſinum grad.19.min.36. vt conficiamus 3356344. ſinum propoſiti arcus grad.19.min.36. Sec.40.

Inuentio arcus cum parte proportionali ex dato ſinu recto.

VICISSIM ſi ex ſinu recto inquirendus ſit arcus, accipiendus erit arcus reſpondens ſinui proxime minori, & ei apponenda tot Secunda, quot vnitates continentur in Quotiente, ſi differentia inter ſinum propoſitum & ſinum proxime minorem (appoſita prius Ziphra, vt ad partes decimas reuocetur) diuidatur per numerum decimarum in tabula inuentum. Vt ſi datus ſit ſinus 3356344. ſumemus arcum grad.19.min.36. ſinui proxime minori 3354516. reſpondentem, eiq; adiungemus Sec.40. qui numerus gignitur ex diuiſione 1828. differentiæ inter ſinum propoſitum, & ſinum proxime minorem, appoſita prius Ziphra 0. nimirum ex diuiſione 18280. per 457. decimas in tabula inuentas. Ita enim arcus quæſitus erit grad.19.min.36.Sec.40. Apponitur autem ziphra ad differentiam inuentam 1828. quia cum diuidi debeat per $\frac{456}{10}$. multiplicanda eſt per 10. & productus numerus per 457. diuidendus, vt ex noſtra Arithmetica liquido conſtat.

Inuentio ſinus complementi cum parte proportionali.

SI vero ſinus complementi alicuius arcus quadrante minoris ſit inueſtigandus, qui præter minuta habeat etiam Secunda, accipiendus eſt ſinus ex tabula reſpondens gradibus ac minutis arcus propoſiti in inferiore parte tabulæ poſitis, & ab eo ſubtrahendus numerus, qui ex multiplicatione numeri interiecti ſuperioris in numerum Secundorum producitur. Vt ſi quæratur ſinus complementi grad. 70. min.23. Sec.20. quoniam huic arcui inſeruiunt hi numeri interiecti 45.7. hoc eſt, 457. decimæ, ducemus 457. in 20. Secunda, & productum numerum, qui eſt 9140. decimæ, id eſt, particulæ integræ 914. detrahemus ex 3357256. ſinu complementi arcus grad.70.min.23. vt relinquatur ſinus 3356342. complementi arcus grad.70. min. 23. Sec. 20.

Inuentio commodior ſinus complementi arcus quadrante minoris, vna cum parte proportionali.

ALITER, & fortaſſe commodius, ne regulæ muliplicentur. Accipiatur dati arcus complemenum, & ipſius ſinus rectus inueſtigetur, vt iam docuimus. Vt in eodem exemplo, complementum arcus grad.70.min.23.Sec.20. eſt arcus gradus 19. min.36. Sec.40. cuius ſinus rectus inuenietur 3356344. duabus vnitatibus maior illo, qui alio modo proxime iuuentus fuit. Hoc idcirco euenit, quia arcus propoſitus parum abeſt ab inſequenti numero interiecto minori.

QVANDO arcus, cuius complementi ſinus quæritur, quadrante maior eſt, ſed ſemicirculo minor, detrahemus ex dato arcu quadrantem, & reliqui arcus ſinum rectum inquiremus. Vt ſi quæratur ſinus complementi arcus grad.109. min.36. Sec. 40. Detracto quadrante, ſupereſt arcus grad.19.min.36 Sec.40. cui debetur ſinus 3356344.

Inuentio ſinus complementi arcus quadrante maioris, vna cum parte proportionali.

E CONTRARIO ſi ex ſinu complementi eliciendus ſit arcus, ſumendus erit arcus, vna cum parte proportionali, reſpondens ſinui dato, tanquam recto, isque ex quadrante auferendus, ſi ſinus datus eſt ſinus complementi arcus quadrante minoris; vel ad quadrantem adijciendus, quando nimirum datus ſinus reſpondet complemento arcus quadrante maioris. Pulchre autem ipſa operatio in triangulis ſiue ſphæricis, ſiue rectilineis docebit, num ſinus propoſitus congruat complemento arcus quadrante minoris, an vero maioris. Vt ſi propoſitus ſit ſinus 3356342. complementi arcus quadrante minoris, inuenietur, arcus grad.19.min.39. Sec. 40. qui detractus ex quadrante relinquet arcum grad. 70. min.32.Sec.20. quæſitum. Si vero idem ſinus debeatur complemento arcus quadrante maioris, addemus arcum eius inuentum ad quadrantem, conficiemusque arcum grad.109.min.36.Sec.40. Huius enim complemento, nimirum arcui grad.19.min.36.Sec.40. ſinus 3356342. congruit.

Inuentio arcus ex ſinu complementi dato vna cum parte proportionali.

DENIQVE ſinus verſus arcus, qui præter gradus ac minuta, annexa quoque habet Secunda, inuenietur, ſi ipſius complementi ſinus cum parte proportionali inuentus, ex ſinu toto auferatur, vel ſinui toti adijciatur, prout arcus quadrante minor eſt, vel maior. Vt ſi quæratur ſinus verſus arcus grad.70.min.23. Sec. 20. reperiemus eius complementi, nimirum grad.19. min.36.Sec.40. ſinum 3356342. qui detractus ex ſinu toto 10000000. reliquum faciet ſinum verſum quæſitum 6643658. Si vero ſinus verſus deſideretur arcus grad.109.min.36.Sec.40. inueniemus eius complementi, videlicet grad.19.min.36. Sec.40. ſinum 3356342. qui ad ſinum totum 10000000. adiectus conficiet ſinum verſum 13356342. quæſitum.

Inuentio ſinus verum cum parte proportionali.

PARI ratione ſi ex ſinu verſo arcus inueniendus ſit, detrahemus eum ex ſinu toto, vel ſinum totum ex ipſo, minorem ſcilicet ex maiore. Ita namque reliquus fiet ſinus complementi arcus quæſiti; ex quo quæſitus arcus elicietur. Vt ſi datus ſit ſinus verſus 6643658. detrahemus eum ex ſinu toto 10000000. & cum reliquo 3356342. tanquam ſinu recto expiſcabimur arcum grad.19.min.36.Sec.40. qui ex quadrante ablatus relinquet quæſitum arcum grad.70.min.23. Sec. 20. Si vero ſinus verſus datus ſit 13356342. auferemus ex eo ſinum totum, & cum reliquo 3356342. indagabimus, arcum grad.19.min.36.Sec.40. qui adiectus ad quadrantem conficiet arcum quæſitum grad.109.min.36.Sec.40.

Inuentio arcus ex ſinu verſo cum parte proportionali.

VERVM quia tabulam ſinuum non ſemper in promptu habemus, non iniucundum ſtudioſis fore ſum arbitratus, ſi breuiter hoc loco doceam, antequam ad alia progrediar, qua ratione ſinubus Geometrice, ſine auxilio numerorum, vti poſſimus in theorematibus, atque problematibus Aſtronomorum ac Geometrarum explicandis: ita vt ſolo circini beneficio omnia illa conſequamur, quæ longis multiplicationibus, diuiſionibuſque numerorum in ſinuum tabula contentorum inquiri ſolent. Hac enim re iis præſertim conſultum erit, qui vel magnam moleſtiam in numerorum ſupputationibus ſentiunt, vel non admodum in ijs ſeſe exercuerũt. Quod vt commodius exequamur, rem totam vno aut altero exemplo exponemus. Sit ergo, exempli cauſa,



Quo pacto ſinubus vtendum ſit Geometrice ſine tabula ſinuũ.

inueſtiganda declinatio cuiuſuis puncti Eclipticæ, vt grad. 20. tauri. Deſcribatur circulus ABCD, vna cum duabus diametris AC, BD, ſeſe in centro E, ad angulos rectos ſecantibus. Et quoniam, vt in coroll.propoſ.1.lib.1. noſtræ Gnomonices oſtendimus, ea eſt proportio ſinus totius ad ſinum maximæ declinationis, quæ ſinus illius arcus, quo datum punctum à viciniori puncto æquinoctij diſtat, ad ſinum declinationis eiuſdem puncti; ſumatur arcus maximæ declinationis DF, (quod quidem facile fiet, ſi adſit quadrans æneus, aut ligneus accurate in 90. gradus diuiſus, de quo in initio noſtræ Gnomonices ſcripſimus. Sine hoc enim quadrante non eſſet operæ pretium velle ſinubus vti ſine numeris) & arcus grad. 50. DG, quo nimirum datus gradus 20. tauri à principio arietis abeſt: atq; ex F, G, ad DE, perpendiculares demittantur FI, GH, quod facile fiet, ſi arcubus DF, DG, ſumantur

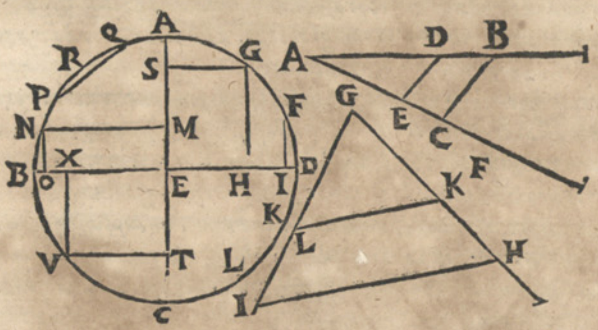
arcus

ar. us DK,DL,æquales:Rectæ enim puncta G, L, & F, K, iungentes erunt ad DE,perpendiculares,cum per ſcholium in definiti- tibus poſitum ſecentur in H,I,biſariam,[a] ac propterea ad angulos rectos:Erunt autem FI,GH,ſinus recti arcuum DF,DG. Igitur ſi tribus rectis ED,ſinui toti,& FI,ſinui maximæ declinationis,& GH,ſinui arcus, quo datum punctum ab æquinoctio diſtat, [b] *inueniatur quarta proportionalis, inuentus erit ſinus rectis declinationis quæſitæ.Ita autem ſine magno labore quartam proportionalem reperiemus cum Euclide. Ductis duabus rectis AB,AC,angulum quemcunq; facientibus in A,ſumatur in earum altera, recta AD,primæ lineæ hoc eſt,ſinui toti ED, æqualis; & DB, æqualis ſecũdæ lineæ, vt ſinui maximæ declinationis FI:In altera vero,recta AE,tertiæ lineæ,nẽpe ſinui GH,æqualis. Deinde ducta recta DE,agatur illi per B,parallela BC.Nã EC, erit quarta proportionalis, hoc eſt,ſinus rectus declinationis grad. 20.tauri.Cuius arcũ ita inquiremus. Rectæ EC, inuentæ abſcindemus ex ſemidiametro EA, æqualem EM, & per M, rectæ EB, parallelam ducemus MN. Arcus namque BN, erit arcus declinationis quæſitæ, cum reſpondeat ſinui recto EM, ſiue EC : propterea quod, ducto ſinu recto NO,arcus NB,*[c] *inter ſe æquales ſint rectæ EM, ON, ob parallelogrammum MO. Eundem tamen arcum ita quoq; obtinebimus.Rectæ inuentæ EC,æqualem abſcindemus CF, vt EF, ipſius EC,ſit dupla, hoc eſt,chorda illius arcus,qui duplus eſt arcus,cuius ſinus rectus eſt EC.Nam ſi rectæ EF,æqualem chordam PQ, in circulo accommodemus, & eius arcum PQ, biſariam ſecemus in R,erit quoq; QR,vel PR,arcus declinationis quæſitæ reſpondens ſinui EC, hoc eſt,dimidiatæ chordæ PQ,vt conſtat ex definitione ſinus recti. Quadrans porro in 90.gradus diuiſus monſtrabit,(ſi hoc etiam ſcire lubeat) quot gradus ac Minuta in BN,vel PR,arcus declinationis contineantur:quamuis Minuta ſecundum exiſtimationem accipienda ſint; propterea quod gradus quadrantis,niſi admodum magnus eſſet,in Minuta diuidi non poſſit.*

a 3. tertij.

b 12. ſexti.

c 34. prim.



RVRSVS inueſtiganda ſit aſcenſio recta grad.20.tauri. Quoniam igitur,vt in ſcholio prop.9.lib.2. Gnomonices demonſtrauimus,eadem eſt proportio ſinus complementi declinationis puncti propoſiti ad ſinum complementi arcus, quo datũ punctum à viciniori puncto æquinoctij abeſt, quæ ſinus totius ad ſinum complementi aſcenſionis rectæ: ſumatur in eadem figura arcus BN,declinationis grad.20.tauri,quæ in tabula declinationis continet grad.17.Min.47.ducaturq; NM,ad EA, perpendicularis,quæ ſinus erit complementi dictæ declinationis.Capiatur quoq; arcus DG,gr.50. quo datũ punctum ab æquinoctio verno abeſt,& ad EA,perpendicularis ducatur GS,nempe ſinus complementi dicti arcus DG.Poſt hæc trib.rectis NM,ſinui complementi declinationis dati puncti,& GS,ſinui complementi arcus DG,quo datum punctũ ab æquinoctij puncto diſtat,&ED, ſinui toti,quarta proportionalis inueniatur LI, vt in lineis GH, GI,ſeſe in G,ſecantibus factum eſt: Sumpta enim ibi eſt GK, ipſi NM,& KH,ipſi GS,& GI,ſinui toti ED, æqualis,&c. Nam LI,inuenta erit ſinus complementi aſcenſionis rectæ dati gra. 20.tauri.Quare ſi ipſi LI,ex ſemidiametro EC,abſcindatur æqualis recta ET,ducaturq; TV,ipſi EB,parallela, & VX,ipſi EC, parallela, [d] *erunt æquales rectæ ET, VX, Cum ergo ſinui VX, reſpondeat arcus BV, erit huius complementum VC,aſcenſio recta gradus 20.tauri.Quot autem gradus complectatur arcus VC.indicabit quadrans in 90.gradus diuiſus.*

d 34. prim.

EODEM pacto omnia alia problemata Geometrice per ſinus abſoluemus, etiamſi ſinubus verſis vti oportuerit aliquando, qui quidem eadem facilitate ex datis arcubus inueniuntur, & ex ipſis arcus, qua ſinus rectos, & ſinus complementorum reperimus.Si enim arcus datus minor eſt quadrante,vt AG;ducta GS.ad AE,perpendiculari, erit AS, ſinus verſus arcus AG.Si vero datus arcus quadrante maior eſt,vt AV;ducta VT,ad EC,perpendiculari,erit AT,ſinus verſus arcus AV,vt ex definitione manifeſtum eſt.

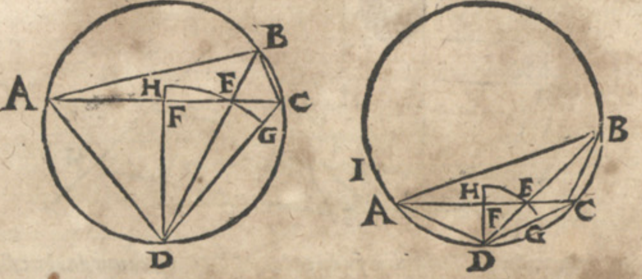
SED iam ad inquiſitionem chordarum Geometricam aggrediamur,ex quibus rurſum ſinuum tabulam facili negotio componemus.

THEOR. 7. PROPOS. 10.

Maior eſt proportio maioris arcus in circulo ad arcum minorem,quã chordæ maioris arcus ad chordam minoris.

IN circulo ſumptis duobus arcubus inæqualibus, quorum maioris chorda maior ſit,quã chorda minoris; maior eſt proportio arcus maioris ad minorem, quam chordæ arcus maioris ad chordam minoris arcus.

IN circulo ABCD,ſint inæquales arcus AB,BC;ille maior,hic vero minor:quorum chordæ AB, BC; illa maior,hæc vero minor.Dico maiorem eſſe proportionem arcus AB,ad arcum AC,quam chordæ AB, ad chordam BC. Contineant enim chordæ AB, BC, angulum ABC, ita vt arcus ſint continuati, minoreſque ſint tota circumferentia. Nam ſi toti circumferentiæ forẽt æquales,eſſet eadem chorda vtriuſq; arcus: ſi vero totam circunferentiam excederent, eſſet chorda arcus minoris maior, quam maioris, vt patet in ſecunda figura, ſi minor arçus foret BAI,[a] Angulus porro ABC,biſariam ſecetur recta BD,connectanturq; rectæ AC, AD, CD, quarum AC,rectam BD,ſecet in E.[b] Erunt autem rectæ AD,CD, æquales,propter arcus AD,CD,[c] qui ſubtenſi angulis ABD, CBD, ex conſtructione æqualibus æquales inter ſe ſunt.Et quoniam in triãgulo ABC,recta BE, angulum ABC,biſariam ſecat;[d] erit,vt AB,ad BC,ita AE,ad EC:Eſt autem recta AB,maior,quam recta BC, ex hypotheſi. Igitur & AE, maior erit,quam EC. Diuiſa ergo AC, biſariam in F, erit punctum F, in maiori ſegmento AE. Ducta autem recta DF; quoniam latera AF, FD, trianguli AFD, lateribus CF, FD, trianguli CFD, baſisque AD, baſi CD, oſtenſa eſt æqualis



a 9. primi.

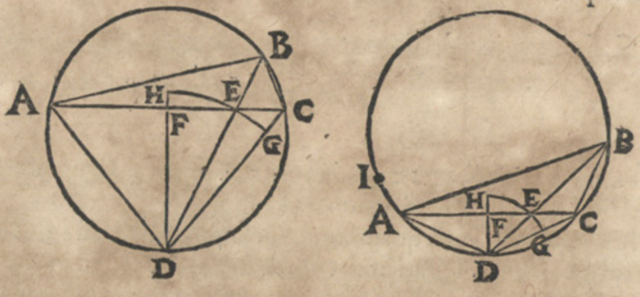
b 29. tertij.

c 26. tertij.

d 3. ſexti.

æqualis; [e] erit angulus AFD, angulo CFD, ſunt æqualia, æqualis; ac proinde vterque rectus erit. [f] Cum ergo in triangulo DEF, duo anguli E, F, duobus rectis ſint minores, erit angulus E, acutus, ac proinde reliquus CED, obtuſus. Quare in triangulo CDE, duo anguli C, E, ſint duobus rectis minores, erit angulus C, acutus. [g] Eſt igitur in triangulo DEF, latus DE, maius latere DF, & in triangulo CDE, minus latere CD. Quocirca arcus circuli ex D, centro per E, deſcriptus, ſecabit rectam DF, productam in H, rectam autem CD, infra punctũ C, in G. [h] Quoniam vero ſector DHE, ad triangulum DEC, maiorẽ proportionem habet, quam triangulum DFE, ad idem triangulum DEC: Item ſector idem DHE, ſectorẽ DEG, maiorem proportionem habet, quam ad triangulum DEC; habebit multo maiorem proportionem ſector DHE, ad ſectorem DEG, quam triangulum DFE, ad triangulum DEC. [i] Eſt autem, vt ſector DHE, ad ſectorem DEH, ita angulus GDE, ad angulum EDG. Maior ergo quoque erit proportio anguli HDE, ad angulũ EDG, quam trianguli DFE, ad triangulum DEC: [k] Sed vt triangulum DFE, ad triangulum DEC, ita eſt recta FE, ad rectam EC. Eſt igitur maior quoque proportio anguli HDE, ad angulum EDG, quam rectæ FE, ad rectam EC. [l] Et componendo, maior etiam erit proportio anguli HDG, ad angulum EDG, quam rectæ FC, ad rectam EC. Quia igitur eſt, vt angulus ADC, ad angulum HDG, ita recta AC, ad rectam FC: (vtrobique enim eſt proportio dupla) Angulus autem HDG, ad angulum EDG, maiorem habet proportionem, quam recta FC, ad rectam EC, vt oſtendimus; [m] erit ex æquo maior quoque proportio anguli ADC, ad angulum EDG, quam rectæ AC, ad rectam EC, vt in hac formula apparet. [n] Diuidendo ergo erit quoq; maior proportio anguli ADE, ad angulum EDG, quam rectæ AE, ad rectam EC. [o] Atqui vt angulus ADE, ad angulum EDG, ita eſt arcus AB, ad arcum BC, [p] Et vt recta AE, ad rectam EC, ita eſt chorda AB, ad chordam BC. Igitur maior erit etiam proportio arcus AB, ad arcum BC, quam chordæ AB, ad chordam BC. In circulo ergo ſumptis duobus arcubus inæqualibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

e 8. primi. f 17. primi. g 16. primi. h 8. quint. i Coroll. 1. propoſ. 33. lib. 6. k 1. ſexti. l 28. quin. m 31. quin. n 29. quin. o 33. ſexti. p 3. ſexti.



Anguli	Rectæ.
ADC.	AC.
HDG.	FC.
EDG.	EC.

SCHOLIVM.

QVAMVIS autem Theorema hoc proponatur ſolum de arcubus illis inæqualibus, quorum maiori maior chorda ſubtenditur, quam minori: Idem tamen locum etiam habet in illis arcubus inæqualibus, quorum maioris chorda minor eſt, quam chorda minoris. Nam quia tunc arcus maior ad minorem habet proportionem maioris inæqualitatis, chorda vero maioris arcus ad chordam minoris arcus proportionem habet minoris inæqualitatis, maior erit proportio maioris arcus ad minorem, quam chordæ arcus maioris ad chordam minoris arcus.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propoſitione, minorem eſſe proportionem minoris arcus ad maiorem, quam chordæ minoris arcus ad chordam maioris. Cum enim maior arcus ad minorem habeat maiorem proportionem, quam chorda maioris arcus ad chordam minoris, vt demonſtratum eſt; [q] habebit conuertendo minor arcus ad maiorem, minorem proportionem, quam chorda arcus minoris ad chordam maioris.

q 26. quin.

THEOR. 8. PROPOS. 11.

Rectangulũ ſub diametris quadrilateri in circulo deſcripti contentum æquale eſt duobus rectangulis ſub oppoſitis laterib9 contentis.

SI in circulo quadrilaterum deſcribatur cum ſuis diametris; erit rectangulum ſub diametris comprehenſum æquale duobus rectangulis ſimul, quæ ſub lateribus oppoſitis continentur.

IN circulo ABCD, ſit quadrilaterum ABCD, cuius diametri AC, BD. Dico rectangulum ſub AC, BD, comprehenſum æquale eſſe rectangulis ſimul ſub AD, BC, & ſub AB, DC, contentis. Fiat angulo DAC, æqualis angulus BAE; cadetque recta AE, vel in ipſam rectam AC; vel inter AC, rectam, & punctum B; vel deniq; inter rectam AC, & punctum D: atque erit in primo caſu angulus BAC, angulo DAE; & in ſecundo caſu totus angulus BAC, toti angulo DAE, propter communem angulum EAC, additum; & in tertio caſu reliquus angulus BAC, reliquo angulo DAE, ob communem angulum EAC, ablatum æqualis. [a] Et quoniam angulus quoque ACB, angulo ADB, æqualis eſt, [b] erit reliquus etiam angulus ABC, in triangulo ABC, reliquo angulo AED, in triangulo AED, æqualis. [c] Erit igitur vt AC, ad CB, ita AD, ad DE. [d] Quare rectangulum ſub AC, DE, æquale eſt rectangulo ſub CB, AD. Rurſus quia angulus BAE, angulo DAC, ex conſtructione æqualis eſt, [e] & angulus ABD, angulo ACD: erit & reliquus angulus AEB, in triangulo AEB, reliquo angulo ADC, in triangulo ADC, æqualis. [f] Erit igitur, vt AC, ad CD, ita AB, ad BE. [g] Quare rectangulum ſub AC, BE, æquale eſt rectangulo ſub CD, AB. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, DE, rectangulo ſub CB, AD, oſtenſum eſt æquale; & rectangulum ſub AC, BE, rectangulo ſub CD, AB. [h] Sunt autem rectangula ſub AC, DE, & ſub AC, BE, ſimul rectangulo ſub AC, BD, æqualia; erit rectangulum ſub AC, BD, rectangulis ſub BC, AD, & ſub CD, AB, contentis ęquale. Si ergo in çirculo quadrilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandũ.



a 21. tertij. b 32. primi. c 4. ſexti. d 16. ſexti. e 21. tertij. f 4. ſexti. g 16. ſexti. h 1. ſecund.

SCHOLIVM.

i Schol.34. lib.1.
k 47 prim.

QVANDO figura in circulo deſcripta eſt quadratum, vt in prima figura, facilius demonſtrabitur theorema, hoc modo. Quoniam rectangulum ſub AC, BD, hoc eſt, quadratum ex AC, [i] *(ſunt enim diametri in quadrato æquales)* [k] *æquale eſt quadratis ex AD, DC, hoc eſt, rectangulis ſub AD, BC, & ſub AB, DC, contentis, propter æqualitatem rectarum AD, BC, & AB, DC; liquido conſtat id, quod proponitur.*

PROBL. 4. PROP. 12.

Ex data diametro circuli quo pacto latera trianguli, æquilateri, quadrati, hexagoni, pentagoni, & decagoni eiuſdẽ circuli inueſtigẽtur.

EX data circuli diametro quotlibet particularum, latera trianguli æquilateri, quadrati, hexagoni, pentagoni, & decagoni in eodem circulo deſcriptorum, in eiſdem partibus inueſtigare.

a Coroll.15. quarti.
b Schol.47. primi.
c 47. primi.
d 12. tertij. dec.

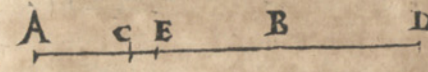
PONATVR diameter partium 20000000. [a] Quoniam igitur latus hexagoni ſemidiametro circuli eſt æquale, ipſum notum fiet partium 10000000.

RVRSVS, [b] quia quadratum à diametro quadrati cuiuſuis deſcriptum, duplum eſt quadrati eiuſdem; eſt autem diameter quadrati in circulo deſcripti eadem, quæ circuli diameter: ſi accipiatur quadratum à diametro circuli deſcriptum, nempe 400000000000000, erit dimidium eius, puta 200000000000000. quadratum lateris quadrati, cuius radix quadrata 14142136. dabit latus quadrati. Quod hoc etiam modo reperietur. [c] Quoniam quadratum in circulo deſcriptum duplum eſt quadrati à ſemidiametro deſcriptum, vt patet in triangulo rectangulo ADE, primæ figuræ præcedentis propoſ. demonſtratumq; eſt à nobis in lemmate propoſ. 16. lib. 1. Theod. ſi 100000000000000. quadratum ſemidiametri duplicetur, fiet quadratum in circulo deſcriptum partium 200000000000000. cuius radix quadrata 14142136. rurſus dabit latus quadrati.

PRÆTEREA, [d] cum latus trianguli æquilateri in circulo deſcripti ſit potentia triplum ſemidiametri eiuſdem circuli, efficitur, vt quadratum ſemidiametri triplicatum det quadratum lateris trianguli 300000000000000. cuius radix quadrata idem latus exhibebit partium 17320508.

e 30. ſexti.
f 5. tertijd.
g Cor.15.4.
h Scho.9.13
i 3. tertijd.

SIT inſuper AB, ſemidiameter circuli cuiuſuis, [e] qua diuiſa ſecundum extremam ac mediam rationem in C, vt maius ſegmentum ſit BC; producta autem AB, & abſciſſa BD, quæ maiori ſegmento BC, ſit æqualis; [f] erit quoque AD, in B, diuiſa ſecundum extremam ac mediam rationem, maiusq; ſegmentum erit AB: [g] quod cum ſit latus hexagoni in circulo, cuius ſemidiameter AB; [h] erit BD, latus decagoni in eodem circulo. Quod hac ratione notum efficietur. Secta AB, bifariam in E, [i] erit quadratum rectæ DE, compoſitæ ex minori ſegmento DB, & dimidio BE, maioris ſegmenti BA, quintuplum quadrati rectæ BE, quæ cognita eſt, cum ſit ſemiſſis ſemidiametri AB, ac proinde partiũ 5000000. Quare ſi quadratum rectę BE, quincuplicetur, fiet quadratum rectæ DE, 125000000000000. cuius radix quadrata dabit rectam DE, partium 11180340. ex qua ſi dematur recta BE, partium 5000000. reliquum erit BD, latus decagoni partium 6180340.



k 10. tertij. dec.

POSTREMO, [k] quoniam pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni; ſi quadratum lateris hexagoni 100000000000000. & quadratum lateris decagoni 38196602515600. ſimul componantur, fiet quadratũ lateris pẽtagoni 138196602515600. cuius radix quadrata dabit latus pentagoni partium 11755705. Atque ita latera trianguli æquilateri, quadrati, pentagoni, hexagoni, & decagoni nota facta ſunt in partibus diametri circuli, in quo deſcribuntur. Ex data igitur circuli diametro quotlibet particularum, latera trianguli æquilateri quadrati, &c. inueſtigauimus. Quod erat faciendum.

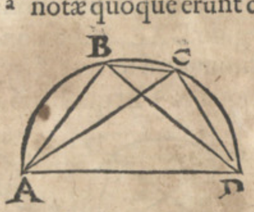
PROBL. 5. PROPOS. 13.

Qua ratione ex duabus chordis cognitis inueſtigetur corda differentiæ, qua arcus chordarũ datarum inter ſe differunt.

EX datis chordis duorum arcuum inæqualium, chordam arcus, quo maior arcus minorem ſuperat, inquirere.

a 3. huius.
b 11. huius.

IN ſemicirculo ABCD, ſint datæ chordæ AB, AC, & BC, ſit chorda arcus BC, quo maior arcus AC, minorem AB, ſuperat: oporteatque inquirere chordam BC. Ductis rectis BD, CD; quoniam chordæ AB, AC, ponuntur, [a] notæ quoque erunt chordæ BD, CD. Rectangulum ergo ſub datis rectis AB, CD, comprehenſum, notum erit: Item rectangulum ſub datis rectis AC, BD. [b] Eſt autem rectangulum ſub rectis, AC, BD, æquale duobus rectangulis AB, CD, & ſub BC, ad AD. Ablato ergo rectangulo noto ſub AC, CD, notum fiet reliquum rectangulum ſub BC, AD. Quod diuiſum per diametrum AD, notam, cognitam faciet chordam BC. Ex datis ergo chordis duorum arcuum inæqualium chordam arcus, quo maior arcus minorem ſuperat, inquiſiuimus. Quod faciendum erat.



COROLLARIVM.

Praxis.

ITAQVE datis chordis duorum arcuum inæqualium, ſi maioris chorda multiplicetur in chordam arcus, qui cum maiori arcu ſemicirculum conficit, quæ quidem per 3. propoſ. datur; & ex producto ſubtrahatur numerus procreatus ex minoris arcus chorda in chordam arcus, qui cum arcu maiori ſemicirculum complet, quæ per eandem propoſ. 3. datur, reliquus autem numerus per diametrum diuidatur, reddetur chorda illius arcus, quo maior arcus minorem ſuperat, nota: vt ex figura & demonſtratione huius propoſ. manifeſtum eſt.

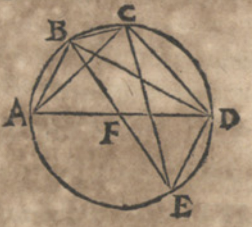
PRO-

PROBL. 6. PROPOS. 14.

Qua arte ex datis duabꝰ chordis cognoſcatur chorda arcꝰ compoſiti ex duobus arcubus datarum duarum chordarum.

EX datis chordis duorum arcuum chordam arcus, qui ex duobus illis arcubus componitur, inueſtigare.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, datæ ſint duæ chordæ AB, BC: oporteatque inueſtigare chordam AC, arcus ABC, ex duobus arcubus AB, BC, compoſiti. Ductis duabus diametris AD, BE, & rectis BD, CE, CD, DE; quoniam data eſt chorda AB, [a] dabitur quoq; chorda BD, arcus BCD, reliqui in ſemicirculo ABD. Pari ratione, quia data eſt chorda BC, dabitur quoque chorda CE, arcus CDE, reliqui in ſemicirculo BCE. [b] Et quia anguli AEB, DFE, æquales ſunt, lateraque FA, FB, lateribus FD, FE, æqualia, [c] æquales quoque erunt baſes AB, DE; ac proinde cum AB, data ſit, data quoque erit DE. [d] Quoniam igitur rectangulum ſub datis rectis BD, CE, æquale eſt rectangulis ſub datis rectis BC, DE, & ſub diametro BE, ac recta CD: ſi rectangulum ſub BC, DE, datum auferatur ex rectangulo dato ſub BD, CE; notum relinquetur rectangulum ſub BE, CD, quo diuiſo per diametrum notam BE, nota fiet chorda CD; [e] ac proinde & chorda AC, reliqui arcus ABC, in ſemicirculo ACD, nota erit.



a 3. huius. b 15. primi. c 4. primi. d 11. huius.

ALITER. Quoniam data eſt chorda AB, [f] dabitur etiam BD; reliqui arcus BCD, in ſemicirculo ABD: Data eſt autem & BC. Igitur cum chordæ BD, BC, datæ ſint, [g] dabitur quoq; chorda CD, arcus CD, quo maior arcus BD, minorem arcum BC, ſuperat; [h] ac proinde rurſus chorda AC, reliqui arcus ABC, in ſemicirculo ACD, dabitur. Ex datis ergo chordis duorum arcuum chordam arcus, qui ex duobus illis arcubus componitur, inueſtigauimus. Quod erat faciendum.

e 3. huius. f 3. huius. g 13. huius. h 3. huius.

COROLLARIVM.

Praxis.

ITAQVE datis chordis duorum arcuum, ſi chordæ arcuum duorum, qui cum illis ſemicirculos complent, quæ quidem per propoſ. 3. dantur, inter ſe multiplicentur, & ex producto auferatur numerus procreatus ex multiplicatione duarum chordarum datarum inter ſe; reliquus autem numerus per diametrum diuidatur, relinquetur chorda, ex qua ſi per propoſ. 3. inueſtigetur chorda arcus, qui cum relictæ chordæ arcu ſemicirculum conficit, erit hæc inuenta ſubtendens arcum compoſitum ex duobus arcubus duarum chordarum datarum. Operatio hæc perſpicua eſt ex figura, & demonſtratione priori huius propoſ.

EADEM hæc operatio colligi poteſt ex poſteriori demonſtratione, vt manifeſtum eſt.

PROBL. 7. PROP. 15.

Quo pacto ex data chorda reperiatur chorda ſemiſſis arcus datæ chordæ.

EX data chorda cuiuſuis arcus chordam ſemiſſis illius arcus inuenire.

IN circulo ABC, cuius centrum E, data ſit chorda BC, arcus BDC, cuius ſemiſſis ſit arcus BD, eiuſque chorda BD, quam inuenire oporteat. Ducta diametro DG, ſecabit ea, per lemma in definitionibus poſitum, rectam BC, bifariam, [a] ac proinde ad angulos rectos. Iunctis autem rectis BA, BG, erunt duo triangula ABC, EFC, æquiangula, cum angulus EFC, oſtenſus ſit rectus, [b] & angulus ABC, ſit quoque rectus in ſemicirculo, at angulus C, communis. [c] Igitur erit, vt CF, ad FE, ita CB, ad BA; & permutando, vt CF, ad CB, ita FE, ad BA. Cum ergo CF, dimidium ſit ipſius CB, vt oſtendimus, erit & EF, dimidium ipſius AB: [d] ac propterea cum AB, data ſit ex data BC, data quoque erit EF; qua dempta ex ſemidiametro ED, nota, data erit quoq; reliqua FD. [e] Quoniam vero in triangulo GBD, angulus B, rectus eſt, à quo demiſſa eſt BC, ad baſim GD, perpendicularis, [f] erit recta DB, media proportionalis inter GD, & FD: [g] atque adeo rectangulum ſub GD, FD, notis quadrato rectę DB, ęquale. Notum ergo erit quadratum rectæ DB; proptereaque radix eius quadrata rectam DB, notam exhibebit. Quam etiam ita cognoſcemus. Quoniam FD, nota facta eſt, erunt quadrata rectarum FD, FB, nota: [h] quæ cum æqualia ſint quadrato rectæ, BD; erit & hoc quadratum notum, cuius radix quadrata iterum rectam BD, efficiet notam. Quod eſt propoſitum.



a 3. tertij. b 31. tertij. c 4. ſexti. d 3. huius. e 31. tertij. f Coro. 8. 6. g 17. ſexti. h 47 prim.

ALITER. SIT rurſus in ſemicirculo ABC, data chorda BC, arcus BDC, cuius ſemiſſis ſit arcus DC, eiuſque chorda DC, quam oporteat dari. Ducta chorda AB, abſcindatur ei æqualis AE, iunganturq; rectæ BD, DE; Diuiſa quoq; EC, bifariam in F, demittatur recta DF. Quoniam igitur duo latera BA, AD, æqualia ſunt duobus lateribus EA, AD, [i] anguloſq; comprehendunt æquales, ob arcus æquales BD, DC, [k] erunt baſes BD, DE, æquales. [l] Eſt autem BD, recta rectæ DC, æqualis. Igitur & recta DE, eidem DC, æqualis erit. Quare cũ duo latera EF, FD, duobus lateribus CF, FD, æqualia ſint, baſiſq; DE, baſi DC, æqualis; [m] erunt anguli ad F, æquales, ideoq; recti. [n] Quoniam vero chorda AB, nota eſt ex data chorda BC, erit quoq; AE, ipſi AB, æqualis, nota: qua ablata ex diametro AC, nota relinquetur EC; ac proinde & huius medietas FC. [o] Iam vero, quia CD, media proportionalis eſt inter AC, FC; [p] erit rectangulum ſub AC, FC, æquale quadrato rectæ CD. Cum ergo illud notum ſit, ob notas AC, FC; erit & quadratum ex DC, notum: atque adeo radix eius quadrata rectam DC, efficiet notam. Quare ex data chorda cuiuſuis arcus chordam ſemiſſis illius arcus inuenimus. Quod erat faciendum.



i 27. tertij. k 24. prim. l 29. tertij. m 8. prim. n 3. huius. o Cor. 8. 6. p 17. ſexti.

COROLLARIVM.

Praxis.

ITAQVE, ſi propoſ. 3. inueniatur chorda arcus, qui cum arcu datæ chordæ ſemicirculum conficiet inuentæ

inuentæ autem huius chordæ dimidium ex ſemidiametro detrahatur, & reliquus numerus in diametrum multiplicetur, dabit radix quadrata huius producti chordam ſemiſſis illius arcus, cuius chorda data eſt. Vel ſi reliqui illius numeri quadratum iungatur quadrato ſemiſſis chordæ datæ, componetur numerus, cuius radix quadrata chordam quæſitam exhibebit cognitam. Quæ quidem operatio facile colligitur ex figura, & priori demonſtratione huius propoſ.

ITEM ſi per propoſ. 3. reperiatur chorda arcus, qui cum arcu datæ chordæ ſemicirculum conficit; inuenta autem hæc chorda ex diametro detrahatur, & reliqui numeri dimidium in diametrum multiplicetur, dabit radix quadrata huius producti chordam ſemiſſis illius arcus, cuius corda data eſt. Vt perſpicuum eſt ex figura, & poſteriori demonſtratione huius propoſ.

Qua ratione omnium arcuũ chordæ ſupputentur.

PROBL. 8. PROPOS. 16.

CHORDAS omnium arcuum ſemicirculi ſeſe ordine ſuperantium vno Minuto, in partibus diametri in quotuis particulas diſtributæ, ſupputare.

STATVAMVS, chordas omnium arcuum ſupputandas eſſe reſpectu diametri in partes 200000. diſtributæ. Quod vt fiat accuratius, ponenda erit in ſupputationibus diameter partium 20000000. Ita enim fiet, vt abiectis duabus primis figuris ad dexteram ex ſingulis chordis inuetis, relinquantur chordę magis exquiſitæ reſpectu diametri partium 200000. quemadmodum ad initium propoſ. 9. de Sinubus docuimus, vbi etiam addidimus, quot particularum ſinus totus aſſumi debeat in ſupputatione, ſi ſinus totus in tabula plurium particularum deſideretur. Quod etiam de tota diametro hic intelligi debet, ſtatuendo ſemper diametrum duplo plurium particularum in ſupputatione, quam ſinum totum ibi conſtituimus.

PRIMVM ergo omnium inuentæ ſunt in propoſ. 12. chordæ arcuum grad. 36. grad. 60. grad. 72. grad. 90. & grad. 120. nempe latera decagoni, hexagoni, pentagoni, quadrati, & trianguli æquilateri, partium 6180340. 10000000. 11755705. 14142136. 17320508. qualium 20000000. tota diameter ſtatuitur. Ex chordis autem 6180340. 11755705. arcuum grad. 36. & grad. 72. inuenientur chordæ arcuum reliquorum in ſemicirculo, vt grad. 144. & grad. 108. partium 19021130. 16180340. vt in propoſ. 3. oſtendimus.

DEINDE per propoſ. 13. eiuſque corollarium reperientur chordæ omnium arcuum, qui differentiæ ſint duorum quorumlibet arcuum, quorum chordæ ſint notæ. Vt ex chorda arcus grad. 120. & ex chorda arcus grad. 36. inueniemus chordam arcus grad. 84. qui illorum differentia eſt. Item ex chorda arcus grad. 90. & ex chorda arcus gr. 60. cognoſcemus chordam arcus grad. 30. quo duo illi inter ſe differunt. Eodemq; modo plurimorum arcuum chordas inueſtigabimus.

RVRSVS per ea, quæ propoſ. 14. eiuſq; corollario demonſtrauimus, reperiemus chordam cuiuſq; arcus compoſiti ex duobus, quorum chordæ notæ ſint. Vt ex chorda arcus grad. 60. & ex chorda arcus grad. 90. nota reddetur chorda arcus grad. 150. ex illis duobus compoſiti. Sic etiam ex chorda arcus grad. 90. & ex chorda arcus grad. 36. cognoſcetur chorda arcus grad. 126. &c.

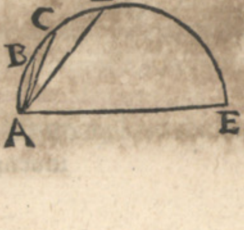
PRÆTEREA per doctrinam propoſ. 15. eiuſq; coroll. cognita chorda cuiuſuis arcus, cognoſcemus & chordam dimidiati arcus. Vt ex chorda arcus grad. 60. notam efficiemus chordam arcus grad. 30. Ex hac chordam arcus grad. 15. Ex hac vero chordam arcus grad. 7. Min. 30. & ex hac chordam arcus grad. 3. Min. 45. Item ex chorda arcus grad. 72. explorabimus chordam arcus grad. 36. Et ex hac chordam arcus grad. 18. Et ex hac chordam arcus grad. 9. Et ex hac chordam arcus grad. 4. Min. 30. Et ex hac chordam arcus grad. 2. Min. 15. Sic etiam quoniam per propoſ. 13. eiuſq; coroll. ex chordis arcuum grad. 36. & grad. 48. cognoſcitur chorda arcus grad. 12. quo illi duo inter ſe differunt, cognoſcemus ex chorda arcus grad. 12. chordam arcus grad. 6. Et ex hac chordam arcus grad. 3. Ex hac chordam arcus grad. 1. Min. 30. Et ex hac chordam arcus grad. 0. Min. 45. Deinde ſi per ea, quæ demonſtrata ſunt, arcuum cæterorum chordas diligenter ex inuentis inquiramus, inueniemus chordas omnium arcuum, qui ſe ordine continuo ſuperant Minutis 45. ita vt primus arcus contineat grad. 0. Min. 45. ſecund. grad. 1. Min. 30. tertius grad. 2. Min. 15. vltimus deniq; ſit totus ſemicirculus grad. 180. Immo vero, ſi, vt proxime docuimus, inuenta fuerit chorda arcus grad. 0. Min. 45. inueniemus ex hac, per doctrinam propoſ. 14. eiuſque coroll. chordas omnium arcuum ſeſe continue Minutis 45. ſuperantium, ſi primo inueſtigemus chordam arcus grad. 1. Min. 30. ex duobus arcubus Min. 45. & Min. 45. compoſiti: Deinde vero chordam arcus grad. 2. Min. 15. qui ex duobus arcubus grad. 1. Min. 30. & Min. 45. componitur: Et poſtea chordam arcus grad. 3. qui componitur ex arcu grad. 2. Min. 15. & ex arcu Min. 45. atque ita deinceps, apponendo ſemper arcui antecedenti arcum Min. 45.

Supputatio chordarũ arcuũ Min. 45. ſeſe ſuperantium

Supputatio chordæ arcus grad. 1.

POSTREMO aliorum arcuum chordas inueſtigabimus hac arte. Sit in ſemicirculo ABCDE, chorda AB, arcus Min. 45. & AD, chorda arcus grad. 1. Min. 30. at AC, chorda arcus grad. 1. quæ inueſtiganda proponatur. [a] Quoniam igitur maior eſt proportio arcus AC, ad arcum AB, quam chordæ AC, ad chordam AB: Habet autem arcus AC, ad arcum AB, proportionem ſeſquitertiam; habebit chorda AC, ad chordam AB, proportionem minorem, quam ſeſquitertiam. Cum ergo chorda AB, arcus Min. 45, ex præcedentibus inuenta ſit partium fere 130899. [b] erit chorda AC, arcus grad. 1. (quæ nimirum ad chordam AB, hoc eſt, ad 130899. minorē proportionem habet, quam ſeſquitertiam.) minor, quam 174532. cum hic numerus ad illum proportionem habeat ſeſquitertiam. [c] Rurſus quia maior eſt proportio arcus AD, ad arcum AC, quam chordæ AD, ad chordã AC: Habet autem arcus, AD, ad arcum AC, proportionem ſeſquialteram; habebit chorda AD, ad chordam BC, minorem proportionem, quam ſeſquialteram. Cum ergo chorda AD arcus grad. 1. Min. 30. ex præcedentibus inuenta ſit partiũ fere 261792. [d] erit chorda AC, arcus gr. 1. (ad quã nimirũ chorda AD, hoc eſt, numerus 261792. minorē proportionē habet quã ſeſquialterã.) maior, quam 174528. cum ad hunc numerũ numerus 261792. proportionem ſeſquialteram habeat. Conſtat igitur, chordam arcus grad. 1. conſiſtere inter duos hos numeros, 174532. 174528. cũ ille maior ſit, hic vero minor Statuam' ergo eam

a 10. huius.
b 10. quin.
c 10. huius.
d 10. quin.



eam eſſe 174530. inter numeros illos omnino mediam. Ita enim ſenſibiliter non differet à vera chorda arcus grad. 1.

NON putes autem, eadem hac arte inueſtigari poſſe chordam arcus cuiuſuis plurium graduum ex duabus chordis notis duorum arcuum circumſtantium. Nam cum in maioribus arcubus magna ſit differentia inter arcus, & chordas, ægre iudicari poterit, quinã numerus ex intermedijs inter duos inuentos conſtitui debeat chorda arcus propoſiti. Quod hoc exemplo faciemus perſpicuũ. Sint cognitæ chordæ arcũ grad. 59. Min. 46. & grad. 60. Min. 30. partium 9964712. & 10075480. Si quis igitur ex his eruere vellet chordã arcus grad. 60. ita eſſet ei progrediendum. [e] Quoniam minor eſt proportio arcus grad. 59. Min. 46. ad arcum grad. 60. quam chordæ ad chordam: Habet autẽ 9964712. chorda arcus grad. 59. Min. 46. ad 10003614 $\frac{1608}{1793}$. proportionem eandem, quam arcus grad. 59. Min. 46. ad arcũ grad. 60. [f] erit chorda arcus grad. 60. minor, quã 10003614 $\frac{1608}{1793}$. vtpote ad quam chorda 9964712. maiorem proportionem habeat, quam ad 10003614 $\frac{1608}{1793}$. [g] Item quia maior eſt proportio arcus grad. 60. Min. 30. ad arcum grad. 60. quam chordæ ad chordam: Habet autem 10075480. chorda arcus grad. 60. Min. 30. ad 9992211 $\frac{60}{121}$. eandem proportionẽ, quam arcus grad. 60. Min. 30. ad arcum grad. 60. [h] erit chorda arcus grad. 60. maior, quam 9992211 $\frac{60}{121}$. vtpote ad quam chorda 10075480. proportionem habeat minorem, quam ad 9992211 $\frac{60}{121}$. Conſtituenda igitur eſſet chorda arcus grad. 60. inter hos duos numeros 10003614 $\frac{1608}{1793}$. 9992211 $\frac{60}{121}$. qui cum valde inter ſe differant (eſt enim eorum differentia ferme 11403.) ambiguum erit, quanta ea ſit aſſumenda. Quæ ambiguitas in perueſtigatione chordæ arcus grad. 1. locum non habet, cum in tam paruis arcubus chordæ parum ab arcubus differant.

e Coroll. 10. huius.
f 10. quin.
g 10. huius
h 10. quin.

IAM vero inuenta chorda arcus grad. 1. reperiemus quoque, per propoſ. 15. eiusque coroll. chordam arcus Min. 30. Et ex hac chordam arcus Min. 15. Sed hanc poſtremam etiam inueniemus per propoſ. 13. eiuſque coroll. cum arcus Min. 15. ſit differentia inter arcum grad. 1. & arcum Min. 45. quorum chordæ iam ſunt cognitæ. Per chordam autem arcus Min. 14. cognoſcemus per propoſ. 14. eiusque coroll. chordam arcus Min. 30. qui ex arcu Min. 15. & ex arcu Min. 15. componitur. Item chordam arcus Min. 45. ex arcubus Min. 30. & Min. 15. compoſiti. Item chordã arcus grad. 1. ex arcubus Min. 45. & Min. 15. conflati. Et chordã arcus grad. 1. Min. 15. Et chordam arcus grad. 1. Min. 30. quamuis omnes hæ chordæ iam factæ ſint alia ratione notæ. Deniq; hac via reperiemus chordas omnium arcuum ſeſe ordine Minutis 15. ſuperantium: quamuis multas illarum alijs rationibus inueſtigare poſſimus, vt ex propoſ. 13. 14. 15. earumque corollarijs manifeſtum eſt.

Supputatio chordarum arcuum per Min. 15. extenſorum.

QVOD ſi ſtatuantur ordine omnes arcus ſeſe Minutis 15. ſuperantes, vna cum eornm chordis; & ad dexteram cuiuſuis chordæ aſcribatur differentia, qua à præcedenti chorda differt, inueniemus per regulam proportionum chordas aliorum arcuum intermediorum per quina minuta extenſorum: & ex his chordas omnium arcuum per ſingula minuta progredientium; quemadmodum ſupra de inuentione ſinuum diximus. Quod vt facilius intelligatur, proponemus hoc vnum exemplum. Sit inquirenda chorda arcus Min. 20. Quoniam igitur differentia inter 43632. chordam Min. 15. & 87264. chordam Min. 30. eſt 43632. Dic. Si Min. 15. quibus arcus Min. 15. ab arcu Min. 30. differt, requirunt differentiam 43632. adiiciendam ad chordam arcus Min. 15. vt fiat chorda arcus Min. 30. quantã poſtulant differentiam Minuta 5. quibus arcus Min. 15. ab arcu Min. 20. differt, addendam ad eandem chordam arcus Min. 15. vt componatur chorda arcus Min. 20? Inuenies enim requiri differentiam 14544. quæ addita ad 43632. chordam arcus Min. 15. conſtituet 58176. chordam arcus Min. 20. Eademque ratio eſt de cæteris.

Supputatio chordarum arcuum per ſingula Minuta extenſorum.

SCHOLIVM.

SED magnum compendium nobis in hac re afferet propoſitio ſexta. Nam ex ea plurimas chordas ex alijs inuentis per ſolam additionem, ſubtractionemue conficiemus. Si namque chordam cuiuſuis arcus, qui maior non ſit quam grad. 60. addamus chordæ arcus, quem arcus grad. 120. ſumpto illo arcu ſuperat, componemus chordam arcus, qui eodem illo arcu aſſumpto arcum grad. 120. excedit: propterea quod differentia inter chordas duorum horum arcuum maiorum æqualis eſt chordæ arcus illius aſſumpti, qui maior non ponitur, quam grad. 60. vt ibi oſtendimus. Vt ſi 3472964. chordam arcus grad. 20. adiiciamus ad 15320890. chordã arcus grad. 100. quem arcus grad. 120. ſuperat dicto arcu grad. 20. componemus 18793854. chordam arcus grad. 140. qui arcum grad. 120 eodem arcu grad. 20. excedit. Ita quoque, ſi 10000000. chordam arcus grad. 60. addamus chordæ 10000000. arcus grad. 60. quem arcus grad. 120. dicto illo arcu grad. 60. ſuperat, conficiemus 20000000. chordam arcus grad. 180. qui arcum grad. 120. eodem illo arcu grad. 60. ſuperat.

Compendium mirificũ pro inuentione plurimarum chordarũ.

ITEM ſi chordam cuiuslibet arcus, qui arcu grad. 60. maior non ſit, ſubtrahamus ex chorda arcus, qui arcum grad. 120. ſumpto illo arcu ſuperat, relinquetur chorda arcus, quem arcus grad. 120. eodem illo arcu aſſumpto excedit. Vt ſi 3472964. chordã arcus grad. 20. detrahamus ex 18793854. chorda arcus grad. 140. qui arcum grad. 120. ſuperat arcu illo ſumpto grad. 20. remanebit 15320890. chorda arcus grad. 100. qui eodem illo arcu grad. 20. ab arcu grad. 120. ſuperatur.

RVRSVS ſi ex chorda cuiuſuis arcus, qui maior ſit arcu grad. 120. ſubducatur chorda arcus, qui tanto minor ſit arcu grad. 120. quanto ille maior eſt, reliqua erit chorda arcus, quo vteruis illorum ab arcu grad. 120. differt. Vt ſi ex 18793854. chorda arcus grad. 140. auferamus 15320890. chordam arcus grad. 100. relinquetur 3472964. chorda arcus grad. 20. quo vterque illorum ab arcu grad. 120. differt. Quæ omnia ex dicta propoſ. 6. colliguntur.

SATIS ergo eſt, vt per regulam proportionum inueſtigentur chordæ omnium arcuum à principio ſemicirculi vſque ad arcum grad. 60. Si enim ex his reperiantur chordæ arcuum, qui cum illis ſemicirculum conficiant, & ex his repertis ſubducantur priores illæ inuentæ, remanebunt chordæ omnium arcuum inter arcum grad. 60. & arcum grad. 120. Item ſi notæ eſſent chordæ omnium arcuum ab arcu grad 60. vſque ad finem ſemicirculi, & chordæ omnium arcuum, qui minores ſunt arcu grad. 120. auferrentur ex chordis omnium arcuum maiorum, quam grad. 120. reliquæ fierent chordæ omnium arcuum à principio ſemicirculi vſque ad arcum grad. 60. Denique ſi chordæ omnium arcuum à principio ſemicirculi vſque ad arcum grad. 120. inuentæ eſſent, & chordæ omnium arcuum minorum, quam 60. grad. chordis omnium arcuum maiorum, quam grad. 60. adiicerentur, componerentur chordæ omnium arcuum maiorum, quam grad. 120.

Qua ratione ſinus omnium arcuũ ex chordis inueniãtur.

PORRO, ſi chordæ omnium arcuum ſemicirculi in tabulam redigantur, & chordæ omnium arcuum, qui ſe continue

Minutis

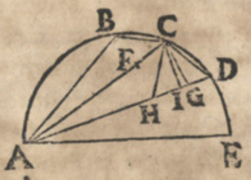
Rectius facere eos, qui tabulam ſinuum conſtruunt, quam qui chordarũ.

Minutis 2.excedunt,ſecentur bifariam, inuenti erunt ſinus omnium arcuum per ſingula Minuta progredientium, vt ex defin. 3. conſtat.

HINC conſtat, rectius feciſſe recentiores, qui ſinuum tabulam confecerunt, quam Ptolemæum & veteres, qui chordas in tabulam redegerunt. Pro ſinubus enim ſatis eſt, ſi Quadrans circuli per ſingula Minuta extendatur: at pro chordis neceſſe eſt totum ſemicirculũ per Minuta ſingula extendere: ita vt chordarum tabula ſit duplo maior quam tabula ſinuum. Taceo, multo expeditiorem, breuiorem, facilioremque eſſe ſinuum vſum in rebus Aſtronomicis, & Geometricis, quam chordarum: vt ijs eſt manifeſtum, qui ſeſe in huiuſmodi vſu exercuerunt aliquando.

Differentiæ chordarum à principio ſemicirculi vſq; ad eius finem ſenſim decreſcunt, ita vt chordæ minorũ arcuum maiores habeant differentias quã chordæ arcuũ maiorum dummodo arcus habeant differentias æquales.

QVEMADMODVM autem ſinuum differentiæ ſenſim decreſcunt à principio quadrantis vſque ad eius finem; ita vt, poſitis pluribus arcubus æqualiter ſeſe excedentibus, minorum ſinus habeant maiores differentias, quam ſinus maiorum, vt in coroll. propoſ.1. oſtendimus: ita quoque chordarum differentiæ paulatim decreſcunt à principio ſemicirculi ad eius finem vſque. Nam poſitis pluribus arcubus, quorum æquales ſint differentiæ, minorum chordæ maiores habent differentias, quam chordæ maiorum. Quod ita demonſtrabimus. Sint in ſemicirculo ABCDE, arcus AB, AC, AD, quorum differentiæ BC, CD, æquales ſint, chordæ autem eorundem AB, AC, AD: abſcindaturque recta AF, chordæ AB, æqualis; & recta AG, chordæ AC, æqualis. Dico FC, differentiam inter chordas AB, AC, maiorem eſſe, quam GD, differentiam inter chordas AC, AD. Abſciſſa enim recta AH, æquali ipſi AF, vel ipſi AB, iunctiſque rectis BC, CD, CG, CH: quoniam latera BA, AC, lateribus HA, AC, æqualia ſunt, [a] anguloſq; continent æquales ad A, propter æquales arcus BC, CD; [b] erunt baſes BC, CH, æquales. [c] Eſt autem recta BC, rectæ CD, æqualis, ob æquales arcus eoſdem BC, CD. Igitur & recta CH, rectæ CD, æqualis erit. [d] Anguli ergo CHD, CDH, æquales quoque erunt: [e] qui cum ſint duobus rectis minores; erit vterque eorum acutus. Eodem pacto erit vterque angulorum ACG, AGC, acutus: [f] propterea quod inter ſe etiam æquales ſunt, ob æquales rectas AC, AG. Quia igitur in triangulo CGH, anguli ad G, H, acuti ſunt; fit, vt CI, ducta ad DH, perpendicularis cadat intra triangulum in rectam GH, vt in ſcholio propoſ.13. lib.2. Eucl. demonſtrauimus. Itaq; quia duo anguli CHI, CIH, trianguli CHI, duobus angulis CDI, CID, æquales ſunt, ſuntque duo latera CH, CD, æqualibus rectis angulis oppoſita æqualia, vel certe latus CI, commune eſt; [g] erunt quoq; latera IH, ID, æqualia. Cum ergo ID, maior ſit quam GD, erit quoq; HI, & à fortiori HG, maior quam GD. Eſt autem HG, ipſi FC, æqualis, propterea quod & rectæ AC, AG, inter ſe, & rectæ AF, AH, inter ſe æquales ſunt. Igitur & FC, differentia chordarum AB, AC, maior erit, quam GD, differentia chordarum AC, AD. Quod eſt propoſitum.

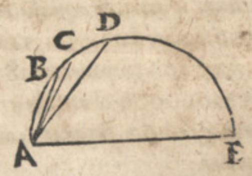


a 27.tertij.
b 4.pri.
c 29.tert.
d 5.primi.
e 27.pri.
f 5.primi.
g 26.pri.

Arcus.		Chordæ.		
G	M	Par.	M.	Sec.
0	30	0	31	25
10	0	10	27	32
20	0	20	50	16
45	0	45	55	19
50	0	50	42	51
60	0	60	0	0
66	30	65	47	43
80	30	77	32	6
90	0	84	51	10
120	0	103	55	23
170	0	119	32	37

NEC vero prætereundum eſt, ſi, poſita diametro partium 120. chordas arcuum inquiramus in partibus, Minutis, & Secundis, vt Ptolemæus fecit, chordas arcuum minorum, quàm grad. 60. habere plures Partes, Minuta, ac Secunda: quam arcus, quorum ſunt chordæ: at vero chordas arcuum maiorum, quam grad. 60. eſſe pauciorum Partium, Minutorum, ac Secundorum, quam arcus illis reſpondentes. Vt in tabula hic appoſita manifeſtum eſt, quam ex Ptolemæi tabula excerptam huc tranſtuli. In qua cernis chordas arcuum minorum, quàm grad. 60. maiores eſſe, quoad numerum Partium, Minutorum, & Secundorum, quam arcus reſpondentes, quoad gradus, ac Minuta; chordas vero arcuum maiorum, quàm grad. 60. eſſe minores arcubus reſpondentibus, quoad eoſdem numeros. Cuius quidem rei hæc eſt demonſtratio.

IN ſemicirculo ABCDE, ſit arcus AC, grad. 60. & AB, minor, nempe grad. 45. at AD, maior, puta grad. 80. Min. 30. ducanturque chordæ AB, AC, AD. Dico chordam AB, maiorem eſſe, quam Par. 45. at chordam AD, minorem, quàm Partium 80. Min. 30. [h] Cum enim maior ſit proportio arcus AC, ad arcum AB, quam chordæ AC, ad chordam AB: ſit autem proportio arcus AC, ad arcum AB, eadem, quæ 60. ad 45. erit proportio chordæ AC, ad chordam AB, minor, quam 60. ad 45. Quare cum chorda AC, ſit partiũ 60. vtpote quæ ſemidiametro æqualis eſt, per coroll. propoſ. 15. lib. 4. Eucl. erit chorda AB, maior, quam partium 45. [i] propterea quod 60. ad numerum, qui maior ſit, quã 45. minorem proportionem habet, quã ad 45. Atq; ita in tabella ſuperiori vides chordam arcus grad. 45. eſſe Partiũ 45 Min. 55. Sec. 19. [k] Rurſus quia maior eſt proportio arcus AD, ad arcum AC, quam chordæ AD, ad chordam AC: Eſt autem proportio arcus AD, ad arcum AC, eadem, quæ grad. 80. Min. 30. ad 60. erit chordæ AD, ad chordam AC, minor proportio, quàm Par. 80. Min. 30. ad 60. Cum ergo chorda AC, ſit partium 60. erit chorda AD, minor, quã Par. 80. Min. 30. [l] propterea quod numerus, qui minor ſit, quàm Par. 80. Min. 30. ad 60. minorem proportionem habet, quàm Par. 80. Min. 30. ad eundem numerum 60. Atque ita cernis in ſuperiori tabella chordam arcus grad. 80. Min. 30. continere partes duntaxat 77. Min. 32. Sec. 6. Eademque ratio eſt de alijs chordis minoribus, & maioribus, quàm AC, hoc eſt, quam chorda arcus grad. 60.



h 10. huius
i 8. quinti.
k 16. huius
l 8. quin.

LINEÆ

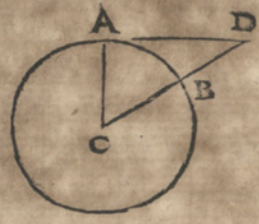
LINEÆ TANGENTES, ATQVE SECANTES.

QVANQVAM Aſtronomi omnia ſua problemata atq; theoremata per ſolos ſinus explicare poßint, vt communiter ab omnibus fieri ſolet, quia tamen multa facilius, ac breuius expediuntur, ſi vna cum ſinubus lineæ tangentes, ſecantesq; adhibeantur, vt ex doctrina triangulorum erit manifeſtum; quas quidem lineas vtili ſane conſilio Recentiores excogitarunt, atque in tabulas redegerunt: viſum eſt has etiam lineas paucis exponere, vt doctrina noſtrorum triangulorum perfectior euadat. Vniuerſa ſiquidem triangulorum doctrina in tribus hiſce linearũ generibus, nempe in ſinubus, lineis tangentibus, & ſecantibus, potiſsimũ conſiſtere videtur. Primũ autem explicandũ eſt, quid ſit linea tãgẽs, & quid ſecans propoſiti cuiuſuis arcus.

Doctrina triangulorum in quo conſiſtat.

CVM ergo ab altero extremo cuiuſlibet arcus, qui quadrante minor ſit, ſemidiameter ducta fuerit, in cuius extremitate recta linea circulum tangat, & per alterum extremum eiuſdem arcus extendatur alia recta linea ex centro ad tangentem lineam vſque: appellatur portio lineæ tangentis inter duas rectas è centro egredientes, Linea tangens (alijs Proſinus, vel Aſcripta dicetur) illius arcus, quem eædẽ duæ rectæ è centro eductæ includunt: Recta vero altera puncto contactus oppoſita inter centrum, & lineam tangentem, dicitur Linea ſecans (quam alij Hypotenuſam, vel Transſinuoſam dicunt) eiuſdem arcus. Vt ſi in circulo A B, cuius centrum C, ſumatur arcus AB, quadrante minor, & in extremitate ſemidiametri AC, ab extremitate A, ducta recta AD, circulum tangat, recta autem CD, circulum ſecet, conueniens cum A D, in D, (conueniet enim neceſſario, propterea quod duo anguli CAD, DCA, duobus rectis ſunt minores; cum ille rectus ſit, hic autem recto minor, propter arcum AB, quadrante minorem.) dicetur AD, Tangens arcus AB, at CD, Secans eiuſdem arcus. Tangentem vocant nonnulli Adſcriptam, quod circulo quodammodo adſcribatur; Secantem vero, Hypotenuſam, propterea quod in triangulo rectangulo A C D, [a] (angulus enim A, apud contactum rectus eſt) angulum rectum ſubtendit: Semidiametrũ denique AC, ſiue ſinum totum, dicunt baſem eiuſdem trianguli.

Linea tangens, & ſecans quid.



Linea adſcripta, & Hypotenuſa quid.

a 18. tert.

QVEMADMODVM autem in omni triangulo rectangulo, ſi latus recto angulo oppoſitum ponatur ſinus totus, reliqua duo latera ſunt ſinus recti reliquorum angulorum acutorum, quibus opponuntur; Item vtrumuis reliquorum laterum eſt ſinus complementi anguli ſibi adiacentis, vt in definitionibus ſinuum traditum eſt: ita quoque ſi alterutrum laterum circa angulum rectum ſtatuatur ſinus totus, erit alterum latus circa angulum rectum Tangens anguli acuti ſibi oppoſiti, latus vero angulo recto oppoſitum Secans eiuſdem anguli. Vt in triangulo rectangulo ACD, latus CA, eſt ſinus totus, nempe ſemidiameter circuli AB: at AD, tangens anguli C, vel arcus AB, & CD, eiuſdem ſecans. Eodem pacto, ſi DA, ſtatuatur ſinus totus, erit AC, tangens anguli D, & D C, eiuſdem ſecans.

Si in triãgulo rectãgulo alterutrum laterum circa angulũ rectũ ponatur ſinus totus, erit alterum latus circa angulum rectum tangens anguli acuti ſibi oppoſiti, & latus recto angulo oppoſitum eiuſdem ſecans.

ETSI autem diximus, tangentem, & ſecantem ſumi reſpectu arcus quadrante minoris, tamen eadem tangens, & ſecans referri ſolet ad arcum etiam, qui cum illo ſemicirculum complet: adeo vt duo arcus ſemicirculum conficientes, vel duo anguli duobus rectis æquales, vnam eandemque tangentem, atque ſecantem habeant: quemadmodum & eundem ſinum rectum habent, vt in tractatione ſinuum tradidimus: adeo vt ſi quæratur tangens & ſecans alicuius arcus quadrante maioris, ſumenda ſit tangens & ſecans arcus quadrante minoris, qui cum illo ſemicirculum complet.

Duo arcus ſemicirculum conficientes vel duo anguli duobus rectis æquales habent eandem tangentem & ſecantem.

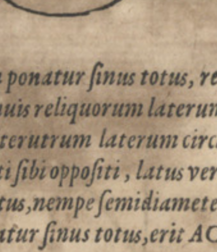
PORRO qua ratione Tangentes, & Secantes omnium arcuum quadrantis reddantur cognitæ in partibus ſinus totius, ac proinde qua via tabula Tangentium, tabula item Secantium componenda ſit, ſequentibus propoſitionibus, quæ ad lineas Tangentes, ac Secantes ſpectant, planum fiet.

THEOR. 9. PROPOS. 17.

TANGENS dimidij quadrantis ſinui toti æqualis eſt: Tangens autem arcus maioris dimidio quadrantis maior eſt ſinu toto: Et Tangens minoris arcus minor eſt. Secans denique dimidij quadrantis dupla eſt ſinus recti eiuſdem dimidij.

Tãgẽtes quomodo ſe habeãt cum ſinu toto comparatæ.

IN quadrante ABC, ſit arcus CD, ſemiſſis ipſius, CE, ſemiſſe maior, & CF, minor. Ducta autem recta CH, ad AC, perpendiculari, [a] quæ circulum tanget in C, ducantur rectæ AG, AH, AI, per puncta D, E, F. Item DK, ad AC, perpendicularis. Erit q; CG, tangens arcus CD; & CH, tangens arcus CE; & & CI, tangens arcus C F. at D K, ſinus rectus arcus C D, & A G, eiuſdem ſecans. Dico CG, æqualem eſſe ſinui toti AC; at CH maiorem, & CI, minorem. Item AG duplam ſinus DK. [b] Quoniam enim anguli CAG, GAB, æquales ſunt, ob arcus æquales CD, DB; eſtque angulus BAC, rectus, erit vterq; illorum ſemirectus. [c] Quare & reliquus angulus CGA, in triangulo ACG, ſemirectus erit; propterea quod angulus C, rectus eſt. [d] Igitur recta CG, tangens arcus CD, qui ſemiſſis eſt quadrantis, ſinui toti A C, æqualis erit. Ex quo ſequitur, CH, tangentem arcus CE, qui ſemiſſe quadrantis maior eſt, ſinu toto AC, maiorem eſſe; & CI, tangentem arcus CF, qui ſemiſſe quadrantis minor eſt, minorem: cum punctum H, neceſſario cadat ſupra G, & punctum I, infra.



QVOD tamen ſeorſum ita quoque oſtendi poteſt, nulla habita ratione tangentis C G, cuius arcus eſt ſemiſſis quadrantis. Quoniam arcus CE, ſemiſſe quadrantis maior eſt, erit arcus BE, ſemiſſe quadrantis minor.

a Corol. 16 3.
b 27 tert.
c 32. pri.
d 6. pri.

I [e] Igitur

e ſchol. 27. 3. f 32. pri. g 19. pri. h ſchol. 27. 3. i 32. pri. k 29. pri. l 6. primi. m 4. ſexti. n Coroll. 20. 6. o 47. pri.

[e] Igitur angulus CAH, angulo HAB, maior eſt, ac proinde maior ſemirecto. Cum ergo angulus C, rectus ſit, [f] erit reliquus AHC, in triangulo ACH, ſemirecto minor. [g] Quare recta CH, tangens arcus CE, qui ſemiſſe quadrantis maior eſt, maior eſt ſinu toto AC.

RVRSVS quia arcus CF, ſemiſſe quadrantis minor eſt, ac proinde BF, maior, [h] erit angulus CAI, angulo IAB, minor; atque adeo minor ſemirecto. Cum ergo angulus C, ſit rectus, [i] erit reliquus AIC, in triangulo ACI, maior ſemirecto: [k] ac propterea recta CI, tangens arcus CF, qui quadrantis ſemiſſe minor eſt, minor erit ſinu toto AC.

PRÆTEREA quoniam angulus K, rectus eſt, & DAK, ſemirectus, vt oſtenſum eſt; erit & ADK, ſemirectus; [l] ac proinde AK, ſinui DK, æqualis erit. Quia vero triangula GAC, DAK, æquiangula ſunt, [m] erit vt AG, ad AC, ita AD, hoc eſt, AC, ad AK; ac proinde tres rectæ GA, ſecans; AC, ſinus totus, & AK, ſinus dimidij quadrantis, continue proportionales erunt. [n] Ita ergo erit quadratum ex AG, ad quadratum ex AC, vt recta AG, ad rectam AK. Eſt autem quadratum ex AG, quadrati ex AC, duplum, [o] propterea quod æquale eſt quadratis ex AC, CG, æqualibus. Igitur & AG, ſecans dimidij quadrantis dupla eſt ſinus AK, vel DK, eiuſdem dimidij. Quocirca tangens dimidij quadrantis ſinui toti æqualis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

Quæ tangentes in tabula tãgentium minores ſint ſinu toto, & quæ maiores. Item cur ſecans gr. 45. dupla ſit ſinus grad. 45.

S C H O L I V M.

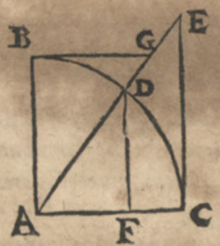
EX hac propoſ. aperte cauſa colligitur, cur in tabula Tangentium omnes tangentes arcuum minorum, quam grad. 45. minores ſint ſinu toto: Tangens vero arcus grad. 45. ſinui toti æqualis: Tangentes denique omnes arcuum maiorum, quam grad. 45. ſinu toto maiores. Item cur in tabula Secantium ſecans arcus grad. 45. dupla ſit ſinus arcus eiuſdem grad. 45.

THEOR. 10. PROPOS. 18.

Quã proportionem habeat ſinus totus ad tangẽtem, & ſecantem cuiuſuis arcus.

QVAM proportionem habet ſinus complementi arcus cuiuſuis ad ſinum rectum eiuſdem arcus, eam habet ſinus totus ad tangentem eiuſdem arcus: Item quam proportionem habet ſinus rectus cuiuſlibet arcus ad ſinum complementi eiuſdem arcus, eam habet ſinus totus ad tangentem eiuſdem complementi. Sinus autem totus medio loco proportionalis eſt inter ſinum complementi cuiuſuis arcus, & ſecantem eiuſdem arcus: Item inter ſinum rectum cuiuſlibet arcus, & ſecantem complementi eiuſdẽ arcus. Sinus deniq; idem totus medius proportionalis eſt inter tangentem arcus cuiuſuis, & tangentem complementi eiuſdem arcus.

IN quadrante ABC, ſit DF, ſinus arcus CD; & CE, eiuſdem tangens inter ſemidiametrum AC, & ſecantem AE: Item BG, tangens arcus BD, qui complementum eſt arcus CD. Dico ita eſſe ſinum complementi arcus CD, ad ſinum rectum eiuſdem arcus, vt eſt ſinus totus AC, ad tangẽtem CE, &c. Quoniam enim, vt in expoſitione definitionum dictum eſt, AF, æqualis eſt ſinui complementi arcus CD, cũ ſit æqualis ſinui recto arcus BD, qui complementum eſt arcus CD; ſuntque triangula AFD, ACE, æquiangula, ob rectos angulos F, C, & communem angulum A: [a] erit vt AF, ſinus complemẽti arcus CD, ad FD, ſinum rectum eiuſdem arcus CD, ita AC, ſinus totus ad CE, tangentem eiuſdem arcus. Quod eſt primum.



a 4. ſexti.

DEINDE eadem ratione erit, vt AF, ſinus rectus arcus BD, ad FD, ſinum complementi eiuſdem arcus BD, ita AC, ſinus totus ad CE, tangentem eiuſdem complementi arcus BD. Quod eſt ſecundum.

TERTIO in eiſdem triangulis erit, vt AF, ſinus complementi arcus CD, ad AD, ſinum totum, ita AC, ſinus totus ad AE, ſecantem eiuſdem arcus CD. Item vt AF, ſinus rectus arcus BD, ad AD, ſinum totum, ita AC, ſinus totus ad AE, ſecantem arcus CD, qui complementum eſt eiuſdem arcus BD. Quare ſinus totus medius proportionalis eſt inter AF, ſinum complementi arcus CD, & AE, ſecantem eiuſdem arcus CD: Item inter AF, ſinum rectum arcus BD, & AE, ſecantem complementi eiuſdem arcus BD. Quod eſt tertium.

b 29. pri. c 4. ſexti.

POSTREMO, quia triangula ACE; GBA, æquiangula ſunt, quod anguli C, B, ſint recti; [b] & alterni CAE, BGA, nec non alterni AEC, GAB, æquales: [c] erit vt CE, tangens arcus CD, ad AC, ſinum totum, ita AB, ſinus totus ad BG, tangentem complementi eiuſdem arcus CD. Pari ratione erit, vt BG, tangens arcus BD, ad AB, ſinum totum, ita AC, ſinus totus ad CE, tangentem complementi eiuſdem arcus BD. quod eſt quartum. Quam ergo proportionem habet ſinus complementi arcus cuiuſuis, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

Quo pacto tangentes omnium arcuum reperiantur.

ITAQVE per ea, quæ primo loco demonſtrata ſunt in hac propoſ. ſi fiat, vt ſinus complementi cuiuſuis arcus ad ſinum rectum eiuſdem arcus, ita ſinus totus ad aliud; hoc eſt, ſi ſinus arcus cuiuſlibet in ſinum totum multiplicetur, (quod fiet facile, ſi ei ad dextram præponas tot cifras, quot in ſinu toto continentur, nempe ſeptem, ſi ſinus totus fuerit 10000000. vel quinque, ſi ſinus totus fuerit 100000.) productusque numerus per ſinum complementi eiuſdem arcus diuidatur: inuenietur Tangens illius arcus, cuius ſinum complementi accepiſti, vel cuius ſinum rectum in ſinum totum multiplicaſti. Vt ſi tangens arcus grad. 30. quæratur, adiungemus eius ſinui recto 5000000. ſeptem cifras, hoc modo 50000000000000. & hunc numerum per 8660254. ſinum complementi eiuſdem arcus grad. 30. partiemur. Nam quotiens numerus 5773503. dabit tangentem arcus grad. 30. quatenus ſinus totus eſt 10000000. Hinc fit, tangentes omnes per ſolam diuiſionem inueniri. Nam, ſi omnium arcuum ſinubus, initio facto à principio quadrantis, ſeptem cifras apponas, & compoſitos numeros per ſinus complementorum eorundem arcuum, quemlibet per ſuum correſpondentem, diuidas, prodibunt omnium arcuum tangentes, vt ex demonſtratis liquido conſtat. Quamobrem perfacilis eſt conſtructio tabulæ Tangentium.

Sola diuiſione omnes tangẽtes eliciuntur.

Qua rõne ſecantes omnium arcuũ inueſtigẽtur.

RVRSVS per ea, quæ tertio loco in hac propoſ. ſunt demonſtrata, ſi fiat, vt ſinus complementi cuiuſuis arcus ad ſinum totum, ita ſinus totus ad aliud: hoc eſt, ſi ſinus totus in ſeipſum multiplicetur, (quod facile fiet, ſi ei ad dextram præponas tot cifras, quot ſunt in ſinu toto, puta ſeptem, vel quinq;, prout ſinus totus habuerit ſeptẽ, aut quinq; cifras.) numerusq; productus per ſinũ complemẽti cuiuſuis arcus diuidatur: reperietur Secans illius arcus, per cuius ſinũ complementi diuiſio facta eſt. Vt ſi ſecans

arcus grad. 30. deſideretur, diuidemus 100000000000000. (productum ſcilicet numerum ex ſinu toto in ſeipſum per 8660254. ſinum complementi arcus grad. 30. Numerus enim Quotiens 11547005. dabit ſecantem arcus grad. 30. quatenus ſinus totus eſt 10000000. Sola ergo diuiſione huius ſemper numeri 100000000000000. per ſinus complementorum omnium arcuum, initio facto à principio Quadrantis, omnium arcuum ſecantes eruuntur, vt ex demonſtratis liquet. Ex quo facilima erit conſtructio tabulæ Secantium.

Sola diuiſione eiuſdem ſemper numeri per ſinus omnes ſecãtes inueniũtur.

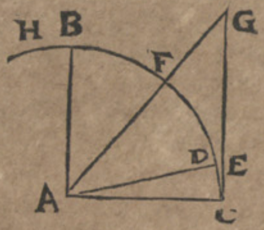
THEOR. 11. PROPOS. 19.

TANGENS cuiuſuis arcus, qui ſemiſſe quadrantis maior ſit, æqualis eſt tangenti & ſecanti ſimul arcus, qui duplus ſit exceſſus, quo datus arcus ſemiſſem quadrantis ſuperat.

Tangens arcus maioris ſemiſſe quadrantis, cui tangẽti, & ſecãti ſimul ſit æqualis.

IN quadrante A B C, ſit C G, tangens arcus CF, qui ſemiſſe quadrantis maior ſit, inter ſemidiametrum AC, & ſecantem AG, eiuſdem arcus CF, comprehenſa. Dico C G, æqualem eſſe tangenti, & ſecanti ſimul arcus, qui duplus ſit exceſſus, quo arcus C F, ſemiſſem quadrantis ſuperat. Sumpto enim arcu F D, ipſi F B, æquali, ducatur recta A D, extendaturque vſque ad E. [a] Et quoniam anguli B A F, F A E, ob æquales arcus B F, D F, æquales ſunt: [b] Et angulo B A F, æqualis eſt alternus angulus G; erit quoque idem angulus G, angulo GAE, æqualis. [c] Quare rectæ E G, E A, æquales ſunt: ac propterea, addita communi C E, erit C G, tota tangens arcus CF, duabus CE, & AE, hoc eſt, tangenti, & ſecanti arcus CD, ſimul æqualis. Dico iam arcum C D, duplum eſſe exceſſus, quo arcus CF, propoſitus ſemiſſem quadrantis ſuperat. Producto enim arcu quadrantis ad partes B, ſumptoque arcu BH, æquali ipſi CD, cum & arcus FB, arcui F D, ſit æqualis, erit totus arcus FH, toti arcui CF, æqualis, ac proinde arcus CH, duplus erit arcus C F. Quoniam vero arcus C H, quadrantem C B, ſuperat arcu B H, hoc eſt, arcu C D; [d] ſuperabit C F, ſemiſſis arcus C H, ſemiſſem quadrantis CB, ſemiſſe exceſſus CD. Arcus igitur CD, duplus eſt exceſſus, quo datus arcus CF, ſemiſſem quadrantis ſuperat. Eſt autem oſtenſum, C G, tangentem arcus C F, æqualem eſſe tangenti CE, & ſecanti AE, ſimul arcus CD. Igitur tangens cuiuſuis arcus, qui ſemiſſe quadrantis maior ſit, æqualis eſt tangenti, & ſecanti ſimul arcus, qui duplus ſit exceſſus, quo datus arcus ſemiſſem quadrantis ſuperat. Quod oſtendendum erat.

a 27. tert.
b 29. pri.
c 6. primi.
d 7. huius.



SCHOLIVM.

HANC propoſitionem nonnulli ita proponunt.

SECANS cuiuſuis arcus vna cum tangente eiuſdem æqualis eſt tangenti arcus compoſiti ex dato arcu, & ſemiſſe complementi eiuſdem.

Secans, & tangens eiuſdẽ arcus cui tãgẽti ſimul æquales ſint.

NAM in eadem figura ſit A E, ſecans, & CE, tangens eiuſdem arcus C D. Secto autem arcu BD, nempe complemento arcus CD, bifariam in F, ducatur ex centro A, per F, recta AG, ſecans tangentem C E, productam in G. Eritque C G, tangens arcus C F, compoſiti ex dato arcu CD, & D F, ſemiſſe complementi DB. Dico ſecantem AE, & tangentem CE, ſimul æquales eſſe tangenti C G. [e] Quia enim anguli B A F, F A E, æquales ſunt, propter æquales arcus BF, FD; [f] & angulo BAF, alternus angulus G, æqualis eſt; erit quoque angulus idem G, angulo GAE, æqualis. [g] Quare æquales ſunt rectæ E A, E G: atque adeo, addita communi EC, duæ AE, EC, ſimul toti CG, æquales erunt.

e 27. tert.
f 29. pri.
g 6 primi.

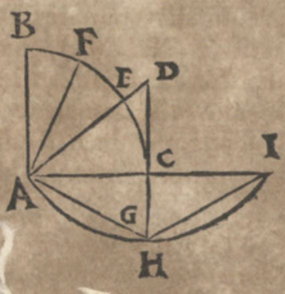
THEOR. 12. PROPOS. 20.

SECANS cuiuſuis arcus æqualis eſt tangenti eiuſdem, vna cum tangente ſemiſſis complementi arcus eiuſdem.

Secãs cuiuſuis arcus quorũ duorum arcuũ tangentibus ſit æqualis.

IN quadrante A B C, ſit A D, ſecans, & C D, tangens arcus CE, cuius complementi EB, ſemiſſis ſit EF, vel F B, & huic ſemiſſi æqualis ſit arcus CG. Ducta autem recta A G, & producta, donec cum DC, protracta coeat in H, erit C H, tangens arcus C G, qui ſemiſſis eſt complementi arcus CE. Dico ſecantem AD, æqualem eſſe tangenti CD, & tangenti CH, ſimul, hoc eſt, toti lineæ DH. [a] Quoniam enim anguli EAF, CAG, æquales ſunt, ob æquales arcus EF, CG; addito communi angulo EAC, erunt toti anguli F A C, E A H, æquales. [b] Rurſus quia in triangulo rectangulo ACH, duo anguli A H, vni recto, nimirum angulo BAC, æquales ſunt; ablatis angulis BAF, CAH, [c] qui propter æquales arcus BF, CG, æquales ſunt, erunt reliqui anguli FAC, & H, æquales. Eſt autem angulus FAC, oſtenſus æqualis angulo EAH. Igitur & angulus H, eidem angulo EAH, æqualis erit: [d] ac propterea rectæ AD, DH, æquales erunt, hoc eſt, ſecans AD, tangentibus DC, CH, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

a 27. tert.
b 32. pri.
c 27. tert.
d 6. primi.



ALITER. Sit rurſus AD, ſecans, & CD, tangens arcus CE. Dico ſecantem AD, æqualem eſſe tangenti CD, vna cum tangente ſemiſſis complementi arcus E C, ſeu anguli D A C, hoc eſt, vna cum tangente ſemiſſis anguli D, qui complementum eſt anguli D A C, [e] cum ambo in triangulo rectangulo ACD, vni recto ſint æquales. Centro namque D, & interuallo D A, arcus circuli deſcribatur A H I, ſecans DC, productam in H, & AC, productam in I, ducanturque rectæ AH, HI. Quia igitur recta DC, ex centro D, circuli AHI, educta ſecans rectam AI, ad angulos rectos, [f] ſecat eam bifariam; ſecabit eadem DCH, & arcum AHI, bifariam, ex lemmate in definitionibus demonſtrato. [g] Quare anguli CAH, & I, æquales ſunt. Quoniam autem, cum anguli D, & I, eandem habeant baſim arcum AH, & ille ſit ad centrum D, hic vero ad circumferentiam, [h] angulus D, anguli I, duplus eſt, erit quoq; idem angulus D, anguli CAH, duplus: ac proinde angulus CAH, ſemiſſis erit anguli D, qui complementum eſt anguli DAC. Cum ergo CH, tangens ſit anguli CAH, ſitque DA, recta rectæ DH, ex defin. circuli æqualis: liquido conſtat, ſecantem AD, arcus CE, æqualem eſſe tangenti CD, eiuſdem arcus, vna

e 32. pri.
f 3. tert.
g 27. tert.
h 20. tert.

cum CH, tangente ſemiſſis complementi arcus CE, ſeu anguli CAD. Quapropter Secans cuiuſuis arcus æqualis eſt tangenti eiuſdem, &c. Quod demonſtrandum erat.

S C H O L I V M.

Compendium mirificũ pro constructione tabulæ tam tangentiũ, quam ſecantiũ.

i 19. huius.

EX proximis duobus theorematibus mirificum nobis compendium ſuppeditatur ad tabulam tam Tangentium, quam Secantium conſtruendam. Nam ſi per ea, quæ propoſ. 18. eiuſque ſcholio præcepimus, tangentes omnium arcuum per ſingula minuta extenſorum vſque ad ſemiſſem quadrantis, ſecantes vero omnium arcuum totius quadrantis inquiramus; inueniemus earum beneficio per ſolam additionem tangentes aliorum arcuum, vſque ad arcum grad. 67. Min. 30. ſi nimirum tangentem, & ſecantem cuiuſque arcus minoris ſemiſſe quadrantis, qui minuta numero paria contineat, in vnam ſummam colligamus: [i] *propterea quod tangens cuiuſuis arcus maioris ſemiſſe quadrantis æqualis eſt tangenti, ac ſecanti arcus, qui duplus ſit exceſſus, quo datus arcus ſemiſſem quadrantis ſuperat; quales ſunt omnes arcus minutorum parium vſq; ad grad. 45. vt arcus Min. 2. Min. 4. Min. 6. &c. Exempli cauſa. ſi deſideretur tangens arcus grad. 45. Min. 1. colligemus in vnã ſummam tangentem 5818. & ſecantem 10000002. arcus Min. 2. qui duplus eſt arcus Min. 1. quo datus arcus grad. 45. Min. 1. ſemiſſem quadrantis, hoc eſt, arcum grad. 45. ſuperat. Numerus enim conflatus 10005820. dabit tangentẽ propoſiti arcus grad. 45. Min 1. qui ſemiſſem quadrantis ſuperat ſemiſſe arcus Min. 2. vt propoſ. 19. oſtenſum eſt. Idẽ arcus grad. 45. Min. 1. componitur ex arcu Min. 2. & ſemiſſe complementi eiuſdem arcus, quod complectitur grad. 89. Min. 58. hoc eſt, ex arcu Min. 2. & arcu grad. 44. Min. 59. ac proinde, vt in ſcholio propoſ. 19. demonſtrauimus, numerus 10005820. conflatus ex tangente, & ſecante arcus Min. 2. dabit tangentem dicti arcus compoſiti ex arcu Min. 2. & ſemiſſe complementi eiuſdem.*

EADEM ratione tangens cuiuſuis arcus maioris ſemiſſe quadrantis componetur ex tangente, & ſecante arcus, qui duplus ſit exceſſus, quo arcus ille ſemiſſem quadrantis ſuperat. Item ſi in vnam ſummam colligantur tangens, & ſecans cuiuſnis arcus minoris ſemiſſe quadrantis, conflabitur tangens arcus compoſiti ex illo arcu, & ſemiſſe complementi eiuſdem. Vt tangens 14352451. arcus grad. 55. Min. 8. compoſita eſt ex tangente 3692500. & ſecante 10659951. arcus grad. 20. Min. 16. qui duplus eſt arcus grad. 10. Min. 8. quo datus arcus grad. 55. Min. 8. quadrantis ſemiſſem ſuperat. Item ſi tangens 3692500. & ſecans 10659951. arcus grad. 20. Min. 16. in vnam ſummam colligantur, conflabitur tangens 14352451. arcus grad. 55. Min. 8. compoſiti ex illo arcu grad. 20. Min. 16. & ſemiſſe complementi eiuſdem, nempe ex arcu grad. 34. Min. 52. cum complementum arcus grad. 20. Min. 16. comprehendat grad. 69. Min. 44.

ITAQVE propoſito arcu quocunque, qui maior ſit quadrantis dimidio, ſi ex eo detrahatur ſemiſſis quadrantis, id eſt, arcus grad. 45. & reliqui arcus ſumatur duplus, component tangens & ſecans huius dupli arcus ſumpti tangentem propoſiti illius arcus. Vt ſi quæratur tangens arcus grad. 55. Min. 8. detrahendi erunt grad. 45. ex eo, & reliqui arcus grad. 10. Min. 8. ſumendus duplus arcus grad. 20. Min. 16. [k] *Huius enim tangens, & ſecans component illius tangentem, vt demonſtratum eſt.*

k 19. huius.

INVENTIS autem hoc modo tangentibus arcuum ſemiſſe quadrantis maiorum vſq; ad arcũ grad. 67. Min. 30. incluſiue; ſi rurſus tangentem, & ſecantem cuiuſq; horum arcuũ, qui minuta numero paria complectatur, (quales ſunt arcus grad. 45. Min. 2. & grad. 45. Min. 4. &c.) in vnam ſummam colligamus, reperiemus tangentes maiorum adhuc arcuũ, nempe grad. 67. Min. 31 & grad. 67. Min. 32. &c. vſq; ad arcum grad. 78. Min. 45. incluſiue. Nam huius arcus grad. 33. Min. 45. quo arcus grad. 78. Min. 45. ſemiſſem quadrantis excedit, duplus eſt arcus grad. 67. Min. 30. cuius tangens vltimo loco inuenta fuit. Item ex his tangentibus arcuum maiorum, quam grad. 67. Min. 30. vſq; ad arcum grad. 78 Min. 45. incluſiue inuentis; ſi rurſus tangentem, & ſecantem cuiuſq; illorum, qui minuta numero paria comprehendat, in vnam colligamus ſummam, inueniemus tangentes maiorum adhuc arcuum, cuiuſmodi ſunt arcus grad. 78. Min. 46. & grad 78. Min. 47. &c. vſq; ad arcum grad. 84. Min. 22. incluſiue. Nam huius arcus grad. 39. Min. 22. quo arcus grad. 84. Min. 22. ſemiſſem quadrantis ſuperat, duplus eſt arcus grad. 78. Min. 44. qui maximus eſt eorum, qui minuta numero paria habent, & quorum tangentes iam inuentæ ſunt. Sic etiam ex his inuentis reperiemus tangentes maiorum adhuc arcuum, quam grad. 84. Min. 22. vſq; ad arcum grad. 87. Min. 11. Quia huius arcus grad. 42. Min. 11. quo arcus grad. 87. Min. 11. dimidium quadrantis excedit, duplus eſt arcus grad. 84. Min. 22. cuius tangens vltimo loco fuit inuenta. Ex his vero repertis conficiemus tangentes ſequentium arcuum, vſq; ad arcum grad. 88. Min. 35. propterea quod huius arcus grad. 43. Min. 35. quo arcus grad. 88. Min. 35. quadrantis dimidium excedit, duplus eſt arcus grad. 87. Min. 10. qui maximus eſt eorũ, qui minuta habent numero paria, & quorum tangentes proxime inuentæ ſunt. Per has quoq; reperiemus aliorum arcuum tangentes, vſq; ad arcum grad. 89. Min. 17. incluſiue; cum huius arcus grad. 44. Min. 17. quo arcus grad. 89. Min. 17. dimidiatum quadrantem excedit, duplus ſit arcus grad. 88. Min. 34. vtpote maximus eorum, qui minuta numero paria continent, & quorum iam tangentes ſunt cognitæ. Beneficio deinde harum tangentium inuentarum eliciemus tangentes aliorũ arcuum, vſq; ad arcum grad. 89. Min. 38. incluſiue; eo quod huius arcus grad. 44. Min 38. quo arcus grad. 89. Min. 38. ſemiſſem quadrantis ſuperat, duplus eſt arcus grad. 89. Min. 16. qui maximus eſt eorũ, qui minuta numero habent paria, & quorũ tangentes iam factæ ſunt notæ; Hinc aliorum arcuũ tangentes inquiremus, vſq; ad arcum grad. 89. Min. 49. quippe qui ſuperet quadrantis dimidiũ arcu grad. 44. Min. 49. cuius duplus eſt arcus grad. 89. Min. 38. ad quẽ proxime peruenimus. At ex his inueſtigabimus tangẽtes ſequentiũ arcuũ vſq; ad arcũ grad. 89. Min. 54. quippe qui quadrantis medietatẽ ſuperet arcu grad. 44. Min. 54. cuius duplus eſt arcus grad. 89. Min. 48. qei maximus eſt eorũ, qui minuta habẽt numero paria, & quorũ tangentes iã ſunt inuentæ. Eadem ratione ex his inueniemus tangentes ſequentiũ arcuũ vſq; ad arcũ grad. 89. Min. 57. Quia huius arcus grad. 44. Min. 57. quo arcus grad. 89. Min. 57. quadrãtis dimidiũ ſuperat, duplus eſt arcus grad. 89. Min. 54. ad quẽ proxime peruentũ fuit. Deniq; ex tangente, & ſecãte arcus grad. 89. Min. 56. cõficiemus tangentẽ arcus grad. 89. Min. 58. Et hinc tangentẽ explorabimus arcus grad 89. Min. 59. Atq; ita, vt vides, ex tangẽtibus arcuũ vſq; ad grad. 45. & ex ſecãtib. oĩm arcuũ quadrãtis perficitur integra tabula tãgentiũ.

QVOD ſi ſecantem cuiuſcunq; arcus ſubducas ex tangẽte alterius arcus, qui ex priore illo, ac ſemiſſe complementi eiuſdem componitur, reliquam facies tangentem eiuſdem prioris illius arcus, cuius ſecantem ſubduxiſti. Item ſi tangentẽ cuiuſlibet arcus ex eiuſdem ſecante detrahas, remanebit tangens ſemiſſis complementi arcus eiuſdem. Primum conſtat ex ſcholio propoſ. 19. vbi oſtenſum eſt, ſecantem, & tangentem cuiuſuis arcus ſimul æquales eſſe tangẽti arcus compoſiti ex illo, & ex ſemiſſe complementi eiuſdem. Hinc enim fit, vt ſecans ex compoſita hac tangente ablata relinquat alteram illã tangentem. Secundũ vero liquet ex propoſ. hac 20. vbi demonſtrauimus, ſecantẽ cuiuſuis arcus æqualẽ eſſe tangenti eiuſdem, vna cũ tangente ſemiſſis complementi arcus eiuſdem. Quare huius ſemiſſis tangens reliqua fiet poſt ſubtractionem alterius illius tangentis ex ſecante. V. g. ſi ſecantẽ arcus grad. 20. quæ eſt 10641777. detrahamus ex 14281480. tangente arcus grad. 55. compoſiti ex arcu grad. 20. & ſemiſſe complementi eiuſdem, relinquetur tangens 3639703. arcus eiuſdem grad. 20. Item ſi 4244748. tangentem arcus grad. 23. ex 10863603. ſecante eiuſdem arcus ſubducamus, remanebit tangens 6618855. arcus grad. 33. Min. 30. hoc eſt, ſemiſſis complementi dati arcus grad. 23. Rurſus ſi 11547004. ſecantem arcus grad. 30. ex 17320508. tangente arcus grad. 60.

qui ex

qui ex arcu grad. 30. & ſemiſſe complementi eiuſdem componitur, auferamus, relinquetur tangens 5773504. arcus grad. 30. Et ſi 1763268. tangentem arcus grad. 10. demamus ex 10154264. ſecante eiuſdem arcus grad. 10. remanebit tangens 8390996. arcus grad. 40. qui ſemiſsis eſt complementi dicti arcus grad. 10.

IAM vero ſi per ea, quæ propoſ. 18. eiuſque ſcholio tradidimus, tangentes omnium arcuum quadrantis per ſingula Minuta extenſorum inueſtigemus; reperiemus earum beneficio per ſolam additionem ſecantes omnium arcuum per bina minuta progredientium, ſi nimirum tangentem cuiuſuis arcus minuta numero paria habentis addamus ad tangentem ſemiſsis complementi arcus eiuſdem: [l] *propterea quod Secans cuiuſuis arcus æqualis eſt tangenti eiuſdem, vna cum tangente ſemiſsis complementi eiuſdem; conſtat autem omnium arcuum minuta numero paria habentium complementa ſemiſſes habere. Exempli cauſa, ſi deſideretur ſecans arcus Min. 2. addemus eius tangentem 5818. ad 9994184. ad tangentē arcus grad. 44 Min. 59. qui ſemiſsis eſt complementi arcus dati Min. 2. Numerus enim compoſitus 10000002. erit ſecans arcus Min. 2. Sic etiam ſi quæratur ſecans arcus grad. 89. Min. 58. addemus eius tangentem 171880336 89. ad 2909. tangentem arcus Min. 1. qui ſemiſsis eſt complementi arcus dati grad. 89. Min. 58. Nam numerus conflatus 171880365 98. erit ſecans arcus grad. 89. Min. 58. Hac ratione conficietur dimidiata pars tabulæ Tangentium: at tangentes arcuum minuta numero imparia habentium, quoniam eorum complementa ſemiſſes non habent, niſi ad Secunda venire velimus, inueſtigandæ erunt, vt propoſ. 18. eiuſque ſcholio præcepimus.*

[l] 20. huius.

RVRSVS ſecantem cuiuſuis arcus inueniemus, ſi eius tangentem demamus ex tangente arcus compoſiti ex arcu illo, & ſemiſſe complementi eiuſdem arcus. Nam cum, vt demonſtrauimus, ſecans cuiuſuis arcus, vna cum tangente eiuſdem æqualis ſit tangenti arcus compoſiti ex dato arcu, & ſemiſſe complementi eiuſdem; [m] *efficitur, vt tangens dati arcus ex tangente arcus ex eo, & ſemiſſe complementi compoſiti ablata relinquat ſecantem eiuſdem dati arcus. Vt ſi cupiamus ſecantem arcus Min. 2. auferemus 5818. tangentem ipſius ex 10005820. tangente arcus grad. 45. Min. 1. compoſiti ex arcu Min. 2. & ex arcu grad. 44. Min. 59. qui ſemiſsis eſt complementi arcus dati Min. 2. Relictus namque numerus 10000002. erit ſecans arcus dati Min. 2. Ita quoque ſi velimus habere ſecantem arcus grad. 60. ſubducemus 17320508. eius tangentem ex 37320514. tangente arcus grad. 75. compoſiti ex dato arcu grad. 60. & arcu grad. 15. qui ſemiſsis eſt complementi dati arcus grad. 60. Remanebit enim numerus 20000006. pro ſecante dati arcus grad. 60.*

[m] Schol. 19. huius.

HÆC, quæ hoc ſcholio tradita à nobis ſunt, vera ſunt, ſi ſinus exquiſite inuenti fuerint: ſed quia non omnes ſinus accurate ſunt cogniti, maxime ſinus arcus grad. 1. & alij ex hoc dependentes, quales ſunt ſinus arcuum per ſingula minuta extenſorum; fit vt neque tangentes, neque ſecantes inuentæ per hoſce ſinus ſint admodum accuratæ. Quare ſi ex inuentis quibuſdam aliæ per ſolam additionem, ſubtractionemue inquirantur, vt hoc ſcholio docuimus, non parum different ab eiſdem, ſi per ſinus inueſtigarentur. Nam tangentes & ſecantes per ſinus inuentæ ex vno ſolo principio non omni ex parte vero, nempe ex ſinubus, gignuntur: at eædem per ſolam additionem, ſubtractionemue procreatæ oriuntur ex pluribus falſis principijs, nimirum ex ſinubus primum, deinde vero etiam ex tangentibus, & ſecantibus per ſinus inuentis, quæ accuratæ eſſe non poſſunt, vt diximus. Magis exquiſite ergo cognoſcentur huiuſmodi lineæ per ſinus, vt propoſ. 18. eiuſque ſcholio traditum eſt. Hac ratione & tabulam Tangentium, & tabulam Secantium breui ſupputabimus. Non paruos enim errores in aliorum tabulis deprehendimus; vt tuto illis fidere non poſsimus; propterea quod multas tangentes, & ſecantes vel per partem proportionalem, vel per ſolam additionem aut ſubtractionem inueſtigarunt, non autem omnes per ſinus. Subiungemus tamen paulo infra aliorum tabulas, donec per tempus nouas conſtruere licebit.

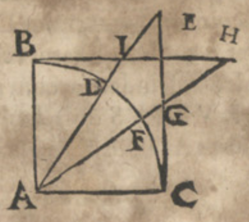
Tangētes & Secantes magis eſſe accuratas, per ſinus inuentas, quã per additionem, ſubtractionemue, vt in hoc ſcholio traditum eſt.

THEOR. 13. PROPOS. 21.

TANGENS cuiuſuis arcus eſt ad tangentem alterius arcus cuiuslibet, vt tangens complementi poſterioris arcus ad tangentem complementi prioris.

Tangētes duorũ arcuũ quorumlibet ſunt reciproce proportionales cũ tangentibus complemẽtorum arcuum eorundem.

IN quadrante ABC, arcus CD, tangens ſit CE, & ſecans AE: Item arcus CF, tangens ſit CG, & ſecans AG: Ducta autem recta BH, circulum tangente, & vtriq; ſecanti AE, AG, occurrente in I, H; erit BI, tangens complementi arcus CD, & BH, Tangens complementi arcus CF. Dico ita eſſe CE, tangentẽ arcus CD, ad CG. tangentẽ arcus CF, vt eſt BH, tangẽs complemẽti poſterioris arcus CF, ad BI, tangentẽ complemẽti arcus prioris CD. [a] Cũ enim ſinus totus ſit medius proportionalis tã inter CE, tangentẽ arcus CD, & BI, tangentẽ complementi arcus eiuſdem CD, q̃ inter CG, tangentem arcus CF, & BH, tangentem complemẽti arcus eiuſdẽ CF; [b] erit tam rectangulũ ſub CE, BI, quam rectangulum ſub CG, BH, quadrato ſinus totius æquale: ac proinde rectangulum ſub CE, BI, rectangulo ſub CG, BH, æquale erit. [c] Quare erit, vt CE, prima ad CG, ſecundam, ita vt BH, tertia ad BI, quartam, nempe vt CE, tangens arcus CD, ad CG, tangentem arcus CF, ita BH, tangens complementi arcus poſterioris CF, ad BI, tangentem complementi prioris arcus CD. Tangens igitur cuiuſuis arcus eſt ad tangentem alterius, &c. Quod oſtendendum erat.



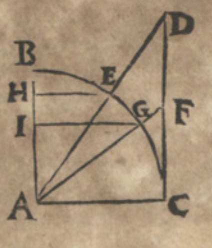
a 18. huius.
b 17. ſexti.
c 16. ſexti.

THEOR. 14. PROPOS. 22.

SECANS cuiuſuis arcus eſt ad Secantem alterius arcus cuiuſlibet, vt ſinus complementi poſterioris arcus ad ſinum complementi prioris.

Secantes duorum arcuũ quorumlibet ſunt reciproce proportionales cũ ſinubus cõplementorũ arcuũ eorundem.

IN quadrante ABC, ſit AD, ſecans arcus CE, & AF, ſecans arcus CG: & EH, ſinus complemẽti arcus CE, ad GI, ſinus complemẽti arcus CG. Dico ita eſſe ſecantẽ AD, arcus CE, ad AF, ſecantẽ arcus CG, vt eſt GI, ſinus complementi poſterioris arcus CG, ad EH, ſinũ complementi arcus prioris CE. [a] Quoniã enim ſinus totus eſt medius proportionalis tam inter ſecantem AD, arcus CE, & EH, ſinum complementi eiuſdem arcus CE, quam inter AF, ſecantem arcus CG, & GI, ſinum complementi eiuſdem arcus CG; [b] erit tam rectangulum ſub AD, EH, quam rectangulum ſub AF, GI, quadrato ſinus totius æquale: ac proinde rectangulum illud huic æquale. [c] Quare erit vt AD, prima ad AF, ſecundam, ita GI, tertia ad EH, quar-



a 18. huius
b 17. ſexti.
c 16. ſexti.

tam; hoc eſt, vt A D, ſecans arcus CE, ad AF, ſecantem arcus C G, ita G I, ſinus complementi arcus poſterioris C G, ad EH, ſinum complementi arcus prioris CE. Secans igitur cuiuſuis arcus eſt ad ſecantem alterius arcus, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 15. PROPOS. 23.

Tangẽtes & ſecantes arcuũ æqualiter creſcentiũ augẽt ſemper differentias.

SI plures ſint arcus æquali exceſſu progredientes, habebunt tam tangentes, quam Secantes maiorum arcuum maiorem differentiam, quam minorum: ita vt in tabula differentiæ tam tangentium, quam ſecantium ſemper creſcant vſque ad finem quadrantis.

IN quadrante A B C, ſint arcus C D, C E, C F, quorum differentiæ DE, EF, æquales ſint, & eorundem tangentes ſint CG, CH, CI; ſecantes autem AG, AH, AI. Et quia in triangulo ACH, angulus C, rectus eſt; erit A H C, recto minor, [a] cum ambo ſint duobus rectis minores. [b] Cum ergo duo anguli ad H, ſint duobus rectis æquales, erit AHI, maior recto, [c] ac proinde angulus I, in triangulo AHI, recto minor. [d] Quare maior erit ſecans A I, ſecante A H. Eadem ratione maior erit quam AG: Item AH, maior, quam AG. Abſcindatur ergo AK, ipſi AH, & AL, ipſi AG, æqualis. Dico IH, differentiam tangentium CI, CH, arcuum maiorum CF, CE, maiorem eſſe differentia H G, tangentium CH, CG, minorum arcuum CE, CD: Item K I, differentiam ſecantium AI, AH, arcuum maiorum CF, CE, maiorem eſſe differentia LH, ſecantium A H, A G, minorum arcuum CE, CD. Cum enim arcus DE, EF, æquales ſint, [e] erunt & anguli D A E, E A F, æquales: ac proinde angulus I A G, ſectus erit bifariam per rectam AH. [f] Igitur erit, vt I A, ad AG, ita IH, ad HG: Eſt autem AI, maior, quam AG, vt oſtenſum eſt. Recta ergo IH, maior quoque erit, quam HG. Quod eſt primum.



a 17. pri. b 13. pri. c 17. pri. d 19. pri. e 27. tert. f 3. ſexti.

DVCTIS iam FM, EN, DO, ad AC, perpendicularibus, nempe ſinubus rectis arcuum CF, CE, CD; erit AM, ſinus complementi arcus CF; & AN, ſinus complementi arcus CE; & AO, ſinus complementi arcus CD, vt in expoſitione definitionum dictum eſt. [g] Quoniam vero recta MN, maior eſt, quã NO; [h] maior erit proportio A N, ad NO, quam ad MN: Eſt autem adhuc maior proportio AO, ad NO, quam AN, ad eandem NO. Igitur multo maior erit proportio AO, ad NO, quam AN, ad MN. [i] Et per conuerſionem rationis, minor proportio AO, ad AN, quam AN, ad AM: hoc eſt, maior proportio AN, ad AM, quam AO, ad AN. [k] Cum ergo ſit, vt AN, ad AM, ita A I, ad AH: Et vt A O, ad A N, ita AN, ad AG: maior quoque erit proportio A I, ad AH, hoc eſt, ad AK, quam AH, ad AG, hoc eſt, ad AL: [l] Diuidendo ergo maior etiam proportio erit IK, ad AK, hoc eſt, ad AH, quam HL, ad AL: [m] Et conuertendo minor erit proportio AK, ad KI, quam AL, ad LH: hoc eſt, maior proportio erit AL, ad LH, quam A H, ad KI. [n] Quare cum maior adhuc ſit proportio A H, ad LH, quam AL, ad eandem L H: multo maior proportio erit AH, ad LH, quam eiuſdem AH, ad KI; [o] ac propterea recta LH, minor erit, quam KI. Quod eſt ſecundum. Ex quo fit, differentias tam tangentium, quàm ſecantium in tabula ſemper augeri ad finem vſque quadrantis: cuius quidem contrarium in ſinubus accidit, vt ſupra demonſtratum eſt. Quamobrem ſi plures ſint arcus æquali exceſſu progredientes, &c. Quod demonſtrandum erat.

g 1. huius. h 8. quin. i 30. quin. k 22. huius. l 29. quin. m 26. quinti. n 8. quin. o 10. quin.

COROLLARIVM.

Arcus tangentium æquales exceſſus habentiũ inæquales habẽt exceſſus.

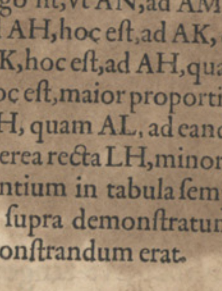
SEQVITVR hinc, ſi quotlibet arcuum tangentes æqualiter ſeſe excedant, arcus earum inæqualiter ſeſe excedere, exceſſusque maiorum arcuum eſſe minores: quam minorum. Omnium item ſecantium ſegmenta extra quadrantem eſſe inæqualia, minoraque eſſe illa, quæ principio quadrantis ſunt propinquiora. Quoniam enim poſitis arcubus D E, E F, æqualibus, oſtenſum fuit, rectam IH, maiorem eſſe quam H G; liquido conſtat, ſi ex HI, auferatur recta ipſi HG, æqualis, ſecantem inter duas AI, AH, ductam diuidere arcum E F, atque adeo abſcindere arcum minorem arcu DE, nempe partem arcus EF. Eademque ratio eſt de alijs.

RVRSVS quia demonſtratum eſt, ſecantem AG, minorem eſſe, quam AH, fit, vt ablatis ſemidiametris æqualibus AD, AE, ſegmentum DG, reliquum minus ſit ſegmento reliquo EH, &c.

THEOR. 16. PROPOS. 24.

Arcuum inæqualium tangẽs maioris ad tangentem minoris proportionem habet maiorẽ, quã ſecans maioris ad ſecantem minoris.

TANGENS arcus maioris ad tangentem minoris arcus maiorem proportionem habet, quam ſecans maioris eiuſdem arcus ad ſecantem eiuſdem minoris.



REPETATVR figura præcedentis propoſ. Dico maiorem eſſe proportionem tangentis CI, ad tangentem CH, quam ſecantis AI, ad ſecantẽ A H. [a] Quoniam enim eſt, vt AF, ad FM, ita AI, ad IC: Item vt AE, ad EN, ita AH, ad HC. [b] Eſt autem minor proportio ſemidiametri AF, ad FM, quam ſemidiametri AE, ad EN; quod ſinus FM, maioris arcus CF, maior ſit ſinu EN, minoris arcus CE, vt in expoſitione definitionum dictum eſt. Igitur minor quoque erit proportio A I, ad I C, quam A H, ad H C: [c] Et permutando, minor etiam proportio AI, ad AH, quam I C, ad H C; hoc eſt, tangens C I, ad tangentem C H, habebit maiorem proportionem, quam ſecans AI, ad ſecantem A H. Quocirca Tangens arcus maioris ad tangentem minoris arcus, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 4. ſexti. b 8. quin. c ſchol. 27. 5.

SEQVVNTVR TABVLÆ TANGENTIUM atque ſecantium.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	0	1	2	3	4	
0	0000	174550	349207	524078	699269	60
1	2909	177459	352120	526995	702193	59
2	5818	180369	355033	529911	705116	58
3	8727	183279	357945	532828	708039	57
4	1163	186189	360858	535745	710962	56
5	14544	189100	363770	538663	713886	55
6	17452	192010	366683	541580	716809	54
7	20361	194920	369596	544498	719733	53
8	23270	197830	372508	547415	722657	52
9	26179	200740	375421	550333	725580	51
10	29088	203650	378334	553251	728504	50
11	31996	206561	381247	556169	731428	49
12	34905	209471	384160	559087	734353	48
13	37814	212381	387073	562005	737277	47
14	40723	215291	389987	564923	740202	46
15	43632	218201	392900	567841	743127	45
16	46541	221111	395814	570759	746052	44
17	49450	224022	398727	573678	748978	43
18	52359	226932	401641	576596	751903	42
19	55268	229842	404554	579514	754829	41
20	58177	232752	407468	582433	757754	40
21	61086	235663	410382	585352	760680	39
22	63995	238574	413295	588270	763606	38
23	66904	241485	416209	591189	766532	37
24	69813	244395	419123	594108	769459	36
25	72722	247306	422037	597028	772385	35
26	75631	250217	424951	599947	775311	34
27	78540	253128	427866	602866	778238	33
28	81450	256038	430780	605786	781164	32
29	84359	258949	433694	608705	784091	31
30	87268	261859	436609	611625	787017	30
31	90177	264770	439523	614544	789944	29
32	93086	267681	442438	617464	792871	28
33	95995	270592	445353	620384	795799	27
34	98904	273503	448267	623304	798726	26
35	101814	276414	451182	626225	801653	25
36	104723	279325	454097	629145	804581	24
37	107632	282237	457012	632066	807509	23
38	110541	285148	459927	634986	810437	22
39	113450	288059	462842	637907	813365	21
40	116360	290970	465757	640828	816293	20
41	119269	293882	468672	643749	819221	19
42	122178	296794	471588	646671	822150	18
43	125088	299705	474503	649592	825079	17
44	127997	302617	477419	652514	828008	16
45	130906	305528	480335	655435	830937	15
46	133816	308439	483251	658357	833866	14
47	136725	311351	486166	661278	836795	13
48	139635	314262	489082	664200	839724	12
49	142544	317174	491997	667121	842653	11
50	145454	320085	494913	670043	845583	10
51	148363	322997	497829	672965	848513	9
52	151273	325909	500745	675888	851443	8
53	154182	328821	503662	678810	854374	7
54	159092	331733	506578	681733	857304	6
55	160001	334645	509495	684656	860234	5
56	162911	337558	512411	687578	863164	4
57	165820	340470	515328	690501	866095	3
58	168730	343382	518244	693423	869025	2
59	171640	346295	521161	696346	871956	1
60	174550	349207	524078	699269	874886	0
	89	88	87	86	85	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	5	6	7	8	9	
0	874886	1051042	1227846	1405408	1583844	60
1	877817	1053983	1230798	1408374	1586826	59
2	880748	1056924	1233751	1411341	1589808	58
3	883680	1059866	1236704	1414308	1592791	57
4	886611	1062808	1239658	1417275	15[illegible]74	56
5	889543	1065750	1242612	1420242	1598757	55
6	892475	1068692	1245566	1423210	1601740	54
7	895407	1071634	1248520	1426178	1604723	53
8	898339	1074576	1251474	1429146	1607707	52
9	901271	1077518	1254428	1432115	1610691	51
10	904204	1080461	1257383	1435084	1613675	50
11	907137	1083404	1260338	1438053	1616660	49
12	910070	1086347	1263293	1441022	1619645	48
13	913003	1089291	1266249	1443992	1622630	47
14	915936	1092234	1269205	1446961	1625615	46
15	918870	1095178	1272161	1449931	1628601	45
16	921804	1098122	1275117	1452901	1631587	44
17	924738	1101066	1278073	1455871	1634573	43
18	927771	1104010	1281029	1458842	1637560	42
19	930605	1106954	1283986	1461813	1640547	41
20	933539	1109899	1286943	1464784	1643534	40
21	936473	1112844	1289900	1467755	1646522	39
22	939407	1115789	1292857	1470727	1649510	38
23	942342	1118734	1295815	1473699	1652499	37
24	945277	1121680	1298773	1476671	1655488	36
25	948212	1124625	1301731	1479644	1658477	35
26	951147	1127571	1304689	1482617	1661466	34
27	954083	1130517	1307648	1485590	1664456	33
28	957019	1133463	1310607	1488563	1667446	32
29	959954	1136409	1313566	1491536	1670436	31
30	962890	1139355	1316525	1494510	1673426	30
31	965826	1142302	1319485	1497484	1676417	29
32	968763	1145249	1322445	1500458	1679408	28
33	971699	1148196	1325405	1503433	1682399	27
34	974636	1151144	1328365	1506408	1685390	26
35	977573	1154092	1331325	1509383	1688382	25
36	980509	1157040	1334285	1512358	1691374	24
37	983446	1159988	1337246	1515334	1694366	23
38	986383	1162936	1340207	1518310	1697358	22
39	989320	1165884	1343168	1521286	1700351	21
40	992257	1168832	1346129	1524262	1703344	20
41	995195	1171781	1349891	1527239	1706337	19
42	998133	1174730	1352453	1530216	1709331	18
43	1001072	1177679	1355015	1533193	1712325	17
44	1004010	1180628	1357977	1536170	1715319	16
45	1006949	1183577	1360940	1539148	1718313	15
46	1009887	1186527	1363903	1542126	1721308	14
47	1012825	1189478	1366866	1545104	1724304	13
48	1015763	1192427	1369830	1548082	1727300	12
49	1018702	1195377	1372793	1551061	1730296	11
50	1021641	1198328	1375757	1554040	1733292	10
51	1024580	1201279	1378721	1557019	1736287	9
52	1027519	1204230	1381686	1559999	1739284	8
53	1030459	1207181	1384650	1562979	1742281	7
54	1033399	1210132	1387615	1565959	1745278	6
55	1036339	1213084	1390580	1568939	1748275	5
56	1039279	1216036	1393545	1571920	1751273	4
57	1042219	1218988	1396510	1574901	1754271	3
58	1045160	1221940	1399476	1577882	1757270	2
59	1048101	1224892	1402442	1580863	1760269	1
60	1051042	1227845	1405408	1583844	1763268	0
	84	83	82	81	80	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	10	11	12	13	14	
0	1763268	1943803	2125565	2308682	2493280	60
1	1766268	1946822	2128605	2311746	2496370	59
2	1769268	1949841	2131646	2314810	2499411	58
3	1772268	1952861	2134687	2317875	2502552	57
4	1775269	1955881	2137729	2320940	2505643	56
5	1778270	1958901	2140771	2324006	2508735	55
6	1781271	1961922	2143814	2327072	2511827	54
7	1784272	1964943	2146857	2330139	2514920	53
8	1787274	1967964	2149900	2333206	2518013	52
9	1790276	1970985	2152944	2336273	2521106	51
10	1793278	1974007	2155988	2339341	2524200	50
11	1796281	1977029	2159032	2342419	2527294	49
12	1799284	1980052	2162077	2345478	2530389	48
13	1802287	1983075	2165122	2348547	2533484	47
14	1805291	1986098	2168167	2351616	2536580	46
15	1808295	1989122	2171213	2354686	2539676	45
16	1811299	1992146	2174259	2357757	2542773	44
17	1814303	1995171	2177306	2360828	2545870	43
18	1817308	1998196	2180352	2363899	2548968	42
19	1820313	2001221	2183400	2366971	2552066	41
20	1823318	2004247	2186448	2370043	2555165	40
21	1826324	2007273	2189496	2373116	2558264	39
22	1829329	2010299	2192544	2376189	2561364	38
23	1832335	2013326	2195593	2379263	2564464	37
24	1835342	2016353	2198642	2382337	2567564	36
25	1838349	2019380	2201692	2385411	2570665	35
26	1841357	2022408	2204742	2388486	2573766	34
27	1844365	2025436	2207792	2391561	2576868	33
28	1847373	2028464	2210843	2394636	2579970	32
29	1850382	2031493	2213894	2397712	2583073	31
30	1853391	2034522	2216946	2400788	2586176	30
31	1856400	2037552	2219998	2403865	2589280	29
32	1859409	2040582	2223051	2406942	2592384	28
33	1862419	2043612	N226104	2410020	2595489	27
34	1865429	2046643	2229157	2413098	2598594	26
35	1868439	2049674	2232211	2416176	260[illegible]0	25
36	1871449	2052705	2235265	2419255	2604806	24
37	1874460	2055737	2238319	2422334	2607912	23
38	1877471	2058769	2241374	2425414	2611019	22
39	1880482	2061801	2244429	2428494	2614126	21
40	1883494	2064834	2247485	2431574	2617234	20
41	1886506	2067867	2250541	2434655	2620342	19
42	1889518	2070900	2253597	2437736	2623451	18
43	1892531	2073934	2256654	2440818	2626560	17
44	1895544	2076968	2259711	2443900	2629670	16
45	1898558	2080002	2262769	2446983	2632780	15
46	1901572	2083037	2265827	2450066	2635891	14
47	1904586	2086073	2268885	2453150	2639002	13
48	1907601	2089109	2271944	2456234	2642114	12
49	1910616	2092145	2275003	2459319	2645226	11
50	1913632	2095182	2278063	2462404	2648339	10
51	1916648	2098219	2281123	2465490	2651452	9
52	1919664	2101256	2284183	2468576	2654566	8
53	1922680	2104293	2287244	2471662	2657680	7
54	1925697	2107331	2290305	2474749	2660795	6
55	1928714	2110369	2293367	2477836	2663910	5
56	1931731	2113407	2296429	2480924	2667026	4
57	1934749	2116446	2299492	2484012	2670142	3
58	1937767	2119485	2302555	2487101	2673258	2
59	1940785	2122525	2305618	2490191	2676375	1
60	1943803	2125565	2308682	493280	2679492	0
	79	78	77	76	75	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	15	16	17	18	19	
0	2679492	2867453	3057307	3249197	3443276	60
1	2682610	2870601	3060487	3252413	3446530	59
2	2685728	2873749	3063669	3255630	3449785	58
3	2688847	2876898	3066851	3258848	3453040	57
4	2691966	2880048	3070034	3262066	3456296	56
5	2695086	2883198	3073218	3265285	3459553	55
6	2698206	2886349	3076402	3268504	3462810	54
7	2701327	2889501	3079587	3271724	3466068	53
8	2704448	2892653	3082772	3274944	3469326	52
9	2707570	2895806	3085958	3278165	3472585	51
10	2710693	2898960	3089144	3281387	3475845	50
11	2713816	2902114	3092331	3284609	3479105	49
12	2716940	2905268	3095518	3287832	3482366	48
13	2720064	2908423	3098706	3291055	3485628	47
14	2723189	2911578	3101895	3294280	3488891	46
15	2726314	2914734	3105084	3297505	3492154	45
16	2729439	2917890	3108274	3300731	3495418	44
17	2732565	2921047	3111464	3303957	3498683	43
18	2735691	2924204	3114655	3307184	3501949	42
19	2738818	2927362	3117846	3310411	3505215	41
20	2741945	2930520	3121038	3313639	3508482	40
21	2745073	2933679	3124230	3316868	3511749	39
22	2748201	2936839	3127423	3320097	3515017	38
23	2751330	2939999	3130617	3323327	3518286	37
24	2754459	2943160	3133811	3326558	3521555	36
25	2757589	2946321	3137006	3329789	3524825	35
26	2760729	2949483	3140201	3333020	3528096	34
27	2763850	2952645	3143397	3336252	3531368	33
28	2766981	2955808	3146594	3339485	3534640	32
29	2770113	2958971	3149791	3342719	3537913	31
30	2773245	2962135	3152989	3345953	3541186	30
31	2776378	2965299	3156187	3349188	3544460	29
32	2779511	2968464	3159386	3352423	3547735	28
33	2782645	2971629	3162585	3355659	3551010	27
34	278577[illegible]	2974795	3165785	3358896	3554286	26
35	2788914	2977962	3168986	3362133	3557563	25
36	2792050	2981129	3172187	3365371	3560840	24
37	2795186	2984297	3175389	3368610	3564118	23
38	2798323	2987465	3178591	3371850	3567397	22
39	2801460	2990634	3181794	3375090	3570676	21
40	2804597	2993804	3184998	3378331	3573956	20
41	2807735	2996973	3188202	3381572	3577237	19
42	2810873	3000143	3191407	3384814	3580519	18
43	2814012	3003314	3194613	3388057	3583801	17
44	2817151	3006486	3197819	3391300	3587084	16
45	2820291	3009658	3201026	3394544	3590367	15
46	2823432	3012831	3204233	3397798	3593651	14
47	2826573	3016004	3207441	3401033	3596936	13
48	2829714	3019178	3210649	3404279	3600221	12
49	2832856	3022353	3213858	3407525	3603507	11
50	2835999	3025528	3217067	3410772	3606794	10
51	2839142	3028703	3220277	3414020	3610082	9
52	2842286	3031879	3223488	3417268	3613370	8
53	2845430	3035055	3226699	3420517	3616659	7
54	2848575	3038232	3229911	3423766	3619949	6
55	2851720	3041410	3233124	3427016	3623239	5
56	2854866	3044588	3236337	3430267	3626530	4
57	2858012	3047767	3239551	3433518	3629822	3
58	2861159	3050946	3242766	3436770	3633115	2
59	2864306	3054126	3245981	3440023	3636408	1
60	2867453	3057307	3249197	3443276	3639702	0
	74	73	72	71	70	

Gradus Quadrãtis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	20	21	22	23	24	
0	3639702	3838640	4040262	4244748	4452286	60
1	3642997	3841978	4043647	4248182	4455772	59
2	3646293	3845316	4047031	4251617	4459259	58
3	3649589	3848655	4050416	4255052	4462747	57
4	3652886	3851995	4053802	4258488	4466236	56
5	3656183	3855336	4057189	4261925	4469726	55
6	3659481	3858678	4060577	4265363	4473216	54
7	3662780	3862020	4063966	4268801	4476707	53
8	3666079	3865363	4067356	4272240	4480199	52
9	3669379	3868707	4070747	4275680	4483692	51
10	3672680	3872052	4074139	4279121	4487186	50
11	3675982	3875397	4077531	4282563	4490681	49
12	3679284	3878743	4080924	4286006	4494177	48
13	3682587	3882090	4084318	4289450	4497674	47
14	3685891	3885438	4087713	4292895	4501172	46
15	3689195	3888787	4091109	4296340	4504671	45
16	3692500	3892136	4094506	4299786	4508171	44
17	3695806	3895486	4097903	4303233	4511672	43
18	3699113	3898837	4101301	4306681	4515173	42
19	3702420	3902188	4104699	4310130	4518675	41
20	3705728	3905540	4108097	4313580	4522178	40
21	3709037	3908893	4111497	4317031	4525682	39
22	3712347	3912247	4114898	4320482	4529187	38
23	3715657	3915601	4118300	4323934	4532693	37
24	3718968	3918956	4121703	4327387	4536200	36
25	3722279	3922312	4125107	4330841	4539708	35
26	3725591	3925669	4128511	4334296	4543217	34
27	3728904	3929027	4131916	4337752	4546727	33
28	3732218	3932385	4135322	4341209	4550238	32
29	3735533	3935744	4138728	4344666	4553750	31
30	3738848	3939104	4142135	4348124	4557264	30
31	3742164	3942465	4145544	4351583	4560778	29
32	3745480	3945826	4148953	4355043	4564293	28
33	3748797	3949188	4152363	4358504	4567809	27
34	3752115	3952551	4155773	4361966	4571326	26
35	3755434	3955915	4159184	4365429	4574843	25
36	3758753	3959280	4162596	4368893	4578361	24
37	3762073	3962646	4166009	4372357	4581880	23
38	3765394	3966012	4169423	4375822	4585400	22
39	3768716	3969379	4172838	4379288	4588921	21
40	3772038	3972746	4176255	4382755	4592443	20
41	3775361	3976114	4179672	4386223	4595966	19
42	3778685	3979483	4183090	4389692	4599490	18
43	3782010	3982853	4186509	4393162	4603015	17
44	3785335	3986224	4189928	4396633	6406541	16
45	3788661	3989596	4193348	4400105	4610068	15
46	3791988	3992969	4196769	4403578	4613596	14
47	3795315	3996342	4200191	4407051	4617125	13
48	3798643	3999716	4203613	4410525	4620654	12
49	3801972	4003090	4207036	4414000	4624184	11
50	3805302	4006465	4210460	4417476	4627715	10
51	3808632	4009841	4213885	4420953	4631247	9
52	3811963	4013217	4217311	4424431	4634780	8
53	3815295	4016594	4220738	4427910	4638314	7
54	3818628	4019972	4224165	4431390	4641849	6
55	3821961	4023351	4227593	4434871	4645385	5
56	3825295	4026731	4231022	4438352	4648922	4
57	3828630	4030112	4234452	4441834	4652460	3
58	3831966	4033494	4237883	4445317	4655999	2
59	3835303	4036877	4241315	4448801	4659540	1
60	3838640	4040262	4244748	4452286	4663081	0
	69	68	67	66	65	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	25	26	27	28	29	
0	4663081	4877328	5095254	5317094	5543090	60
1	4666623	4880930	5098919	5320826	5546893	59
2	4670166	4884533	5102585	5324559	5550697	58
3	4673710	4888137	5106252	5328293	5554503	57
4	4677255	4891742	5109920	5332028	5558310	56
5	4680801	4895347	5113589	5335765	5562118	55
6	4684348	4898953	5117259	5339503	5565927	54
7	4687896	4902560	5120930	5343242	5569738	53
8	4691444	4906168	5124602	5346982	5573550	52
9	4694993	4909777	5128275	5350723	5577363	51
10	4698543	4913387	5131949	5354465	5581177	50
11	4702094	4916998	5135625	5358209	5584993	49
12	4705646	4920610	5139302	5361954	5588810	48
13	4709199	4924223	5142980	5365700	5592628	47
14	4712753	4927838	5146659	5369447	5596447	46
15	4716308	4931454	5150339	5373195	5600268	45
16	4719864	4935071	5154020	5376944	5604090	44
17	4723422	4938689	5157702	5380694	5607913	43
18	4726981	4942308	5161385	5384445	5611737	42
19	4730541	4945928	5165069	5388198	5615562	41
20	4734102	4949549	5168755	5391952	5619388	40
21	4737664	4953171	5172442	5395707	5623216	39
22	4741227	4956794	5176130	5399463	5627045	38
23	4744790	4960418	5179819	5403221	5630875	37
24	4748354	4964043	5183509	5406980	5634707	36
25	4751919	4967669	5187200	5410740	5638540	35
26	4755485	4971296	5190892	5414501	5642374	34
27	4759052	4974924	5194585	5418263	5646210	33
28	4762620	4978553	5198279	5422026	5650047	32
29	4766189	4982184	5201974	5425791	5653885	31
30	4769759	4985816	5205670	5429557	5657725	30
31	4773330	4989448	5209368	5433324	5661566	29
32	4776902	4993081	5213067	5437092	5665408	28
33	4780475	4996716	5216767	5440861	5669251	27
34	4784049	5000352	5220468	5444632	5673096	26
35	4787624	5003989	5224170	5448404	5676942	25
36	4791200	5007627	5227873	5452177	5680789	24
37	4794777	5011266	5231577	5455951	5684637	23
38	4798355	5014906	5235283	5459726	5688486	22
39	4801934	5018547	5238990	5463503	5692337	21
40	4805515	5022189	5242698	5467281	5696189	20
41	4809096	5025832	5246407	5471060	5700043	19
42	4812678	5029476	5250117	5474840	5703898	18
43	4816261	5033121	5253828	5478621	5707754	17
44	4819845	5036767	5257540	5482404	5711611	16
45	4823430	5040414	5261254	5486188	5715469	15
46	4827016	5044062	5264969	5489973	5719329	14
47	4830603	5047712	5268685	5493759	5723190	13
48	4834191	5051363	5272402	5497546	5727052	12
49	4837780	5055015	5276120	5501335	5730916	11
50	4841371	5058668	5279839	5505125	5734781	10
51	4844962	5062322	5283959	5508916	5738647	9
52	4848554	5065977	5287280	5512708	5742515	8
53	4852147	5069633	5291003	5516501	5746384	7
54	4855741	5073290	5294727	5520296	5750254	6
55	4859336	5076948	5298452	5524092	5754125	5
56	4862932	5080607	5302178	5527889	5757998	4
57	4866525	5084267	5305905	5531687	5761872	3
58	4870127	5087928	5309633	5535487	5765747	2
59	4873727	5091590	5313363	5539288	5769624	1
60	4877328	5095254	5317094	5543090	5773502	0
	64	63	62	61	60	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	30	31	32	33	34	
0	5773502	6008606	6248693	6494076	6745085	60
1	5777381	6012566	6252738	6498212	6749318	59
2	5781262	6016528	6256785	6502350	6753553	58
3	5785144	6020491	6260834	6506489	6757789	57
4	5789027	6024455	6264884	6510630	6762027	56
5	5792911	6028420	6268935	6514773	6766267	55
6	5796797	6032387	6272988	6518917	6770508	54
7	5800684	6036355	6277042	6523063	6774751	53
8	5804572	6040324	6281098	6527200	6778996	52
9	5808462	6044295	6285155	6531359	6783243	51
10	5812353	6048267	6289214	6535510	6787491	50
11	5816245	6052241	6293274	6539662	6791741	49
12	5820139	6056216	6297336	6543816	6795993	48
13	5824034	6060193	6301399	6547971	6800246	47
14	5827930	6064171	6305464	6552128	6804501	46
15	5831828	6068150	6309530	6556287	6808758	45
16	5835727	6072131	6313598	6560447	6813016	44
17	5839627	6076113	6317667	6564609	6817276	43
18	5843528	6080096	6321738	6568772	6821538	42
19	5847431	6084081	6325810	6572937	6825801	41
20	5851335	6088067	6329883	6577103	6830066	40
21	5855241	6092055	6333958	6581271	6834333	39
22	5859148	6096044	6338034	6585440	6838602	38
23	5863056	6100035	6342112	6589611	6842872	37
24	5866966	6104027	6346191	6593784	6847144	36
25	5870877	6108020	6350272	6597958	6851417	35
26	5874489	6112015	6354355	6602134	6855692	34
27	5878702	6116011	6358439	6606312	6859969	33
28	5882617	6120009	6362525	6610491	6864247	32
29	5886533	6124008	6366613	6614672	6868527	31
30	5890450	6128008	6370702	6618855	6872809	30
31	5894369	6132010	6374792	6623039	6877093	29
32	5898289	6136013	6378884	6627225	6881379	28
33	5902211	6140018	6382977	6631413	6885666	27
34	5906134	6144024	6387072	6635603	6889955	26
35	5910058	6148032	6391169	6639792	6894246	25
36	5913984	6152041	6395267	6643984	6898539	24
37	5917911	6156052	6399366	6648178	6902833	23
38	5921839	6160064	6403467	6652375	6907129	22
39	5925769	6164077	6407569	6656570	6911426	21
40	5929700	6168092	6411673	6660768	6915725	20
41	5933633	6172108	6415779	6664968	6920026	19
42	5937567	6176126	6419886	6669170	6924329	18
43	5941502	6180147	6423995	6673373	6928634	17
44	5945438	6184168	6428105	6677578	6932940	16
45	5949376	6188190	6432216	6681785	6937248	15
46	5955315	6192213	6436329	6685994	6941558	14
47	5957255	6196237	6440444	6690204	6945869	13
48	5961197	6200263	6444560	6694416	6950182	12
49	5965140	6204290	6448678	6698630	6954497	11
50	5969084	6208319	6452798	6702845	6958813	10
51	5973030	6212350	6456919	6707062	6963131	9
52	5976776	6216382	6461042	6711281	6967451	8
53	5980926	6220416	6465166	6715501	6971773	7
54	5984876	6224451	6469292	6719723	6976097	6
55	5988827	6228488	6473419	6723946	6980423	5
56	5992780	6232526	6477548	6728171	6984750	4
57	5996734	6236566	6481678	6732397	6989079	3
58	6000690	6240607	6485809	6736625	6993409	2
59	6004647	6244649	6489942	6740854	6997741	1
60	6008606	6248693	6494076	6745085	7002075	0
	59	58	57	56	55	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementoruum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	35	36	37	38	39	
0	7002075	7265424	7535541	7812856	8097840	60
1	7006411	7269869	7540103	7817542	8102658	59
2	7010749	7274316	7544667	7822230	8107478	58
3	7015088	7278765	7549233	7826920	8112300	57
4	7019429	7283216	7553801	7831612	8117124	56
5	7023772	7287669	7558371	7836306	8121951	55
6	7028117	7292124	7562943	7841002	8126780	54
7	7032463	7296581	7567517	7845700	8131611	53
8	7036811	7301040	7572093	7850400	8136444	52
9	7041161	7305501	7576670	7855102	8141280	51
10	7045513	7309963	7581249	7859807	8146118	50
11	7049867	7314427	7585830	7864514	8150958	49
12	7054223	7318893	7590413	7869223	8155801	48
13	7058581	7323361	7594999	7873934	8160646	47
14	7062940	7327831	7599587	7878647	8165493	46
15	7067301	7332303	7604177	7883363	8170343	45
16	7071664	7336777	7608769	7888081	8175195	44
17	7076029	7341253	7613363	7892801	8180049	43
18	7080395	7345731	7617959	7897523	8184905	42
19	7084763	7350210	7622557	7902247	8189764	41
20	7089133	7354691	7627157	7906973	8194625	40
21	7093505	7359174	7631759	7911702	8199488	39
22	7097879	7363659	7636363	7916433	8204354	38
23	7102254	7368146	7640969	7921166	8209222	37
24	7106631	7372635	7645577	7925901	8214092	36
25	7111010	7377126	7650187	7930638	8218965	35
26	7115391	7381619	7654799	7935378	8223840	34
27	7119773	7386114	7659413	7940120	8228717	33
28	7124167	7390611	7664030	7944864	8233597	32
29	7128543	7395110	7668649	7949610	8238479	31
30	7132931	7399610	7673270	7954358	8243363	30
31	7137321	7404112	7677893	7959109	8248250	29
32	7141713	7408616	7682518	7963862	8253139	28
33	7146106	7413122	7687145	7968617	8258031	27
34	7150501	7417630	7691774	7973374	8262925	26
35	7154898	7422140	7696405	7978133	8267821	25
36	7159297	7426652	7701038	7982895	8272720	24
37	7163698	7431167	7705673	7987659	8277621	23
38	7168100	7435684	7710310	7992425	8282524	22
39	7172504	7440203	7714949	7997193	8287429	21
40	7176910	7444724	7719590	8001963	8292337	20
41	7181318	7449246	7724233	8006736	8297247	19
42	7185728	7453770	7728878	8011511	8302160	18
43	7190140	7458296	7733525	8016288	8307075	17
44	7194554	7462824	7738175	8021067	8311992	16
45	7198970	7467354	7742827	8025849	8316912	15
46	7203387	7471886	7747481	8030633	8321834	14
47	7207806	7476420	7752137	8035419	8326759	13
48	7212227	7480956	7756795	8040207	8331686	12
49	7216650	7485494	7761455	8044997	8336615	11
50	7221075	7490033	7766117	8049790	8341547	10
51	7225502	7494574	7770781	8054585	8346481	9
52	7229931	7499117	7775447	8059382	8351418	8
53	7234362	7503663	7780116	8064181	8356357	7
54	7238794	7508211	7784787	8068983	8361298	6
55	7243228	7512761	7789460	8073787	8366242	5
56	7247664	7517313	7794135	8078593	8371188	4
57	7252102	7521867	7798812	8083401	8376136	3
58	7256541	7526423	7803491	8088212	8381087	2
59	7260982	7530981	7808172	8093025	8386040	1
60	7265424	7535541	7812856	8097840	8390996	0
	54	53	52	51	50	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	40	41	42	43	44	
0	8390996	8692867	9004040	9325151	9656888	60
1	8395954	8697975	9009308	9330591	9662511	59
2	8400915	8703085	9014579	9336034	9668137	58
3	8405878	8708198	9019853	9341480	9673766	57
4	8410844	8713344	9025130	9346929	9679398	56
5	8415812	8718433	9030410	9352381	9685034	55
6	8420782	8723555	9035693	9357835	9690674	54
7	8425754	8728679	9040978	9363292	9696315	53
8	8430729	8733806	9046266	9368752	9701960	52
9	8435706	8738935	9051557	9374215	9707609	51
10	8440686	8744067	9056850	9379682	9713261	50
11	8445668	8749201	9062146	9385152	9718916	49
12	8450653	8754338	9067445	9390625	9724574	48
13	8455640	8759478	9072747	9396101	9730235	47
14	8460630	8764620	9078052	9401580	9735900	46
15	8465622	8769764	9083360	9407062	9741568	45
16	8470617	8774911	9088670	9412547	9747239	44
17	8475614	8780061	9093983	9418034	9752913	43
18	8480614	8785214	9099299	9423524	9758591	42
19	8485617	8790369	9104618	9429017	9764272	41
20	8490622	8795527	9109940	9434513	9769956	40
21	8495629	8800688	9115265	9440012	9775643	39
22	8500639	8805851	9120593	9445514	9781334	38
23	8505651	8811017	9125923	9451019	9787028	37
24	8510666	8816186	9131256	9456528	9792725	36
25	8515683	8821357	9136592	9462040	9798425	35
26	8520703	8826531	9141930	9467555	9804128	34
27	8525725	8831708	9147271	9473073	9809835	33
28	8530750	8836887	9152615	9478594	9815545	32
29	8535777	8842069	9157962	9484118	9821258	31
30	8540806	8847253	9163312	9489645	9826974	30
31	8545838	8852440	9168665	9495175	9832694	29
32	8550872	8857630	9174021	9500708	9838417	28
33	8555909	8862822	9179380	9506244	9844143	27
34	8560949	8868017	9184741	9511783	9849872	26
35	8565991	8873015	9190105	9517325	9855605	25
36	8571036	8878415	9195472	9522870	9861341	24
37	8576083	8883628	9200842	9528419	9867180	23
38	8581133	8888824	9206215	9533971	9872922	22
39	8586185	8894033	9211590	9539526	9878668	21
40	8591239	8899244	9216968	9545084	9884317	20
41	8596296	8904458	9222349	9550645	9890070	19
42	8601355	8909675	9227733	9556209	9895826	18
43	8606417	8914894	9233120	9561776	9901585	17
44	8611482	8920116	9238510	9567346	9907347	16
45	8616549	8925341	9243903	9572919	9913113	15
46	8621619	8930568	9249299	9578495	9918882	14
47	8626692	8935798	9254698	9584074	9924654	13
48	8631767	8941031	9260100	9589656	9930430	12
49	8636845	8946267	9265505	9595241	9936209	11
50	8641926	8951506	9270913	9600830	9941991	10
51	8647009	8956747	9276324	9606422	9947777	9
52	8652095	8961991	9281738	9612017	9953566	8
53	8657183	8967238	9287155	9617615	9959359	7
54	8662273	8972487	9292574	9623216	9965155	6
55	8667366	8977739	9297996	9628820	9970954	5
56	8672461	8982994	9303421	9634427	9976756	4
57	8677559	8988252	9308849	9640037	9982562	3
58	8682659	8993512	9314280	9645651	9988371	2
59	8687762	8998775	9319714	9651268	9994184	1
60	8692867	9004040	9325151	9656888	10000000	0
	49	48	47	46	45	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	45	46	47	48	
0	10000000	10355302	10723686	11106124	60
1	10005820	10361332	10729942	11112623	59
2	10011643	10367365	10736202	11119126	58
3	10017469	10373402	10742466	11125634	57
4	10023299	10379443	10748734	11132146	56
5	10029132	10385487	10755006	11138662	55
6	10034968	10391535	10761282	11145182	54
7	10040808	10397587	10767562	11151706	53
8	10046651	10403643	10773845	11158235	52
9	10052497	10409702	10780132	11164768	51
10	10058347	10415765	10786423	11171305	50
11	10064201	10421832	10792718	11177846	49
12	10070058	10427902	10799017	11184392	48
13	10075918	10433976	10805320	11190942	47
14	10081782	10440054	10811627	11197496	46
15	10087649	10446135	10817938	11204054	45
16	10093520	10452220	10824253	11210617	44
17	10099394	10458309	10830572	11217184	43
18	10105272	10464401	10836895	11223755	42
19	10111153	10470497	10843222	11230330	41
20	10117038	10476597	10849554	11236910	40
21	10122926	10482701	10855889	11243494	39
22	10128818	10488808	10862228	11250082	38
23	10134713	10494919	10868571	11256675	37
24	10140611	10501034	10874918	11263272	36
25	10146513	10507153	10881269	11269873	35
26	10152418	10513275	10887624	11276478	34
27	10158327	10519401	10893983	11283088	33
28	10164239	10525531	10900346	11289702	32
29	10170154	10531664	10906713	11296321	31
30	10176073	10537801	10913084	11302944	30
31	10181996	10543942	10919459	11309571	29
32	10187922	10550087	10925838	11316203	28
33	10193852	10556235	10932221	11322899	27
34	10199785	10562387	10938608	11329480	26
35	10205722	10568543	10945000	11336125	25
36	10211663	10574703	10951396	11342774	24
37	10217607	10580867	10957796	11349428	23
38	10223555	10587034	10964200	11356086	22
39	10229506	10593205	10970608	11362748	21
40	10235460	10599280	10977020	11369415	20
41	10241418	10605559	10983436	11376086	19
42	10247380	10611742	10989856	11382762	18
43	10253345	10617929	10996280	11389442	17
44	10259314	10624119	11002708	11396126	16
45	10265286	10630313	11009140	11402815	15
46	10271262	10636511	11015577	11409508	14
47	10277242	1[illegible]42713	11022028	11416206	13
48	10283225	10648919	11028463	11422908	12
49	10289212	1[illegible]5128	11034912	11429615	11
50	10295202	[illegible]1341	11041365	11436326	10
51	10301196	[illegible]0667558	11047822	11443042	9
52	10307193	10673779	11054283	11449762	8
53	10313194	10680004	11060748	11456487	7
54	10319199	10686233	11067218	11463216	6
55	10325207	10692466	11073692	11469950	5
56	10331219	10698702	11080170	11476688	4
57	10337234	10704942	11086652	11483431	3
58	10343253	10711186	11093138	11490178	2
59	10349276	10717434	11099629	11496929	1
60	10355302	10723686	11106124	11503684	0
	44	43	42	41	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentib. complementorū arcuum eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	49	50	51	52	
0	11503684	11917537	12348972	12799416	60
1	11510444	11924580	12356320	12807093	59
2	11517208	11931628	12363673	12814776	58
3	11523977	11938680	12371031	12822465	57
4	11530751	11945737	12378394	12830159	56
5	11537529	11952799	12385762	12837859	55
6	11544312	11959866	12393136	12845565	54
7	11551100	11966938	12400515	12853277	53
8	11557893	11974015	12407999	12860994	52
9	11564691	11981097	12415288	12868717	51
10	11571494	11988183	12422683	12876445	50
11	11578301	11995274	12430083	12884179	49
12	11585112	12002370	12437489	12891919	48
13	11591928	12009471	12444900	12899665	47
14	11598748	12016578	12452317	12907417	46
15	11605572	12023690	12459739	12915175	45
16	11612401	12030807	12467167	12922939	44
17	11619234	12037929	12474600	12930709	43
18	11626072	12045056	12482039	12938485	42
19	11632915	12052188	12489484	12946267	41
20	11639763	12059325	12496934	12954055	40
21	11646615	12066467	12504389	12961848	39
22	11653472	12073614	12511850	12969647	38
23	11660334	12080766	12519316	12977457	37
24	11667200	12087923	12526787	12985263	36
25	11674071	12095085	12534264	12993080	35
26	11680947	12102252	12541746	13000903	34
27	11687827	12109424	12549233	13008732	33
28	11694712	12116601	12556725	13016567	32
29	11701602	12123783	12564222	13024407	31
30	11708497	12130970	12571724	13032253	30
31	11715396	12138162	12579232	13040105	29
32	11722300	12145359	12586746	13047963	28
33	11729208	12152561	12594265	13055827	27
34	11736121	12159768	12601790	13063697	26
35	11743039	12166981	12609321	13071573	25
36	11749962	12174199	12616858	13079455	24
37	11756989	12181422	12624400	13087343	23
38	11763821	12188650	12631948	13095237	22
39	11770758	12195883	12639501	13103138	21
40	11777700	12203121	12647060	13111045	20
41	11784646	12210364	12654624	13118958	19
42	11791597	12217613	12662194	13126877	18
43	11798553	12224867	12669769	13134802	17
44	11805514	12232126	12677350	13142732	16
45	11812479	12239390	12684937	13150668	15
46	11819449	12246659	12692530	13158610	14
47	11826424	12253933	12700128	13166558	13
48	11833404	12261212	12707732	13174512	12
49	11840388	12268496	12715341	13182472	11
50	11847377	12275786	12722956	13190438	10
51	11854371	12283081	12730577	13198411	9
52	11861370	12290381	12738203	13206390	8
53	11868374	12297687	12745835	13214375	7
54	11875383	12304998	12753473	13222367	6
55	11882397	12312314	12761116	13230365	5
56	11889417	12319635	12768765	13238369	4
57	11896438	12326961	12776420	13246379	3
58	11903466	12334293	12784080	13254396	2
59	11910499	12341630	12791745	13262419	1
60	11917537	12348972	12799416	13270448	0
	40	39	38	37	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentib. complementorū arcuū eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	53	54	55	56	
0	13270448	13763820	14281480	14825610	60
1	13278483	13772243	14290325	14834916	59
2	13286524	13780673	14299177	14844230	58
3	13294571	13789109	14308037	14853553	57
4	13302624	13797552	14316905	14862884	56
5	13310683	13806002	14325780	14872223	55
6	13318749	13814459	14334662	14881570	54
7	13326821	13822922	14343552	14890925	53
8	13334899	13831392	14352451	14900288	52
9	13342984	13839869	14361354	14909659	51
10	13351075	13848352	14370266	14919038	50
11	13359172	13856842	14379186	14928426	49
12	13367276	13865339	14388113	14937822	48
13	13375386	13873843	14397048	14947226	47
14	13383502	13882354	14405990	14956638	46
15	13391624	13890872	14414939	14966058	45
16	13399753	13899397	14423896	14975486	44
17	13407888	13907930	14432861	14984923	43
18	13416029	13916470	14441833	14994368	42
19	13424177	13925017	14450812	15003821	41
20	13432331	13933571	14459799	15013283	40
21	13440492	13942131	14468794	15022753	39
22	13448659	13950698	14477797	15032231	38
23	13456832	13959272	14486807	15041717	37
24	13465011	13967853	14495825	15051211	36
25	13473197	13976441	14504850	15060714	35
26	13481390	13985035	14513883	15070225	34
27	13489589	13993636	14522924	15079744	33
28	13497794	14002244	14531972	15089271	32
29	13506006	14010859	14541028	15098807	31
30	13514224	14019481	14550091	15108351	30
31	13522449	14028110	14559162	15117903	29
32	13530680	14036746	14568241	15127464	28
33	13538918	14045389	14577327	15137034	27
34	13547162	14054040	14586421	15146612	26
35	13555413	14062698	14595523	15156199	25
36	13563670	14071363	14604633	15165794	24
37	13571834	14080035	14613750	15175398	23
38	13580104	14088715	14622875	15185011	22
39	13588381	14097402	14632007	15194632	21
40	13596764	14106097	14641146	15204261	20
41	13605054	14114798	14650293	15213899	19
42	13613350	14123506	14659449	15223545	18
43	13621653	14132221	14668613	15233200	17
44	13629963	14140923	14677785	15242863	16
45	13638279	14149672	14686965	15252535	15
46	13646602	14158409	14696153	15262[illegible]16	14
47	13654932	14167153	14705349	15271905	13
48	13663268	14175904	14714553	15281603	12
49	13671610	14184663	14723765	15291309	11
50	13679959	14193429	14732985	15301024	10
51	13688315	14202202	14742212	15310748	9
52	13696677	14210982	14751447	15320481	8
53	13705046	14219769	14760690	15330222	7
54	13713422	14228563	14769941	15339972	6
55	13721805	14237365	14779200	15349730	5
56	13730194	14246174	14788466	15359497	4
57	13738590	14254990	14797740	15369273	3
58	13746993	14263813	14807022	15379057	2
59	13755403	14272643	14816312	15388850	1
60	13763820	14281480	14825610	15398651	0
	36	35	34	33	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentib. complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	57	58	59	60	
0	15398651	16003347	16642794	17320508	60
1	15408461	16013710	16653766	17332150	59
2	15418280	16024083	16664749	17343804	58
3	15428108	16034466	16675742	17355469	57
4	15437945	16044859	16686746	17367146	56
5	15447791	16055261	16697760	17378834	55
6	15457646	16065673	16708785	17390534	54
7	15467510	16076095	16719820	17402246	53
8	15477382	16086527	16730866	17413969	52
9	15487263	16096968	16741922	17425704	51
10	15497153	16107419	16752989	17437451	50
11	15507052	16117880	16764067	17449210	49
12	15516960	16128351	16775156	17460981	48
13	15526877	16138832	16786256	17472764	47
14	15536803	16149322	16797367	17484559	46
15	15546738	16159822	16808489	17496366	45
16	15556682	16170332	16819621	17508185	44
17	15566636	16180852	16830764	17520026	43
18	15576599	16191381	16841918	17531869	42
19	15586571	16201920	16853083	17543724	41
20	15596552	16212469	16864259	17555591	40
21	15606542	16223028	16875446	17567470	39
22	15616541	16233597	16886644	17579362	38
23	15626549	16244176	16897853	17591266	37
24	15636566	16254766	16909074	17603182	36
25	15646592	16265366	16920306	17615111	35
26	15656627	16275976	16931549	17627052	34
27	15666671	16286596	16942803	17639006	33
28	15676724	16297226	16954068	17650972	32
29	15686786	16307866	16965344	17662951	31
30	15696857	16318516	16976631	17674941	30
31	15706938	16329176	16987929	17686945	29
32	15717028	16339847	16999239	17698960	28
33	15727127	16350528	17010560	17710987	27
34	15737235	16361219	17021892	17723027	26
35	15747353	16371920	17033236	17735079	25
36	15757480	16382631	17044591	17747143	24
37	15767616	16393352	17055957	17759220	23
38	15777761	16404083	17067325	17771309	22
39	15787915	16414824	17078714	17783410	21
40	15798078	16425575	17090115	17795524	20
41	15808251	16436337	17101527	17808651	19
42	15818433	16447109	17112950	17819790	18
43	15828625	16457892	17124384	17831942	17
44	15838827	16468685	17135829	17844107	16
45	15849038	16479488	17147285	17856285	15
46	15859259	16490302	17158752	17868475	14
47	15869489	16501126	17170231	17880678	13
48	15879729	16511960	17181721	17892894	12
49	15889979	16522805	17193222	17905123	11
50	15900238	16533660	17204734	17917364	10
51	15910507	16544526	17216258	17929618	9
52	15920785	16555402	17227794	17941885	8
53	15931073	16566289	17239342	17954164	7
54	15941370	16577186	17250902	17966456	6
55	15951676	16588094	17262473	17978761	5
56	15961992	16599013	17274056	17991079	4
57	15972317	16609942	17285651	18003410	3
58	15982651	16620882	17297258	18015753	2
59	15992994	16631833	17308877	18028109	1
60	16003347	16642794	17320508	18040478	0
	32	31	30	29	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

	61	62	63	64	
0	18040478	18807265	19626104	20503034	60
1	18052860	18820471	19640225	20518180	59
2	18065255	18833691	19654362	20533344	58
3	18077663	18846925	19668516	20548526	57
4	18090084	18860174	19682686	20563726	56
5	18102518	18873437	19696872	20578945	55
6	18114966	18886715	19711074	20594182	54
7	18127427	18900007	19725293	20609437	53
8	18139901	18913314	19739528	20624711	52
9	18152388	18926636	19753780	20640003	51
10	18164889	18939972	19768048	20655313	50
11	18177403	18953323	19782333	20670642	49
12	18189930	18966689	19796634	20685989	48
13	18202470	18980070	19810951	20701355	47
14	18215024	18993466	19825285	20716739	46
15	18227591	19006876	19839635	20732142	45
16	18240171	19020301	19854002	20747564	44
17	18252765	19033741	19868386	20763004	43
18	18265372	19047196	19882786	20778463	42
19	18277992	19060665	19897203	20793941	41
20	18290626	19074149	19911637	20809438	40
21	18303273	19087648	19926088	20824953	39
22	18315934	19101162	19940555	20840487	38
23	18328608	19114691	19955039	20856040	37
24	18341296	19128235	19969540	20871612	36
25	18353997	19141795	19984057	20887202	35
26	18366712	19155370	19998591	20902811	34
27	18379440	19168960	20013142	20918439	33
28	18392182	19182565	20027709	20934086	32
29	18404938	19196185	20042297	20949752	31
30	18417707	19209821	20056898	20965436	30
31	18430490	19223472	20071516	20981140	29
32	18443287	19237138	20086152	20996863	28
33	18456098	19250819	20100805	21012605	27
34	18468922	19264516	20115475	21028367	26
35	18481760	19278228	20130163	21044148	25
36	18494612	19291955	20144868	21059949	24
37	18507478	19305698	20159590	21075769	23
38	18520357	19319456	20174329	21091609	22
39	18533250	19333230	20189086	21107468	21
40	18546157	19347019	20203860	21123347	20
41	18559078	19360824	20218651	21139246	19
42	18572013	19374644	20233460	21155164	18
43	18584962	19388480	20248286	21171102	17
44	18597925	19402331	20263130	21187059	16
45	18610902	19416198	20277991	21203036	15
46	18623894	19430081	20292870	21219032	14
47	18636900	19443980	20307767	21235048	13
48	18649920	19457894	20322681	21251083	12
49	18662954	19471824	20337613	21267138	11
50	18676002	19485770	20352563	21283213	10
51	18689064	19499732	20367531	21299308	9
52	18702140	19513710	20382516	21315423	8
53	18715231	19527704	20397519	21331558	7
54	18728335	19541714	20412539	21347713	6
55	18741454	19555739	20427577	21363888	5
56	18754587	19569780	20442633	21380083	4
57	18767735	19583837	20457706	21396298	3
58	18780897	19597910	20472797	21412534	2
59	18794074	19611999	20487906	21428790	1
60	18807265	19626104	20503034	21445067	0
	28	27	26	25	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangẽtibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	65	66	67	68	
0	21445067	22460371	23558529	24750869	60
1	21461364	22477965	23577595	24771613	59
2	21477681	22495582	23596687	24792387	58
3	21494019	22513222	23615805	24813191	57
4	21510377	22530885	23634950	24834024	56
5	21526756	22548571	23654121	24854887	55
6	21543155	22566281	23673318	24875780	54
7	21559575	22584014	23692542	24896704	53
8	21576015	22601771	23711793	24917659	52
9	21592475	22619551	23731071	24938644	51
10	21608956	22637355	23750375	24959659	50
11	21625458	22655183	23769706	24980705	49
12	21641981	22673034	23789064	25001782	48
13	21658525	22690909	23808448	25022890	47
14	21675090	22708808	23827859	25044029	46
15	21691676	22726730	23847297	25065198	45
16	21708283	22744676	23866762	25086398	44
17	21724911	22762646	23886254	25107629	43
18	21741559	22780639	23905773	25128991	42
19	21758228	22798656	23925320	25150183	41
20	21774918	22816696	23944895	25171506	40
21	21791629	22834760	23964496	25192861	39
22	21808362	22852848	23984124	25214248	38
23	21825116	22870960	24003779	25235666	37
24	21841892	22889096	24023462	25257116	36
25	21858689	22907256	24043172	25278597	35
26	21875508	22925441	24062910	25300110	34
27	21892348	22943650	24082675	25321655	33
28	21909210	22961883	24102468	25343232	32
29	21926094	22980141	24122289	25364841	31
30	21943000	22998424	24142137	25386482	30
31	21959926	23016731	24162013	25408154	29
32	21976874	23035062	24181917	25429858	28
33	21993843	23053418	24201849	25451594	27
34	22010834	23071798	24221809	25473362	26
35	22027846	23090203	24241798	25495162	25
36	22044879	23108632	24261815	25516995	24
37	22061934	23127086	24281860	25538860	23
38	22079011	23145565	24301934	25560758	22
39	22096109	23164068	24322037	25582688	21
40	22113229	23182597	24342169	25604651	20
41	22130372	23201151	24362329	25626647	19
42	22147537	23219730	24382518	25648675	18
43	22164725	23238335	24402735	25670736	17
44	22181935	23256965	24422981	25692830	16
45	22199168	23275621	24443256	25714957	15
46	22216424	23294302	24463559	25737118	14
47	22233703	23313008	24483891	25759312	13
48	22251004	23331740	24504252	25781540	12
49	22268328	23350498	24524642	25803801	11
50	22285675	23369282	24545061	25826096	10
51	22303044	23388092	24565509	25848424	9
52	22320435	23406927	24585986	25870786	8
53	22337848	23425788	24606492	25893181	7
54	22355284	23444674	24627028	25915610	6
55	22372742	23463586	24647594	25938073	5
56	22390223	23482523	24668189	25960569	4
57	22407726	23501486	24688814	25983099	3
58	22425252	23520475	24709469	26005663	2
59	22442800	23539489	24730154	26028261	1
60	22460371	23558529	24750869	26050893	0
	24	23	22	21	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

	69	70	71	72	
0	26050893	27474777	29042105	30776834	60
1	26073559	27499665	29069569	30807323	59
2	26096260	27524592	29097080	30837866	58
3	26118996	27549559	29124638	30868465	57
4	26141766	27574565	29152243	30899119	56
5	26164571	27599612	29179895	30929828	55
6	26187411	27624699	29207595	30960593	54
7	26210286	27649827	29235343	30991413	53
8	26233196	27674995	29263139	31022289	52
9	26256141	27700204	29290382	31053221	51
10	26279120	27725453	29318873	31084208	50
11	26302135	27750742	29346811	31115252	49
12	26325185	27776072	29374797	31146352	48
13	26348270	27801443	29402831	31177508	47
14	26371390	27826855	29430913	31208720	46
15	26394546	27852308	29459043	31239989	45
16	26417738	27877803	29487221	31271315	44
17	26440966	27903339	29515446	31302698	43
18	26464229	27928917	29543719	31334138	42
19	26487528	27954536	29572041	31365636	41
20	26510863	27980196	29600411	31397191	40
21	26534234	28005898	29628831	31428805	39
22	26557641	28031642	29657301	31460476	38
23	26581084	28057429	29685820	31492205	37
24	26604563	28083258	29714388	31523992	36
25	26628079	28109129	29743006	31555838	35
26	26651631	28135043	29771674	31587742	34
27	26675220	28160999	29800392	31619705	33
28	26698845	28186998	29829160	31651727	32
29	26722507	28213040	29857978	31683807	31
30	26746206	28239125	29886847	31715946	30
31	26769942	28265253	29915765	31748144	29
32	26793716	28291424	29944734	31780401	28
33	26816527	28317638	29973753	31812717	27
34	26841375	28343895	30002823	31845093	26
35	26865260	28379195	30031943	31877528	25
36	26889183	28396539	30061113	31910024	24
37	26913143	28422926	30090334	31942580	23
38	26937141	28449357	30119605	31975197	22
39	26961177	28475832	30148927	32007875	21
40	26985251	28502350	30178299	32040613	20
41	27009362	28528913	30207723	32073413	19
42	27033511	28555520	30237200	32106275	18
43	27057698	28582172	30266730	32139200	17
44	27081922	28608868	30296312	32172187	16
45	27106184	28635608	30325947	32205237	15
46	27130484	28662393	30355635	32238349	14
47	27154823	28689222	30385375	32271524	13
48	27179200	28716096	30415169	32304762	12
49	27203616	28743015	30445015	32338064	11
50	27228070	28769979	30474915	32371430	10
51	27252563	28796987	30504867	32404858	9
52	27277095	28824040	30534872	32438348	8
53	27301667	28851139	30564930	32471901	7
54	27326278	28878283	30595041	32505517	6
55	27350929	28905472	30625205	32539196	5
56	27375620	28932707	30655423	32572937	4
57	27400350	28959988	30685695	32606741	3
58	27425120	28987315	30716020	32640907	2
59	27449929	29014687	30746400	32674536	1
60	27474777	29042105	30776834	32708528	0
	20	19	18	17	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangẽtibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	73	74	75	76	
0	32708528	34874151	37320517	40107808	60
1	32745286	34912477	37363987	40157569	59
2	32776709	34950881	37407551	40207446	58
3	32810898	34989364	37451210	40257440	57
4	32845153	35027925	37494964	40307552	56
5	32879747	35066565	37538814	40357781	55
6	32913862	35105283	37582760	40408129	54
7	32948317	35144080	37626803	40458596	53
8	32982839	35182956	37670943	40509183	52
9	33017427	35221911	37715180	40559890	51
10	33052082	35260945	37759515	40610718	50
11	33086802	35300059	37803948	40661665	49
12	33121588	35339253	37848479	40712731	48
13	33156441	35378528	37893109	40763917	47
14	33191362	35417883	37937838	40815224	46
15	33226351	35457320	37982666	40866652	45
16	33261408	35496838	38027592	40918201	44
17	33296534	35536438	38072616	40969871	43
18	33331728	35576121	38117740	41021663	42
19	33366990	35615888	38162963	41073577	41
20	33402321	35655739	38208285	41125614	40
21	33437720	35695672	38253708	41177775	39
22	33473188	35735689	38299232	41230062	38
23	33508725	35775789	38344857	41282475	37
24	33544330	35815973	38390584	41335015	36
25	33580005	35856241	38436414	41387683	35
26	33615750	35896593	38482347	41440480	34
27	33651566	35937029	38528384	41493407	33
28	33687453	35977550	38574525	41546464	32
29	33723410	36018156	38620772	41599653	31
30	33759438	36058848	38667125	41652974	30
31	33795535	36099623	38713580	41706424	29
32	33831703	36140483	38760139	41760003	28
33	33867942	36181427	38806801	41813712	27
34	33904252	36222456	38853567	41867550	26
35	33940634	36263570	38900438	41921518	25
36	33977088	36304771	38947416	41975617	24
37	34013615	36346060	38994501	42029848	23
38	34050215	36387437	39041695	42084211	22
39	34086888	36428903	39088998	42138706	21
40	34123634	36470459	39136409	42193334	20
41	34160453	36512103	39183929	42248096	19
42	34197345	36553836	39231557	42302993	18
43	34234310	36595659	39279294	42358025	17
44	34271348	36637572	39327139	42413193	16
45	34308459	36679574	39375094	42468497	15
46	34345644	36721666	39423158	42523937	14
47	34382903	36763849	39471331	42579514	13
48	34420237	36806121	39519614	42635228	12
49	34457647	36848483	39568006	42691080	11
50	34495132	36890936	39616509	42747070	10
51	34532692	36933479	39665124	42803199	9
52	34570327	36976114	39713852	42859468	8
53	34608038	37018840	39762695	42915878	7
54	34645824	37061659	39811654	42972429	6
55	34683686	37104570	39860729	43029122	5
56	34721625	37147574	39909917	43085958	4
57	34759640	37190670	39959218	43142937	3
58	34797733	37233859	40008633	43200060	2
59	34835903	37277141	40058103	43257328	1
60	34874151	37320517	40107808	43314742	0
	16	15	14	13	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentib. complementorū arcuum eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

	77	78	79	80	
0	43314742	47046295	51445543	56712854	60
1	43372301	47113680	51525561	56809480	59
2	43430006	47181249	51605820	56906425	58
3	43487857	47249003	51686321	57003690	57
4	43545855	47316942	51767065	57101277	56
5	43604000	47385067	51848053	57199188	55
6	43662293	47453380	51929285	57297425	54
7	43720733	47521882	52010762	57395990	53
8	43779321	47590575	52092485	57494885	52
9	43838057	47659460	52174455	57594111	51
10	43896942	47728538	52256673	57693670	50
11	43955977	47797809	52339140	57793564	49
12	44015163	47867274	52421857	57893795	48
13	44074501	47936934	52504826	57994366	47
14	44133992	48006790	52588048	58095279	46
15	44193637	48076841	52671525	58196536	45
16	44253435	48147088	52755259	58298138	44
17	44313387	48217531	52839251	58400087	43
18	44373494	48288171	52923503	58502385	42
19	44433756	48359008	53008016	58605034	41
20	44494174	48430043	53092792	58708035	40
21	44554749	48501278	53177831	58811388	39
22	44615481	48572714	53263134	58915095	38
23	44676371	48644352	53348702	59019157	37
24	44737419	48716193	53434536	59123576	36
25	44798626	48788238	53520637	59228353	35
26	44859993	48860488	53607006	59333490	34
27	44921521	48932945	53693644	59438989	33
28	44983211	49005610	53780552	59544852	32
29	45045065	49078483	53867731	59651081	31
30	45107083	49151565	53955183	59757678	30
31	45169263	49224856	54042909	59864646	29
32	45231607	49298357	54130911	59971987	28
33	45294114	49372069	54219190	60079703	27
34	45356785	49445993	54307748	60187796	26
35	45419621	49520130	54396586	60296268	25
36	45482623	49594481	54485705	60405121	24
37	45545790	49669047	54575107	60514358	23
38	45609123	49743829	54664793	60623981	22
39	45672623	49818827	54754764	60733992	21
40	45736291	49894042	54845022	60844392	20
41	45800128	49969475	54935569	60955184	19
42	45864135	50045127	55029406	61066370	18
43	45928314	50120999	55117535	61177952	17
44	45992666	50197092	55208958	61289930	16
45	46057192	50273407	55300676	61402307	15
46	46121892	50349935	55392692	61515085	14
47	46186767	50426707	55485007	61628267	13
48	46251817	50503695	55577622	61741856	12
49	46318043	50580910	55670539	61855854	11
50	46382445	50658353	55763759	61970263	10
51	46448023	50736025	55857283	62085085	9
52	46513778	50813927	55951112	62200323	8
53	46579711	50892060	56045247	62315979	7
54	46645823	50970425	56139689	62432056	6
55	46712115	51049023	56234439	62548556	5
56	46778587	51127855	56329498	62665481	4
57	46845240	51206922	56424868	62782833	3
58	46912075	51286225	56520550	62900615	2
59	46979093	51365765	56616545	63018829	1
60	47046295	51445543	56712854	63137478	0
	12	11	10	9	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangẽtibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	81	82	83	84	
0	63137478	71153707	81443502	95143611	60
1	63256564	71304198	81639821	95410585	59
2	63376089	71455313	81837074	95679034	58
3	63496056	71607058	82035268	95948971	57
4	63616468	71759440	82234410	96220411	56
5	63737327	71912459	82434508	96493467	55
6	63858635	72066117	82635570	96767939	54
7	63980394	72220422	82837603	97044063	53
8	64102607	72375376	83040614	97321646	52
9	64225276	72530983	83244610	97600890	51
10	64348404	72687247	83449598	97881716	50
11	64471994	72844173	83655585	98164135	49
12	64596049	73001766	83862572	98448162	48
13	64720571	73160031	84070565	98733810	47
14	64845563	73318972	84279571	99021104	46
15	64971028	73478593	84489598	99310047	45
16	65096969	73638898	84700687	99600655	44
17	65223388	73799892	84912817	99893042	43
18	65350287	73961579	85125995	100187022	42
19	65477669	74123964	85340229	100482822	41
20	65605537	74287052	85555525	100780346	40
21	65733894	74450847	85771891	101079507	39
22	65862743	74615354	85989335	101380525	38
23	65992087	74780577	86207866	101683314	37
24	66121928	74946521	86427493	101987889	36
25	66252268	75113189	86648225	102294266	35
26	66383110	75280586	86870072	102602473	34
27	66514457	75448716	87093043	102912514	33
28	66646313	75617584	87317150	103224405	32
29	66778681	75787195	87542404	103538166	31
30	66911564	75957554	87768816	103853919	30
31	67044965	76128666	87996394	104171468	29
32	67178887	76300536	88225146	104491055	28
33	67313334	76473170	88455079	104812581	27
34	67448309	76646573	88686196	105136063	26
35	67583815	76820751	88918508	105461519	25
36	67719855	76995710	89152021	105788969	24
37	67856423	77171455	89386745	106118428	23
38	67993549	77347991	89622688	106449917	22
39	68131209	77525324	89859858	106783466	21
40	68269416	77703459	90098268	107119198	20
41	68408173	77882402	90337927	107456902	19
42	68547438	78062159	90578848	107796712	18
43	68687350	78242737	90821043	108138767	17
44	68827777	78424142	91064526	108482852	16
45	68968768	78606379	91309309	108829233	15
46	69110326	78789454	91555401	109177805	14
47	69252455	78973371	91802810	109528589	13
48	69395158	79158136	92051546	109881598	12
49	69538439	79343754	92301618	110236864	11
50	69682302	79530231	92553036	110594415	10
51	69826751	79717572	92805759	110954264	9
52	69971789	79905783	93059875	111316432	8
53	70117419	80094869	93315361	111680940	7
54	70263645	80284835	93572238	112047814	6
55	70410470	80475688	93830595	112417202	5
56	70557898	80667435	94090270	112788878	4
57	70705932	80860083	94351448	113163656	3
58	70854576	81053639	94614055	113539681	2
59	71003833	81248110	94878103	113918875	1
60	71153706	81443502	95143611	114300579	0
	8	7	6	5	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro tangentibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrãtis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	85	86	87	
0	114300579	143006601	190811200	60
1	114684819	143606943	191879163	59
2	115071619	144212307	192959095	58
3	115461005	144822757	194051200	57
4	115853017	145438358	195155685	56
5	116247668	146059175	196273146	55
6	116644985	146685275	197403054	54
7	117044995	147316726	198545993	53
8	117447864	147953611	199702191	52
9	117853346	148595987	200871878	51
10	118261757	149244148	202055705	50
11	118672834	149897753	203253093	49
12	119086890	150557233	204464726	48
13	119503669	151222301	205691260	47
14	119923488	151893462	206932111	46
15	120346233	152570581	208188402	45
16	120771937	153253487	209459545	44
17	121200643	153942729	210746693	43
18	121632370	154638158	212049271	42
19	122067151	155339855	213368514	41
20	122505017	156047923	214704085	40
21	122946003	156762433	216056022	39
22	123390142	157483474	217425507	38
23	123837634	158211136	218812405	37
24	124288195	158945509	220217049	36
25	124742169	159686753	221639784	35
26	125199280	160434770	223080983	34
27	125659878	161189849	224540987	33
28	126123842	161952305	226020167	32
29	126591211	162721698	227518902	31
30	127062036	163498660	229037584	30
31	127536341	164282764	230576614	29
32	128014165	165074651	232136427	28
33	128495548	165873906	233717425	27
34	128980531	166681172	235320041	26
35	129469305	167496287	236945285	25
36	129961652	168319085	238592501	24
37	130457692	169150247	240262714	23
38	130957670	169989613	241957021	22
39	131461286	170837304	243674732	21
40	131968930	171693461	245417543	20
41	132480297	172558198	247184785	19
42	132995769	173431641	248978216	18
43	133515636	174313925	250797165	17
44	134038804	175205183	252643455	16
45	134566419	176105555	254517088	15
46	135098153	177015180	256417991	14
47	135634096	177934219	258348100	13
48	136174272	178862806	260307416	12
49	136718731	179801085	262296605	11
50	137267523	180749537	264316358	10
51	137820702	181707670	266366704	9
52	138378319	182676299	268449755	8
53	138940429	183654941	270565570	7
54	139507087	184644417	272714927	6
55	140078545	185644562	274898633	5
56	140654481	186655202	277117516	4
57	141235334	187677207	279372435	3
58	141820765	188710414	281664304	2
59	142411234	189755028	283994009	1
60	143006601	190811200	286362498	0
	4	3	2	

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus complementorū arcuū eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta graduum Quadrantis pro tangentibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	88		89		
0	286362498		572899830		60
1	288770746		582610421		59
2	291219764		592655713		58
3	293710598		603057015		57
4	296244357		613825994		56
5	298823024		624990311		55
6	301445987		636564040		54
7	304115322		648578536		53
8	306833212		661050728		52
9	309599077		674016435		51
10	312416191		687500739		50
11	315283945		701531474		49
12	318204757		716149676		48
13	321181137		731385593		47
14	324212583		747289264		46
15	327302782		763899813		45
16	330451272		781259259		44
17	333661982		799432199		43
18	336934467		818463792		42
19	340272744		838430438		41
20	343677949		859395374		40
21	347150587		881427652		39
22	350695255		904627361		38
23	354312962		929081086		37
24	358006024		954893332		36
25	361776788		982180553		35
26	365626388		1011062679		34
27	369560062		1041705454		33
28	373579199		1074263399		32
29	377686614		1108922084		31
30	381885288		1145801136		30
31	386178258		1185395877		29
32	390568737		1227736470		28
33	395060088		1273213435		27
34	399655828		1322188681		26
35	404359642		1375082163		25
36	409175388		1432363027		24
37	414111295		1494645462		23
38	419159137		1562590046		22
39	424335793		1637005697		21
40	429641796		1718863124		20
41	435082056		1809337410		19
42	440661780		1909864971		18
43	446386310		2022219818		17
44	452261453		2148619711		16
45	458293185		2291873854		15
46	464487853		2455533838		14
47	470852152		2644433955		13
48	477393195		2864819229		12
49	484118353		3125276745		11
50	491038024		3437829002		10
51	498155754		3819696333		9
52	505482730		4297181900		8
53	513030946		4911098124		7
54	520805157		5729633839		6
55	528821258		6875680006		5
56	537085003		8594012547		4
57	545610968		11458686834		3
58	554414914		17188033688		2
59	563504309		34376070815		1
60	572899830		Infinita.		0
	1		0		

Minuta Graduum Quadrantis pro tangentibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro tangentibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

TABVLA

LINEARVM SECANTIVM,

SIVE

BENEFICA.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	0	1	2	3	
0	10000000	10001524	10006095	10013723	60
1	10000001	10001574	10006198	10013874	59
2	10000002	10001626	10006301	10014029	58
3	10000004	10001679	10006405	10014184	57
4	10000007	10001733	10006509	10014339	56
5	10000010	10001788	10006615	10014495	55
6	10000014	10001844	10006721	10014653	54
7	10000020	10001900	10006828	10014811	53
8	10000027	10001957	10006936	10014970	52
9	10000034	10002015	10007045	10015130	51
10	10000042	10002074	10007155	10015291	50
11	10000051	10002134	10007265	10015453	49
12	10000060	10002195	10007376	10015615	48
13	10000071	10002256	10007488	10015778	47
14	10000083	10002318	10007601	10015942	46
15	10000095	10002381	10007716	10016107	45
16	10000108	10002445	10007831	10016273	44
17	10000122	10002510	10007946	10016440	43
18	10000137	10002576	10008062	10016608	42
19	10000152	10002642	10008179	10016777	41
20	10000168	10002709	10008298	10016946	40
21	10000186	10002777	10008417	10017116	39
22	10000204	10002846	10008537	10017287	38
23	10000223	10002916	10008658	10017459	37
24	10000243	10002987	10008779	10017632	36
25	10000264	10003058	10008902	10017806	35
26	10000285	10003130	10009025	10017981	34
27	10000308	10003203	10009149	10018157	33
28	10000332	10003277	10009274	10018333	32
29	10000357	10003352	10009400	10018510	31
30	10000381	10003428	10009527	10018687	30
31	10000407	10003505	10009655	10018865	29
32	10000433	10003582	10009783	10019044	28
33	10000461	10003660	10009912	10019224	27
34	10000489	10003739	10010043	10019405	26
35	10000518	10003819	10010174	10019587	25
36	10000548	10003900	10010306	10019770	24
37	10000579	10003982	10010439	10019954	23
38	10000611	10004060	10010572	10020138	22
39	10000643	10004148	10010706	10020324	21
40	10000677	10004232	10010841	10020510	20
41	10000711	10004317	10010977	10020698	19
42	10000746	10004403	10011114	10020886	18
43	10000782	10004490	10011252	10021086	17
44	10000819	10004578	10011390	10021266	16
45	10000857	10004666	10011529	10021456	15
46	10000895	10004755	10011670	10021649	14
47	10000934	10004845	10011811	10021842	13
48	10000975	10004936	10011952	10022035	12
49	10001016	10005028	10012098	10022239	11
50	10001058	10005122	10012238	10022424	10
51	10001100	10005216	10012383	10022620	9
52	10001144	10005310	10012528	10022817	8
53	10001188	10005405	10012674	10023015	7
54	10001233	10005501	10012822	10023213	6
55	10001280	10005598	10012970	10023412	5
56	10001327	10005696	10013119	10023612	4
57	10001375	10005795	10013269	10023813	3
58	10001423	10005894	10013419	10024014	2
59	10001473	10005994	10013570	10024217	1
60	10001524	10006095	10013723	10024420	0
	89	88	87	86	

Minuta Graduum Quadrantis proſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	4	5	6	7	
0	10024420	10038198	10055082	10075098	60
1	10024625	10038454	10055390	10075459	59
2	10024830	10038710	10055699	10075820	58
3	10025036	10038968	10056009	10076182	57
4	10025242	10039226	10056320	10076545	56
5	10025450	10039486	10056632	10076909	55
6	10025658	10039746	10056944	10077274	54
7	10025868	10040008	10057256	10077639	53
8	10026078	10040269	10057570	10078005	52
9	10026289	10040532	10057884	10078372	51
10	10026500	10040796	10058200	10078740	50
11	10026713	10041061	10058517	10079009	49
12	10026927	10041326	10058834	10079479	48
13	10027141	10041592	10059153	10079850	47
14	10027357	10041859	10059472	10080222	46
15	10027573	10042128	10059792	10080595	45
16	10027790	10042397	10060113	10080968	44
17	10028009	10042667	10060435	10081332	43
18	10028227	10042936	10060757	10081717	42
19	10028447	10043207	10061080	10082093	41
20	10028667	10043479	10061405	10082470	40
21	10028889	10043752	10061730	10082848	39
22	10029111	10044025	10062056	10083226	38
23	10029334	10044300	10062383	10063606	37
24	10029559	10044576	10062711	10083987	36
25	10029784	10044853	10063039	10084368	35
26	10030009	10045130	10063369	10084750	34
27	10030236	10045409	10063700	10085134	33
28	10030463	10045689	10064031	10085518	32
29	10030692	10045969	10064364	10085903	31
30	10030920	10046250	10064696	10086289	30
31	10031150	10046532	10065035	10086677	29
32	10031381	10046815	10065365	10087065	28
33	10031614	10047098	10065701	10087454	27
34	10031846	10047383	10066038	10087843	26
35	10032079	10047669	10066376	10088243	25
36	10032314	10047954	10066715	10088623	24
37	10032550	10048241	10067054	10089015	23
38	10032786	10048529	10067394	10089408	22
39	10033023	10048818	10067735	10089802	21
40	10033261	10049107	10068076	10090196	20
41	10033500	10049398	10068419	10090592	19
42	10033740	10049690	10068763	10090988	18
43	10033981	10049983	10069107	10091385	17
44	10034223	10050276	10069452	10091783	16
45	10034465	10050571	10069808	10092182	15
46	10034708	10050865	10070155	10092582	14
47	10034952	10051160	10070493	10092983	13
48	10035196	10051456	10070842	10093385	12
49	10035441	10051753	10071192	10093787	11
50	10035688	10052051	10071543	10094190	10
51	10035936	10052350	10071895	10094624	9
52	10036184	10052649	10072247	10095030	8
53	10036434	10052951	10072600	10095406	7
54	10036684	10053252	10072954	10095813	6
55	10036934	10053555	10073310	10096221	5
56	10037185	10053858	10073666	10096630	4
57	10037438	10054162	10074023	10097040	3
58	10037690	10054468	10074380	10097451	2
59	10037944	10054775	10074737	10097863	1
60	10038198	10055082	10075098	10098275	0
	85	84	83	82	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	8	9	10	11	
0	10098275	10124650	10154264	10187166	60
1	10098698	10125117	10154786	10187743	59
2	10099103	10125585	10155308	10188320	58
3	10099518	10126054	10155831	10188899	57
4	10099934	10126524	10156356	10189478	56
5	10100351	10126994	10156881	10190058	55
6	10100769	10127465	10157407	10190639	54
7	10101188	10127947	10157934	10191221	53
8	10101607	10128410	10158462	10191804	52
9	10102028	10128684	10158991	10192387	51
10	10102450	10129358	10159520	10192972	50
11	10102872	10129634	10160051	10193557	49
12	10103295	10130311	10160582	10194144	48
13	10103720	10130788	10161114	10194732	47
14	10104144	10131266	10161648	10195320	46
15	10104570	10131746	10162182	10195910	45
16	10104996	10132226	10162707	10196500	44
17	10105423	10132707	10163252	10197092	43
18	10105851	10133189	10163789	10197684	42
19	10106286	10133672	10164327	10198277	41
20	10106710	10134156	10165865	10198872	40
21	10107140	10134641	10165495	10199467	39
22	10107572	10135127	10165944	10200063	38
23	10108005	10135614	10166485	10200660	37
24	10108438	10136102	10167028	10201258	36
25	10108873	10136591	10167571	10201857	35
26	10109309	10137080	10168116	10202457	34
27	10109755	10137571	10168661	10203058	33
28	10110182	10138163	10169207	10203659	32
29	10110620	10138555	10169765	10204262	31
30	10111059	10139048	10170303	10204867	30
31	10111509	10139543	10170852	10205470	29
32	10111940	10140038	10171401	10206075	28
33	10112482	10140534	10171952	10206681	27
34	10112825	10141036	10172504	10207289	26
35	10113279	10141528	10173056	10207897	25
36	10113713	10142027	10173609	10208506	24
37	10114159	10142526	10174163	10209116	23
38	10114606	10143026	10174718	10209727	22
39	10115053	10143528	10175274	10210339	21
40	10115501	10144030	10175831	10210952	20
41	10115951	10144533	10176389	10211566	19
42	10116401	10145037	10176947	10212180	18
43	10116852	10145542	10177507	10212796	17
44	10117303	10146048	10178068	10213412	16
45	10117754	10146554	10178630	10214030	15
46	10118209	10147062	10179193	10214668	14
47	10118663	10147572	10179756	10215268	13
48	10119118	10148082	10180321	10215889	12
49	10119574	10148593	10180886	10216510	11
50	10120031	10149104	10181453	10217113	10
51	10120489	10149615	10182021	10217756	9
52	10120948	10150128	10182589	10218380	8
53	10121408	10150642	10183158	10219015	7
54	10121868	10151156	10183728	10219631	6
55	10122330	10151672	10184299	10220258	5
56	10122792	10152188	10184870	10220885	4
57	10123256	10152705	10185443	10221514	3
58	10123720	10153224	10186017	10222143	2
59	10124275	10153744	10186591	10222774	1
60	10124650	10154264	10187166	10223405	0
	81	80	79	78	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	12	13	14	15	
0	10223405	10263040	10306136	10352762	60
1	10224037	10263730	10306884	10353569	59
2	10224671	10264420	10307633	10354377	58
3	10225305	10265112	10308383	10355186	57
4	10225941	10265804	10309134	10355996	56
5	10226577	10266498	10309886	10356807	55
6	10227215	10267192	10310639	10357619	54
7	10227854	10267888	10311393	10358433	53
8	10228493	10268584	10312148	10359247	52
9	10229134	10269281	10312903	10360063	51
10	10229775	10269979	10313660	10360880	50
11	10230417	10270688	10314417	10361698	49
12	10231060	10271379	10313176	10362517	48
13	10231644	10272080	10315935	10363337	47
14	10232288	10272782	10316696	10364158	46
15	10232994	10273485	10317457	10364980	45
16	10233641	10274190	10318220	10365802	44
17	10234289	10274895	10318984	10366626	43
18	10234938	10275601	10319749	10367450	42
19	10235587	10276318	10320525	10368276	41
20	10236238	10277016	10321282	10369102	40
21	10236889	10277726	10322050	10369930	39
22	10237541	10278436	10322819	10370758	38
23	10238195	10279148	10323589	10371588	37
24	10238849	10279860	10324359	10372418	36
25	10239505	10280573	10325131	10373250	35
26	10240161	10281287	10325903	10374092	34
27	10240818	10282002	10326677	10374916	33
28	10241476	10282717	10327451	10375750	32
29	10242135	10283434	10328227	10376586	31
30	10242795	10284151	10329003	10377422	30
31	10243456	10284870	10329781	10378260	29
32	10244118	10285589	10330559	10379098	28
33	10245782	10286310	10331339	10379938	27
34	10245445	10287032	10332119	10380778	26
35	10246110	10287754	10332902	10381620	25
36	10246776	10288478	10333684	10382463	24
37	10247442	10289202	10334467	10383307	23
38	10248110	10289928	10335252	10384153	22
39	10248778	10290654	10336037	10384999	21
40	10249448	10291381	10336824	10385846	20
41	10250119	10292119	10337612	10386694	19
42	10250790	10292838	10338400	10387543	18
43	10251461	10293569	10339189	10388393	17
44	10252136	10294300	10339980	10389244	16
45	10252811	10295043	10340771	10390096	15
46	10253482	10295766	10341564	10390949	14
47	10254162	10296501	10342347	10391803	13
48	10254839	10297237	10343152	10392657	12
49	10255517	10297973	10343947	10393513	11
50	10256196	10298710	10344743	10394370	10
51	10256876	10299449	10345541	10395228	9
52	10257557	10300188	10346340	10396087	8
53	10258239	10300928	10347139	10396947	7
54	10258922	10301669	10347940	10397808	6
55	10259606	10302411	10348741	10398670	5
56	10260291	10303154	10349544	10399533	4
57	10260977	10303898	10350347	10400397	3
58	10261661	10304643	10351151	10401262	2
59	10262351	10305390	10351956	10402128	1
60	10263040	10306136	10352762	10402994	0
	77	76	75	74	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorū arcuū eiuſdē Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	16	17	18	19	
0	10402994	10456917	10514621	10576207	60
1	10403862	10457847	10515616	10577267	59
2	10404730	10458779	10516612	10578328	58
3	10405590	10459711	10517609	10579400	57
4	10406471	10460645	10518607	10580463	56
5	10407343	10461580	10519606	10581518	55
6	10408216	10462516	10520606	10582583	54
7	10409091	10463453	10521607	10583650	53
8	10409966	10464391	10522608	10584717	52
9	10410843	10465330	10523611	10585795	51
10	10411721	10466270	10524615	10586855	50
11	10412600	10467211	10525620	10587925	49
12	10413479	10468153	10526626	10588997	48
13	10414360	10469096	10527633	10590070	47
14	10415241	10470041	10528642	10591145	46
15	10416124	10470986	10529651	10592220	45
16	10417007	10471933	10530662	10593297	44
17	10417892	10472880	10531673	10594375	43
18	10418778	10473829	10532686	10595455	42
19	10419665	10474778	10533699	10596534	41
20	10420553	10475729	10534714	10597615	40
21	10421442	10476680	10535730	10598697	39
22	10422333	10477633	10536747	10599780	38
23	10423224	10478587	10537765	10600865	37
24	10424116	10479542	10538785	10601950	36
25	10425009	10480498	10539805	10603037	35
26	10425903	10481454	10540826	10604125	34
27	10426798	10482412	10541848	10605214	33
28	10427694	10483371	10542872	10606304	32
29	10428591	10484331	10543897	10607395	31
30	10429489	10485292	10544923	10608487	30
31	10430388	10486254	10545950	10609580	29
32	10431288	10487217	10546977	10610675	28
33	10432189	10488181	10548006	10611770	27
34	10433091	10489146	10549036	10612867	26
35	10433995	10490113	10550067	10613964	25
36	10434899	10491080	10551099	10615063	24
37	10435805	10492049	10552133	10616163	23
38	10436711	10493018	10553168	10617264	22
39	10437619	10493989	10554204	10618366	21
40	10438528	10494961	10555241	10619469	20
41	10439436	10494934	10556279	10620574	19
42	10440346	10496908	10557318	10621680	18
43	10441257	10497883	10558359	10622787	17
44	10442170	10498059	10559400	10623895	16
45	10443083	10499836	10560443	10625004	15
46	10443998	10500814	10561496	10626114	14
47	10444913	10501793	10562531	10627226	13
48	10445830	10502773	10563577	10628338	12
49	10446749	10503754	10564623	10629451	11
50	10447668	10504736	10565670	10630566	10
51	10448588	10505719	10566719	10631682	9
52	10449509	10506704	10567769	10632799	8
53	10450431	10507689	10568820	10633917	7
54	10451354	10508676	10569872	10635037	6
55	10452279	10509664	10570925	10636157	5
56	10453204	10510653	10571980	10637279	4
57	10454131	10511643	10573034	10638402	3
58	10455058	10512635	10574091	10639526	2
59	10455987	10513627	10575149	10640651	1
60	10456917	10514621	10576207	10641777	0
	73	72	71	70	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	20	21	22	23	
0	10641777	10711449	10785347	10863603	60
1	10642905	10712646	10786616	10864945	59
2	10644034	10713888	10787885	10866289	58
3	10645164	10715042	10789155	10867633	57
4	10646295	10716242	10790427	10868979	56
5	10647427	10717444	10791700	10870326	55
6	10648560	10718647	10792974	10871675	54
7	10649694	10719850	10794250	10873024	53
8	10650829	10721056	10795527	10874374	52
9	10651965	10722261	10796805	10875626	51
10	10653103	10723469	10798085	10877079	50
11	10654242	10724677	10799365	10878434	49
12	10655381	10725887	10800647	10879790	48
13	10656522	10727098	10801930	10881147	47
14	10657664	10728310	10803214	10882506	46
15	10658807	10729524	10804500	10883865	45
16	10659951	10730738	10805787	10885226	44
17	10661097	10731953	10807074	10886588	43
18	10662244	10733170	10808363	10887952	42
19	10663392	10734387	10809652	10889317	41
20	10664541	20735606	10810942	10890683	40
21	10665692	10736826	10812234	10892051	39
22	10666844	10738048	10813528	10893417	38
23	10667996	10739270	10814823	10894788	37
24	10669150	10740494	10816119	10896159	36
25	10670304	10741719	10817417	10897531	35
26	10671460	10742945	10818715	10898905	34
27	10672617	10744173	10820015	10900280	33
28	10673776	10745401	10821316	10901656	32
29	10674936	10746631	10822617	10903033	31
30	10676096	10747864	10823920	10904413	30
31	10677258	10749094	10825225	10905790	29
32	10678420	10750327	10826531	10907171	28
33	10679584	10751561	10827838	10908553	27
34	10680749	10752797	10829146	10909936	26
35	10681915	10754034	10830455	10911322	25
36	10683082	10755273	10831766	10912709	24
37	10684250	10756513	10833078	10914096	23
38	10685420	10757753	10834391	10915484	22
39	10686591	10758995	10835706	10916874	21
40	10687763	10760237	10837023	10918265	20
41	10688936	10761481	10838341	10919657	19
42	10690111	10762726	10839660	10921051	18
43	10691287	10763972	10840980	10922436	17
44	10692464	10765220	10842301	10923833	16
45	10693642	10766469	10843623	10925241	15
46	10694821	10767720	10844947	10926641	14
47	10696001	10768971	10846272	10928041	13
48	10697182	10770224	10847597	10929442	12
49	10698364	10771477	10848924	10930846	11
50	10699548	10772732	10850252	10932249	10
51	10700732	10773988	10851583	10933654	9
52	10701918	10775244	10852914	10935061	8
53	10703105	10776502	10854246	10936469	7
54	10704294	10777761	10855578	10937879	6
55	10705483	10779022	10856912	10939290	5
56	10706674	10780284	10858247	10940702	4
57	10707866	10781547	10859584	10942115	3
58	10709059	10782802	10860922	10943527	2
59	10710254	10784078	10862262	10944945	1
60	10711449	10785347	10863603	10946362	0
	69	68	67	66	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	24	25	26	27	
0	10946362	11033783	11126021	11223262	60
1	10947781	11035280	11127601	11224927	59
2	10949291	11036779	11129182	11226593	58
3	10950622	11038279	11130765	11228260	57
4	10952045	11039780	11132349	11229929	56
5	10953469	11041283	11133933	11231599	55
6	10954898	11042787	11135519	11233270	54
7	10956320	11044293	11137106	11234943	53
8	10957747	11045799	11138694	11236617	52
9	10959175	11047306	11140284	11238292	51
10	10960605	11048815	11141875	11239969	50
11	10962036	11050325	11143467	11241648	49
12	10963469	11051837	11145061	11243329	48
13	10964903	11053350	11146656	11245011	47
14	10966338	11054865	11148254	11246694	46
15	10967775	11056381	11149853	11248378	45
16	10969213	11057898	11151453	11250064	44
17	10970652	11059420	11153055	11251751	43
18	10972092	11060939	11154658	11253440	42
19	10973533	11062461	11156262	11255130	41
20	10974976	11063985	11157868	11256822	40
21	10976420	11065510	11159475	11258516	39
22	10977865	11067037	11161084	11260211	38
23	10979312	11068564	11162694	11261907	37
24	10980760	11070092	11164306	11263605	36
25	10982210	11071621	11165919	11265304	35
26	10983661	11073152	11167533	11267005	34
27	10985113	11074684	11169149	11268707	33
28	10986567	11076218	11170766	11270410	32
29	10988022	11077753	11172385	11272114	31
30	10989480	11079289	11174006	11273820	30
31	10990938	11080827	11175627	11275528	29
32	10992398	11082366	11177249	11277238	28
33	10993859	11083906	11178873	11278949	27
34	10995321	11085448	11180499	11280661	26
35	10996783	11086990	11182125	11282374	25
36	10998247	11088536	11183753	11284089	24
37	10999712	11090082	11185383	11285805	23
38	11001179	11091629	11187014	11287524	22
39	11002647	11093178	11188647	11289244	21
40	11004116	11094729	11190281	11290965	20
41	11005587	11096280	11191916	11292688	19
42	11007059	11097833	11193553	11294412	18
43	11008533	11099387	11195191	11296132	17
44	11010008	11100943	11196831	11297864	16
45	11011484	11102500	11198472	11299593	15
46	11012957	11104058	11200114	11301324	14
47	11014441	11105618	11201758	11303056	13
48	11015921	11107179	11203404	11304789	12
49	11017402	11108741	11205051	11306523	11
50	11018884	11110306	11206700	11308259	10
51	11020367	11111871	11208350	11309996	9
52	11021852	11113438	11210001	11311735	8
53	11023338	11115006	11211654	11313476	7
54	11024826	11116575	11213308	11315218	6
55	11026315	11118145	11214963	11316961	5
56	11027806	11119717	11216620	11318706	4
57	11029298	11121290	11218278	11319452	3
58	11030791	11122865	11219938	11322199	2
59	11032287	11124442	11221599	11323949	1
60	11033783	11126021	11223262	11325700	0
	65	64	63	62	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	28	29	30	31	
0	11325700	11433540	11547004	11666331	60
1	11327452	11435384	11548944	11668371	59
2	11329206	11437230	11550886	11670413	58
3	11330961	11439078	11552829	11672457	57
4	11332718	11440927	11554774	11674502	56
5	11334479	11442777	11556720	11676548	55
6	11336237	11444629	11558669	11678597	54
7	11337999	11446483	11560619	11680647	53
8	11339762	11448339	11562570	11682698	52
9	11341526	11450196	11564523	11684752	51
10	11343292	11452054	11566480	11686807	50
11	11345060	11453915	11568434	11688864	49
12	11346830	11455776	11570393	11690923	48
13	11348601	11457639	11572353	11692984	47
14	11350373	11459503	11574314	11695046	46
15	11352149	11461370	11576277	11697110	45
16	11353923	11463238	11578242	11699176	44
17	11355698	11465107	11580208	11701243	43
18	11357475	11466978	11582175	11703312	42
19	11359255	11468850	11584145	11705383	41
20	11361036	11470723	11586116	11707455	40
21	11362819	11472599	11588089	11709530	39
22	11364603	11474483	11590064	11711606	38
23	11366389	11476354	11592040	11713684	37
24	11368177	11478235	11594018	11715764	36
25	11369966	11480117	11595998	11717845	35
26	11371756	11482001	11597979	11719928	34
27	11373548	11483887	11599961	11722012	33
28	11375341	11485774	11601946	11724099	32
29	11377136	11487662	11603932	11726187	31
30	11378933	11489353	11605919	11728276	30
31	11380731	11491445	11607909	11730367	29
32	11382530	11493338	11609900	11732460	28
33	11384331	11495233	11611893	11734555	27
34	11386134	11497140	11613888	11736652	26
35	11387938	11499028	11615876	11738751	25
36	11389744	11500928	11617882	11740851	24
37	11391551	11502829	11619881	11742953	23
38	11393359	11504731	11621882	11745057	22
39	11395169	11506626	11623885	11747162	21
40	11396981	11508532	11625889	11749269	20
41	11398794	11510450	11627996	11751378	19
42	11400609	11512360	11629904	11753489	18
43	11402425	11514271	11631913	11755603	17
44	11404243	11516183	11633924	11757718	16
45	11406063	11518097	11635937	11759834	15
46	11407884	11520013	11637952	11761951	14
47	11409706	11521930	11639968	11764069	13
48	11411530	11523849	11641986	11766190	12
49	11413356	11525770	11644005	11768312	11
50	11415183	11527692	11646026	11770437	10
51	11417012	11529616	11648049	11772564	9
52	11418842	11531542	11650075	11774696	8
53	11420673	11533469	11652099	11776822	7
54	11422507	11535398	11654127	11778954	6
55	11424342	11537328	11656156	11781088	5
56	11426178	11539260	11658188	11783223	4
57	11428016	11541193	11660221	11785361	3
58	11429856	11543128	11662256	11787500	2
59	11431689	11545065	11664292	11789640	1
60	11433540	11547004	11666331	11791783	0
	61	60	59	58	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	32	33	34	35	
0	11791783	11923633	12062179	12207745	60
1	11793927	11925886	12064546	12210233	59
2	11796073	11928141	12066916	12212723	58
3	11798221	11930397	12069286	12215214	57
4	11800371	11932656	12071660	12217708	56
5	11802522	11934917	12074036	12220204	55
6	11804675	11937180	12076413	12222702	54
7	11806830	11939445	12078792	12225201	53
8	11808987	11941701	12081174	12227703	52
9	11811145	11943979	12083558	12230207	51
10	11813306	11946250	12085943	12232713	50
11	11815468	11948522	12088330	12235221	49
12	11817632	11950796	12090720	12237732	48
13	11819797	11953071	12093111	12240245	47
14	11821965	11955349	12095504	12242759	46
15	11824134	11957629	12097899	12245275	45
16	11826306	11959910	12100296	12247794	44
17	11828479	11962194	12102696	12250315	43
18	11830654	11964479	12105097	12252837	42
19	11832830	11966766	12107500	12255361	41
20	11835008	11969055	12109905	12257888	40
21	11837188	11971346	12112312	12260417	39
22	11839369	11973638	12114722	12262948	38
23	11841552	11975932	12117133	12265481	37
24	11843737	11978229	12119546	12268016	36
25	11845924	11980527	12121960	12270553	35
26	11848114	11982828	12124377	12273093	34
27	11850305	11985131	12126796	12275634	33
28	11852498	11987435	12129216	12278187	32
29	11854693	11989741	12131638	12280722	31
30	11856890	11992050	12134063	12283270	30
31	11849088	11994360	12136490	12285820	29
32	11861288	11996672	12138919	12288372	28
33	11863489	11998986	12141350	12290925	27
34	11865693	12001303	12143783	12293481	26
35	11867899	12003619	12146218	12296039	25
36	11870107	12005938	12148656	12298599	24
37	11872316	12008259	12150095	12301161	23
38	11874527	12010582	12153536	12303725	22
39	11876739	12012907	12155978	12306291	21
40	11878954	12015233	12158423	12308859	20
41	11881171	12017562	12160870	12311430	19
42	11883389	12019893	12163319	12314003	18
43	11885609	12022226	12165770	12316578	17
44	11887831	12024560	12168223	12319156	16
45	11890054	12026897	12170677	12321736	15
46	11892280	12029236	12173135	12324317	14
47	11894508	12031576	12175594	12326900	13
48	11896737	12033919	12178055	12329486	12
49	11898968	12036264	12180518	12332074	11
50	11901202	12038610	12182983	12334664	10
51	11903437	12040958	12185450	12337256	9
52	11905674	12043309	12187919	12339851	8
53	11907912	12045661	12190390	12342448	7
54	11910153	12048016	12192864	12345046	6
55	11912395	12050372	12195340	12347646	5
56	11914640	12052730	12197817	12350249	4
57	11916886	12055089	12200296	12352854	3
58	11919133	12057451	12202777	12355460	2
59	11921382	12059814	12205260	12358068	1
60	11923633	12063179	12207745	12360678	0
	57	56	55	54	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro ſecantibus complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrãtis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

	36	37	38	39	
0	12360678	12521357	12690184	12867599	60
1	12363290	12524103	12693070	12870632	59
2	12365906	12526851	12695957	12873667	58
3	12368524	12529601	12698847	12876704	57
4	12371144	12532354	12701739	12879744	56
5	12373766	12535110	12704634	12882787	55
6	12376391	12537867	12707531	12885832	54
7	12379018	12540627	12710430	12888879	53
8	12381647	12543389	12713332	12891929	52
9	12384278	12546152	12716236	12894982	51
10	12386911	12548918	12719143	12898037	50
11	12389546	12551686	12722052	12901094	49
12	12392183	12554456	12724964	12904155	48
13	12394822	12557229	12727878	12907218	47
14	12397464	12560005	12730794	12910283	46
15	12400108	12562783	12733713	12913351	45
16	12402754	12565563	12736635	12916422	44
17	12405402	12568345	12739559	12919494	43
18	12408053	12571130	12742485	12922569	42
19	12410705	12573917	12745413	12925647	41
20	12413359	12576706	12748344	12928727	40
21	12416015	12579597	12751277	12931809	39
22	12418674	12582912	12754213	12934895	38
23	12421335	12585087	12757151	12937983	37
24	12423998	12587885	12760092	12941073	36
25	12426663	12590685	12763035	12944166	35
26	12429331	12593488	12765981	12947262	34
27	12432001	12596293	12768929	12950360	33
28	12434673	12599101	12771880	12953461	32
29	12437348	12601911	12774833	12956565	31
30	12440024	12604724	12777788	12959671	30
31	12442702	12607539	12780746	12962780	29
32	12445383	12610356	12783707	12965892	28
33	12448066	12613175	12786670	12969007	27
34	12450751	12615997	12789635	12972124	26
35	12453438	12618821	12792602	12975243	25
36	12456128	12621648	12795573	12978366	24
37	12458821	12624477	12798546	12981491	23
38	12461516	12627308	12801521	12984618	22
39	12464213	12630141	12804498	12987747	21
40	12466913	12632977	12807478	12990880	20
41	12469614	12635815	12810460	12994015	19
42	12472317	12638655	12813445	12997153	18
43	12475022	12641497	12816432	13000293	17
44	12477730	12644343	12819422	13003436	16
45	12480440	12647191	12822415	13006582	15
46	12483152	12650041	12825410	13009730	14
47	12485866	12652893	12828407	13012881	13
48	12488583	12655748	12831407	13016034	12
49	12491302	12658605	12834409	13019189	11
50	12494022	12661464	12837414	13022348	10
51	12496744	12664325	12840421	13025509	9
52	12499469	12667189	12843431	13028673	8
53	12502197	12670055	12846443	13031839	7
54	12504927	12672924	12849458	13035008	6
55	12507659	12675795	12852475	13038180	5
56	12510394	12678668	12855495	13041354	4
57	12513132	12681543	12858517	13044530	3
58	12515871	12684421	12861542	13047710	2
59	12518613	12687301	12864569	13050892	1
60	12521357	12690184	12867599	13054077	0
	53	52	51	50	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	40	41	42	43	
0	13054077	13250131	13456326	13673275	60
1	13057264	13253482	13459851	13676986	59
2	13060455	13256835	13463380	13680700	58
3	13063646	13260192	13466912	13684417	57
4	13066843	13263582	13470447	13688138	56
5	13070041	13266915	13473985	13691861	55
6	13073242	13270282	13477527	13695587	54
7	13076445	13273651	13481071	13699316	53
8	13079651	13277023	13484618	13703048	52
9	13082859	13280397	13488168	13706783	51
10	13086071	13283775	13491721	13710523	50
11	13089285	13287155	13495276	13714266	49
12	13092502	13290538	13498835	13718012	48
13	13095721	13293924	13502397	13721761	47
14	13098944	13297313	13505962	13725514	46
15	13102169	13300704	13509530	13729270	45
16	13105397	13304098	13513101	13733029	44
17	13108627	13307495	13516675	13736790	43
18	13111861	13310896	13520252	13740555	42
19	13114098	13314299	13523832	13744322	41
20	13118337	13317705	13527416	13748092	40
21	13121578	13321114	13531003	13751867	39
22	13124823	13324526	13534593	13755644	38
23	13128070	13327941	13538185	13759424	37
24	13131320	13331359	13541781	13763209	36
25	13134572	13334779	13545380	13766997	35
26	13137828	13338203	13548981	13770788	34
27	13141085	13341629	13552585	13774582	33
28	13144346	13345058	13556193	13778380	32
29	13147509	13348490	13559803	13782181	31
30	13150874	13351924	13563417	13785985	30
31	13154142	13355361	13567034	13789792	29
32	13157413	13358802	13570654	13793603	28
33	13160687	13362245	13574277	13797416	27
34	13163964	13365691	13577903	13801233	26
35	13167243	13369140	13581532	13805053	25
36	13170526	13372592	13585164	13808876	24
37	13173811	13376057	13588799	13812703	23
38	13177099	13379505	13592438	13816534	22
39	13180389	13382966	13596079	13820368	21
40	13183682	13386430	13599723	13824205	20
41	13186978	13389897	13603370	13828045	19
42	13190276	13393367	13607021	13831889	18
43	13193577	13396839	13610975	13835736	17
44	13196882	13400315	13614332	13839586	16
45	13200189	13403794	13617992	13843439	15
46	13203499	13407275	13621656	13847296	14
47	13206812	13410759	13625323	13851156	13
48	13210128	13414247	13628993	13855019	12
49	13213447	13417738	13632666	13858885	11
50	13216769	13421232	13636342	13862755	10
51	13220093	13424728	13640021	13866628	9
52	13223421	13428227	13643704	13870505	8
53	13226750	13431729	13647390	13874385	7
54	13230082	13435234	13651078	13878268	6
55	13233417	13438742	13654769	13882154	5
56	13236754	13442253	13658464	13886044	4
57	13240094	13445767	13662162	13889636	3
58	13243437	13449284	13665863	13893833	2
59	13246783	13452804	13669567	13897733	1
60	13250131	13456326	13673275	13901636	0
	49	48	47	46	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	44	45	46	47	
0	13901636	14142135	14395564	14662790	60
1	13905542	14146251	14399901	14667366	59
2	13909452	14150371	14404242	14671946	58
3	13913365	14154494	14408587	14676530	57
4	13917281	14158621	14412937	14681119	56
5	13921201	14162751	14417290	14685712	55
6	13925126	14166884	14421647	14690309	54
7	13929052	14171021	14426008	14694910	53
8	13932982	14175162	14430374	14699514	52
9	13936919	14179306	14434743	14704122	51
10	13940854	14183454	14439116	14708735	50
11	13944795	14187606	14443493	14713352	49
12	13948739	14191761	14447874	14717973	48
13	13952686	14195919	14452259	14722598	47
14	13956638	14200082	14456648	14727228	46
15	13960592	14204248	14461040	14731862	45
16	13964550	14208418	14465437	14736500	44
17	13968511	14212591	14469838	14741142	43
18	13972476	14216769	14474242	14745788	42
19	13976444	14220950	14478650	14750438	41
20	13980416	14225135	14483062	14755094	40
21	13984391	14229324	14487478	14759753	39
22	13988370	14233517	14491898	14764416	38
23	13992352	14237713	14496322	14769083	37
24	13996338	14241912	14500750	14773755	36
25	14000327	14246115	14505182	14778430	35
26	14004319	14250321	14509617	14783110	34
27	14008315	14254531	14514056	14787794	33
28	14012314	14258745	14518500	14792482	32
29	14016316	14262961	14522946	14797174	31
30	14020322	14267182	14527397	14801871	30
31	14024332	14271407	13531852	14806571	29
32	14028345	14275635	14536311	14811276	28
33	14032361	14279867	14540773	14815985	27
34	14036381	14284103	14545240	14820698	26
35	14040404	14288343	14549711	14825416	25
36	14044431	14292587	14554186	14830139	24
37	14048461	14296834	14558665	14834866	23
38	14052494	14301086	14563148	14839597	22
39	14056531	14305331	14567635	14844332	21
40	14060572	14309599	14572126	14849072	20
41	14064616	14313861	14576621	14853815	19
42	14068664	14318127	14581120	14858563	18
43	14072715	14322396	14585624	14863315	17
44	14076770	14326670	14590131	14868071	16
45	14080829	14330947	14594642	14872831	15
46	14084891	14335228	14599157	14877597	14
47	14088956	14339513	14603676	14882377	13
48	14093026	14343802	14608199	14887141	12
49	14097099	14348095	14612725	14891919	11
50	14101175	14352391	14617256	14896701	10
51	14105255	14356691	14621791	14901487	9
52	14109339	14360995	14626330	14906278	8
53	14113427	14365303	14630873	14911073	7
54	14117518	14369615	14635421	14915873	6
55	14121612	14373930	14639973	14920677	5
56	14125709	14378350	14644528	14925486	4
57	14129810	14382573	14649087	14930299	3
58	14133915	14386900	14653651	14935116	2
59	14138023	14391230	14658218	14939938	1
60	14142135	14395564	14662790	14944764	0
	45	44	43	42	

Gradus Quadrantis pro ſecantib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	48	49	50	51	
0	14944764	15242532	15557239	15890158	60
1	14949594	15247634	15562635	15895869	59
2	14954429	15252741	15568036	15901586	58
3	14959268	15257852	15573441	15907307	57
4	14964112	15262969	15578852	15913034	56
5	14968960	15268090	15584267	15918766	55
6	14973812	15273216	15589688	15924504	54
7	14978668	15278347	15595114	15930247	53
8	14983530	15283484	15600545	15936095	52
9	14988396	15288626	15605981	15941748	51
10	14993266	15293773	15611422	15947508	50
11	14998104	15298924	15616868	15953273	49
12	15003020	15304080	15622319	15959044	48
13	15007903	15309240	15627775	15964820	47
14	15012791	15314405	15633237	15970603	46
15	15017683	15319574	15639704	15976390	45
16	15022580	15324748	15644177	15982184	44
17	15027481	15329926	15649655	15987983	43
18	15032387	15335109	15655138	15993788	42
19	15037297	15340297	15660626	15999599	41
20	15042212	15345491	15666119	16005416	40
21	15047131	15350689	15671617	16011237	39
22	15052054	15355892	15677121	16017065	38
23	15056982	15361100	15682630	16022898	37
24	15061915	15366313	15688144	16028736	36
25	15066852	15371530	15693663	16034579	35
26	15071791	15376753	15699188	16040429	34
27	15076739	15381980	15704717	16046283	33
28	15081690	15387212	15710252	16052143	32
29	15086645	15392449	15715792	16058008	31
30	15091605	15397692	15721337	16063878	30
31	15096569	16402939	15726887	16069754	29
32	15101538	15408191	15732443	16075637	28
33	15106571	15413447	15738003	16081524	27
34	15111490	15418708	15743569	16087418	26
35	15116472	15423974	15749141	16093318	25
36	15121459	15429246	15754718	16099224	24
37	15126451	15434522	15760300	16105135	23
38	15131447	15439803	15765887	16111053	22
39	15136447	15445089	15771479	16116976	21
40	15141453	15450380	15777077	16122905	20
41	15146463	15455675	15782680	16128839	19
42	15151478	15460976	15788289	16134779	18
43	15156497	15466282	15793903	16140724	17
44	15161520	15471593	15799523	16146676	16
45	15166548	15476908	15805147	16152634	15
46	15171581	15482229	15810777	16158598	14
47	15176619	15487554	15816412	16164567	13
48	15181661	15492885	15822052	16170542	12
49	15186708	15498220	15827697	16176522	11
50	15191760	15503560	15833349	16182509	10
51	15196816	15508905	15839005	16188501	9
52	15201877	15514256	15844667	16194499	8
53	15206943	15519611	15850335	16200503	7
54	15212013	15524972	15856008	16206513	6
55	15217088	15530338	15861676	16212528	5
56	15222168	15535710	15867370	16218550	4
57	15227253	15541083	15873058	16224577	3
58	15232342	15546463	15878753	16230610	2
59	15237435	15551848	15884453	16236648	1
60	15242532	15557239	15890158	16242692	0
	41	40	39	38	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	52	53	54	55	
0	16242692	16616401	17013017	17434469	60
1	16248742	16622819	17019832	17441715	59
2	16254799	16629243	17026654	17448968	58
3	16260819	16635673	17033482	17456229	57
4	16266929	16642109	17040318	17463499	56
5	16273003	16648551	17047160	17470775	55
6	16279083	16655001	17054010	17478059	54
7	16285169	16661457	17060866	17485351	53
8	16291261	16667919	17067729	17492650	52
9	16297358	16674408	17074599	17499957	51
10	16303461	16680864	17081476	17507272	50
11	16309570	16687345	17088359	17514594	49
12	16315685	16693834	17095250	17521924	48
13	16321806	16700328	17102148	17529262	47
14	16327934	16706829	17109053	17536607	46
15	16334067	16713336	17115965	17543959	45
16	16340197	16719850	17122885	17551319	44
17	16346353	16726362	17129812	17558687	43
18	16352505	16732877	17136747	17566063	42
19	16358663	16739430	17143689	17573446	41
20	16364827	16745970	17150638	17580837	40
21	16370996	16752517	17157593	17588236	39
22	16377172	16759070	17164556	17595643	38
23	16383359	16765629	17171525	17603057	37
24	16389542	16772195	17178502	17610480	36
25	16395736	16778767	17185485	17617909	35
26	16401936	16785347	17192476	17625347	34
27	16408152	16791933	17199472	17632793	33
28	16414365	16798525	17206477	17640246	32
29	16420573	16805124	17213488	17647707	31
30	16426798	16811729	17220507	17655174	30
31	16433027	16818341	17227532	17662651	29
32	16439263	16824960	17234565	17670136	28
33	16445505	16831585	17241605	17677627	27
34	16451754	16838217	17248653	17685127	26
35	16458008	16844856	17255708	17692635	25
36	16464269	16851502	17262770	17700151	24
37	16470536	16858154	17269839	17707674	23
38	16476809	16864813	17276917	17715206	22
39	16483089	16871479	17284002	17722744	21
40	16489385	16878151	17291095	17730290	20
41	16495668	16884830	17298194	17737844	19
42	16501967	16891515	17305300	17745407	18
43	16508272	16898207	17312413	17752978	17
44	16514582	16904907	17319514	17760555	16
45	16520898	16911613	17326662	17768142	15
46	16527220	16918326	17333798	17775740	14
47	16533548	16925046	17340941	17783343	13
48	16539883	16931772	17348091	17790955	12
49	16546224	16948504	17355249	17798575	11
50	16552571	16945244	17362415	17806203	10
51	16558925	16951990	17369587	17813838	9
52	16565286	16958743	17376767	17821481	8
53	16571642	16965495	17383954	17829132	7
54	16578026	16972270	17391148	17836792	6
55	16584406	16979044	17398350	17844460	5
56	16590792	16985824	17405560	17852135	4
57	16597184	16992611	17412776	17859818	3
58	16603584	16999406	17420000	17867509	2
59	16609989	17006208	17427231	17875209	1
60	16616401	17013017	17434469	17882917	0
	37	36	35	34	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	56	57	58	59	
0	17882917	18360816	18870800	19416039	60
1	17890632	18369014	18879589	19425445	59
2	17898356	18377251	18888389	19434862	58
3	17906089	18385497	18897196	19444290	57
4	17913830	18393753	18906018	19453727	56
5	17921579	18402017	18914846	19463175	55
6	17929337	18410291	18923685	19472635	54
7	17937102	18418574	18932534	19482114	53
8	17944876	18426865	18941393	19491595	52
9	17952658	18435165	18950261	19501076	51
10	17960448	18443454	18959139	19510578	50
11	17968247	18451792	18968027	19520091	49
12	17976054	18460120	18976926	19529615	48
13	17983869	18468456	18985834	19539150	47
14	17991693	18476802	18994752	19548697	46
15	17999525	18485157	19003680	19558254	45
16	18007365	18493521	19012618	19567822	44
17	18015214	18501895	19021516	19577401	43
18	18023071	18510278	19030523	19586991	42
19	18030936	18518670	19039491	19596592	41
20	18038811	18527072	19048468	19606204	40
21	18046693	18535483	19057455	19615827	39
22	18054584	18543903	19066453	19625462	38
23	18062482	18552332	19075461	19635107	37
24	18070389	18560770	19084480	19644765	36
25	18078305	18569217	19093509	19654434	35
26	18086229	18577674	19102549	19664114	34
27	18094161	18586139	19111598	19673805	33
28	18102102	18594614	19120658	19683507	32
29	18110051	18603098	19129727	19693220	31
30	18118009	18611591	19138807	19702945	30
31	18125975	18620094	19147897	19712680	29
32	18133950	18629606	19156998	19722428	28
33	18141934	18637127	19166109	19732186	27
34	18149926	18645658	19175231	19741956	26
35	18157927	18654198	19184362	19751738	25
36	18165937	18662748	19193504	19761531	24
37	18173956	18671307	19202656	19771335	23
38	18181984	18679875	19211818	19781141	22
39	18190021	18688452	19220990	19790968	21
40	18198065	18697038	19230172	19800808	20
41	18206118	18705634	19239365	19810658	19
42	18214179	18714239	19248569	19820320	18
43	18222249	18722854	19257783	19830393	17
44	18230328	18731480	19267008	19840277	16
45	18238416	18740115	19276242	19850172	15
46	18246513	18748760	19285488	19860079	14
47	18254618	18757414	19294744	19869997	13
48	18262732	18766078	19304010	19879927	12
49	18270854	18774752	19313287	19889868	11
50	18278986	18783436	19322574	19899820	10
51	18287126	18792130	19331872	19909784	9
52	18295276	18800833	19341181	19919760	8
53	18303434	18809546	19350501	19929748	7
54	18311601	18818268	19359831	19939749	6
55	18319776	18826999	19369172	19949760	5
56	18327961	18835741	19378524	19959784	4
57	18337154	18844492	19387886	19966820	3
58	18344356	18853252	19397260	19979868	2
59	18352567	18862021	19406644	19989928	1
60	18360816	18870800	19416039	20000000	0
	33	32	31	30	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro ſecantibus complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrãtis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	60	61	62	63	
0	20000000	20626654	21300545	22026892	60
1	20010083	20637484	21312206	22039475	59
2	20020179	20648338	21323882	22052074	58
3	20030285	20659184	21335570	22064690	57
4	20040404	20670054	21347275	22077322	56
5	20050534	20680937	21358993	22089970	55
6	20060676	20691834	21370727	22102635	54
7	20070832	20702744	21382475	22115316	53
8	20080995	20713667	21394238	22128014	52
9	20091172	20724603	21407016	22140728	51
10	20101361	20735554	21417808	22153459	50
11	20111562	20746517	21429615	22166204	49
12	20121776	20757494	21441438	22178971	48
13	20132001	20768484	21453275	22191751	47
14	20142239	20779488	21465128	22204548	46
15	20152489	20790505	21476995	22217361	45
16	20162751	20801535	21488877	22230191	44
17	20173035	20812579	21500774	22243038	43
18	20183321	20823636	21512686	22255902	42
19	20193619	20834706	21524612	22268782	41
20	20203930	20845791	21536553	22281680	40
21	20214252	20856888	21548509	22294595	39
22	20224588	20868000	21560481	22307526	38
23	20234936	20879125	21572467	22320474	37
24	20245296	20890264	21584469	22333439	36
25	20255669	20901416	21596487	22346420	35
26	20266054	20912582	21608520	22359419	34
27	20276452	20923761	21620568	22372434	33
28	20286863	20934955	21632631	22385466	32
29	20297286	20946162	21644710	22398418	31
30	20307721	20957383	21656804	22411584	30
31	20318170	20968618	21668913	22424667	29
32	20328630	20979867	21681038	22437768	28
33	20339102	20991130	21693178	22450886	27
34	20349587	21002406	21705334	22464022	26
35	20360084	21013696	21717505	22477175	25
36	20370594	21025001	21729691	22490346	24
37	20381116	21036319	21741893	22503543	23
38	20391751	21047651	21754111	22516748	22
39	20402198	21058997	21766344	22529965	21
40	20412758	21070357	21778593	22543201	20
41	20423331	21081731	21790858	22556358	19
42	20433916	21093119	21803138	22569723	18
43	20444514	21104522	21815434	22583025	17
44	20455126	21115938	21827745	22596336	16
45	20465750	21127368	21840072	22609663	15
46	20476387	21138814	21852415	22623009	14
47	20487037	21150273	21864774	22636372	13
48	20497700	21161747	21877149	22649754	12
49	20508376	21173235	21889539	22663152	11
50	20519064	21184737	21901946	22676569	10
51	20529765	21196253	21914369	22690004	9
52	20540479	21207783	21926808	22703456	8
53	20551205	21219328	21939263	22716924	7
54	20561945	21230887	21951734	22730414	6
55	20572697	21242460	21964220	22743919	5
56	20583463	21254048	21976722	22757443	4
57	20594242	21265650	21989240	22770984	3
58	20605033	21277267	22001775	22784543	2
59	20615837	21288899	22014325	22798120	1
60	20626654	21300545	22026892	22811726	0
	29	28	27	26	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro ſecantibus complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrãtis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	64	65	66	67	
0	22811726	23662013	24585936	25593051	60
1	22825329	23676784	24602010	25610602	59
2	22838962	23691575	24618107	25628180	58
3	22852612	23706387	24634227	25645783	57
4	22866281	23721220	24650370	25663414	56
5	22879968	23736073	24666536	25681071	55
6	22893674	23750947	24682727	25698754	54
7	22907387	23765842	24698940	25716464	53
8	22921140	23780757	24715178	25734201	52
9	22934901	23795692	24731439	25751965	51
10	22948680	23810648	24747724	25769755	50
11	22962478	23825625	24764033	25787582	49
12	22976294	23840623	24780365	25805417	48
13	22990129	23855642	24796721	25823287	47
14	23003983	23870683	24813101	25841185	46
15	23017855	23885844	24829504	25859104	45
16	23031747	23900827	24845932	25877061	44
17	23045657	23915931	24862383	25895040	43
18	23059586	23931055	24879958	25913046	42
19	23073534	23946200	24895356	25931080	41
20	23087501	23961366	24911878	25949142	40
21	23101486	23976553	24928423	25967230	39
22	23115490	23991762	24944993	25985345	38
23	23129513	24006992	24961587	26003487	37
24	23143556	24022245	24978205	26021658	36
25	23157616	24037518	24994847	26039855	35
26	23171696	24052814	25012514	26058081	34
27	23185795	24068130	25028205	26076333	33
28	23199913	24083469	25044920	26094614	32
29	23214050	24098830	25061660	26112923	31
30	23228205	24114213	25078426	26131259	30
31	23242380	24129616	25095216	26149623	29
32	23256574	24145041	25112030	26168015	28
33	23270797	24160487	25128869	26186436	27
34	23285021	24175956	25145732	26204884	26
35	23299273	24191445	25162620	26223361	25
36	23313546	24206956	25179432	26241867	24
37	23327838	24222488	25196469	26260400	23
38	23342150	24238043	25213432	26278963	22
39	23356481	24253619	25230418	26297555	21
40	23370832	24269217	25247431	26316176	20
41	23385203	24284838	25264468	26334825	19
42	23399593	24300481	25281531	26353503	18
43	23414003	24316147	25298620	26372209	17
44	23428433	24331835	25315734	26390945	16
45	23442882	24347546	25332874	26409709	15
46	23457351	24363281	25350039	26428502	14
47	23471840	24379038	25367229	26447323	13
48	23486348	24394818	25384445	26466174	12
49	23500876	24410620	25401687	26485053	11
50	23515424	24426446	25418956	26503962	10
51	23529992	24442294	25436250	26522890	9
52	23544580	24458164	25453570	26541867	8
53	23559188	24474056	25470915	26560863	7
54	23573817	24489973	25488286	26579889	6
55	23588565	24505908	25505683	26598945	5
56	23603134	24521869	25523005	26618030	4
57	23617822	24537851	25540553	26637145	3
58	23632532	24553857	25558027	26656291	2
59	23647262	24569885	25575526	26675466	1
60	23662013	24585936	25593051	26694672	0
	25	24	23	22	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	68	69	70	71	
0	26694672	27904284	29238045	30715531	60
1	26713907	27925445	29261433	30741500	59
2	26733172	27946642	29284861	30767516	58
3	26752467	27967873	29308328	30793579	57
4	26771791	27989139	29331835	30819689	56
5	26791145	28010440	29355382	30845846	55
6	26810529	28031776	29378970	30872051	54
7	26829942	28053147	29402599	30898304	53
8	26849390	28074553	29426268	30924605	52
9	26868867	28095994	29449978	30950953	51
10	26888373	28117469	29473728	30977350	50
11	26907910	28138980	29497519	31003793	49
12	26927479	28160527	29521350	31030285	48
13	26947078	28182108	29545222	31056824	47
14	26966709	28203725	29569136	31083412	46
15	26986370	28225378	29593090	31110047	45
16	27006062	28247067	29617087	31136731	44
17	27025785	28268793	29641124	31163462	43
18	27045539	28290553	29665204	31190241	42
19	27065323	28312349	29689326	31217019	41
20	27085138	28334181	29713488	31243945	40
21	27104985	28356049	29737692	31270871	39
22	27124864	28377954	29761938	31297848	38
23	27144774	28399894	29786227	31324873	37
24	27164717	28421871	29810558	31351948	36
25	27184690	28443884	29834931	31379072	35
26	27204686	28465934	29859347	31406247	34
27	27224734	28488021	29883705	31433472	33
28	27244804	28510144	29908306	31460747	32
29	27264906	28532304	29932850	31488072	31
30	27285040	28554501	29957438	31515448	30
31	27305205	28576735	29982069	31542873	29
32	27325402	28599007	30006743	31570349	28
33	27345631	28622316	30031460	31597875	27
34	27365893	28643662	30056220	31625453	26
35	27386186	28666045	30081023	31653080	25
36	27406513	28688467	30105870	31680758	24
37	27426872	28710925	30130760	31708486	23
38	27447264	28733422	30155714	31736265	22
39	27467688	28755956	30180672	31764094	21
40	27488145	28778549	30205694	31791974	20
41	27508635	28801139	30230760	31819906	19
42	27529157	28823787	30255871	31847891	18
43	27549722	28846473	30281026	31875929	17
44	27570301	28869196	30306226	31904019	16
45	27590922	28891957	30331460	31932164	15
46	27611578	28914756	30356759	31960358	14
47	27632266	28937594	30382092	31988606	13
48	27652989	28960471	30407470	32016909	12
49	27673745	28983386	30432893	32045263	11
50	27694535	29006340	30458361	32073672	10
51	27715358	29029332	30483873	32102132	9
52	27736215	29052363	30509430	32130649	8
53	27757105	29075435	30535033	32159212	7
54	27778029	29098546	30560682	32187832	6
55	27798987	29121697	30586375	32216504	5
56	27819978	29144888	30612115	32245231	4
57	27841003	29168118	30637890	32274012	3
58	27862060	29191388	30663732	32302846	2
59	27883156	29214697	30689608	32331735	1
60	27904284	29238045	30715531	32360678	0
	21	20	19	18	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	72	73	74	75	
0	32360678	34203038	36279559	38637042	60
1	32389676	34235609	36316402	38679033	59
2	32418726	34268245	36353333	38721117	58
3	32447837	34300947	36390323	38763296	57
4	32477001	34333716	36427401	38805571	56
5	32506219	34366553	36464558	38847941	55
6	32535494	34399452	36501793	38890408	54
7	32564823	34432420	36539107	38932971	53
8	32594209	34465456	36570511	38975632	52
9	32623651	34498557	36613973	39018390	51
10	32653148	34531726	36651525	39061246	50
11	32682701	34564959	36689156	39104200	49
12	32712311	34598259	36726868	39147252	48
13	32741977	34631526	36864660	39190423	47
14	32771699	34665061	36802533	39233653	46
15	32801478	34698564	36840488	39277002	45
16	32831314	34732135	36878524	39320449	44
17	32861207	34765775	36916641	39363994	43
18	32891157	34799483	36954842	39407640	42
19	32921165	34833259	36993127	39451384	41
20	32951231	34867105	37031496	39495228	40
21	32981355	34901024	37069947	39539172	39
22	33011537	34935005	37108482	39583218	38
23	33041776	34966052	37147101	39627364	37
24	33072074	35003172	37185803	39671613	36
25	33102431	35037361	37224589	39715965	35
26	33131846	35071621	37263459	39760420	34
27	33163320	35105952	37302413	39804979	33
28	33193853	35140354	37341453	39849642	32
29	33224444	35174826	37380577	39894411	31
30	33255094	35209369	37419788	39939286	30
31	33285803	35243981	37459081	39984263	29
32	33316571	35278664	37498460	40029344	28
33	33347398	35313418	37537923	40074528	27
34	33378286	35348244	37577471	40119816	26
35	33409132	35383140	37617104	40165289	25
36	33440240	35418110	37656824	40210709	24
37	33471307	35453152	37696632	40256316	23
38	33502436	35488268	37736518	40302033	22
39	33533625	35523456	37776513	40347858	21
40	33564875	35558718	37816588	40393792	20
41	33596187	35594052	37856751	40439834	19
42	33627561	35629460	37897004	40485985	18
43	33658998	35664940	37937146	40532245	17
44	33690497	35700494	37977779	40578613	16
45	33722059	35736121	38018300	40625091	15
46	33753683	35771822	38058912	40671678	14
47	33785370	35807597	38099614	40718374	13
48	33817120	35843447	38140406	40765180	12
49	33848934	35879373	38181288	40812093	11
50	33880813	35915374	38222261	40859121	10
51	33912753	35951451	38263324	40906259	9
52	33944756	35987602	38304479	40953510	8
53	33976821	36023829	38345725	41004876	7
54	34008950	36060132	38387064	41048358	6
55	34041141	36096510	38428495	41095957	5
56	34073395	36132966	38470019	41143668	4
57	34105712	36169497	38511635	41191492	3
58	34138091	36206107	38553344	41239431	2
59	34170523	36242794	38595146	41287425	1
60	34203038	36279559	38637042	41335654	0
	17	16	15	14	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantib. complementorũ arcuũ eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	76	77	78	79	
0	41335654	44454097	48097335	52408433	60
1	41383937	44510183	48163151	52486983	59
2	41432338	44566415	48229350	52565774	58
3	41480856	44622793	48295633	52644807	57
4	41529492	44679318	48362102	52724084	56
5	41578245	44735990	48428756	52803604	55
6	41627117	44792810	48495599	52883368	54
7	41676108	44849777	48562631	52963377	53
8	41725219	44906892	48629854	53043632	52
9	41774450	44964155	48697269	53124134	51
10	41823802	45021567	48764877	53204885	50
11	41873273	45079129	48832678	53285884	49
12	41922863	45136843	48900673	53367134	48
13	41972573	45194707	48968853	53448635	47
14	42022405	45252726	49037249	53530390	46
15	42072357	45310898	49105830	53612399	45
16	42122431	45369224	49174607	53694666	44
17	42172625	45427703	49243590	53777191	43
18	42222942	45486338	49312751	53859976	42
19	42273380	45545127	49382118	53943022	41
20	42323942	45604073	49451684	54026331	40
21	42374627	45663175	49521449	54109903	39
22	42425439	45722435	49591416	54193739	38
23	42476377	45781853	49661584	54277840	37
24	42527442	45841429	49731956	54362207	36
25	42578635	45901164	49802532	54446842	35
26	42629957	45961059	49873313	54531744	34
27	42681409	46021115	49944301	54616915	33
28	42732991	46081333	50015497	54702356	32
29	42784705	46141715	50086901	54788068	31
30	42836551	46202261	50158514	54874053	30
31	42888527	46262969	50230335	54960312	29
32	42940631	46323841	50302367	55046847	28
33	42992865	46384877	50374610	55133659	27
34	43045229	46446076	50447065	55220751	26
35	43097722	46507440	50519732	55308122	25
36	43150347	46568970	50592614	55395775	24
37	43203103	46630665	50665711	55483710	23
38	43255992	46692527	50739024	55571930	22
39	43309012	46754555	50812553	55660434	21
40	43362166	46816752	50886299	55749226	20
41	43415454	46879117	50960263	55838300	19
42	43468877	46941653	51034447	55927677	18
43	43522435	47004361	51108850	56017340	17
44	43576129	47067242	51183475	56107297	16
45	43629959	47130297	51258321	56197549	15
46	43683925	47193526	51333391	56288099	14
47	43738728	47256930	51408684	56378948	13
48	43792268	47320509	51484204	56470097	12
49	43846646	47384264	51559951	56561548	11
50	43901162	47448195	51635936	56653302	10
51	43955817	47512302	51712129	56745360	9
52	44020612	47576586	51788563	56837723	8
53	44065548	47641048	51865227	56930392	7
54	44120625	47705689	51942124	57023369	6
55	44175844	47770510	52019254	57116653	5
56	44231207	47835511	52096618	57210246	4
57	44286712	47900693	52174216	57304150	3
58	44342362	47966058	52252051	57398367	2
59	44398156	48031605	52330123	57492896	1
60	44454097	48097335	52408433	57587740	0
	13	12	11	10	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	80	81	82	83	
0	57587740	63924495	71852975	82055127	60
1	57682901	64042118	72002006	82249986	59
2	57778381	64160180	72151659	82445779	58
3	57874180	64278683	72301942	82642513	57
4	57970302	64397632	72452863	82840196	56
5	58066748	64517028	72604421	83038833	55
6	58163520	64636873	72756618	83238436	54
7	58260619	64757168	72909461	83439009	53
8	58358049	64877918	73062954	83640561	52
9	58455810	64999124	73217100	83843097	51
10	58553904	65120789	73371903	84046626	50
11	58652333	65242916	73527367	84251153	49
12	58751099	65365508	73683499	84456680	48
13	58850205	65488566	73840302	84663213	47
14	58949653	65612095	73997782	84870760	46
15	59049444	65736097	74155942	85079327	45
16	59149581	65859675	74314786	85288957	44
17	59250065	65985531	74474318	85499628	43
18	59350898	66110967	74634544	85711347	42
19	59452082	66246886	74795468	85924121	41
20	59553618	66363291	74857095	86137958	40
21	59655506	66490185	75119429	86352864	39
22	59757728	66617572	75282475	85568849	38
23	59860346	66745453	75446238	86785921	37
24	59963291	66873831	75610721	87004089	36
25	60066612	67002708	75775928	87223362	35
26	60170285	67132088	75941864	87443750	34
27	60274319	67261972	76108533	87665261	33
28	60378718	67392365	76275941	87887909	32
29	60483482	67523270	76444091	88111704	31
30	60588615	67654691	76612989	88336657	30
31	60694118	67786629	76782641	88562776	29
32	60799995	67919089	76953050	88790069	28
33	60906246	68052073	77124223	89018543	27
34	61012875	68185585	77296165	89248201	26
35	61119882	68319630	77468882	89479054	25
36	61227271	68454208	77642381	89711108	24
37	61335043	68589313	77816665	89944373	23
38	61443202	68724977	77991740	90178856	22
39	61551749	68861175	78167612	90414568	21
40	61660686	68997920	78344287	90651519	20
41	61770013	69135315	78521769	90889717	19
42	61879735	69273018	78700066	91129181	18
43	61989853	69411469	78879183	91369917	17
44	62100367	69550434	79059128	91611941	16
45	62211280	69689963	79239905	91855265	15
46	62322594	69830059	79421520	92099899	14
47	62434312	69970726	79603976	92345849	13
48	62546437	70111967	79787381	92593126	12
49	62658971	70253786	79971439	92841739	11
50	62771918	70396188	80156456	93091699	10
51	62885274	70539174	80342336	93342963	9
52	62999049	70682751	80529087	93595620	8
53	63113241	70826919	80716713	93849647	7
54	63227855	70971684	80905219	94105066	6
55	63342890	71117047	81094612	94361964	5
56	63458352	71263014	81284899	94620181	4
57	63574240	71409586	81476087	94879901	3
58	63690559	71556760	81668183	95141050	2
59	63807309	71704564	81861195	95403630	1
60	63924495	71852975	82055127	95667689	0
	9	8	7	6	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro ſecantibus complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrãtis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis

Minuta graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	84	85	86	
0	95667689	114737188	143355808	60
1	95933204	115119970	143954694	59
2	96200195	115505313	144558602	58
3	96468673	115893242	145167595	57
4	96738655	116283797	145781740	56
5	97010253	116676991	146401101	55
6	97283267	117072851	147025745	54
7	97557932	117471403	147655740	53
8	97834057	117872815	148291169	52
9	98111843	118276840	148932108	51
10	98391211	118683794	149578791	50
11	98672171	119093414	150230942	49
12	98954738	119506013	150888966	48
13	99236930	119921335	151552578	47
14	99524766	120339695	152222283	46
15	99812250	120760985	152897946	45
16	100101400	121185232	153579394	44
17	100392329	121612482	154267179	43
18	100684851	122042752	154961155	42
19	100979193	122476076	155661396	41
20	101275259	122912485	156368008	40
21	101572962	123352014	157081063	39
22	101872522	123794696	157800648	38
23	102173854	124240732	158526854	37
24	102476971	124689836	159259771	36
25	102781890	125142353	159999560	35
26	103088639	125598007	160746121	34
27	103397202	126057149	161499724	33
28	103707656	126519656	162260744	32
29	104019959	126985568	163028671	31
30	104334254	127454936	163804188	30
31	104650345	127927785	164586836	29
32	104968474	128404152	165377268	28
33	105288542	128884078	166175067	27
34	105610566	129367604	166980877	26
35	105934564	129854921	167794536	25
36	106260557	130345812	168615879	24
37	106588558	130840395	169445585	23
38	106918589	131338917	170283495	22
39	107250680	131841076	171129820	21
40	107584955	132347264	171984431	20
41	107921201	132857174	172847712	19
42	108259554	133371390	173719700	18
43	108600151	133889600	174600528	17
44	108942779	134411312	175490331	16
45	109287702	134937471	176389247	15
46	109634817	135467749	177297417	14
47	109984143	136002235	178215000	13
48	110335695	136540955	179142131	12
49	110689503	137083887	180078954	11
50	111045597	137631223	181025951	10
51	111403988	138183016	181982628	9
52	111764699	138739177	182949802	8
53	112127750	139299830	183926988	7
54	112493167	139865032	184915009	6
55	112861097	140435034	185913698	5
56	113231316	141009514	186922883	4
57	113604036	141588910	187943432	3
58	113979204	142172885	188975184	2
59	114356941	142761897	190018342	1
60	114737188	143355808	191073059	0
	5	4	3	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrantis.

Gradus Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus arcuum eiuſdem Quadrantis.

	87	88	89	
0	191073059	286537048	527987098	60
1	192139567	288943841	582696234	59
2	193218044	291391404	592740072	58
3	194308693	293880683	603139919	57
4	195411723	296413087	613907444	56
5	196527729	298990299	625070305	55
6	197656182	301611807	636642580	54
7	198797665	304279687	648655621	53
8	199952408	306996123	661126359	52
9	201120639	309760533	674090521	51
10	202303011	312576192	687573461	50
11	203498943	315442491	701612741	49
12	204709121	318361849	716229489	48
13	205934200	321336774	731453951	47
14	207173596	324366765	747356168	46
15	208428431	327455509	763965262	45
16	209698119	330602545	781323254	44
17	210983811	333811800	799494739	43
18	212294614	337082830	818524878	42
19	213602421	340419652	838490069	41
20	214936837	343823403	859453551	40
21	216287319	347294586	881484374	39
22	217655350	350837799	904682629	38
23	219040792	354454051	929134899	37
24	220443981	358145679	954945691	36
25	221865261	361914968	982231457	35
26	223305005	365763109	1011112129	34
27	224763453	369695332	1041753449	33
28	226241278	373713015	1074309940	32
29	227738558	377818975	1108967170	31
30	229255785	382016194	1145934768	30
31	230793360	386307709	1185438054	29
32	232351718	390696734	1227777193	28
33	233931261	395186630	1273252703	27
34	235532422	399780916	1322226495	26
35	237156211	404483275	1375118522	25
36	238801972	409397566	1432397932	24
37	240470730	414227875	1494678912	23
38	242163582	419278406	1562622042	22
39	243879838	424453607	1637036239	21
40	245621193	429758156	1718892212	20
41	247386980	435196961	1809365043	19
42	249178956	440775230	1909891150	18
43	250996450	446498305	2022234532	17
44	252841285	452371994	2148642981	16
45	254713463	458402271	2291895669	15
46	256612915	464595485	2455554199	14
47	258541565	470958329	2644450861	13
48	260499426	477497828	2864836990	12
49	262487160	484221619	3125282743	11
50	264505458	491139838	3437843546	10
51	266554348	498256113	3819709423	9
52	268635944	505581634	4297193536	8
53	270750304	513128395	4911255640	7
54	272898206	520901152	5729642566	6
55	275080457	528915798	6875687278	5
56	277297985	537178089	8594018365	4
57	279551349	545702599	11458691197	3
58	281841763	554505091	17188036598	2
59	284170013	563593031	34376072269	1
60	286537048	572987098	Infinita.	0
	2	1	0	

Minuta Graduum Quadrantis pro ſecantibus complementorum arcuum eiuſdem Quadrantis.

Gradus Quadrãtis pro ſecantibus complementorũ arcuum eiuſdẽ Quadrãtis.

VSVS TABVLÆ TAM TANGENTIUM, quàm ſecantium.

Vſus tabulæ tam tangentiũ quàm ſecantium.

EX *vtraque tabula non aliter tangentes, ac ſecantes arcuum, vel complementorum arcuum inueſtigabimus, ac ſupra ſinus rectos, & ſinus complementorum arcuum ex ſinuum tabula eruere docuimus. Vt ſi quæratur tam tangens, quam ſecans arcus grad.* 50. *Min.* 24. *inuenietur in tabula tangentium ſub grad.* 50. *in vertice tabulæ poſitis, è regione Min.* 24. *ad ſiniſtram collocatorum tangens particularum* 12087923. *qualium ſinus totus ponitur* 10000000. *In tabula vero ſecantium reperietur ſub grad.* 50. *è regione Min.* 24. *ſecans earundem particularum.* 15688144. *Quod ſi quæratur tam tangens, quàm ſecans complementi arcus* 39. *Min.* 36. *reperietur in priori quidem tabula ſupra grad.* 39. *in ima ſede poſitos, è regione Min.* 36. *ad dextram collocatorum tangens eadem, quæ prius,* 12087923. *In poſteriori vero tabula cadem ſecans* 15688144. *propterea quòd complementum arcus grad.* 39. *Min.* 36. *complectitur grad.* 50. *Min.* 24. *cui arcui dicta tangens, ac ſecans debetur, vt patet.*

I A M *verò ſi ſinus totus aſſumatur particularũ tantummodo* 100000. *abiectis duabus cifris ex ſinu toto* 10000000. *abiiciendæ quoque erunt ex ſingulis tangentibus, ac ſecantibus duæ priores figuræ ad dextram: quemadmodum de ſinubus diximus.*

SINVVM TANGENTIVM, ET SECANTIVM FINIS.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

TRIANGVLA RECTILINEA.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

TRIANGVLA RECTILINEA.

PRÆFATIO.

Vſus ſinuum, linearum tangentium, & ſecantium in doctrina triangulorũ potiſſimũ conſiſtit.

SINVVM, *linearum tangentium, & ſecantium vſus potiſſimum in doctrina triangulorum tam rectilineorum, quam ſphæricorum conſiſtit. Omnes enim Aſtronomi in motibus cœleſtibus vel inueſtigandis, vel explicandis explorant in triangulis beneficio ſinuum, linearum tangentium, & ſecantium tum latera ex angulis notis, tum etiam angulos ex lateribus cognitis. Id quod ex Epitoma Ioan. Regiomon. in Almogeſtum, ſiue magnam conſtructionem Ptolomæi, ex opere Copernici de reuolutionibus cœleſtibus, & ex aliorum Aſtronomorum ſcriptis perſpicue conſtare poteſt. Quam ob rem cum iam tractationem ſinuum, linearumq́; tangentium, ac ſecantium abſoluerimus, ordo poſtulat, vt ſcientiam hanc triangulorum à Ioanne Regiomontano quinque libris diffusè explicatam, & á Gebro Hiſpalenſi Arabe, necnon à Nicolao Copernico breuiter quidem, ſed paulò obſcurius traditam, pro virili etiam exponamus, cum incredibilis ſit eorum vtilitas cum in rebus omnibus Mathematicis, tum præſertim in cœleſtibus motibus, & in ijs rebus, quæ ex illis pendent, rectè intelligendis, vel inueſtigandis, vt dictum eſt, & partim etiam non obſcurè ex noſtra Gnomonica colligi poteſt, vbi permulta ad horologia pertinentia ex triangulis à nobis ſunt demonſtrata. Exordiemur autem à triangulis rectilineis, tanquam facilioribus, de quibus ea ſolum demonſtrabimus, quæ ad res Aſtronomicas, & Geometricas rectè percipiendas neceſſaria eſſe iudicamus: Id quod etiam in ſphæricis triangulis obſeruauimus. Qui plura deſiderat, legat Menelaum, & Maurolycum de ſphæricis triangulis, de rectilineis vero Ioannem Regiomontanum. Ante omnia autem explicandum erit, penes quid angulorum rectilineorum quantitas ſumenda ſit.*

PENES

PENES QVID ANGVLI RECTILINEI magnitudo ſumatur.

Angulorum rectilineorum magnitudo penes quid ſumatur. Angulus rectilineus eſt tot partium, quot graduum eſt arcus circuli, cui in centro inſiſtit.

ANGVLI cuiuſuis rectilinei magnitudo ſumitur penes arcum circulo ex ipſo angulo, vt centro, deſcriptum, ad quodcunque interuallum, inter rectas lineas angulum comprehendentes interceptum. Nam quilibet angulus rectilineus tantus eſſe dicitur, quantus eſt arcus circuli, cuius centrum eſt in ipſo angulo, inter duas lineas rectas quæ angulum continent, interiectus: ita vt quot graduum fuerit ille arcus, totidem partium ſit & angulus, qualium quatuor recti ſunt 360. aut vnus rectus 90. Ex quo ſit, indifferenter ſinum anguli rectilinei pro ſinu arcus accipi poſſe, & contra; quod etiam de tangente, & ſecante intelligatur: quandoquidem arcus, & angulus illi in centro inſiſtens eundem habent partium numerum, licet diuerſi generis, cum partes arcus ſint arcus, partes vero anguli ſint anguli: quamuis & partes anguli dici poßint arcus, ita vt angulus dicatur habere tot gradus, quot in arcu, cui inſiſtit, comprehenduntur.

QVANDOCVNQVE ergo arcus angulum rectilineum metiens eſt quadrans, id eſt, quarta pars totius circumferentiæ, angulus ei inſiſtens in centro rectus erit, nempe quarta pars quatuor rectorum, a quibus ſpatium, quod circumſtat centrum circuli æqualiter omnes partes circumferentiæ reſpiciens, æquale eſt: quando autem arcus idem eſt quadrante minor, angulus quoque minor erit recto, nempe acutus: quando denique arcus eſt maior quadrante, angulus etiam recto maior erit, nimirum obtuſus. Et contra, quando angulus eſt rectus, erit arcus illum metiens quadrans: quando acutus, quadrante minor: quando denique obtuſus, maior quadrante. Quæ omnia ex lemmate ſequenti erunt perſpicua.

a Corol. 2. 13. primi.

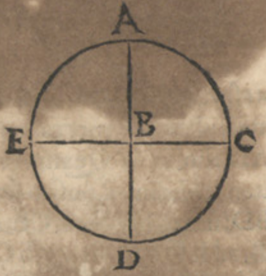
L E M M A.

Quomodo ſe habent anguli rectilinei ad arcus circulorum ex ipſis, vt centris deſcriptorum & contra.

RECTÆ lineæ angulum rectum comprehendentes abſcindunt quadrantem ex circulo, qui ex ipſo angulo, vt centro, ad quodcunque interuallum deſcribitur: lineæ vero rectæ angulum acutum continentes auferunt arcum quadrante minorem: lineæ deniq; rectæ conſtituentes angulum obtuſum intercipiunt in eodem circulo arcum maiorem quadrante. Et contra, rectæ lineæ ex centro circuli egredientes, quadrantemque intercipientes conſtituunt angulum rectum: lineæ vero arcum quadrante minorem abſcindentes angulum acutum continent: rectæ denique lineæ auferentes arcum maiorem quadrante obtuſum angulum comprehendunt.

RECTAE lineæ AB, CB, angulum rectum contineant ABC, & ex B, circulus deſcribatur ACDE. Dico arcum AC, quadrantem eſſe, &c. b Quoniam enim eſt, vt angulus ABC, in centro ad quatuor rectos, ita arcus AC, ad totam circumferentiam; eſt autem angulus ABC, cum rectus ſit, quarta pars quatuor rectorum: erit quoque arcus AC, totius circumferentiæ quarta pars, id eſt, quadrans. Quoniam vero recta linea conſtituens cum recta AB, in puncto B, angulum acutum, cadit in arcum AC, recta vero linea cum eadem AB, conſtituens angulum obtuſum in puncto B, cadit in arcum CD; liquido conſtat, rectas lineas angulum acutum in centro B, conſtituentes intercipere arcum quadrante AC, minorem, lineas vero rectas continentes angulum obtuſum abſcindere arcum quadrante AC, maiorem.

b Corol. 4. 33. ſexti.



SED auferant iam rectæ BA, BC, ex centro B, egredientes quadrantem AC. Dico angulum ABC, eſſe rectum, &c. c Quoniam enim eſt, vt arcus AC, ad totam circumferentiam, ita angulus ABC, in centro ad quatuor rectos; eſt autem arcus AC, quadrans, id eſt, quarta pars circumferentiæ totius: erit quoque angulus ABC, quarta pars quatuor rectorum, atque adeo rectus. Quia vero rectæ ex centro B, emiſſæ, atque arcum quadrante AC, minorem auferentes angulum conſtituunt minorem angulo recto ABC, auferentes vero arcum quadrante AC, maiorem conſtituunt angulum recto angulo ABC, maiorem; perſpicuum eſt, rectas lineas arcum quadrante AC, minorem intercipientes conſtituere in centro B, angulum acutum, lineas vero rectas arcum quadrante AC, maiorem includentes continere in centro B, angulum obtuſum. Quod eſt propoſitum.

c Corol. 2. 33. ſexti.

ALITER. Contineant rurſum rectæ AB, CB, angulum rectum ABC, & ex B, circulus deſcribatur ACDF. Dico arcum AC, eſſe quadrantem, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt & anguli ABE, CBD, cum ſint angulo ABC, deinceps, recti, ex definitione; necnon & angulus DBE, d quod angulo ABC, ſit ad verticem æqualis, rectus. Quare cum omnes quatuor anguli ad B, centrum ſint recti, id eſt, æquales, e æquales quoque erunt quatuor arcus AC, CD, DE, EA; atque adeo quilibet eorum quadrans erit. Reliqua demonſtrabuntur, vt prius.

d 15. pri. e 26. tert.

VERVM rectæ BA, BC, ex centro B, emiſſæ auferant iam quadrantem AC. Dico angulum ABC, rectum eſſe, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, f cum angulus DBE, angulo ABC, ad verticem ſit æqualis, g erit & arcus DE, arcui AC, æqualis, & proinde quadrans. Semicirculum ergo conficiunt duo quadrantes AC, DE; atque adeo reliqui duo arcus AE, DC, alterum ſemicirculum conſtituent. h Cum ergo duo arcus AE, DC, æquales ſint, i quod anguli ABE, CBD, ad verticem ſint æquales: erit vterq; eorum quadrans: ac propterea quatuor arcus AC, CD, DE, EA, cum ſint quadrantes, æquales erunt. k Quatuor ergo anguli ad centrum B, æquales quoq; erunt; atq; adeo eorum quilibet erit rectus, vel breuius. Cum AC, ſit quadrans, erit quoq; tam in ſemicirculo CAE, reliquus arcus AE, quam in ſemicirculo ACD, reliquus arcus CD, quadrans: Eodemq; modo in ſemicirculo AED, vel CDE, reliquus arcus DE, quadrans erit; l & proinde quatuor anguli ad B, quatuor quadrantibus æqualibus inſiſtentes erunt æquales, & recti. Reliqua, vt prius, oſtendentur.

f 15. pri. g 26. tert. h 26. tert. i 15. primi. k 27. tert. l 27. tert.

SCHOLIVM.

Datis duo bus angu li[illegible]trian guli recti linei da tus etiam erit ter tius. Item in trian gulo rectã gulo, ſi de tur vnus angulus acutus, datus quo que erit acutus re liquus.

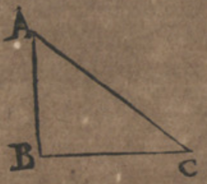
I[illegible]teria porro triangulorum rectilineorum, cum dantur duo anguli noti, tertius illico notus quoque erit, cum ſit complementum duorum rectorum. Item cũ in triangulo rectangulo datur vnus acutus angulus, notus etiã erit reliquus acutus, quod ſit complementum vnius recti. Itaq; detractis duobus angulis notis ſimul ex grad. 180. reliquus erit tertius notus. Item in triangulo rectangulo, ſi detrahatur acutus notus ex grad. 90. remanebit alter acutus notus. Quod ſemel monuiſſe ſatis ſit.

THEOR. I. PROPOS. I.

IN omni triangulo rectilineo latera quæuis duo eandem proportionem habent, quam ſinus angulorum illis oppoſitorum.

Latera trianguli rectilinei ſunt ſinubus angulorum oppoſitorum proportionalia.

SIT primum triangulum rectangulum ABC, cuius angulus rectus B. Dico eſſe AB, ad AC, vt eſt ſinus anguli C, ad ſiuum anguli B. Item AB, ad BC, vt eſt ſinus anguli C, ad ſinum anguli A, &c. Quoniam enim, vt in definitionibus ſinuum oſtendimus, ſi AC. ponatur ſinus totus, latus AB, eſt ſinus anguli C, & BC, ſinus anguli A: liquido conſtat, ita eſſe latus AB, ad latus AC, vt eſt AB, ſinus anguli C, ad AC, ſinum totum anguli recti B: Vel ita eſſe latus AC, ad latus AB, vt eſt AC, ſinus totus recti anguli B, ad AB, ſinum anguli C; cum ipſa latera ſint ſinus angulorum oppoſitorum, ac proinde vtrobique ſit identitatis proportio. Eadem ratione erit, vt latus AC, ad latus BC, ita AC, ſinus totus anguli recti B, ad BC, ſinum anguli A: Vel vt latus BC, ad latus AC, ita BC, ſinus anguli A, ad AC, ſinum totum recti anguli B. Item vt latus AB, ad latus BC, ita AB, ſinus anguli C, ad BC, ſinum anguli A: Vel vt latus BC, ad latus AB, ita BC, ſinus anguli A, ad AB, ſinum anguli C.



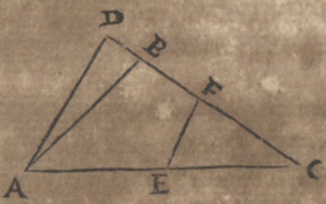
a 5. primi.

SIT deinde triangulum ABC, non rectangulum. Dico rurſus eſſe latus AB, ad latus AC, vt eſt ſinus anguli C, ad ſinum anguli B, &c. Aut enim latera aſſumpta AB, AC, æqualia ſunt, aut inæqualia. Si æqualia, [a] erunt quoque anguli C, B, æquales; ac proinde, vt in definitionibus ſinuum docuimus, eorum ſinus æquales. Quare erit, vt latus AB, ad latus AC, ita ſinus anguli C, ad ſinum anguli B, vel latus AC, ad latus AB, ita ſinus anguli B, ad ſinum anguli C; cum ſemper ſit proportio æqualitatis. Si vero latera AB, BC, ſunt inæqualia, ſic AC, maius, ex quo ab[illegible] datur recta CE minori lateri AB, æqualis, & ex A, E, ad tertium latus BC, perpendiculares demittantur AD, EF, quarum vtraque cadet intra triangulum, quando angulus B, maiori lateri AC, oppoſitus acutus eſt. Erit enim & tunc angulus quoque C, acutus, [b] cum minor ſit, quam B. [c] Quare perpendicularis AD, intra triangulum cadet, ac proinde & perpendicularis EF. Quando vero angulus B, obtuſus eſt, [d] cadet quidem AD, ſemper extra triangulum, at EF, cadere poteſt vel extra etiam, vel in punctum B, vel intra triangulum. Quomodocunque autem cadant dictæ perpendiculares, ſemper eadem erit demonſtratio. [e] Nam cum AD, EF, ſint parallelæ, [f] erunt triangula CEF, CAD, ſimilia. [g] Quamobrem erit, vt CE, ad EF, ita CA, ad AD. Cum ergo ex ijs, quæ in definitionibus ſinuum tradidimus, poſito ſinu toto CE, recta EF, ſit ſinus anguli C; poſito item ſinu toto AB, ſit ſinus anguli ABD; ſintq; ſinus toti CE, AB, reſpectu quorũ illi ſunt ſinus, æquales; liquet eſſe, vt CE, hoc eſt, latus rectæ AD, AB, ad EF, ſinum anguli C, ita latus CA, ad AD, ſinum anguli ABD: Et permutando, vt latus AB, ad latus AC, ita EF, ſinum anguli C, ad AD, ſinum anguli ABD, hoc eſt, in poſteriori triangulo, ad ſinum anguli ABC, cum duo anguli ad B, æquales ſint duobus rectis, & proinde eundem ſinum habeant, vt in definitionibus ſinuum docuimus. Ex quo conſtat, ita eſſe minus latus AB, ad maius AC, vt eſt EF, ſinus anguli C, minori lateri oppoſiti ad AD, ſinum anguli ABC, maiori lateri oppoſiti: Et conuertendo, ita eſſe maius latus AC, ad minus AB, vt eſt AD, ſinus anguli ABC, maiori lateri oppoſiti ad EF, ſinum anguli C, minori lateri oppoſiti. Non aliter oſtendemus eſſe, vt latus AB, ad latus BC, ita ſinum anguli C, ad ſinum anguli A: Vel vt latus BC, ad latus AB, ita ſinum anguli A, ad ſinum anguli C, &c. dummodo ex puncto, vbi conueniunt latera aſſumpta inæqualia, (ſi forte æqualia non ſunt) ducas ad latus oppoſitum lineam perpendicularem, & minori lateri ex maiore rectam æqualem abſcindas, initio facto ab altero puncto extremo maioris lateris, vbi cum tertio latere coniungitur, vt à nobis factum eſt, &c. Hic etiam eſt, vt CE, hoc eſt, AB, ad CA, ita EF, ſinus anguli C, oppoſiti priori lateri AB, ad AD, ſinum anguli B, oppoſiti priori lateri AC. Dico enim anguli ad B, eundem ſinum habent.





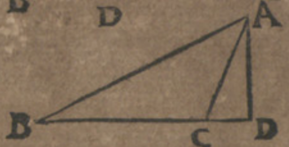
b 18. pri.
c ſchol. 13. ſecundi.
d ſchol. 12. ſecundi.
e 28. pri.
f Coroll. 4. ſexti.
g 4. ſexti.



ALITER. Sit rurſus triangulum non rectangulum ABC: de rectangulo enim in principio huius demonſtrationis iam eſt demonſtratum. Dico eſſe, vt latus AB, ad latus AC, ita ſinum anguli C, ad ſinum anguli B: Vel vt latus AC, ad latus AB, ita ſinum anguli B, ad ſinum anguli C, &c. Ducta enim ex A, vbi duo latera aſſumpta coeunt, ad tertium latus BC, perpendiculari AD, quæ vel intra triangulum cadet, vel extra, prout anguli B, & C, acuti fuerint, vel alter eorum obtuſus: erit in triangulo rectangulo ABD, vt latus AB, ad latus AD, ita ſinus anguli recti D, ad ſinum anguli B, vt ſupra eſt demonſtratum: Item in triangulo rectangulo ADC, vt latus AD, ad latus AC, ita ſinus anguli C, ad ſinum anguli recti D. Ex æqualitate ergo, & perturbata propor-

latus AB.	ſin. ang. C.
latus AD.	ſin. ang. D.
latus AC.	ſin. ang. B.



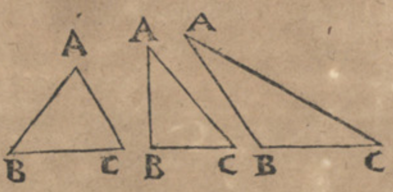


proportione erit, vt latus AB, ad latus A C, ita ſinus anguli C, (Habent .n. duo anguli ad C, in obtuſangulo triangulo eundem ſinum, vt in tractatione ſinuum oſtendimus) ad ſinum anguli B, vt in formula ſuprapoſita apparet: Et conuertendo quoque, vt latus AC, ad latus AB, ita ſinus anguli B, ad ſinum anguli C. Eodem modo concludemus eſſe, vt latus A B, ad latus BC, ita ſinum anguli C, ad ſinum anguli BAC: Vel, vt latus B C, ad latus AB, ita ſinum anguli B A C, ad ſinum anguli C, &c. Quocirca in omni triangulo rectilineo latera quæuis duo eandem proportionem habent, quam ſinus angulorum illis oppoſitorum. Quod erat demonſtrandum.

BREVIVS. Poſito ſinu toto A D, erit A B, ſecans anguli BAD, & AC, ſecans anguli CAD. Cum ergo per 22. ſinuum ſit, vt ſecans A B, ad ſecantem AC, ita ſinus complementi anguli CAD, hoc eſt, ita ſinus anguli C, ad ſinum complementi anguli BAD, hoc eſt, ad ſinum anguli B, conſtat propoſitum.

SCHOLIVM.

EX hac propoſ. facile colligemus proportiones laterum cuiuſuis trianguli rectilinei, cuius omnes anguli cogniti ſint, vel duo tantum. Sint enim omnes anguli in triangulo A B C, noti. Dico proportiones laterum notas eſſe. [a] *Cum enim eadem ſit proportio lateris A B, ad latus A C, quæ ſinus anguli C, ad ſinum anguli B; ſint autem ſinus angulorum C, B, notorum cogniti ex tabula Sinuum; nota erit proportio lateris A B, ad latus A C, &c. Exempli cauſa, ponatur in primo triangulo angulus C, grad. 60. B, grad. 50. & A, grad. 70. Horum ſinus ſunt 86602. 76604. 93969. Eſt ergo proportio A B, ad A C, eadem, quæ 86602. ad 76604. & A B, ad BC, eadem, quæ 86602. ad 93969. & A C, ad B C, eadem, quæ 76604. ad 93969. In triangulo vero ſecundo ponatur angulus B, rectus, ac proinde grad. 90. C, grad. 50. & A, grad. 40. Horum ſinus ſunt ſunt 100000. 76604. 64278. Erit igitur A B, ad A C, vt 76604. ad 100000. & A B, ad BC, vt 76604. ad 64278. & A C, ad BC, vt 100000. ad 64278. In triangulo deniq; tertio ſtatuatur angulus B, obtuſus & grad. 124. C, grad. 30. & A, grad. 26. Horum ſinus ſunt (ſi pro ſinu anguli obtuſi accipiatur ſinus complementi ipſius vſque ad grad. 180. nempe ſinus grad. 56.) 82903. 50000. 43837. Quare erit A B, ad A C, vt 50000. ad 82903. & A B, ad B C, vt 50000. ad 43837. & AC, ad B C, vt 82903. ad 43837.* *Qua ratione ex tribus vel duobus angulis notis cuiuſuis trianguli cognoſcantur proportiones laterũ. a 1. huius.*



ITA QVE vt facile proportiones laterum habeantur, ſatis eſt, ſi lateribus ſinus angulorum oppoſitorum aſcribantur: propterea quòd latera eandem proportionem habent, quam oppoſitorum angulorum ſinus, vt demonſtratum eſt. *Praxis.*

QVOD ſi duo tantum anguli cogniti ſint, erit reliquus tertius quoque notus. Quare, vt prius, laterum proportiones cognoſcentur.

POSSVMVS eaſdem proportiones laterum cognoſcere ex angulis datis, ſine auxilio antecedentis propoſ. hoc modo. [b] *Circa datum triangulum ABC, deſcribatur circulus, cuius centrum D,* [c] *quod cadet vel intra triangulum, vel in vnum latus, vel extra triangulum, prout triangulum fuerit acutangulum, vel rectangulum, aut obtuſangulum. Ductis deinde ex centro D, ad omnes angulos rectis DA, DB, DC, (In rectangulo triangulo ſatis eſt, ſi ducatur DA, quod DB, D C, partes ſint lateris BC.) ſecentur ſingula latera, & arcus, quos ſubtendunt, biſariam in punctis F, H, K, & E, G, I. In rectangulo tamen triangulo arcus BC, cui rectus angulus inſiſtit, non eſt diuidendus biſariam: In obtuſangulo autem ſecandus eſt biſariam arcus B A C, in quo exiſtit obtuſus angulus, non autem arcus B C, cui inſiſtit.* *b 5. quart. c Coroll. 5. quarti.*



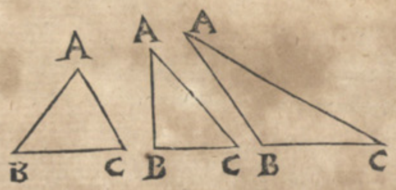
Erunt autem medietates laterum ſinus recti medietatum arcuum, ex deſin. ſinus recti. [d] *Itaque quoniam tam angulus ADB, anguli ACB, quàm angulus A D C, anguli ABC, & in triangulo acutangulo etiam angulus B D C, anguli BAC, duplus eſt: ponuntur autem anguli triangulorum noti; erunt quoque eorum dupli in centro cogniti. Quare & eorum arcus A B, A C, necnon & arcus B C, in primo circulo noti erunt; ac proinde & ſemiſſes eorundem. Igitur, ex tabula ſinuum, dabuntur ſinus harum ſemiſſium, hoc eſt, ſemiſſes laterum AB, AC, & in triangulo acutangulo ſemiſſis quoque lateris BC: proptereaque & tota latera A B, A C, vna cum latere BC, in triangulo acutangulo, cognita fient in partibus ſinus totius A D. In triangulo porro rectangulo latus B C, recto angulo oppoſitum duplum eſt ſinus totius, ac proinde notum in eiſdem partibus ſinus totius AD: In triangulo vero obtuſangulo latus BC, angulo obtuſo oppoſitum ita dabitur. Quoniam arcus A B, AC, dati ſunt, datus etiam erit totus arcus BAC, ex ipſis conſlatus. Igitur & eius ſemiſſis B E, & proinde & huius ſemiſſis ſinus rectus B F, dabitur; proptereaque & totum latus BC. Cognita ergo erunt hac ratione omnia latera in partibus ſemidiametri circuli trianguli circumſcripti; & proinde eorum proportiones notæ.* *d 20. tert.*

ITA autem ſine longa circuitione latera cognoſces in partibus dictæ ſemidiametri. Sinus rectus cuiuſuis anguli acuti duplicetur, & habebitur latus illi angulo oppoſitum in partibus dictæ ſemidiametri, quod facile ex demonſtratis intelligi poteſt. Nam quilibet angulus acutus continet tot gradus, quot ſunt in ſemiſſe arcus, cui inſiſtit; Vt angulus ACB, continet tot gradus, quot ſunt in arcu A G, ſemiſſe arcus AB, cui inſiſtit, [e] *propterea quòd angulus ADB, cui totus arcus AB, debetur, duplus eſt anguli ACB. Quare cum A H, ſemiſſis lateris A B, ſit ſinus arcus A G, erit eadem AH, ſinus anguli ACB: atque adeo ſinus anguli A C B, duplicatus dabit latus A B, in partibus ſemidiametri A D, &c. Latus autem recto angulo oppoſitum perpetuò eſt diameter circuli circumſcripti triangulo. Quare ſi ſemidiameter, ſinuſue totus duplicetur, cognitum fiet ipſum latus. Latus deniq; obtuſo angulo oppoſitum habebitur, ſi vterq; angulorum acutorum duplicetur, & duplicatorum ſemiſſis accipiatur. Nam ſinus huius ſemiſſis duplicatus illico latus oſtendet notum.* [f] *Anguli namque ADB, ADC, dupli ſunt acutorum angulorum ACB, ABC: quibus quidem duplis angulis totus arcus BAC, debetur, &c.* *Praxis. e 20. tert. f 20. tert.*

IMMO

Quomodo ex datis proportionibus omnium angulorum trianguli cognoſcātur ipſi anguli.

IMMO vero ſi non dentur anguli, ſed eorum tantum proportiones, cognoſcemus nihilominus proportiones laterum, ſi prius ex angulorum proportionibus datis eorundem magnitudines inueſtigemus hoc modo. In primo triangulo prioris figuræ huius ſcholij ponatur proportio anguli C, ad angulum B, eadem, quæ 12. ad 10. & anguli B. ad angulum A, quæ 20. ad 28. quæ duæ proportiones notæ ſatis ſunt, etiamſi proportio anguli A, ad angulum C, ignota ſit. [b] Inuentis autem minimis numeris 6. 5. qui eandem proportionem habeant, quam anguli C, B, hoc eſt, quam numeri 12. 10. ſi hi minimi non ſint; Item minimis 5. 7. eandem proportionem habentibus, quam anguli B, A, ſiue numeri 20. 28. ſumemus tres hoſce numeros deinceps minimos 6. 5. 7. in proportionibus numerorum minimorum 6. 5. & 5. 7. qui ſi non eſſent deinceps minimi, [c] inquirendi eſſent tres minimi, per ea, quæ ab Euclide demonſtrata ſunt lib. 8. Erit ergo angulus C, vt 6. B, vt 5. & A, vt 7. quos in gradibus per regulam Societatum ita notos efficiemus. Collectis numeris 6. 5. 7. in vnam ſummam 18. dicemus per auream regulam. Si 18. dant grad. 180. (tot enim gradibus omnes tres anguli, hoc eſt, duo recti, æquiualent.) quid dabunt 6? quid 5? & quid 7? vt hic vides.



b 35. ſepti.

c 4. octa.

18. 180. grad. { 6? 5? 7? } fiunt { 60. grad. 50. grad. 70. grad. } pro angulo { C. B. A. }

Quando proportiones angulorum notæ nō ſunt continuatæ, quid agendum.

Inueniemuſque angulum C, grad. 60. B, grad. 50. & A, grad. 70. Quòd ſi duæ notæ proportiones angulorum non ſint continuatæ, vt in dato exemplo, continuandæ erunt. Vt ſi dicat quis. Proportio anguli C, ad angulum B, eſt vt 12. ad 10. & proportio anguli A, ad angulum B, vt 28. ad 20. vbi vides, eundem angulum B, in vtraque proportione eſſe conſequens: continuabimus illas, ſi dicamus, proportionem C, ad B, eſſe vt 12. ad 10. & B, ad A, vt 20. ad 28. Aut ſi quis dicat. Proportio anguli C, ad B, eſt vt 12. ad 10. proportio autem A, ad C, eſt vt 28. ad 24. continuabimus eas, ponendo proportionem A, ad C, vt 28. ad 24. & C, ad B, vt 12. ad 10. Aut denique ſi quis dicat. Proportio C, ad B, eſt vt 12. ad 10. & C, ad A, vt 24. ad 28. continuabimus eas, ponendo B, ad C, vt 10. ad 12. & C, ad A, vt 24. ad 28. &c.

SED demus aliud exemplum in tertio triangulo eiuſdem figuræ, in quo ſit proportio anguli B, ad angulum C, vt 62. ad 15. & proportio anguli B, ad angulum A, vt 248. ad 52. Quoniam angulus B, bis fuit antecedens, hoc eſt, proportiones datæ non ſunt continuatæ, eas continuabimus, ſtatuendo proportionem A, ad B, vt 52. ad 248. & B, ad C, vt 62. ad 15. Inuentis autem minimis numeris 13. 62. eandem proportionem habentibus, quam anguli A, B, ſiue numeri 52. 248. erunt duæ datæ proportiones continuatæ in his tribus numeris minimis 13. 62. 15. vt conſtat. Collectis ergo ipſis in vnam ſummam 90. inueniemus per regulam Societatum angulos in gradibus, vt hic apparet.

90. 180. grad. { 13? 62? 15? } fiunt { 26. grad. 124. grad. 30. grad. } pro angulo { A. B. C. }

Inuentis hac ratione angulis, reperientur laterum proportiones, vt prius.

Quo pacto ex proportione duorum tantum angulorum in triangulo rectangulo proportiones laterum cognoſcantur.

PORRO in triangulo rectangulo ſatis eſt, ſi duorum angulorum proportio detur. Sit enim in ſecundo triangulo eiuſdem figuræ proportio anguli A, ad angulum B, rectum, vt 8. ad 18. Quoniam ergo rectus angulus B, eſt grad. 90. inueniemus per regulam auream angulum A, eſſe grad. 40. vt hic vides.

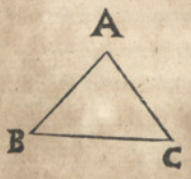
18. 90. grad. 8? fiunt 40. grad. pro angulo A.

Reliquus ergo angulus C, complectetur grad 50. &c. Sit rurſum proportio acuti anguli A, ad angulum acutum C, vt 16. ad 20. Quoniam ergo duo anguli A, C, vni recto ſunt æquales, hoc eſt, continent grad. 90. Collectis numeris 16. & 20. in vnam ſummam 36. reperiemus per regulam Societatum vtrumque angulum in gradibus, vt hic cernis.

36. 90. grad. { 16? 20? } fiunt { 40. grad. 50. grad. } pro angulo { A. C. }

Quo pacto ex proportione vtriuſuis angulorū æqualium ad tertiū angulum in triangulo Iſoſcele inueniantur laterū proportiones.

Inuentis autem angulis hac ratione, notæ fient laterum proportiones, vt prius.



EODEM modo in triangulo Iſoſcele ſatis eſt, ſi proportio vtriuslibet æqualium angulorum ad tertium angulum cognoſcatur, aut tertij anguli ad vtrumlibet angulorum æqualia. Nam ſi in triangulo Iſoſcele ABC, cuius duo latera A B, A C, æqualia ſunt, cognita ſit proportio anguli B, ad angulum A, nempe eadem, quæ 10. ad 16. erit quoque proportio anguli C, ad angulum A, vt 10. ad 16. Quare duæ proportiones notæ erunt, quas continuabimus, ſi dicamus proportionem A, ad B, eſſe, vt 16. ad 10. & B, ad C, vt 10. ad 10. Ex quibus inuenietur angulus A, grad. 80. & vterque B, C, grad. 50. per ea, quæ iam demonſtrata ſunt.

DE æquilatero triangulo non eſt, quòd quicquam præcipiamus, cum in eo latera habeant æqualitatis proportionem.

SED iam ad inuentionem laterum, atque angulorum in triangulis rectilineis ex quibuſdam datis ac cognitis accedamus; qua in re, vt certum ordinem, ac methodum ſeruemus, agemus primo loco de triangulis rectangulis, deinde vero de non rectangulis, cum in illis minor, quàm in his, difficultas reperiatur.

PROBL.

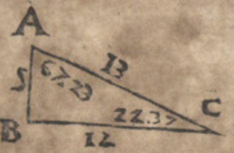
PROBL. 1. PROPOS. 2.

DATO vno latere, cum vno angulo acuto trianguli rectanguli, vel cũ proportione duorum angulorum quorumcunque; reliqua duo latera cognoſcere, & quorumlibet duorum laterum proportionem efficere notam.

In triangulo rectãgulo cũ vno latere dato, vnà cũ angulo acuto reliqua inueſtigantur.

SIT triangulum ABC, cuius angulus B, rectus, ſitque primo latus AC, recto angulo oppoſitum datum 13 palmorum vna cum angulo acuto C, grad. 22. Min. 37. ac proinde & cum angulo acuto A, grad. 67. Min. 23. Oportet ex his indagare reliqua latera. Quoniam, per ea, quæ in defin. Sinuum tradidimus, poſito ſinu toto AC, latera AB, BC, ſunt ſinus oppoſitorum angulorum: ſunt autem anguli dati; noti erunt ſinus dictorum angulorum; AB, quidem 38456. at BC, 92310. Per regulam ergo auream dicemus. Si AC, partium 100000. nempe quatenus ſinus totus, dat 13. palmos, quid dabit AB, ſinus partium 38456. & quid ſinus BC, partium 92310? vt hic vides. Inueniemusque latus AB, palm. 5. & BC, palm. 12. ferè.

Quando latus recto angulo oppoſit um datur, cũ acuto angulo.



AC.	AC.	AB.		AB.
100000.	13.	38456?	ſiunt	5.
		BC.		BC.
		92310?		12.

ITAQVE quando latus recto angulo oppoſitum datur cum angulo vno acuto, ac proinde cum altero etiam acuto: Si fiat; vt ſinus totus ad latus datum recto angulo oppoſitum, ita ſinus vtriuſque anguli acuti ſeorſum ad aliud, reperientur latera eiſdem angulis oppoſita in partibus menſuræ, ſecundum quam datum eſt latus angulo recto oppoſitum. *Praxis.*

DEINDE datum ſit vnum ex lateribus circa angulum rectum, vt BC, palmorum 12. cum angulo C, grad. 22. Min. 37. & proinde cum angulo etiam A, grad. 67. Min. 23. Oportet ex his reliqua latera inueſtigare. Quoniam per ea, quæ in lineis tangentibus, atque ſecantibus ad initium oſtendimus, poſito ſinu toto BC, latus AB, eſt tangens anguli C, & latus AC, eiuſdem ſecans, dabitur tangens AB, partium 41660. & ſecans AC, partium 108331. Quare per regulam auream dicemus. Si BC, quatenus ſinus totus partium 100000. dat 12. palmos, quid dabit tangens AB, inuenta partium 41660. & quid ſecans AC, inuenta partium 108331? vt hic cernis. Inueniemusque latus AB, palm 5. & AC, palm. 13. ferè.

Quando latus vnũ circa angulum rectum datur, cum acuto angulo.

BC.	BC.	AB.		AB.
100000.	12.	41660?	ſiunt	5.
		AC.		AC.
		108331?		13.

ITAQVE cum datur vnum latus circa angulum rectum, cum vno angulo acuto, ac proinde cum altero etiam acuto: Si fiat, vt ſinus totus ad datum latus circa angulum rectum, ita tam tangens anguli acuti dato lateri adiacentis, quàm ſecans eiuſdem anguli, ad aliud, prodibit tam latus, quod fuit tangens, quàm latus, quod fuit ſecans, notum in partibus menſuræ, ſecundum quam latus circa angulum rectum fuit datum. *Praxis.*

PER ſolos autem ſinus, cum datur vnum latus circa rectum angulum, cum vno acuto angulo, & proinde etiam cum altero acuto, ita reliqua latera exquiremus. Sit rurſum datum latus BC, palm. 12. & angulus C, grad. 22. Min. 37. ac proinde angulus A, grad. 67. Min. 23. Quoniam igitur, vt in defin. ſinuum diximus, poſito ſinu toto AC, latus AB, eſt ſinus anguli C, & BC, ſinus anguli A: ſunt autem anguli dati; noti erunt dicti ſinus, vt AB, 38456. & BC, 92310. Per auream igitur regulam dicemus. Si BC, ſinus partium 92310. dat palm. 12. quid dabit ſinus AB, partium 38456. & quid ſinus totus AC, partium 100000? &c. vt hic apparet. Inuenietur enim latus AB, palm. 5. & AC, palm. 13. ferè.

Aliter per ſolos ſinus.

BC.	BC.	AB.		AB.
92310.	12.	38456?	ſiunt	5.
		AC.		AC.
		100000?		13.

QVANDO ergo vnum latus datur circa angulum rectum, & vnus acutus angulus, ac proinde & alter acutus: Si fiat, vt ſinus anguli acuti dato lateri circa angulum rectum oppoſiti ad latus datum, ita tam ſinus alterius anguli acuti, quam ſinus totus, ad aliud, prodibit tam latus alterum circa angulum rectum, quam latus recto angulo oppoſitum, notum in partibus menſuræ, ſecundum quam latus circa angulum rectum fuit datum. Sed expeditior eſt via per lineas tangentes, & ſecantes, cum ibi ſinus totus in regula aurea primum locum obtineat, & proinde diuiſio fiat facilior. *Praxis.*

QVOD ſi detur vnum latus, vnà cum proportione duorum angulorum, ita problema abſoluemus. Ex proportione angulorum reperiemus acutorum angulorum magnitudines, vt in ſcholio propoſ. 1. oſtendimus. Quam ob rem inueniemus ex angulis notis reliqua latera, vt prius.

Quando latus vnũ datur, & proportio duorum angulorũ quorumlibet.

INVENTIS autem lateribus, manifeſtum eſt, proportionem quorumlibet duorum dari in numeris, in quibus inuenta ſunt. Erit enim proportio AB, ad AC, vt 5. ad 13. Vel vt 38456. ad 100000. Vel vt 41660. ad 108331. &c. In his enim omnibus numeris dicta latera inuenta ſunt. Dato ergo vno latere, cum vno angulo acuto trianguli rectanguli, &c. Quod faciendum erat.

PROBL.

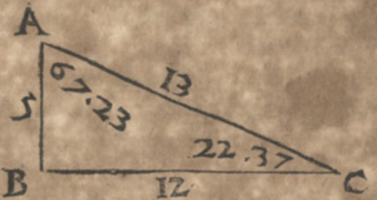
PROBL. 2. PROPOS. 3.

In triangulo rectãgulo ex duobus lateribus notis, vel ex eorũ proportione nota, vna cum vno latere quocunq; reliqua inquiruntur.

DATIS duobus lateribus trianguli rectanguli, duos angulos acutos efficere notos, vna cum tertio latere. Item data proportione duorum laterum, & inſuper vno latere dato quocunque, duos angulos acutos, vna cum reliquis duobus lateribus cognoſcere.

Quando latus angulo recto oppoſitũ, cum vno latere circa angulũ rectum datur.

IN triangulo ABC, cuius angulus B, rectus, ſit primum latus AC, recto angulo oppoſitum, & inſuper latus AB, circa angulum rectum datum, nempe AC, palm. 13. & AB, palm. 5. Oportet ex his & angulos A, C, & latus tertium BC, explorare. Quoniam, poſito ſinu toto AC, latus AB, eſt ſinus anguli C, dicemus. Si AC, palm. 13. dat AC, ſinum totum partium 100000. quid dabit AB, palm. 5? inueniemusque ſinum AB, partium 38461. vt hic vides.



AC.	AC.	AB.		AB.
13.	100000.	5?	fit	38461.

Ex tabula ergo ſinuum dabitur angulus C, grad. 22. Min. 37. ac proinde reliquus angulus A, grad. 67. Min. 23. Igitur & huius anguli A, ſinus, nempe BC, dabitur partiũ 92310. ex eadem tabula ſinuum. Dicemus ergo rurſum. Si ſinus totus AC, partium 100000. dat AC, palm. 13. Vel ſi ſinus AB, inuentus partium 38461. dat AB, palm. 5. quid dabit ſinus BC, partium 92310? reperiemusque BC, eſſe palm. 12. ferme, vt hic apparet.

AC. 100000.	AC. 13.	BC.		BC.
AB. 38461.	AB. 5.	92310?	fit	12.

Praxis.

CVM ergo datur latus angulo recto oppoſitum, cum vno latere circa eundem angulum rectum; Si fiat, vt datum latus recto angulo oppoſitum ad ſinum totum, ita alterum latus datum ad aliud, prodibit ſinus acuti anguli, qui lateri dato circa rectum angulum opponitur. Inuento autem, beneficio huius ſinus inuenti, vtroque angulo acuto; Si iterum fiat, vt ſinus totus ad datum latus recto angulo oppoſitum; vel vt ſinus anguli acuti dato lateri circa rectum angulum oppoſiti ad datum latus circa angulum rectum, ita ſinus alterius anguli acuti ad aliud, cognoſcetur tertium latus in partibus menſuræ, ſecundum quam duo latera ſunt data.

Aliter per lineas tangentes & ſecantes.

ALITER. Sit rurſus AC, palm. 13. & AB, palm. 5. Quia igitur, vt ad initium linearum tangentium, ac ſecantium oſtendimus, poſito AB, ſinu toto latus AC, ſecans eſt anguli A, & BC, tangens eiuſdem; dicemus. Si AB, palm. 5. dat AB, ſinum totum partium 100000. quid dabit AC, palm. 13? inueniemusque ſecantem AC, partium 260000. vt hic patet.

AB.	AB.	AC.		AC.
5.	100000.	13?	fit	260000.

Ex tabula ergo Secantium erit angulus A, grad. 67. Min. 23. & proinde reliquus angulus C, grad. 22. Min. 37. Igitur & tangens anguli A, nempe BC, dabitur partium 240038. ex tangentium tabula. Quare rurſum dicemus. Si ſinus totus AB, partium 100000. dat AB, palm. 5. Vel ſi ſecans AC, inuenta partium 200000. dat AC, palm. 13. Quid dabit tangens BC, partium 240038? inueniemusque iterum BC, eſſe ferme palm. 12. vt hic conſtat.

AB. 100000.	AB. 5.	BC.		BC.
AC. 260000.	AC. 13.	240038?	fit	12.

Praxis.

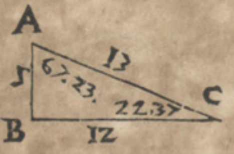
IGITVR quando latus recto angulo oppoſitum datur, cum vno latere circa angulum rectum: Si fiat, vt datum latus circa angulum rectum ad ſinum totum, ita datum latus angulo recto oppoſitum ad aliud, prodibit ſecans anguli acuti ſub datis lateribus comprehenſi. Inuento ergo, beneficio huius ſecantis repertæ, vtroque angulo acuto, & tangente acuti anguli ſub datis lateribus comprehenſi, ex tangentium tabula; Si iterum fiat, vt ſinus totus ad datum latus circa angulum rectum; Vel vt ſecans acuti anguli ſub datis lateribus comprehenſi ad latus datum recto angulo oppoſitum, ita tangens acuti anguli ſub lateribus datis comprehenſi ad aliud, notum fiet tertium latus in partibus menſuræ, ſecundum quam ſunt data duo latera. Verum ſatius eſt per ſolos ſinus operari, cum tangentes lineæ, atque ſecantes nihil compendij afferant, ſintque per ſinus inuentæ.

a 47. pri.

ADHVC aliter. Ponatur rurſum AC, palm. 13. & AB, palm. 5. [a] Quoniam ergo quadratum rectæ AC, duobus quadratis rectarum AB, BC, æquale eſt; ſi auferatur quadratum lateris AB, quod eſt 25. ex quadrato lateris AC, quod eſt 169. relinquetur quadratum lateris BC, nempe 144. cuius radix quadrata 12. dabit latus BC, palm. 12. Et quia, poſito AC, ſinu toto, latera AB, BC, ſunt ſinus angulorum oppoſitorum, vt in defin. ſinuum explicauimus: Si fiat, vt latus AC, angulo recto oppoſitum palmorum 13. ad AC, ſinum totum partium 100000. ita alterutrum laterum circa angulum rectum, nempe BC, palm. 12. ad aliud, prodibit ſinus anguli acuti A, ſumpto lateri oppoſiti partium 92308. Ex ſinuum ergo tabula dabitur angulus A, grad. 67. Min. 23. atq; adeo reliquus C, grad. 22. Min. 37. Hoc modo primo loco inuenitur tertium latus, deinde vero anguli, cum alijs vijs inuenti ſint prius anguli, quam tertium latus.

SINT

SINT iam duo latera AB, BC, circa rectum angulum data, vt AB, palm. 5. & BC, palm. 12. Oportet ex his tertium latus AC, & acutos angulos inuenire. Quoniam, ex demonſtratis in principio linearum tangentium, ſecantiumque, poſito AB, ſinu toto, latus BC, tangens eſt anguli A, & latus AC, eiuſdem ſecans; dicemus. Si AB, palm. 5. dat AB, ſinum totum partium 100000. quid dabit BC, palm. 12? reperiemusque tangentem BC, partium 240000. vt hic manifeſtum eſt.



Quando duo latera circa angulum rectum data ſunt.

AB.	AB.	BC.	BC.
5.	100000.	12? fit.	240000.

Ex tabula ergo tangentium dabitur angulus A, grad. 67. Min. 23. ac proinde reliquus angulus C, grad. 22. Min. 37. Igitur & AC, ſecans anguli A, dabitur ex tabula ſecantium, partium 260035. Rurſus ergo dicemus. Si AB, ſinus totus partium 100000. dat AB, palm. 5. Vel ſi tangens BC, inuenta partium 240000. dat BC, palm. 12. quid dabit AC, ſecans partium 260035? inueniemuſque AC, palm. 13. fere vt hic vides.

AB. 100000.	AB. 5.	AC.		AC.
BC. 240000.	BC. 12.	260035?	fit.	13.

ITAQVE ſi dentur duo latera circa angulum rectum: Si fiat, vt alterutrum datorum laterum ad ſinum totum, ita alterum latus datum ad aliud, proueniet tangens acuti anguli huic alteri dato lateri oppoſiti. Inuento ergo, beneficio huius tangentis inuentæ, vtroq; angulo acuto, in tabula tangentium; & ex tabula ſecantium, ſecante anguli acuti, qui alteri huic dato lateri opponitur: Si rurſum fiat, vt ſinus totus ad primum latus datum; vel vt tangens inuenta ad ſecundum latus datum, ita ſecans accepta ex tabula ſecantium, ad aliud, notum fiet latus tertium recto angulo oppoſitum in iiſdem partibus, in quibus duo latera circa angulum rectum data ſunt. *Praxis.*

ALITER. Sit rurſum AB, palm. 5. & BC, palm. 12. [a] Et quoniam quadrata laterum AB, BC, ſimul æqualia ſunt quadrato lateris AC; erit quadratum lateris AC, palm. 169. cuius radix quadrata dabit latus AC, palm. 13. Quia vero, vt in defin. ſinuum traditum eſt. poſito AC, ſinu toto, latera AB, BC. ſunt ſinus oppoſitorum angulorum: Si fiat, vt latus AC, quod angulo recto opponitur, inuentum palm. 13 ad AC, ſinum totũ partiũ 100000. ita alterutrum laterum circa angulum rectum, nempe AB, palm. 5. ad aliud, reperietur ſinus anguli acuti C, qui accepto lateri opponitur, partium 38461. Ex tabula ergo ſinuum dabitur angulus C, gra. 22. Min. 37. ac propterea [a] reliquus A, grad. 67. Min. 23. Hac via primo loco reperitur tertium latus, deinde vero duo anguli: cum tamen alio modo anguli prius inuenti ſint, quam tertium latus.

Aliter ſine tangentib. & ſecantibus.
a 47. primi.

IAM vero ſi detur duorum laterum quorumlibet proportio, & vnum latus, quodcunq; illud ſit, ſumemus numeros proportionis notæ, ac ſi eſſent partes alicuius menſuræ, in quibus duo illa latera dentur; atque ex his, vt demonſtrauimus in hac propoſ. angulos inueniemus, ac tertium latus in eiſdem partibus. Deinde, ſi fiat, vt numerus illius lateris, quod datum eſt, ad ipſum latus datum, ita numeri aliorum laterum ſigillatim ad aliud, reperientur alia latera in partibus menſuræ, ſecundum quam illud alterum latus eſt datum. Vt ſi proportio AB, ad AC, ſit, vt 15. ad 39. & latus BC, palm. 12. reperietur, ex demonſtratis, angulus A, grad. 67. Min. 23. & angulus C, grad. 22. Min. 37. latus vero BC, partium 36. qualium AB, eſt 15. & AC. 39. Quare ſi fiat, vt latus BC, inuentum partium 36. ad idem BC, datum palm. 12. ita tam AB, partium 15. quam AC, partium 39. ad aliud, inuenietur AB, palm. 5. & AC, palm. 13. Datis ergo duobus lateribus trianguli rectanguli, duos angulos acutos effecimus notos, &c. Quod erat faciendum.

Quando proportio duorum laterum datur, ad vnum latus.

SCHOLIVM.

ABSOLVTVS iam eſt rectangulorum triangulorum calculus, ſequitur de triangulis non rectangulis. Sed prius quædam ad hanc rem neceſſaria demonſtranda ſunt, quorum nonnulla plurimum etiam triangulis ſphæricis conducent.

THEOR. 2. PROPOS. 4.

SI diameter circuli chordam quamlibet, eiuſque arcum ſecet in duas partes; habebunt ſegmenta chordæ eandem proportionem, quam ſinus ſegmentorum arcus reſpondentium.

Quam proportionem habeant duo ſegmẽta cuiuſque chordæ.

IN circulo ABCD, diameter AC, ſecet chordam BD, in E, eiuſque arcum BAD, in A, vel BCD, in C: ducanturque BF, DG, ad diametrum AC, perpendiculares; quarum BF, ſinus eſt arcus BA, vel BC: & DG, ſinus arcus AD, vel CD. Dico ita eſſe BE, ad ED, vt BF, ad DG. Quoniam enim in triangulis BEF, DEG, anguli F, G, æquales ſunt, vtpote recti: [a] Item anguli E, ad verticem æquales, [b] æquiangula erunt triangula BEF, DEG. [c] Quare erit, vt BE, ad BF, ita ED, ad DG: Et permutando, vt BE, ad ED, ita BF, ad DG. Si ergo diameter circuli chordam quamlibet, eiuſque arcum ſecet in duas partes, &c. Quod erat demonſtrandum.

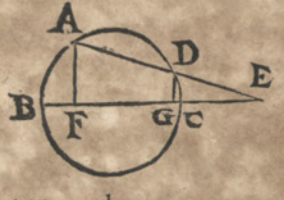


a 15. primi.
b 32. prim.
c 4. ſexti.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

Quã proportionem habeat chorda circuli producta, & cum diametro producta conueniens ad ſegmentum exterius.

SI in circulo chorda cuiuslibet arcus ad vnam partem producatur, conueniatque cum diametro quauis ad eandem partem producta: erit eadem proportio totius chordæ productæ ad ſegmentum exterius, quæ ſinus arcus inter punctum, per quod diameter producta eſt, & remotius punctum extremum dictæ chordæ, ad ſinum arcus inter idem punctum diametri, & propinquius punctum extremum eiuſdem chordæ.



a 28. prim.
b Coroll. 4. ſexti.

IN circulo ABCD, chorda AD, arcus AD, ad partes D, producta, conueniat cum diametro BC, ad eaſdem partes producta in puncto E; demittanturque AF, DG, ad diametrum BC, perpendiculares; quarum AF, ſinus eſt arcus AC: & DG, ſinus arcus CD. Dico ita eſſe AE, ad DE, vt AF, ad DG. [a] Quoniam enim AF, DG, parallelę ſunt ob angulos rectos F, G, [b] ſimilia erunt triangula AEF, DEG. Quare erit, vt AE, ad AF, ita DE, ad DG: Et permutando, vt AE, ad DE, ita AF, ad DG. Si igitur in circulo chorda cuiuslibet arcus ad vnam partem producatur, conueniatque cum diametro quauis, &c. Quod oſtendendum erat.

PROBL. 3. PROPOS. 6.

Ex ſumma data duorum arcuū quorum quilibet ſemicirculo minor ſit, vel duorū angulorum vna cum proportione, quam eorum ſinus habēt, vterque cognoſcitur. Quando aggregatū arcuum, vel angulorum minus eſt, quā grad. 180.

DATO aggregato duorum arcuum, quorum ſinguli ſemicirculo ſint minores, vel duorum angulorum rectilineorum, ſiue minus illud ſit, ſiue maius, quam grad. 180. vna cum proportione, quam eorum ſinus habent: vtrumque illorum ſigillatim exhibere notum.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, datum ſit primo aggregatum arcuum BF, FD, quorum ſinguli ſint ſemicirculo minores, vel angulorum BEF, FED, & aggregatum tam arcuum, quam angulorum minus, quam grad. 180. nimirum datum ſit grad. 130. Data quoque ſit proportio ſinus arcus BF, vel anguli BEF, ad ſinum arcus FD, vel anguli FED, eadem, quæ 10. ad 5. Oportet ex his vtrumque arcum BF, FD, vel vtrumque angulum BEF, FED, notum efficere. Ducta chorda BD, ducatur ex puncto F, vbi dati arcus coniunguntur, diameter FC, ſecans chordam BD, in G. Diuiſo quoque toto arcu BAD, bifariam in A, ſecabit ſemidiameter ducta EA, chordam BD, bifariam in H, ex lemmate ad defin. ſinuum demonſtrato; [a] atque adeo & ad angulos rectos. Quoniam vero proportio ſinus arcus BF, ad ſinum arcus FD, ponitur, vt 10. ad 5. [b] eſtq; vt ſinus arcus BF, ad ſinum arcus FD, ita BG, ad GD; erit quoque BG, ad GD, vt 10. ad 5. Poſita igitur recta BG, 10. erit GD, 5. ac proinde tota BD, 15. vtraque vero ſemiſſis BH, HD, $7\frac{1}{2}$. & denique HG, differentia inter ſemiſſem BH, & maius ſegmentum BG, vel inter ſemiſſem HD, & minus ſegmentum GD, erit $2\frac{1}{2}$. Rurſus quia totus arcus BAD, ponitur grad. 130. erit vtraque ſemiſſis BA, AD, grad. 65. ac proinde & vterque angulus BEA, AED, gradum quoque 65. Et quoniam ex iis, quæ ad initium tangentium, ſecantiumque tradidimus, poſito ſinu toto EH, recta BH, tangens eſt anguli BEH, & HG, tangens anguli HEG, dabitur, ex tangentium tabula, tangens grad. 65. nempe BH, partium 214451. Quare, vt tangentem anguli AEF, nimirum HG, inueniamus, dicemus per auream regulam. Si BH, ſemiſſis aggregati terminorum proportionis datæ, nempe $7\frac{1}{2}$. dat BH, tangentem ſemiſſis aggregati angulorum BEF, FED, vel arcuum BF, FD, partium 214451. quid dabit HG, differentia inter ſemiſſem aggregati terminorum datæ proportionis, & vtrumlibet terminorum eiuſdem proportionis, nimirum $2\frac{1}{2}$? inueniemuſque tangentem HG, partium 71484. vt hic factum vides.



a 3. tertij.
b 4. huius.

BH.	BH.	HG.		HG.
$7\frac{1}{2}$.	214451.	$2\frac{1}{2}$?	fit	71484.

Ex tabula ergo tangentium elicietur angulus HEG, hoc eſt, arcus AF, grad. 35. Min. 34. qui additus ſemiſſi AB, grad. 65. componet arcum BF, maiorem, atque adeo & angulum BEF, grad. 100. Min. 34. ablatus vero ex ſemiſſe AD, relinquet arcum minorem FD, & proinde & angulum FED, grad. 29. Min. 26.

Praxis.

ITAQVE, quando duo arcus ſimul minores ſunt, quam ſemicirculus, vel duo anguli ſimul duobus rectis minores: Si fiat, vt ſemiſſis aggregati terminorum proportionis datæ ad tangentem ſemiſſis aggregati arcuum, vel angulorum (quærendo tangentem per partem proportionalem reſpondentem 30. ſecundis, ſi forte aggregatum bifariam diuidi nequeat ſine Secundis) ita differentia inter ſemiſſem aggregati terminorum datæ proportionis, & alterutrum terminorum, ad aliud, reperietur tangens arcus, vel anguli, quo vterque arcus, anguluſve quæſitus à ſemiſſe aggregati eorundem differt. Additus igitur arcus vel angulus huius inuentæ tangentis ad ſemiſſem dabit maiorem arcum, vel angulum; ablatus vero ex eadem ſemiſſe relinquet arcum, vel angulum minorem.

Alia demonſtratio.
c 3. tertij.
d 8. primi.
e 5. huius.

ALITER. Producta ſemidiametro BE, ad K, & diametro CF, producta, donec in L, conueniat cum recta KDL, ex K, per D, ducta, agatur ei, ad DK, perpendicularis, [c] quæ ipſam DK, bifariam ſecabit; ac proinde cum latera DE, EI, lateribus KE, EI, æqualia ſint, & baſis DI, baſi KI; [d] angulus DEI, angulo KEI, æqualis erit. Quia ergo arcus BFD, datus eſt grad. 130. dabitur reliquus DK, de ſemicirculo grad. 50. & eius ſemiſſis, id eſt, angulus DEI, grad. 25. Rurſus quia ſinus arcus BF, ad ſinum arcus FD, ponitur, vt 10. ad 5. eſtque idem ſinus arcus KF, qui arcus BF, vt in defin. ſinuum oſtenſum eſt: erit quoque ſinus arcus KF, ad ſinum arcus DF, vt 10. ad 5. [e] Cum ergo ſit, vt ſinus arcus KF, ad ſinum arcus DF, ita KL, ad DL; erit etiam KL, ad DL, vt 10. ad 5. Poſita igitur KL, 10. erit DL, 5. ac proinde & reliqua KD, 5. & eius ſemiſſis ID, $2\frac{1}{2}$. At quoniam, vt ad initium tangentium & ſecantium diximus, poſito ſinu toto EI, recta ID, tangens eſt anguli DEI, hoc eſt, grad. 25. dabitur ID, ex tabula tangentium partium 46631. Dicemus ergo per auream regulam. Si ID, ſemiſſis differentiæ inter terminos proportionis datæ, nempe $2\frac{1}{2}$. dat ID, tangentem ſemiſſis differentiæ inter aggregatum datum, & ſemicirculum, partium 46631. quid dabit IL, compoſita ex ſemiſſe differentiæ inter terminos datæ proportionis, & conſequente eiuſdem proportionis, nimirum $7\frac{1}{2}$? reperiemuſque IL, partium 139893. qualium ID, eſt 46631. vel EI, 100000. vt hic vides.

ID.	ID.	IL.		IL.
$2\frac{1}{2}$.	46631.	$2\frac{1}{2}$?	fit.	139893.

Cum ergo IL, ſit tangens anguli IEL, poſito ſinu toto EI, vt in tractatione tangentiū ac ſecantium tradidimus, dabitur,

dabitur,ex tangentium tabula,angulus IEF,grad.54.Min.26.Ablato ergo angulo DEI, gra.25.nimirum ſemiſſe differentiæ inter datum aggregatum, & ſemicirculum, reliquus erit angulus FED, ac propterea & arcus FD, minor,grad.29.Min. 26. qui ſubtractus ex dato aggregato grad. 130. relinquet angulum BEF, & proinde & arcum BF, maiorem,grad.100.Min.34.vt prius.

Praxis. *IGITVR ſi fiat, vt ſemiſſis differentiæ inter terminos proportionis datæ ad tangentem ſemiſſis differentiæ inter aggregatum datum, & ſemicirculum, ita aggregatum ex ſemiſſe differentiæ inter terminos datæ proportionis, & conſequentem eiuſdem proportionis, ad aliud, inuenietur tangens anguli, à quo ſi dematur ſemiſſis differentiæ inter datum aggregatum, & ſemicirculum, reliquus erit angulus, ſeu arcus minor quæſitus: qui detractus ex aggregato dato, relinquet maiorem angulum, ſiue arcum quæſitum.*

Aliter abſque tangentibus. ALITER adhuc per ſolos ſinus ſine tangentibus. Iiſdem poſitis,quoniam vt in ſinubus declarauimus, poſito ſinu toto EB,recta BH,eſt ſinus anguli BEH,nempe ſemiſſis aggregati angulorum, vel arcuum dati nẽpe grad.65.& HE,ſinus anguli EBH,grad.25.vtpote complementi anguli BEH;dabitur ex tabula ſinuum,BH, partium 90631. at HE, partium 42262. Quod ſi dicamus.Si BH, ſemiſſis aggregati terminorum proportionis datæ,nempe $7\frac{1}{2}$.dat BH,ſinum ſemiſſis aggregati angulorum,vel arcuum, partium 90631. quid dabit HG,differentia inter ſemiſſem aggregati terminorum proportionis datæ, & alterutrum terminorum,nimirum $2\frac{1}{2}$? reperiemus HG,partium 30210.qualium ſinus totus EB,eſt 100000.vel EH,42262.vt hic patet.

BH.	BH.	HG.		HG.
$7\frac{1}{2}$.	90631.	$2\frac{1}{2}$?	fit	30210.

[a] Quia vero quadrata rectarum HE,HG,nempe 1786076644.912644100. quadrato rectæ EG,æqualia ſunt, ſi ea in vnam ſummã colligamus,fiet quadratũ rectæ EG, 2698720744. cuius radix quadrata dabit EG,partiũ 51949.Cum autem,poſito ſinu toto EG, recta HG, ſinus ſit anguli HEG, vt in ſinuum defi. diximus,dicemus rurſum.Si EG,inuenta partium 51949. dat EG, ſinum totum partium 100000. quid dabit HG, inuenta partium 30210?inueniemusque HG,ſinum anguli HEG,partium 58153.vt hic vides. *a 47. primi.*

EG.	EG.	HG.		HG.
51949	100000.	30210?	fit.	58153.

Ex ſinuum ergo tabula dabitur angulus HEG, ſiue arcus AF,grad.35.Min.34. qui additus ſemiſſi AB, grad 65. exhibebit maiorem arcum BF, ideoque & angulum BEF, grad. 100. Min. 34. ablatus vero ex ſemiſſe AD,reliquum faciet arcum minorem FD,atque adeo & angulum FED,grad.29.Min.26.vt prius.

Praxis. *QVOCIRCA, quando aggregatum duorum arcuum, vel angulorum minus eſt, quam grad. 180. Si fiat, vt ſemiſſis aggregati terminorum proportionis datæ ad ſinum ſemiſſis aggregati arcuum, angulorumve, ita differentia inter ſemiſſem aggregati terminorum datæ proportionis, & alterutrum terminorum, ad aliud, inuenietur numerus: cuius quadratum ſi adiungatur quadrato ſinus complementi ſemiſſis aggregati arcuum, ſeu angulorum; Et tandem fiat, vt compoſiti huius numeri radix quadrata ad ſinum totum, ita numerus per auream regulam nuper inuentus ad aliud, producetur ſinus anguli, ſiue arcus, quo vterq; angulus, arcusve quæſitus ab eorundem aggregati ſemiſſe differt. Additus ergo arcus, ſiue angulus huius ſinus inuenti ad ſemiſſem aggregati dati, dabit maiorem arcum, vel angulum: ablatus vero ex eadem ſemiſſe relinquet minorem arcum, ſiue angulum. Sed priores duæ viæ longe ſunt expeditiores: vt perſpicuum eſt.*

Quando aggregatũ arcuum, vel angulorum maius eſt, quã grad. 180. DETVR deinde aggregatum arcuum BC, CD, quorum ſinguli ſemicirculo quoque ſint minores,vel angulorum BEC,CED,at aggregatum tam arcuum,quam angulorum ſuperet grad. 180. nempe detur grad. 230. Detur item proportio ſinus arcus BC, vel anguli BEC, ad ſinum arcus CD, vel anguli CED, eadem,quæ 10.ad 5.Oportet ex his vtrumque arcum BC, CD, vel vtrumque angulum BEC, CED,elicere.Ducta diametro CE, & detracto dato aggregato ex integro circulo,hoc eſt,ex grad.360.reliquum erit aggregatum arcuum BF, FD, vel angulorum BEF, FED, grad.130.minus, quam grad.180.Et quoniam arcus BC, BE eundem ſinũ habent, necnon & arcus CD, FD, vt in defin. ſinuum diximus, data quoque erit proportio ſinuum arcuum BF, FD, vel angulorum BEF, FED, eadem,quæ 10.ad 5.Quamobrem, vt iam demonſtratum eſt,inueniemus arcus BF, FD,vel angulos BEF,FED,grad,100.Min.34.& grad.29.Min.26.qui ex ſemicirculo,hoc eſt,ex grad. 180.ſublati relinquent arcus BC,CD, vel angulos BEC,CED.grad.79.Min.26.& grad.150.Min.34.

Praxis. *QVANDO ergo aggregatum duorum arcuum, ſeu angulorum maius eſt, quam grad. 180. Si illud ex grad. 360. auferamus, remanebit aggregatum aliorum duorum arcuum, vel angulorum minus, quã grad. 180. Quare ſi, vt iam demonſtratum eſt, beneficio huius aggregati minoris, & proportionis datæ, vtrumque arcum, vel angulum inquiramus, & vtrumque inuentum ſigillatim ex grad. 180. demamus, noti relinquentur arcus, vel anguli quæſiti.*

Quando ſinuum proportio data eſt proportio æqualitatis. QVOD ſi quando proportio ſinuum data ſit proportio æqualitatis,hoc eſt,ſinus ſint æquales,erunt quoque tam duo arcus,quam duo anguli æquales,vt in defin.ſinuum oſtendimus. Quapropter ſemiſſis dati aggregati dabit vtrumque arcum, ſiue angulum cognitum. Dato igitur aggregato duorum arcuum, quorum ſinguli ſemicirculo ſint minores,vel duorum angulorum rectilineorum,&c. vtrumque illorum ſigillatim exhibuimus notum.Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Quando aggregatũ datum cõ- *SI aggregatum duorum arcuum, vel angulorum fuerit præciſe grad. 180. non poterunt arcus illi, vel anguli cognoſci etiam ſi proportio, quam eorum ſinus habent, data ſit. Nam quomodocunq; ſemicirculus in duos arcus ſecetur, habebunt ſemper*

tine: grad. 1802. problema ſolui non poteſt.

eorum ſinus proportionem æqualitatis, cum vnus, & idem ſinus ſit vtriuſque arcus, vt ad defin. ſinuum demonſtrauimus. Neceſſe eſt ergo, aggregatum datum vel minus eſſe, vel maius, quam grad. 180. vt in propoſitione expreſſum eſt.|

PROBL. 4. PROOS 7.

Ex differentia data duorum arcuum. quorum quilibet ſemicirculo minor ſit, vel duorũ angulorum vna cum proportione, quam eorum ſinus habẽt, vterque cognoſcitur. Quando ſinus maioris arcus vel anguli ad ſinum minoris habet proportionem maioris inæqualitatis.

DATA differentia duorum arcuum, quorum ſinguli ſemicirculo ſint minores, vel duorum angulorum rectilineorum, vna cum proportione, quam eorum ſinus habent: vtrumque illorum ſigillatim notum efficere.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, ſuperet arcus BF, ſemicirculo minor arcum DF, arcu BD, vel angulus BEF, angulum DEF, angulo BED, ſitque differentia hæc, nempe arcus BD, vel angulus BED, data gra. 60. proportio quoque ſinus maioris arcus BF, vel anguli BEF, ad ſinum arcus minoris DF, vel anguli DEF, ſit primo maioris inæqualitatis data, eadem, quæ 11. ad 5. quod quidem contingit, quando duo arcus BF, DF, ſemicirculo ſunt minores ſimul ſumpti. Oportet ex his vtrumque arcum BF, DF, ſiue vtrumque angulum BEF, DEF, cognitum facere. Ducta chorda BD, & diametro CF, conuenient hæ lineæ productæ ad partes D, F, vt in puncto G. Cum enim ſinuum proportio ſit data maioris inæqualitatis, maior erit ſinus arcus BF, hoc eſt, perpendicularis ex B, ad CF, demiſſa, ſinu arcus DF, hoc eſt, perpendiculari ex D, ad CF, demiſſa. Quare minus diſtabit punctum D, à recta CF, quam punctum B; atque adeo tandem coibunt BD, CF, productæ ad partes DF. Quod etiam ita probabitur. Si ambo ſinus, hoc eſt, perpendiculares ex B, D, ad CF, demiſſæ eſſent æquales,[a] cum ipſæ ſint parallelæ,[b] eſſent quoque BD, CF, parallelæ. Cum ergo perpendicularis ex D, demiſſa minor ſit, efficitur, vt conueniant, &c. Diuiſo deinde arcu BD, bifariam in A, ſecabit ſemidiameter ducta EA, chordam BD, quoque bifariam in H, ex lemmate ad defin. ſinuum demonſtrato;[c] & proinde & d angulos rectos. Quoniam vero proportio ſinus arcus BF, ad ſinum arcus DF, eſt, ex hypotheſi, vt 11. ad 5.[d] eſtq; vt ſinus arcus BF, ad ſinum DF, ita BG; ad DG; erit quoq; BG, ad DG, vt 11. ad 5. Poſita igitur recta BG, 11. erit DG, 5. ac proinde reliqua BD, 6. vtraque vero ſemiſſis BH, HD, 3. ac denique HG, 8. Rurſus quia arcus BD, ponitur grad. 60. erit vtraque ſemiſſis BA, AD, grad. 30. propterea que & vterque angulus BEA, AED, grad. quoq; 30. Et quia, poſito ſinu toto EH, recta HD, tangens eſt anguli DEH, & HG, tangens anguli HEG, vt ad initium tangentium, atque ſecantium monuimus; dabitur ex tangentium tabula, tangens gr. 30. hoc eſt, HD, parti 57735. Quapropter, vt tangentem HG, anguli HEG, cognoſcamus, dicemus per auream regulam. Si HD, ſemiſſis differentiæ terminorum proportionis datæ, nempe 3. dat HD, tangentem ſemiſſis differentiæ datæ arcuũ BF, FD, vel angulorum BEF, DEF, partium 57735. quid dabit HG, aggregatum ex ſemiſſe differentiæ terminorum datæ proportionis, & conſequente eiuſdem proportionis, nimirum 8? prouenietq; HG, tangens partium 153960. vt hic apparet.



a 28. primi.
b 33. primi.
c 3. tertij.
d 5. huius.

HD.	HD.	HG.		HG.
3.	57735.	8?	fit	153960.

In tangentium autem tabula hæc tangens inuenta offert angulum AEF, ſiue arcum AF, grad. 57. cui ſi addatur ſemiſſis AB, grad. 30. dabitur maior arcus BF, ſiue angulus BEF, grad. 87. ſi vero ab eodem ſubtrahatur ſemiſſis AD, grad. 30. remanebit minor arcus DF, vel angulus DEF, grad. 27.

Praxis.

IGITVR quando proportio ſinus maioris arcus vel anguli, ad ſinum minoris eſt maioris inæqualitatis: Si fiat, vt ſemiſſis differentiæ terminorum proportionis datæ ad tangentem ſemiſſis differentiæ arcuum vel angulorum datæ, ita aggregatum ex ſemiſſe differentiæ terminorum proportionis, & conſequente proportionis ad aliud, producetur tangens arcus vel anguli, qui ſemſſi differentiæ arcuum, vel angulorum datæ additus componit maiorem arcum ſeu angulum; & ſi ab eodem ſemiſſis dicta ſubducatur, remanet arcus vel angulus minor.

Aliter ſine tangentib.

ALITER ſine tangentibus per ſolos ſinus. Iiſdem poſitis, quoniam, per ea, quæ in ſinuum definit. oſtendimus, poſito ſinu toto ED, recta HD, ſinus eſt anguli HED, nimirum ſemiſſis differentiæ arcuum, vel angulorum datæ, hoc eſt, grad. 30. & HE, ſinus anguli HDE, grad. 60. vtpote complementi anguli HED; dabitur ex ſinuum tabula HD, partium 50000. & EH, partium 86603. Iam vero ſi dicamus. Si HD, ſemiſſis differentiæ terminorum proportionis datæ, nimirum 3. dat HD, ſinum 50000. vtpote ſinum ſemiſſis differentiæ arcuum, angulorumue datæ, quid dabit HG, aggregatũ ex ſemiſſe differentiæ terminorum proportionis, & conſequente eiuſdem proportionis, nempe 8? inueniemus HG, eſſe 133333. reſpectu ſinus totius ED, vt hic vides.

HD.	HD.	HG.		HG.
3.	50000.	8?	fit	133333.

e 47. prim.

[e] Igitur, cum quadrata rectarum EH, HG, nempe 7499906404. 17777688889. æqualia ſint quadrato rectæ EG, fiet quadratum rectæ EG, 25277595293. cuius radix quadrata indicabit rectam EG, eſſe 158989. reſpectu ſinus totius ED. Cum autem, vt in noſtris ſinubus diximus, poſito ſinu toto EG, recta HG, ſit ſinus anguli HEG; dicemus rurſum. Si EG, inuenta partium 158989. dat EG, ſinum totum partium 100000. quid dabit HG, inuenta partium 133333? reperiemuſque HG, ſinum anguli HEG, partium 83863. vt hic apparet.

EG.	EG.	HG.		HG.
158989.	100000.	133333?	fit.	83862.

Hic ſinus in tabula ſinuum monſtrat arcum grad. 57. Tantus eſt ergo angulus AEF, ſiue arcus AF; cui ſi adijciatur ſemiſſis AB, grad. 30. fiet arcus maior BF, & angulus BEF, grad. 87. Si vero ab eodem minuatur ſemiſſis AD, grad. 30. reliquus erit minor arcus DF, & angulus DEF, grad. 27. vt prius.

SI igitur (quando proportio ſinuũ data eſt maioris inæqualitatis) fiat, vt ſemiſsis differentiæ terminorum proportionis datæ ad ſinum ſemiſsis differentiæ arcuum, vel angulorum datæ, ita aggregatum ex ſemiſſe differentiæ terminorum proportionis, & conſequente eiuſdem proportionis ad aliud, inuenietur numerus; cuius quadratum ſi adiiciatur quadrato ſinus complementi ſemiſsis differentiæ arcuum, vel angulorum datæ: Et tandem fiat, vt compoſiti huius numeri radix quadrata ad ſinum totum, ita numerus per regulam auream nuper inuentus ad aliud, inuenietur ſinus anguli, ſiue arcus, cui ſi addatur ſemiſsis differentiæ arcuum, vel angulorum datæ, notus fiet maior arcus, ſiue angulus: Ab eodẽ vero ſi eadẽ ſemiſsis detrahatur, remanebit minor arcus, angulusue cognitus. Sed prior ratio breuior eſt, vt cõſtat. Praxis.

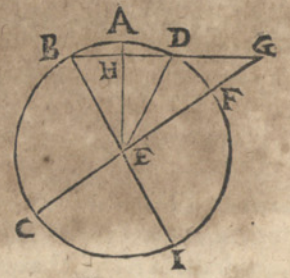
ADHVC aliter tam per tangentes, quam per ſinus. Iiſdem poſitis, & extenſa recta BE, vſque ad I: Quoniam arcus BD, hoc eſt, differentia arcuum BF, DF, datur grad. 60. dabitur reliquus ſemicirculi arcus DI, nimirum aggregatum arcuum DF, FI, grad. 120. Datur autem & proportio ſinus arcus BF, hoc eſt, arcus FI, (cum arcus BF, FI, eundem ſinum habeant, vt in defin. ſinuum diximus.) ad ſinum arcus DF, eadem quæ 11. ad 5.[f] Quare, vt demonſtratum eſt, vterque arcus IF, DF, cognoſcetur, quorum DF, eſt minor propoſitorum arcuum: at FI, complementum maioris BF, vſque ad ſemicirculum, ac proinde ex ſemicirculo ſublatus maiorem BF, notum relinquet. Erit autem ſemper arcus IF, maior, quam DF, [g] propterea quod æqualis eſt arcus IF, arcui BC, qui maior eſt arcu DF, quod illius ſinus maior ponatur ſinu huius.

[f] 6. huius.
[g] 26. tert.

QVOCIRCA iiſdem poſitis: Si ex data proportione ſinuum maioris inæqualitatis, & ex arcu, qui relinquitur poſt detractionem differentiæ datæ ex ſemicirculo, tanquam aggregato duorũ arcuum, inquirantur duo arcus huius aggregati, vt in antecedenti propoſ. oſtenſum eſt; dabit maior inuentus, ſi ex ſemicirculo auferatur, maiorem arcum, atque adeo & angulum propoſitum, minor vero inuentus erit minor propoſitus. Praxis.

DEINDE ſuperet arcus DCB, ſemicirculo minor arcum BC, arcu DB, vel angulus DEC, angulum BEC, angulo DEB; ſitque differentia hæc, nempe arcus DB, vel angulus DEB, data grad. 60. Proportio quoq; ſinus arcus maioris DBC, vel anguli DEC, ad ſinum arcus minoris BC, vel anguli BEC, ſit data, & minoris inæqualitatis, eadem, quæ 5. ad 11. quod quidem accidit, quando duo arcus ſimul ſumpti DBC, BC, ſemicirculũ excedunt. Oportet ex his vtrumque arcum DBC, BC, vel vtrumque angulum DEC, BEC, notum fieri. Iiſdem conſtructis, quæ prius, non conueniet chorda DB, cum diametro CF, ad partes BC, minoris arcus producta, ſed ad partes D, F, vt ex ijs, quæ ad initium huius propoſ. oſtendimus, manifeſtum eſt. Quia vero tam arcus DBC, DF, eundem ſinum habent, quam arcus BC, BF, erit quoque proportio ſinus arcus DF, ad ſinum arcus BF, data, eadem, quæ 5. ad 11. & proinde proportio ſinus arcus BF, ad ſinum arcus DF, vt 11. ad 5. nempe maioris inæqualitatis. Quare cum arcus BF, DF, eandem differẽtiam habeant BD, datam, reperiemus vtrumque arcum BF, DF, atque adeo & vtrumque angulum BEF, DEF, vt ante demonſtrauimus, illũ nimirum grad. 87. hunc vero grad. 27. qui ex ſemicirculo ſigillatim detracti relinquent minorem arcum propoſitum BC, grad. 93. maiorem vero DBC, grad. 153.

Quando ſinus maioris arcus aut anguli ad ſinum minoris proportionem minoris inæqualitatis habet.



ITAQVE, quando proportio ſinuum data eſt minoris inæqualitatis; Si inuertatur, vt fiat maioris inæqualitatis proportio, & ex hac, & differentia data inquirantur duo arcus, dabit maior inuentus, ſi ex ſemicirculo dematur, minorem arcum, atque angulum propoſitum, minor vero, ſi ex eodem ſemicirculo auferatur, maiorem. Praxis.

IAM vero ſi quando ſinuum data proportio fuerit æqualitatis; quod quidem euenit, quando duo arcus propoſiti BF, DF, ſemicirculo æquantur, erunt arcus DF, BC, æquales, vt in ſinuum defin. demõſtrauimus, ob æqualitatem ſinuum. Vel certe. ſi BF, cum DF, ſemicirculum conficiat, cum CD, cum eodem arcu DF, conficiat ſemicirculum, erunt arcus BF, CD, æquales. Ablato ergo communi arcu BD, æquales erũt arcus DF, BC.

Quando proportio ſinuum eſt æqualitatis.

QVARE ſi tunc data differentia grad. 60. nempe arcus BD, ex ſemicirculo detrahatur, & reſidui arcus grad. 120. ſemiſsis, nempe grad. 60. ad differentiam addatur, componetur maior arcus BF, ſiue angulus BEF, grad. 120. Ipſa vero ſemiſsis erit arcus minor DF, vel angulus DEF, grad. 60. Ita ſi differentia data complectatur grad. 104. Min. 20. detrahemus eam ex grad. 180. & reliqui arcus grad. 75. Min. 40. ſemiſſem, nempe grad. 37. Min. 50. datæ differentiæ addemus; vt componatur maior arcus, ſeu angulus propoſitus, grad. 142. Min. 10. Minor enim erit ipſa ſemiſsis grad. 37. Min. 50. Praxis.

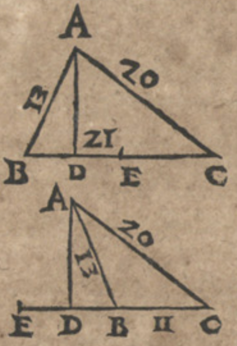
QVOCIRCA, data differentia duorum arcuum, quorum ſinguli ſemicirculo ſint minores, vel duorum angulorum rectilineorum, &c. vtrumq; illorum ſigillatim notum effecimus. Quod faciendum erat.

THEOR. 4. PROPOS. 8.

SI ab angulo trianguli cuiuſuis duobus lateribus inæqualibus comprehenſo linea perpendicularis ad baſim ducatur, ſi quidem intra triangulum cadit, erit quadratum maioris laterum dictum angulum ambientium maius, quam quadratum minoris, rectangulo ſub baſe, & differentia ſegmentorum à perpendiculari factorũ comprehenſo: ſi vero extra cadit, erit quadratum maioris lateris maius, quã quadratum minoris, rectãgulo ſub baſe, & recta linea, quæ ex baſe, & duplo exterioris lineæ inter perpẽdicularẽ, & angulũ trianguli cẽponitur, comprehẽſo.

Quanto maius ſit quadratũ maioris lateris, quã minoris in quouis triangulo.

IN triangulo ABC, cuius duo latera AB, AC, inæqualia ſint, AC, maius, & AB, minus, ducatur ex angulo
a 47. pri. A, ad baſim BC, perpendicularis AD, cadens primum intra triangulum, vt in priori figura. [a] Et quoniam tam quadrata rectarum AD, DB, quadrato rectæ AB, quàm quadrata rectarum AD, DC, quadrato rectæ AC, æqualia ſunt; eſt autem quadratum rectæ AB, minus quadrato rectæ AC, quod minor ponatur recta AB, quam AC: erunt quoque duo quadrata rectarum AD, DB, ſimul minora duobus quadratis AD, DC, ſimul; ablatoque propterea communi quadrato rectæ AD, quadratum rectæ BD, quadrato rectæ DC, minus erit, & proinde & recta BD, minor, quam recta DC. Abſciſſa ergo recta DE, ipſi BD, æquali, erit EC, differentia inter ſegmenta BD, DC. Dico quadratū lateris AC, ſuperare quadratū lateris AB, rectāgulo ſub BC, EC, cōprehenſo. Quia enim recta BE, ſecta eſt bifariam in D, eique addita in continuum recta EC, [b] e-
b 6. ſecun. rit rectangulum ſub BC, EC, contentum vna cum quadrato rectæ DE, quadrato rectæ DC, æquale. Addito ergo quadrato communi rectæ AD, erit rectangulum ſub BC, EC, vnà cum quadratis rectarum DE, AD, hoc eſt, rectarum BD, AD, hoc eſt, cum quadrato rectæ AB, æquale quadratis rectarum DC, AD, hoc eſt, quadrato rectæ AC. Maius ergo eſt quadratum lateris AC, quam quadratum lateris AB, rectangulo ſub BC, EC, comprehenſo. Quod eſt propoſitum.



CADAT deinde perpendicularis AD, extra triangulum in baſim CB, producta, vt in figura poſteriori. Abſciſſa recta DE, ipſi DB, æquali, erit recta EC, compoſita ex baſe BC, & EB, quæ dupla eſt lineæ DB, inter perpendicularem, & angulum B. Dico rurſus, quadratum lateris AC, ſuperare quadratum lateris AB, re-
c 6. ſecun. ctangulo ſub BC, EC, comprehenſo. [c] Erit enim rurſus rectangulū ſub BC, EC, vna cum quadrato rectæ DB, quadrato rectæ DC, æquale. Addito ergo quadrato communi rectæ AD, erit rectangulū ſub BC, EC, vnà cum quadratis rectarū DB, AD, hoc eſt, cum quadrato rectæ AB, æquale quadratis rectarum DC, AD, hoc eſt, quadrato rectæ AC. Excedit igitur quadratum lateris AC, quadratū lateris AB, rectangulo contento ſub BC, EC.

d 47. pri. ALITER. [d] Quoniam quadratis ex AD, DC, quadratum ex AC; & quadratis ex AD, DB, quadratum ex AB, æquale eſt: idem erit exceſſus quadrati ex AC, ſupra quadratum ex AB, qui quadratorum ex AD, DC, ſupra quadrata ex AD, DB: Et, ablato communi quadrato ex AD, idem, qui quadrati ex DC, ſupra quadratum ex DB, per pronunciatum 17. lib. 1. Euclid. Sed quadratum ex DC, ſuperat quadratum ex DB, rectangulo ſub
e 6. ſecun. BC, CE, comprehenſo; [e] propterea quod quadratum ex DC, æquale eſt quadrato ex DB, vel ex DE, in prima figura, vnà cum rectangulo ſub BC, CE, contento. Igitur & quadratum ex AC, ſuperat quadratum ex AB, rectangulo comprehenſo ſub BC, CE. Quocirca, Si ab angulo trianguli cuiuſuis duobus lateribus inæqualibus comprehenſo linea perpendicularis ad baſim ducatur, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

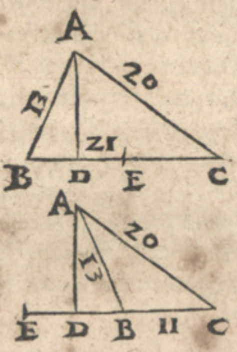
Perpendicularis in Iſoſcele ſecat baſim bifariam. EX demonſtratis conſtat, In Iſoſcele perpendicularem ſecare baſim bifariam. Nam ſi in priore triangulo latera AB, AC, ponantur æqualia, erunt eorum quadrata quoque æqualia. [f] Quare cum quadratum ex AB, æquale ſit quadratis ex AD, BD; & quadratum ex AC, quadratis ex AD, CD: erunt quoque quadrata ex AD, BD, quadratis ex AD, CD, æqualia: Ablatoque communi quadrato rectæ AD, reliqua erunt quadrata ex BD,
f 47. pri. CD, æqualia, & proinde rectæ BD, CD, æquales.

PROBL. 5. PROPOS. 9.

Cognitis lateribus trianguli, cognoſcuntur ſegmēta baſis inter perpendicularē, & vtrumque angulum comprehenſa.

SI ab vno angulo trianguli cuiuſuis notorum laterum ad oppoſitum latus perpendicularis demittatur: quanta ſit recta inter perpendicularem, & vtrumuis angulorum reliquorum comprehenſa cognoſcere.

a 8. huius.



REPETANTVR duo triangula præcedentis propoſ. ſitque latus AC, 20. AB, 13. & in priori quidem triangulo, BC, 21. in poſteriori vero, 11. Oporteatque cognoſcere, quanta ſit tam recta BD, quam CD. [a] Quoniam quadratum ex AC, ſuperat quadratum ex AB, rectangulo ſub BC, CE, contento; ſi quadratum rectæ AB, hoc eſt, 169. detrahatur ex 400. quadrato rectæ AC, reliquum erit rectangulum ſub BC, CE, contentum 231. quo diuiſo per latus BC, hoc eſt, per 21. in priori triangulo, prodibit recta CE, 11. quæ ablata ex latere BC, id eſt, ex 21. relinquet BE, 10. Huius ergo dimidium 5. dabit rectam BD: ac proinde reliqua CD, erit 16. nempe reſiduum lateris BC. In poſteriori vero triangulo, diuiſo eodem rectangulo 231. per 11. nimirum per latus BC, inuenietur CE, 21. à qua ſi latus BC, hoc eſt, 11. auferatur, remanebit BE, 10. cuius ſemiſſis dabit BD, 5. ac proinde CD, erit 16. nempe compoſitum ex latere BC, ac BD.

Praxis.

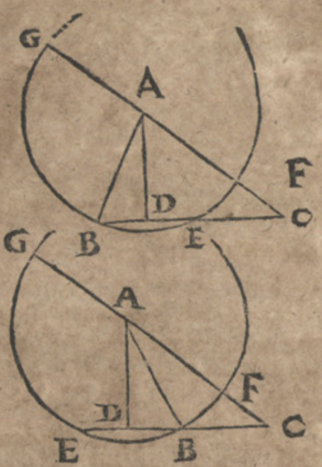
Quo pacto ex operatione intelligatur, num perpendicularis intra triangulū cadat, an extra.

ITAQVE, Si differentia inter duo quadrata laterum ambientium angulum, à quo perpendicularis ducta eſt, diuidatur per tertium latus, in quod perpendicularis eſt demiſſa, producetur numerus, qui ſi minor tertio latere fuerit, indicabit perpendicularem intra triangulum cecidiſſe, idemque ex tertio latere ſubductus relinquet numerum, cuius ſemiſſis dabit minus ſegmentum baſis: hoc autem ex tertio latere ſubtractum exhibebit ſegmentum maius. Si vero numerus ille ex diuiſione productus fuerit tertio latere maior, argumento eſt, perpendicularem extra triangulum cecidiſſe. Quare ſi ex eo tertium latus detrahatur, reliquus erit numerus, cuius ſemiſſis dabit rectam extra triangulum inter perpendicularem, & angulum obtuſum; eadem vero ſemiſſis tertio lateri addita exhibebit alteram rectam inter perpendicularem, & angulum acutum.

ALITER.

ALITER & facilius. Ex A, ad interuallum minoris lateris AB, circulus deſcribatur ſecans maius latus AC, in F, idemque productum in G,& latus BC, ſi perpendicularis intra triangulum cadit, vel certe, ſi extra cadit, ipſum productum in E: [b] ſecabiturq; recta BE, bifariam in D. [c] Quia vero rectangulum ſub BC, CE, rectangulo ſub GC, CF, æquale eſt; [d] erit vt BC, latus, in quod perpendicularis ducitur, nempe vt 21. in priori triangulo, vel vt 11. in poſteriori, ad GC, ſummam reliquorũ duorum laterum AC, AB, (quod AG, ipſi AB, ſit æqualis) hoc eſt, ad 33. ita CF, differentia inter eadem duo latera, id eſt, ita 7. ad CE. Quare per regulam auream inuenietur CE, partium 11. in triangulo priori, in poſteriori autem 21. vt hic perſpicuum eſt.

Alia inuentio ſegmentorũ baſis, & facilior.
b 3. tertij.
c coroll. 1. 36. tertij.
d 16 ſexti.



BC.	GC.	CF.		CE.
21.	33.	7?	fit	11.
	Item.			
11.	33.	7?	fit	21.

Quod ſi EC, inuenta partium 11. in priori triangulo auferatur ex latere BC, nempe ex 21. remanebit BE, 10. cuius ſemiſſis 5. erit ſegmentum BD, ac proinde alterum CD, erit 16. In poſteriori vero triangulo, ſi ex EC, inuenta partium 21. demàtur latus BC, partium 11. relinquetur rurſus BE, 10. Quare eius dimidium 5. dabit rectam BD, extra triangulum inter perpendicularem, & angulum obtuſum; ac proinde tota CD, compoſita ex latere BC, & dicto dimidio BD, erit 16.

SI igitur fiat, vt latus, in quod perpendicularis ducta eſt, ad ſummam aliorum duorum laterum, ita differentia eorundem laterum ad aliud, reperietur numerus, qui ſi minor fuerit tertio latere, indicabit perpendicularem intra triangulum cecidiſſe, idemq; ex tertio latere ablatus relinquet numerum, cuius dimidium erit minus ſegmentum baſis, hoc autem ex tertio latere demptum reliquum faciet maius ſegmentum. Si vero numerus per auream regulam inuentus tertiũ latus ſuperet, argumento eſt, perpendicularem cecidiſſe extra triangulum. Quare ſi ex eo latus tertium detrahatur, dabit ſemiſſis reliqui numeri rectam extra triangulum inter perpendicularem, & angulum obtuſum: Eadem vero ſemiſſis tertio lateri adiuncta offeret alteram rectam inter perpendicularem, & angulum acutum.

Praxis.
Quo pacto ex ipſa operatione cognoſcatur, an perpendicularis cadat intra triangulũ, an extra.

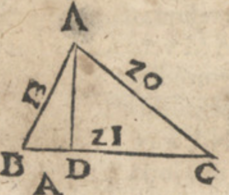
SI ergo ab vno angulo trianguli cuiuſuis notorum laterum, &c. Quod faciendum erat.

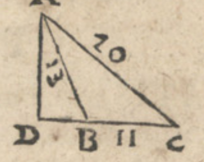
SCHOLIVM.

VIDES igitur, in vtraq; praxi calculum ipſum monſtrare, num perpendicularis intra triangulum cadat, an vero extra.

IDEM hoc problema abſolui poteſt per propoſ. 13. aut 12. lib. 2. Euclid. prout perpendicularis intra triangulum cadit, vel extra. Cadat enim primum perpendicularis AD, intra, ſintque latera, vt prius; AB, 13. AC, 20. BC, 21. Eritque vterque angulus B, C, acutus, propter rectos angulos ad D. [e] *cũ tam duo anguli B, & ADB, quam duo C, & ADC, ſint duobus rectis minores.* [f] *Quoniam igitur quadratum ex AC, minus eſt, quam duo quadrata ex AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BD; ſi quadratum lateris AC, nempe 400. auferatur ex ſumma quadratorum laterum AB, BC, nimirum ex 610. reliquum erit rectangulum ſub CB, BD, bis comprehenſum 210. Semiſſis ergo huius, vt pote 105. erit rectangulum ſub CB, BD, comprehenſum: quo diuiſo per latus BC, hoc eſt, per 21. exibit ſegmentum BD, 5. Reliquum ergo CD, erit 16. Quod tamen eodem modo reperiri poteſt, ſi quadratum lateris AB, ex quadratis laterum AC, CB, ſubducatur, &c.* [g] *Eſt enim & illud minus, quam hæc duo, rectangulo ſub BC, CD, bis comprehenſo.*

e 17. pri.
f 13. ſecun.





g 13. ſecun.

CADAT deinde perpendicularis AD, extra, ſintq; latera, vt prius; AB, 13. AC, 20. BC. 11. Eritque angulus ABC, obtuſus: [h] *propterea quod duo D, & ABD, ſunt duobus rectis minores; ac proinde ABD, acutus, cum D, rectus ſit.* [i] *Quia ergo quadratum ex AC, maius eſt, quam duo quadrata ex AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BD; ſi ſumma quadratorum laterum AB, BC, id eſt, 290. auferatur ex 400. quadrato lateris AC, relinquetur rectangulum bis comprehenſum ſub CB, BD, 110. Semiſſis ergo huius, nimirum 55. erit rectangulum ſub CB, BD, contentum: quo diuiſo per 11. latus BC, prodibit recta BD, extra triangulum, 5. quæ cum 11. lateris BC, componet rectam CD, 16.*

h 17. pri.
i 12. ſecun.

ITAQVE, cadente perpendiculari intra triangulum; Si ſemiſſis differentiæ inter quadratum vtriuſuis laterum ambientium angulum, à quo perpendicularis demiſſa eſt, & ſummam quadratorum ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum, diuidatur per latus, in quod perpendicularis cadit, producetur ſegmentum baſis prope angulum, quem continent latera, quorum ſumma quadratorum accepta fuit: Hoc autem ſegmentum ex eadem baſe detractum relinquet alterum ſegmentum.

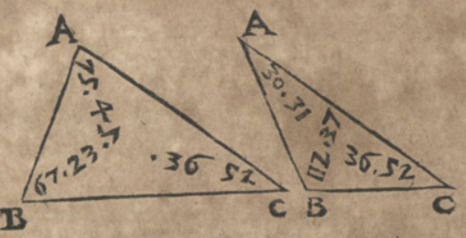
Praxis.

CADENTE vero perpendiculari extra triangulum; Si ſemiſſis differentiæ inter quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti, & ſummam quadratorum ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum, diuidatur per latus, in quod productum perpendicularis cadit, procreabitur linea extra triangulum inter perpendicularem, & angulum obtuſum: Hæc vero addita baſi conſtituet alteram rectam inter perpendicularem, & angulum acutum baſis.

PROBL. 6. PROPOS. 10.

DATIS omnibus angulis trianguli non rectanguli, vel datis eorum proportionibus, vna cũ vno latere; reliqua duo latera cognoſcere, & quorũlibet duorũ proportionẽ facere notam.

In triangulo non rectangulo ex angulis notis, vel ex proportionibus angulorũ notis, vna cum vno latere reliqua inueſtigantur.



IN triangulo ABC, ſint primum omnes anguli acuti, & dati; A, grad. 75. Min. 45. B, grad. 67. Min. 23. C, grad. 36. Min. 52. Datum quoque ſit latus AB, 13. Oportet ex his reliqua duo latera inuenire. [a] Quoniam eſt, vt ſinus anguli C, ad ſinum anguli A, ita latus AB, datũ ad latus BC: ſi fiat, vt ſinus anguli C, nempe 59996. ad 96923. ſinum anguli A, ita latus AB, datum 13. ad aliud, inuenietur latus BC, 21. ferè, vt hic apparet.

a 1. huius.

C.	A.	AB.		BC.	
59996.	96923.	13?	fit	21	ferè

Item quia eſt, vt ſinus anguli C, ad ſinum anguli B, ita latus AB, datum ad latus AC: ſi fiat, vt 59996. ſinus anguli C, ad 92310. ſinum anguli B, ita latus AB, datum 13. ad aliud, inuenietur latus AC, fere 20. vt hic vides.

C.	B.	AB.		AC.	
59996.	92310.	13?	fit	20.	ferè

b 1. huius. [b] Vel quia eſt, vt ſinus anguli A, ad ſinũ anguli B, ita latus BC, inuentũ ad latus AC: ſi fiat, vt 96923. ſinus anguli A, ad 92310. ſinum anguli B, ita latus BC, inuentum 21. ad aliud, reperietur latus AC, fere 20. vt hic cernis.

A.	B.	BC.		AC.	
96923.	92310.	21?	fit	20.	ferè.

SIT deinde angulus B, obtuſus grad. 112. Min. 37. A, grad. 30. Min. 31. C, grad. 36. Min. 52. & rurſum latus AB, 13. Quoniam idem eſt ſinus anguli B, qui eius complementi grad. 67. Min. 23. vt in tractatione ſinuum demonſtrauimus, inuenietur ratione iam expoſita latus BC, 11. & AC, 20. fermè, vt hic liquido conſtat.

C.	A.	AB.		BC.	
59996.	50779.	13?	fit	11.	ferè.

Item.

C.	B.	AB.		AC.	
59996.	92310.	13?	fit	20.	ferè

Vel.

A.	B.	BC.		AC.	
50779.	92310.	11?	fit	20.	ferè.

Praxis.

ITA QVE, datis angulis omnibus, cum vno latere; Si fiat, vt ſinus anguli lateri oppoſiti ad ſinum vtriuſuis reliquorum angulorum: ita latus datum ad aliud, inuenietur latus angulo illi, cuius ſinus acceptus eſt, oppoſitum: Et ſi rurſus fiat, vt ſinus anguli lateri dato oppoſiti ad ſinum tertij anguli, ita datum latus ad aliud, reperietur latus tertio angulo oppoſitum, &c.

Quando triangulũ eſt Iſoſceles, vel æquilaterũ: aut quando in ſcaleno dantur duo latera cum angulis.

QVOD ſi triangulum fuerit Iſoſceles, & dentur anguli: Vel ſi fuerit ſcalenum, & duo dentur latera cum angulis, vnius tantum lateris inuentione opus eſt, vt patet. In æquilatero autem triangulo, ſi detur vnum latus, erunt & reliqua data, vtpote illi æqualia.

Quando datur proportiones angulorũ, cum vno latere.

IAM verò ſi datæ ſint proportiones angulorum, cum vno latere, inueſtigandæ erunt ex illis proportionibus magnitudines angulorum, vt in ſcholio propoſ. 1. demonſtrauimus: Deinde vero reliqua latera exploranda, vt hic oſtenſum eſt.

INVENTIS autem lateribus, liquido conſtat, eorum proportiones eſſe notas in numeris, in quibus ipſa cognita ſunt. Datis ergo omnibus angulis trianguli non rectanguli, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. 7. PROPOS. 11.

DATIS omnibus trianguli non rectanguli lateribus, vel eorum proportionibus, omnes angulos notos efficere.

In triangulo ex notis lateribus, vel ex eorum proportionibus notis, anguli inueniũtur.



IN triangulo priori ABC, ſint data omnia latera; AB, 13. AC, 20. & BC, 21. Oportet ex his inueſtigare angulos. In maximum latus BC, ex oppoſito angulo A, ducatur perpendicularis AD, quæ neceſſario intra triangulum cadet. Cum enim latus BC, ſit mximum, [a] erit & angulus A, ipſi oppoſitus, maximus, [b] ac propterea vterque B, C, acutus. [c] Ex quo fit, perpendicularem AD, intra triangulum cadere. [d] Primum itaque inquirantur rectæ BD, CD. Inuenietur BD, 5. & CD, 16. Quia ergo, poſito ſinu toto AB, recta BD, ſinus eſt anguli BAD, vt in tractatione ſinuum oſtendimus, dicemus per auream regulam. Si AB, 13. dat AB, ſinum totum partium 100000. quid dabit BD, 5? inueniemusq; ſinum BD, 38461. vt hic vides.

a 19. pri.
b 17. pri.
c ſchol. 13. ſecundi.
d 9. huius.

AB.	AB.	BD.		BD.
13.	100000.	5?	fit	38461.

Ex tabula ergo Sinuum dabitur angulus BAD, grad. 22. Min 37. atque adeo eius complementum B, grad. 67. Min. 23. qui eſt vnus angulorum quæſitorum. Rurſus, quia poſito AC, ſinu toto, CD, ſinus eſt anguli CAD, dicemus iterum per regulam auream. Si AC, 20. dat AC, 100000. ſinum totum, quid dabit CD, 16? Inueniemusq; ſinum CD, 80000. Vt hic patet.

AC.	AC.	CD.		CD.
20.	100000.	16?	fit	80000.

Qui ſinus in tabula ſinuum monſtrat angulum CAD, grad. 53. Min. 8. ac proinde eius complementum C, erit

erit grad. 36. Min. 52. qui eſt vnus etiam angulorum quæſitorum. Quod ſi duo anguli duorum ſinuum inuentorum, nempe gr. 22. Min. 37. & gr. 53. Min. 8. ſimul componantur, fiet tertius angulus BAC, gr. 75. Min. 45. Vel certe ſi ſumma duorum angulorum B, C, inuentorum ex grad. 180. auferatur, reliquus fiet tertius angulus BAC, grad. 75. Min. 45.

ITAQVE, (vt totam praxim complectamur) ſi fiat, vt maximum latus (in quod perpendicularis ducta eſt) ad ſummam aliorum duorum, ita differentia eorundem duorum ad aliud, reperietur numerus, qui ex maximo latere ſubductus relinquet numerum, cuius ſemiſsis dabit minus ſegmentum baſis, hoc autem ex baſi detractum relinquet maius ſegmentum, vt conſtat ex ſecunda praxi propoſ. 9. Quod ſi rurſum fiat, vt minimum latus ad ſinum totum, ita ſegmentum baſis minus ad aliud, inuenietur ſinus cuius arcus complementum dabit angulum ſupra baſim medio lateri oppoſitum. Deinde ſi rurſum fiat, vt medium latus ad ſinum totum, ita maius ſegmentum baſis ad aliud, reperietur ſinus, cuius arcus complementum dabit angulum ſupra baſim minimo lateri oppoſitum. Tertius vero angulus maximo lateri oppoſitus conflabitur ex duobus illis arcubus duorum ſinuum inuentorum: vel certe relinquetur poſt detractionem duorum angulorum inuentorum ex duobus rectis. *Praxis.*

RVRSVS in poſteriori triangulo datum ſit latus AB, 11. AC. 13. & BC, 20. Demiſſa in maximum latus BC, perpendiculari AD, inuenietur ſegmentum BD, $8\frac{4}{5}$. at CD, $11\frac{1}{5}$. vt hic apparet ſecundum praxim poſteriorem propoſ. 9.

BC.	AB. AC.	Differ. inter AB, AC.		
20.	24.	2?	fit	$2\frac{2}{5}$.

Hic numerus ex baſe 20. ablatus relinquit $17\frac{3}{5}$. cuius ſemiſſis $8\frac{4}{5}$. dat ſegmentum minus BD. Ergo maius CD, erit $11\frac{1}{5}$. Hinc inuenietur angulus B, gr. 36. Min. 52. C, gr. 30. Min. 31. & BAC, gr. 112. Min. 37. vt hic vides.

AB.	AB.	BD.		BD.
11.	100000.	$8\frac{4}{5}$?	fit	80000.
		Item.		
AC.	AC.	CD.		CD.
13.	100000.	$11\frac{1}{5}$?	fit	86154.

Complementum arcus, quem prior ſinus inuentus offert, dat angulum B, grad. 36. Min. 52. At complementum arcus poſterioris ſinus inuenti dat angulum C, gr. 30. Min. 31. &c. Eſt ergo doctrina huius propoſitionis generalis, ſiue angulus maximus A, acutus ſit, vt in priori triangulo, ſiue obtuſus, vt in poſteriori, ſiue deniq; rectus ſit; quamuis in rectangulo triangulo iam ſupra traditum ſit propoſ. 3. quo pacto ex duobus lateribus cognitis facilius anguli duo acuti inueniantur. *Generalitas huius propoſ.*

IAM ſi dentur laterum proportiones, ſaltem duæ, [a] continuabimus eas in tribus minimis numeris, ſi proportionum numeri minimi non ſint, vt Eucl. docuit propoſ. 4. lib. 8. eoſque numeros lateribus aſcribemus, perinde ac ſi in illis numeris darentur. Vt ſi in priori triangulo proportio AB, ad BC, ſit, quæ 26. ad 42. At AB, ad AC, quæ 39. ad 60. reuocabuntur hæ proportiones ad minimos hoſce numeros 13. 21. & 13. 20. Dabitur ergo AB, 13. AC. 20. & BC, 21. Ex quibus angulos eruemus, vt prius. *Quando laterũ proportiones datæ ſunt.* *a 35. ſepti.*

PORRO in Iſoſcele datorum laterum ducenda eſt perpendicularis ad baſim, ſiue ea ſit maximum latus, ſiue minimum: [b] quæ diuidet baſim bifariam. Quare ſi fiat, vt vnum æqualium laterum ad ſinum totum, ita dimidium baſis ad aliud, inuenietur ſinus cuiuſdam arcus, cuius complementum dabit vnum æqualium angulorum ſupra baſim, vt ex demonſtratis liquet. Ergo & alter dabitur: ac proinde & tertius baſi oppoſitus, vt pote reliquus duorum rectorum. *Quando triangulũ eſt Iſoſceles.* *b Coroll. 8. huius.*

IN æquilatero denique triangulo dabuntur anguli, etiamſi latera non dentur, cum quilibet ſit tertia pars duorum rectorum, hoc eſt, contineat gr. 60. Datis igitur omnibus trianguli non rectanguli lateribus, &c. Quod faciendum erat. *Quando triangulũ eſt æquilaterum.*

S C H O L I V M.

Quando perpendicularis in obtuſangulo triangulo cadit extra triangulũ.



ETSI in hac propoſ. præcepimus, perpendicularem ad maximum latus eſſe ducendam ex angulo oppoſito, vt intra triangulum cadat, fiatque calculus facilior: tamen eadem fere via problema abſoluemus, ſi in triangulo obtuſangulo perpendicularis non ducatur ab obtuſo angulo in maximum latus, ſed ab alterutro acutorum angulorum in latus oppoſitum protractum, ita vt cadat extra triangulum, vt in hoc triangulo ABC, manifeſtum eſt, in quo latus AB, datur 22. AC. 31. & BC. 14. Nam ſi fiat, vt BC, 14. (in quod latus perpendicularis eſt ducta) ad 53. ſummam aliorum laterum AB, AC, ita 9. differentia eorundem laterum ad aliud, reperietur numerus $34\frac{1}{14}$*. à quo ſi ſubducatur latus BC, remanebit numerus* $20\frac{1}{14}$*. cuius ſemiſsis* $10\frac{1}{28}$*. erit recta BD, ac proinde CD,* $24\frac{1}{28}$*. Quam ob rem ſi iam fiat, vt AB, 22, ad AB, ſinum totum 100000. ita BD,* $10\frac{1}{28}$*. ad aliud, inuenietur BD, ſinus 45617. cuius arcus complementum exhibebit angulum ABD, grad. 62. Min. 52. ac propterea reliquum duorum rectorum ABC, grad. 117. Min. 8. Item ſi fiat, vt AC, 35. ad AC, 100000. ſinum totum, ita CD,* $24\frac{1}{28}$*. ad aliud, reperietur ſinus 77534. cuius arcus complementum offeret angulum C, grad. 39. Min. 10. Quod ſi duo anguli ABC, & C, ex gr. 180. demantur, relinquetur angulus BAC, gr. 23. Min. 42. Ratio huius operationis colligitur ex tractatione ſinuum, vbi oſtendimus, ſi AB, ſtatuatur ſinus totus, B D, eſſe ſinum anguli BAD: Item ſi AC, ponatur ſinus totus, C D, eſſe ſinum anguli CAD, &c.*

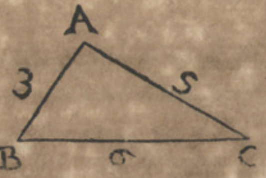
THEOR. 8. PROPOS. 12.

In triangulo non rectãgulo ex duobus lateribus notis, vel ex eorum proportione nota, cum angulo ab ipſis comprehenſo, tertium latus & reliqui anguli exquiruntur.

DATIS duobus lateribus trianguli non rectanguli, cum angulo ab ipſis comprehenſo; vel data proportione duorum laterum angulum datum continentium: tertium latus, & reliquos angulos inuenire.

IN

IN triangulo ABC, data ſint primum duo latera AB, AC, illud 3. hoc 5. ambientia angulum A, obtuſum, qui datus etiam ſit grad. 93. Min. 50. Oportet ex his tertium latus BC, & reliquos angulos B, C, inueſtigare. Quoniam datur angulus A, grad. 93. Min. 50. ſi detrahatur ex grad. 180. hoc eſt, ex duobus rectis, reliquum erit aggregatum duorum angulorum B, C, grad. 86. Min. 10. Eſt autem & proportio ſinuum angulorum C, B, data, nempe, eadem, quæ lateris AB, 3. ad latus AC, 5. [a] propterea quod eſt, vt latus AB, ad latus AC, ita ſinus anguli C, ad ſinum anguli B. [b] Quare vterque angulus C, B, ſigillatim cognitus erit, ille gr. 29. Min. 55. hic vero gr. 56. Min. 15. [c] Quia vero latera ſunt ſinubus angulorum oppoſitorum proportionalia, erit, vt ſinus anguli C, ad ſinum anguli A, ita latus AB, ad latus BC, vel vt ſinus anguli B, ad ſinum anguli A, ita latus AC, ad latus BC. Per auream ergo regulam inuenietur latus BC. ferme 6. vt hic apparet.



a 1. huius.
b 6. huius.
c 1. huius

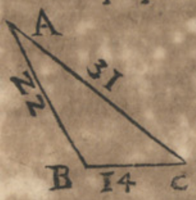
C.	A.	AB.		BC.
49874.	99776.	3?	fit	6. fere.

Vel.

B.	A.	AC.		BC.
83147.	99776.	5?	fit	6. fere.

Praxis.

VT ergo totam praxim complectamur: Si (ablato angulo dato ex grad. 180. vt ſumma aliorum duorum habeatur) fiat, vt ſemiſsis ſummæ duorum laterum datorum, nempe ſemiſsis ſummæ terminorum proportionis ſinuum angulorum reliquorum, ad tangentem ſemiſsis ſummæ reliquorum angulorum, ita differentia inter ſemiſſem ſummæ datorum laterum, hoc eſt, terminorum proportionis ſinuum angulorum reliquorum, & alterum laterum, ſiue terminorum proportionis, ad aliud, reperietur tangens anguli, qui cum ſemiſſe ſummæ reliquorum angulorum componet maiorem angulum, qui nimirum maiori lateri dato opponitur: idem vero ex eadem ſemiſſe dictæ ſummæ detractus relinquet angulum minorem minori lateri dato oppoſitum; vt perſpicuum eſt ex praxi priore propoſit. 6. Quod ſi rurſus fiat vt ſinus vtriuſuis angulorum inuentorum ad ſinum anguli in principio dati, ita latus inuento angulo, qui acceptus fuerit in regula aurea, oppoſitum ad aliud, inuenietur tertium latus. Et ad maiorem perſpicuitatem proponemus aliud exemplum.



SINT in triangulo ABC, data duo latera AB, AC, 22. & 31. vna cum angulo A, gr. 23. Min. 42. Hic angulus ablatus ex grad. 180. reliqua fiet ſumma angulorum B, C, grad. 156. Min. 18. Si ergo fiat, vt $26\frac{1}{2}$. ſemiſsis laterum AB, AC, id eſt, terminorum proportionis ſinuũ angulorũ B, C, ad 476595. tangentẽ ſemiſsis ſummæ angulorũ B, C, hoc eſt, ad tangentẽ gr. 78. Min. 9. ita $4\frac{1}{2}$. differentia inter ſemiſſem ſummæ laterum AB, AC, vel terminorum proportionis ſinuum angulorum B, C, & alterutrum laterũ, ſeu terminorum, ad aliud, reperietur tangens 80931 cuius arcus gr. 38. Min. 59. additus ad gr. 78. Min. 9. nempe ad ſemiſſem ſummæ angulorum B, C, conſtituet angulum maiorem B, maiori lateri dato AC, oppoſitum gr. 117. Min. 8. Idem vero arcus gr. 38. Min. 59. ex eadem ſemiſſe ſummæ angulorum B, C, id eſt, ex gr. 78. Min. 9. detractus relinquet minorem angulũ C, minori lateri dato AB. oppoſitũ gr. 39. Min. 10. Operationẽ aureæ regulæ hic vides.

$26\frac{1}{2}$	476595	$4\frac{1}{2}$?	fit	80931.

Quod ſi iam fiat, vt 63158. ſinus anguli C, ad 40195. ſinum anguli A, ita latus AB, 22. ad aliud: Vel vt 88995. ſinus anguli B, ad 40195. ſinum anguli A, ita latus AC, 31. ad aliud, inuenietur latus BC, 14. fere. vt hic cernis.

C.	A.	AB.		BC.
63158.	4095.	22?	fit	14. fere.

Vel

B.	A.	AC.		BC.
88995.	40195.	31?	fit	14. fere.

SI vti nolis tangentibus, vſurpanda erit poſterior praxis propoſ. 6. in inuentione angulorum B, C.

Quando laterum proportio data eſt.

IAM ſi proportio laterum AB, AC, data ſit, vna cum angulo A, ab ipſis comprehenſo, aſcribemus dictis lateribus numeros proportionis, ac ſi in ipſis data eſſent, problemaq; abſoluemus, vt prius.

Alia demõſtratio problematis ſine propoſ. 6.
d 19. primi.
e 17. primi.
f Schol. 13. ſecundi.
g 1. huius.



HOC etiam problema abſolui poteſt ſine auxilio propoſ. 6. hoc modo. In triangulo ABC, detur latus AB, 29. AC, 24. & angulus A, primum acutus gr. 38. Min. 16. Ducatur ad maius latus AB, ab angulo oppoſito C, perpendicularis CD: quæ neceſſario intra triangulum cadet. Cum enim latus AB, maius ſit latere AC, [d] erit & angulus C, angulo B, maior. Quare B, acutus erit. Nam ſi rectus eſſet, aut maior, eſſet C, etiam maior recto. Quod eſt abſurdum; [e] quod B, C, ſint minores duobus rectis. Cum ergo & A, ponatur acutus, [f] cadet perpendicularis CD, intra triangulum. In triangulo igitur rectangulo ACD, cum angulus A, ſit gr. 38. Min. 16. erit eius complementum ACD, grad. 51. Min. 44. [g] Quare cum ſit, vt ſinus totus anguli recti D, ad ſinum anguli A, ita latus AC, 24. ad latus CD: inuenietur latus CD, per regulam auream, $14\frac{2699}{3125}$. Vt hic apparet.

D.	A.	AC.		CD.
100000.	61932.	24?	fit	$14\frac{2699}{3125}$.

h 1. huius.

Eadem ratione, [h] cum ſit, vt ſinus totus anguli recti D, ad ſinum anguli ACD, ita latus AC, 24. ad latus AD: reperietur latus AD, $18\frac{5271}{6250}$. vt hic vides.

D.	ACD.	AC.		AD.
100000.	78514.	24?	fit	$18\frac{5271}{6250}$.

Ablata autem AD, inuenta ex AB, data 29. relinquetur BD, $10\frac{979}{6250}$. Et quia, vt in tractatu tangentium oſtendimus, poſito ſinu toto BD, recta CD, tangẽs eſt anguli B, inuenietur CD, tangens 146344. vt hic manifeſtũ eſt.

BD.	BD.	CD.		CD.
$10\frac{979}{6250}$	100000.	$14\frac{2699}{3125}$?	fit	146344.

Tangens

Tangens autem 146344. monſtrat in tabula tangentium angulum B, gr. 55. Min. 40. ac proinde duo anguli A, B, gr. 38. Min. 16. & gr. 55. Min. 40. ex gr. 180. ſubducti reliquum facient angulum ACB, gr. 86. Min. 4. [i] Quoniam autem eſt, vt ſinus anguli B, noti ad ſinum anguli A, dati, ita latus datum AC, 24. ad latus BC, reperietur latus BC, 18. fere. vt hic vides. i 1. huius.

B.	A.	AC.		BC.
82577.	61932.	24?	fit	18. fere.

RVRSVS in triangulo ABC, datum ſit latus AB, 13. AC, 11. & angulus A, ab ipſis comprehenſus obtuſus, & datus gr. 112. Min. 37. Ducatur ex alterutro angulorum acutorum, vt ex B, ad oppoſitum latus CA, perpendicularis: [k] quæ extra triangulum cadet. Quia igitur angulus BAC, ponitur gr. 112. Min. 37. erit BAD, gr. 67. Min. 23. eiuſq; complementum propterea ABD, neceſſario gr. 22. Min. 37. [l] Quare cum ſit, vt ſinus totus anguli recti D, ad ſinum anguli BAD, ita latus AB, datum 13. ad latus BD: Item vt ſinus totus anguli recti D, ad ſinum anguli ABD, ita latus datum AB, 13. ad latus AD; inuenietur BD, quidem 12. at AD, 5. fere. vt hiç apparet. k Schol. 12. ſecundi. l 1. huius.



D.	BAD.	AB.		BD.
100000.	92310.	13?	fit	12. fere.

Item.

D.	ABD.	AB.		AD.
100000,	38456.	13?	fit	5. fere.

Addita autem AD, inuenta 5. ad latus AC, datum 11. fiet tota CD, 16. Cum ergo poſito ſinu toto CD, recta BD, ſit tangens anguli C; reperietur tangens BD, 75000. vt hic cernis.

CD.	CD.	BD.		BD.
16.	100000.	12?	fit	75000.

Quæ tangens offeret in tangentium tabula angulum C, gr. 36. Min. 52. & proinde duo anguli A, C, grad. 112. Min. 36. & gr. 36. Min. 52. ex gr. 180. ablati relinquent angulum ABC, gr. 30. Min. 31. [m] Quoniam tandem eſt, vt ſinus anguli C, cogniti ad ſinum anguli BAC, dati, ita latus AB, 13. datum ad BC, inuenietur latus BC, 20. fere. vt hic apparet. m 1. huius.

C.	BAC.	AB.		BC.
59996.	92310.	13?	fit	20. fere.

Verum, vt vides, prior ratio multo eſt breuior, & expeditior.

QVOD ſi quando data duo latera datum angulum ambientia fuerint æqualia, facilius erit problema. Sint namq; in triangulo ABC, duo latera AB, AC, æqualia, quodlibet 9. & angulus A, comprehenſus grad. 80. Ablato hoc angulo ex gr. 180. dabit ſemiſſis reſidui quod eſt gr. 100. vtrumq; angulorum B, C, gr. 50 Si autem fiat, vt ſinus anguli B, vel C, ad ſinum anguli A, ita latus AC, vel AB, ad aliud, prodibit latus BC, $11\frac{43685}{76604}$. vt hic vides. Quando data latera ſunt æqualia.



B, vel C.	A.	AB, vel AC.		BC.
76604.	98481.	9?	fit	$11\frac{43685}{76604}$.

Datis ergo duobus lateribus trianguli non rectanguli, cum angulo ab ipſis comprehenſo, &c. Quod erat faciendum.

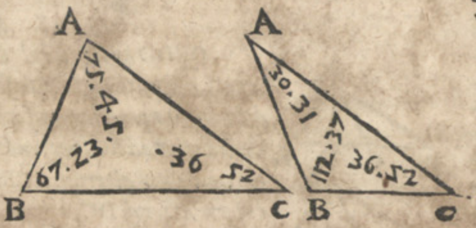
PROBL. 9. PROP. 13.

DATIS duobus lateribus trianguli non rectanguli, vel eorum proportione data, vna cum angulo, qui alteri datorum laterum opponitur: reliquos angulos, & tertium latus inquirere. Oportet autem conſtare, num alter angulus reliquo lateri dato oppoſitus ſit acutus, an obtuſus, ſi datus angulus acutus eſt. In triangulo non rectangulo ex datis duob. lateribus vel ex eorum proportione data, cum vno angulo non ab ipſis comprehẽſo, tertium latus & reliqui anguli inueſtigantur.

SINT in triangulo ABC, data duo latera AB, AC, 13. & 20. datusq; ſit acutus angulus C, gr. 36. Min. 52. lateri dato AB, oppoſitus, conſtetq; de angulo B, qui alteri dato lateri AC, opponitur, num acutus ſit, an obtuſus: alias enim nihil certi colligi poſſet, vt ex ſequenti ſcholio patebit. [a] Quoniam ergo eſt, vt latus AB, ad latus AC, ita ſinus anguli C, ad ſinum anguli B; ſuntque tria prima data, inuenietur per auream regulam quartum, hoc eſt, ſinus anguli B, 92302. vt hic liquet. a 1. huius.

AB.	AC.	C.		B.
13.	20.	59996?	fit	92302.

Qui ſinus in tabula ſinuum exhibet angulum B, fere gr. 67. Mi. 23. ſi acutus fuerit, vt in priore triangulo: ſi autẽ obtuſus, vt in triangulo poſteriori, gr. 112. Mi. 37. vtpote qui cũ illo ſemicirculũ cõpleat; cum obtuſus, & acutus conficientes gr. 180. eundem ſinum habeant, vt ad definitiones ſinuum demonſtrauimus. Ablatis autem duobus angulis C, B, ex gr. 180. relinquetur in priori triangulo angulus A, gr. 75. Min. 45. in poſteriori vero gr. 30. Min. 31. Latus autem BC, inuenietur, per auream regulam, partium fere 21. in priori triangulo; in poſteriori autem fere 11. [b] quod ſit vt ſinus anguli C, ad ſinum anguli A, ita latus AB, ad latus BC. vt in hac operatione apparet. b 1. huius.



C.	A.	AB.		BC.
59996.	96923.	13?	fit	21. fere.

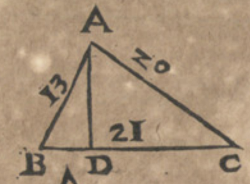
Item.

C.	A.	AB.		BC.
59996.	50779.	13?	fit	11. fere.

ITAQVE, ſi fiat, vt latus dato dato angulo oppoſitum ad alterum latus datum, ita ſinus dati anguli ad aliud, reperietur ſinus, cuius arcus dabit angulũ alteri lateri dato oppoſitũ, ſi acutus fuerit, (quod quidem Praxis.

quidem ſemper contingit, quando datus angulus eſt obtuſus) aut certe ex ſemicirculo ſublatus dabit illũ angulũ, ſi obtuſus fuerit: Summa vero ex dato angulo, & inuento angulo conflata ex grad. 180. ſubducta exhibebit tertium angulum. Si deniq; fiat, vt ſinus anguli dati ad ſinũ tertij anguli à datis lateribus comprehenſi, qui vltimo inuentus eſt, ita latus datũ dato angulo oppoſitũ ad aliud, producetur tertium latus.

Quando proportio duorum laterum datur.



QVOD ſi detur duorum laterum proportio, ſi lateribus illis numeri proportionis aſcribantur, eodem modo problema exequemur.

ALITER. Dentur rurſum duo latera AB, 13. & AC, 20. vna cum angulo C, acuto grad. 36. Min. 52. ſitque primum alter angulus B, acutus etiam, vt in priori triangulo. Ducta ex A, ad BC, perpendiculari AD, [c] quæ intra triangulum cadet: quoniam in triangulo rectangulo ACD, poſito ſinu toto AC, recta AD, ſinus eſt anguli dati C, vt in tractatu ſinuum docuimus; ſi fiat, vt AC, ſinus totus ad AC, latus datum, ita AD, ſinus dati anguli C, ad aliud, reperietur AD, 12. fere, vt hic vides.

c Schol. 13. ſecundi.



AC.	AC.	AD.	AD.
100000.	20.	59996? fit	12. fere.

Rurſus, quia poſito ſinu toto AB, recta AD, eſt ſinus anguli B, vt in ſinubus traditum eſt; ſi fiat, vt AB, latus datum ad ſinum totum, ita AD, iam inuenta ad aliud, inuenietur ſinus AD, 92308. vt hic apparet.

AB.	AB.	AD. fit	AD.
13.	100000.	12?	92308.

Ex tabula ergo ſinuum dabitur angulus B, grad. 67. Min. 23. ac proinde BAC, reliquus duorum rectorum grad. 75. Min. 45. [d] Quoniam vero eſt, vt ſinus anguli dati C, ad ſinum anguli A, inuenti, ita latus AB, ad latus BC, inuenietur latus BC, 21. ferme: vt hic cernis.

d 1. huius.

C.	BAC.	AB.	BC.
59996.	96923.	13? fit	21. fere.

DEINDE, iiſdem poſitis, ſit alter angulus B, obtuſus, vt in poſteriori triangulo. Ducta ex A, ad BC, perpendiculari AD, [e] quæ extra triangulum cadet: quoniam in triangulo rectangulo ACD, poſito ſinu toto AC, recta AD, ſinus eſt anguli C, vt dictum eſt in tractatione ſinuum; ſi fiat, vt ſinus totus ad datum latus AC, ita ſinus dati anguli C, ad aliud, inuenietur AD, ferme 12. vt hic apparet.

e Schol. 12. ſecundi.

AC.	AC.	AD.	AD.
100000	20.	59996? fit	12. fere.

Rurſus, quia poſito ſinu toto AB, recta AD, ſinus eſt anguli ABD, vt in defin. ſinuum explicauimus; Si fiat, vt latus datum ad ſinum totum, ita AD, proxime inuenta ad aliud, reperietur ſinus AD, 92308. vt hic vides.

AB.	AB.	AD.	AD.
13.	100000.	12? fit	92308.

Qui ſinus exhibet in tabula ſinuum angulum ABD, grad. 67. Min. 23. ac proinde reliquum duorum rectorum ABC, grad. 11. Min. 37. Ablatis autem duobus angulis C, & ABC, notis ex grad. 180. remanebit angulus BAC, gr. 30. Min. 31. [f] Hinc, quoniam eſt, vt ſinus anguli C, dati ad ſinum anguli A, inuenti, ita latus AB, datum ad latus BC, inuenietur latus BC, fere 11. vt hic manifeſtum eſt.

f 1. huius.

C.	A.	AB.	BC.
59996.	50779.	13? fit	11. fere.

POSTREMO, datis iiſdem lateribus, detur angulus obtuſus ABC. gr. 112. Min. 37. vt in poſteriori triangulo, factaque eadem conſtructione quoniam poſito ſinu toto AB, recta AD, ſinus eſt anguli ABD, hoc eſt, anguli dati ABC, inuenietur rurſum AD, 12. fere, vt hic cernis.

AB.	AB.	AD.	AD.
100000.	13.	92308? fit	12. fere.

Rurſus, quia poſito AC, recta AD, ſinus eſt anguli C, reperietur ſinus AD, 60000. Vt hic apparet.

AC.	AC.	AD.	AD.
20.	100000.	12? fit	60000.

Eſt ergo angulus C, gr. 36. Min. 52. & proinde reliquus duorum rectorum BAC, gr. 30. Min. 31. Latus BC, inuenietur 11. vt prius. Igitur, Datis duobus lateribus trianguli non rectanguli, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Quando dato angulus eſt acutus, cur cõſtare debeat, num alter angulus ſit acutus, vel obtuſus





QVOD autem nihil certi colligi poßit, quando datus angulus vni datorum laterum oppoſitus acutus eſt, niſi prius cognitum ſit, num angulus alteri dato lateri oppoſitus ſit acutus, obtuſuſve, vt in propoſ. diximus, ita perſpicuum faciemus. Sint in triangulo ABC, data latera AB, AC, vna cum angulo acuto B. Ducta ex A, ad BC, perpendiculari AD, ignorabitur, num ea cadat extra triangulum, an intra, niſi ſciatur, angulum alterum ACB, eſſe obtuſum, acutumve. Sumpta quoq; recta DE, ex altera parte perpendicularis AD, ipſi DC, æquali, ductaq; recta AE; [g] erit AE, ipſi AC, æqualis: propterea quod latera DC, DA, lateribus DE, DA, æqualia ſunt, anguloſq; comprehendunt æquales, vtpote rectos. Itaq; etiamſi nota ſint latera AB, AC, vel AB, AE, & angulus acutus B, non tamen idcirco reliquum latus notum erit, aut reliqui anguli; cum reliquum latus poßit eſſe vel BC, vel BE; ac propterea reliqui anguli vel BCA, BAC, vel BEA, BAE: niſi prius conſtet, angulum BCA, obtuſum eſſe, vel acutum. Hoc enim cognito ſciemus, quando perpendicularis AD, extra triangulum cadit, & quando intra; &c.

g 4. primi.

Error Nicolai Copernici

EX quibus conſtat, Nicolaum Copernicum, alioquin diligentißimum, hallucinatum fuiſſe lib. 1. Reuolutionum propoſ. 6. triangulorum rectilineorum, dum ſimpliciter proponit: Si duo latera trianguli data ſint, & angulus vni eorum oppoſitus datus etiam, reliquum latus, & reliquos angulos dari poſſe. Hoc etenim fieri non poteſt, vt demonſtrauimus, quando datus angulus eſt acutus, niſi conſtet, num angulus alteri laterum datorum oppoſitus ſit acutus, an obtuſus.

FINIS TRIANGVLORVM RECTILINEORVM.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

TRIANGVLA SPHÆRICA.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

TRIANGVLA SPHÆRICA.

PRÆFATIO.

EXPLICATIS iis, quæ ad triangulorum rectilineorum ſcientiam, quæ ex angulis notis latera, & viciſsim ex notis lateribus anguli cognoſcuntur, neceſſaria eſſe duximus; reliquum eſt, vt ſphæricorum etiam triangulorum doctrinam, qua arcus ex cognitis angulis, & contra, anguli ex arcubus notis inquiruntur, tradamus. Quamuis enim Menelaus, qui etiam Mileus, nobilis ſcriptor, qui temporibus Traiani Imperatoris floruit, vt auctor eſt Ptolemæus, acutiſsimos tres libros de triangulis ſphæricis compoſuerit, non tamen eius ordinem nos in hiſce noſtris ſphæricis triangulis ſequemur; propterea quod & plurimas eius propoſitiones, licet iucundiſsimæ ſint, miraque eruditione refertæ, tanquam non neceſſarias reiecimus, & alias non paucas ab eo omiſſas ex Gebro Hiſpalenſi, Joanne Regiom. Franciſco Maurolyco, & ex aliis adiecimus, quas omnino neceſſarias eſſe iudicauimus ad res Aſtronomicas intelligendas. Plerunque etiam nouas demonſtrationes, easque breuiores, ac faciliores adhibuimus, nonnullas item eodem modo demonſtrauimus, quo eædem de angulis, & triangulis rectilineis demonſtratæ ſunt ab Euclide, vt planior fieret earum demonſtratio: ex quarum numero ſunt propoſ. 5. 6. 7. 8. & 9. Non parum tamen operæ in eo poſuimus, vt omnes propoſitiones triangulorum ſphæricorum ita in ordinem redigeremus, vt poſteriores ex prioribus penderent, quemadmodum res Mathematicæ poſtulant, & in omnibus elementis Geometricis fieri conſueuit. Sed iam ad rem veniamus, exordio ſumpto à definitionibus.

Lib. 7. Almag. cap. 3.

DEFINITIONES.

I.

Angulus ſphæricus quid.

ANGVLVS ſphæricus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe mutuo ſecantes continent.

QVONIAM

QVONIAM angulus ſphæricus, qui à Geometris in ſphærica ſuperficie conſideratur, ab arcubus maximorum circulorum tantummodo conſtituitur, omnes autem circuli maximi in ſphæra [a] *ſe mutuo ſecant bifariam, fit, vt duo arcus angulũ ſphæricum in ſuperficie ſphæræ continentes, ſi producantur, ſe mutuo ſecent, non autem ſe mutuo contingant: Ita vt omnis angulus ſphæricus fiat ex duobus arcubus ſeſe interſecantibus in ſuperficie ſphæræ, non autem ex arcubus ſe mutuo tangentibus. Id quod de angulis in plana ſuperficie exiſtentibus dici non poteſt. In hac enim non ſolum duæ lineæ rectæ, vel curuæ, vel quarum vna recta eſt, & altera curua, ſe mutuo ſecantes ſi producantur, angulum planum conſtituunt, verum etiam duæ lineæ, quarum vtraque vel curua eſt, vel vna curua, & altera recta, ſeſe tangentes tantummodo, angulum planum curuilineum, vel mixtum (qui quidem angulus contactus, vel contingentiæ à Geometris vocatur,) conſtituere poſſunt, vt ex propoſ. 16. lib. 3. Eucl. perſpicuum eſt: licet Iacobus Peletarius neget eum eſſe angulum, coneturque illud multis rationibus confirmare, quæ omnes ſophiſticæ ſunt, & friuolæ, vt ex ſolutionibus illarum, quas in ſcholio dictæ propoſ. adduximus, perſpicuum eſt.*

a 11. 1. Theo. Angulus ſphæricus neceſſario fit ex duob. arcubus ſe mutuo ſecantibus. Angulus planus fieri etiã poteſt ex duabus lineis ſe non ſecantibus, ſed tãgentib. ſe mutuo duntaxat.

II.

ANGVLVS ſphæricus rectus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe ad angulos rectos ſecantium, id eſt, quorum alter ad alterum rectus eſt, continent.

Angulus ſphæricus rectus quid.

III.

ANGVLVS ſphæricus obtuſus eſt, qui recto maior eſt.

Angulus ſphæricus obtuſus quid.

IV.

ACVTVS vero, qui minor eſt recto.

Angulus ſphæricus acutus quid.

CONSTITVITVR angulus ſphæricus rectus ad punctum datum in dato arcu circuli maximi in ſuperficie ſphæræ, ſi per illud punctum & per polum dati arcus (qui per propoſ. 21. lib. 1. Theod. inuenitur) circulus maximus deſcribatur. Huius enim circuli circumferentia cum arcu dato angulum rectum conſtituet; [a] *cum circulus hic ad circulum illius arcus ſit rectus. Si vero per datum punctum deſcribatur arcus circuli maximi non per polos dati arcus, conſtituet circumferentia huius circuli cum dato arcu angulos inæquales, obtuſum vnum, & alterum acutum.*

Cõſtructio anguli ſphæralis recti, obtuſi & acuti.

a 15 1. Theo.

V.

TRIANGVLVM ſphæricum eſt, quod tribus arcubus circulorum maximorum in ſphæræ ſuperficie continetur.

Triangulũ ſphæricum quid.

HOC autem eſt vel æquilaterum, ſi omnes arcus æquales fuerint; vel Iſoſceles, ſi duo arcus tantum fuerint æquales; vel deniq; Scalenum, ſi omnes arcus inæquales inter ſe fuerint. Itemq; vel rectangulum, ſi aliquem angulum habuerit rectum vel obtuſangulum, in quo angulus aliquis fuerit obtuſus; vel deniq; acutangulum, ſi omnes anguli fuerint acuti: quemadmodum de rectilineo triangulo dixit Euclides. Hoc tamen diſcrimen reperitur inter triangulum rectangulum, obtuſangulumque rectilineum, & ſphæricum, quod in rectilineo reliqui duo anguli neceſſario ſint acuti, [b] *propterea quod duo anguli quomodolibet ſumpti minores ſunt duobus rectis; in ſphærico autem ſi vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, poſſunt alij duo etiam eſſe recti, vel obtuſi, vel alter ſaltem, vt ex demonſtrationibus ſequentibus perſpicuum fiet.*

Triangulũ ſphæricum diuiditur, vt rectilineum ab Euclide. Diſcrimen inter triãgulum rectangulum obtuſangulumque rectilineum, ac ſphæricum.

b 17. prim.

VI.

ARCVS anguli ſphærici eſt arcus circuli maximi, cuius polus eſt in ipſo angulo, inter duos arcus angulum ſphæricum comprehendentes interceptus.

Arcus anguli ſphærici quid.

[a] *QVIA vero polus circuli maximi quadrante maximi circuli ab eo abeſt, fit, vt vterq; arcuum angulum comprehendentium inter angulum, & arcum anguli poſitorum ſit quadrans. Quare ſi angulus fuerit rectus, arcus anguli erit quadrans; ſi acutus, quadrante minor; ſi denique obtuſus, maior quadrante: & contra. Vt propoſ. 26. demonſtrabimus.*

a Coroll. 16. 1 Theod.

VII.

COMPLEMENTVM arcus eſt exceſſus, quo quadrans eum ſuperat, ſi arcus minor eſt quadrante, vel ab eo ſuperatur, ſi eſt quadrante maior.

Complementũ arcus quid.

VIII.

COMPLEMENTVM anguli ſphærici dicitur exceſſus, quo quadrans arcum ipſius anguli ſuperat, vel ab eo ſuperatur.

Complementũ anguli ſphærici quid.

IX.

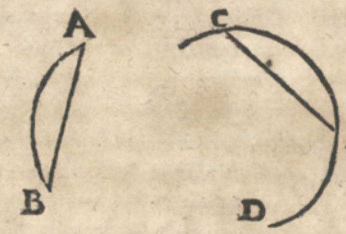
SINVS, Tangens, & Secans alicuius anguli ſphærici eſt ſinus, tangens, & ſecans illius arcus, qui arcus anguli dicitur.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATIS duobus arcubus circulorum maximorum in ſuperficie ſphæræ inæqualibus, quorum neuter ſemicirculo maior ſit, de maiore æqualem minori arcum detrahere.

SINT duo arcus circulorum maximorum inæquales AB, CD, quorum neuter ſemicirculo maior ſit, & maior ſit CD; oporteatque ex maiori CD, minori AB, æqualem detrahere. Ducta recta AB, [a] applicetur ei æqualis CE, in arcu CD. Dico arcum ablatum CE, æqualem eſſe arcui minori AB. Cũ enim circuli arcuum AB, CD, maximi ſint, & propterea æquales; [b] auferent rectæ æquales AB, CE: arcus æquales AB, CE, quod vterque arcus ſemicirculo minor ponatur. Datis igitur duobus arcubus circulorum, &c. Quod erat faciendum.

a 8. quarti.
b 28. tertij.



THEOR. 1. PROPOS. 2.

IN omni triangulo ſphærico, latus quotcunque minus eſt ſemicirculo.

SIT triangulum ſphæricum ABC. Dico quodcunque latus ſemicirculo eſſe minus. Productis enim arcubus BA, BC, donec conueniant in D, vltra A, & C, erunt arcus BAD, BCD, ſemicirculi; [a] cum circuli maximi ſe mutuo bifariã ſecent. Quare tam arcus BA, quam BC, ſemicirculo minor eſt. Eodem modo productis arcubus AB, AC, oſtendemus arcum AC, ſemicirculo eſſe minorem. Conuenient autem arcus BA, BC, producti vltra puncta A, & C, propterea quod ſphæricos angulos faciunt cum arcu AC, ſuntque omnes tres arcus proportiones circulorum maximorum, qui ſe mutuo ſecant in punctis A, B, C, non autem tangunt. Hinc enim fit, vt vterque arcus BA, BC, productus arcum AC, productum ſecet in punctis A, C, vt ex defin. conſtat; ac proinde inter ſe coeant vltra puncta A, C. In omni ergo triangulo ſphærico, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 11. 1. Theo.

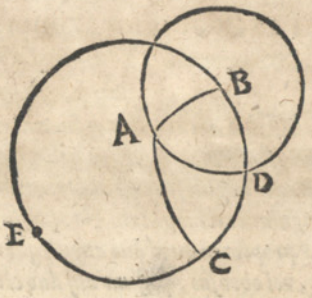


THEOR. 2. PROPOS. 3.

IN omni triangulo ſphærico, duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunq; aſſumpta.

SIT triangulum ſphæricum ABC. Dico duo quælibet latera, vt AB, AC, maiora eſſe latere BC. Si enim triangulum eſt æquilaterum, manifeſtum eſt duo ſimul dupla eſſe reliqui, atque adeo maiora. Quod ſi alterum laterum AB, AC, æquale ſit lateri BC, vel maius, vel etiam vtrumq; maius, perſpicuum quoque eſt, duo latera AB, AC, maiora eſſe reliquo BC. Si vero vtrumque latus AB, AC, aſſumptum latere tertio BC, minus ſit, demonſtrabimus, latera AB, AC, ſimul maiora eſſe latere BC, hac ratione. Perficiatur circulus arcus tertij BC. Deinde ex polo B, nempe ex altero extremo maioris lateris BC, ad interuallum vtriuſuis arcuum minorum, nimirum ad interuallum arcus BA, in ſuperficie ſphæræ circulus deſcribatur AD, ſecans arcum BC, qui maior ponitur arcu BA, in D, puncto inter B, & C. [a] Et quoniam circulus BC, tranſit quoque per reliquum polum circuli AD; ſit alter polus E, qui per ſemicirculum remotus erit à polo B; ita vt ſemicirculus ſit BCE. [b] Cum ergo arcus BC, ſemicirculo minor ſit, exiſtet polus E, vltra punctum C. Eſt autem punctum D, inter B, & C, vt dictum eſt. Punctum igitur C, inter puncta D, E, cadet. Quare cum ex puncto C, quod extra peripheriam circuli AD, eſt, & præter eiuſdem polum E, ſignatur, ducantur duo arcus maximorum circulorum CB, CA. [c] ſemicirculo minores (quod latera ſint trianguli ſphærici ABC,) ad peripheriã AD, [d] erit arcus CD, per polum B, tranſiens, minor arcu CA. Additis ergo æqualibus arcubus DB, AB; [f] (ſunt autem æquales, propterea quod rectæ eos ſubtendentes æquales ſunt, per defin. poli) erit totus arcus BC, minor duob. arcubus AB, AC; hoc eſt, duo latera AB, AC, maiora erunt latere BC. Eodemque modo quælibet alia duo latera reliquo maiora demonſtrabuntur. In omni ergo triangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

a Scho. 10. 1. Theod.
b 2 huius.
c 2. huius.
d Sch. 21. 2. Theod.
f 28. tertij.

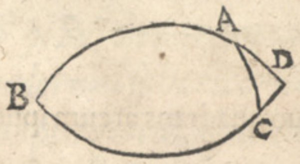


THEOR. 3. PROPOS. 4.

IN omni triangulo ſphærico, tria latera ſimul minora ſunt integro circulo maximo.

SIT triangulum ſphæricum ABC. Dico tria latera ſimul minora eſſe integro circulo maximo. Productis enim duobus arcubus quibuslibet BA, BC, donec coeãt in D, puncto. (Coibunt autem neceſſario vltra A, C, quod circulum maximum AC; ſecent in punctis A, C, vel propterea quod vterque arcus BA, BC, ſemicirculo minor eſt) erunt duo arcus BAD, BCD, ſemicirculi; [a] propterea quod circuli maximi ſeſe bifariam diuidunt. [b] Quoniam vero in triangulo DAC, latera DA, DC, maiora ſunt latere AC; ſi addantur communes arcus AB, CB, hoc eſt, aggregatum ex arcubus AB, CB, fient quoque arcus BAD, BCD, maiores tribus arcubus A C, AB, BC, hoc eſt, tria latera AC, AB, BC, minora erunt duobus ſemicirculis BAD, BCD, hoc eſt, integro circulo maximo. In omni ergo triangulo ſphærico, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 11. 1. The.
b 3. huius.



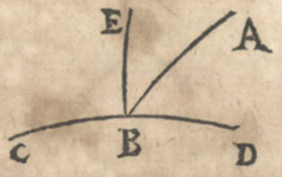
THEOR. 4. PROPOS. 5.

CVM arcus circuli maximi in ſphæra ſuper arcum circuli maximi conſiſtens angulos facit; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

ARCVS circuli maximi AB, conſiſtens ſuper arcũ circuli maximi CD, faciat duos angulos ſphæricos ABC. ABD. Si igitur circulus arcus AB, per polũ circuli arcus CD, trãſit, [a] ſecabit omnino arcũ CD, ad angulos rectos

a 15. 1. The.

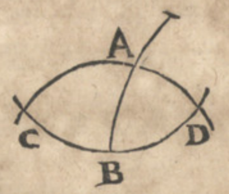
rectos;atque idcirco anguli ABC,ABD,recti erunt. Si vero arcus AB,per polos arcus CD, non tranſit, faciet vnum quidem angulum obtuſum,alterum vero acutum.Dico igitur ipſos duobus eſſe rectis æquales. [b] Ducatur enim arcus circuli maximi EB, per punctum B, & polum arcus CD; [c] eruntque duo anguli EBC,EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD,æqualis eſt duobus angulis DBA,ABE;appoſito communi angulo recto EBC,erunt duo recti EBD,EBC,tribus angulis DBA,ABE,EBC, æquales.Rurſus quia angulus ABC, duobus angulis ABE,EBC, æqualis eſt, appoſito communi angulo ABD, erunt duo anguli ABC,ABD,tribus angulis DBA,ABE,EBC,æquales.Sed eiſdem his tribus oſtenſum fuit eſſe etiam æquales duos rectos EBD,EBC;quæ autem eidem ęqualia,inter ſe ſunt æqualia.Duo igitur anguli ABC, ABD,æquales ſunt duobus rectis EBD,EBC.Cum ergo arcus circuli maximi in ſphæra, &c. Quod erat oſtendendum.



b 20.1. Th.
c 15.1. The.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, duos arcus duorum angulorum, qui duobus rectis angulis ſunt æquales, hoc eſt, qui ab arcu circuli maximi arcui alterius circuli maximi inſiſtente efficiuntur, quales ſunt duo anguli ABC, ABD,ſemicirculum conſtituere.Nam ſi ex polo B,circulus maximus deſcribatur CAD,erunt,ex defin.6.CA, AD,arcus angulorum ABC,ABD. Perſpicuum autem eſt,arcus CA,AD,ſemicirculum conficere;[d] cum circuli maximi CBD,CAD,ſe mutuo ſecent bifariam in C,D.



d 11.1. The.

THEOR. 5. PROPOS. 6.

SI duo arcus circulorum maximorum in ſphæra ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

SECENT ſe duo arcus AB,CD,circulorum maximorum in ſphæra in E,vtcunque.Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter ſe eſſe æquales,angulum videlicet AED,angulo BEC,&angulum AEC,angulo BED.[a] Quoniam enim tam anguli AED,DEB,quam anguli DEB, BEC, duobus ſunt rectis æquales, erunt illi duo his duobus æquales: Ablato ergo communi angulo DEB,remanebit angulus AED,angulo BEC,æqualis.Eademque ratione confirmabimus,angulum AEC,angulo BED,æqualem eſſe. Si duo ergo arcus circulorum maximorum,&c.Quod oſtendendum erat.

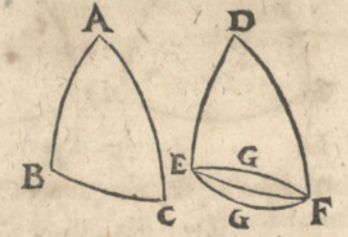


a 5. huius.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI duo triangula ſphærica duo latera duobus lateribus æqualia habeant,vtrumq; vtrique; habeant vero & angulum angulo æqualem ſub æqualibus arcubus contentum : Et baſim baſi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt,vterque vtrique,ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

SINT duo triangula ſphæri ca ABC,DEF,habentia duo latera AB,AC,duobus lateribus DE,DF,æqualia,vtrumque vtrique,& angulum A,angulo D,æqualem.Dico & baſem BC,baſi EF,æqualem eſſe, & triangulum ABC, triangulo DEF, & reliquos angulos B,C,reliquis angulis E, F, vtrumque vtrique. Quoniam enim arcus AB, arcui DE, æqualis ponitur, fit, vt ſi alter alteri intelligatur ſuperponi in ſuperficie ſphæræ, collocato puncto A, in puncto D,& puncto B,in puncto E,plana circulorum AB, DE, ſibi mutuo congruant,& proinde arcus AB, arcui DE, congruat.[a] Alias ſe mutuo ſecarent bifariam circuli illorum arcuum in A, & B, atque adeo ſemicirculi eſſent AB,DE. Quod eſt abſurdum.[b] Eſt enim ſemicirculo vterq; minor. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, congruet quoque arcus AC, arcui DF, punctumque C,in punctum F,cadet,ob æqualitatem arcuum AC,DF.Baſis igitur BC, baſi EF,congruet quoque:alias,ſi ſupra caderet,aut infra,cuiuſmodi eſt arcus EGF,eſſent arcus EF,EGF,vel BC, ſe mutuo ſecantes in E,F,ſemiçirculi, [c] cum circuli maximi ſe mutuo ſecent bifariam. Quod eſt abſurdum. [d] Singuli enim ſemicirculo minores ſunt.Quocirca baſis BC,baſi EF,æqualis erit,cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC,triangulo DEF; & anguli B, C, angulis E, F, vterque vtrique, æquales erunt, ob eandem cauſam.Quare ſi duo triangula ſphærica,&c.Quod oſtendendum erat.



a 11.1. The.
b 2. huius.
c 11.1. The.
d 2. huius.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

ISOSCELIVM triangulorum ſphæricorum,qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt ęquales:Et productis æqualibus arcubus,qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.

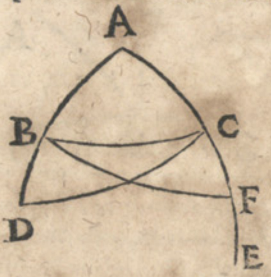
SIT triangulum ſphæricum Iſoſceles ABC,cuius duo latera AB,AC,æqualia ſint. Dico angulos B, C,ſupra baſim BC,æquales eſſe:Item ſi producantur arcus æquales AB,AC,infra baſim BC,quantumlibet, angulos quoque B,C,ſub baſi BC,æquales eſſe.[a] Quoniam enim arcus AB, ſemicirculo minor eſt, poterit in eo produ-

a 2. huius.

cto ac-

b 1. huius. ẽto accipi adhuc arcus minor ſemicirculo. Sit igitur arcus AD, ſemicirculo minor, [b] & ex arcu AE, quantumcunque producto abſcindatur arcus AF, æqualis arcui AD; & per duo puncta B, F, nec non per C, D, [c] ducantur duo arcus maximorum circulorum BF, CD. Quia ergo duo latera AB, AF, trianguli ABF, æqualia ſunt duobus lateribus AC, AD, trianguli ACD, vtrumque vtrique continentque angulum communem A, [d] erit baſis BF, baſi CD, æqualis, & anguli ABF, & F, angulis ACD, & D. Rurſus, quoniã arcus AD, AF, æquales ſunt; ſi demantur æquales AB, AC, erunt & BD, CF, æquales. Quare duo latera DB, DC, trianguli DBC, æqualia ſunt duob. lateribus FC, FB, trianguli FCB: quæ cum contineant angulos æquales D, F, vt oſtendimus, [e] erunt & anguli DBC, DCB, angulis FCB, FBC, æquales. Quod ſi ex angulis ABF, ACD, quos oſtendimus æquales eſſe, auferantur anguli FBC, DCB, quos etiam æquales eſſe demonſtrauimus, remanebunt anguli ABC, ACB, ſupra baſim BC, æquales: Oſtenſum eſt autem & angulos DBC, FCB, infra eandem baſim BC, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe; & anguli infra eandem inter ſe æquales ſunt. Quam ob rem Iſoſcelium triangulorum ſphæricorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

c 20. 1. Th.
d 7. huius.
e 7. huius.



COROLLARIVM.

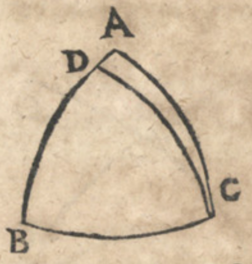
HINC manifeſtum eſt, omne triangulum ſphæricum æquilaterum, eſſe quoque æquiangulum.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

SI trianguli ſphærici duo anguli æquales inter ſe fuerint: Et ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.

IN triangulo ABC, ſint duo anguli B, C, ſupra latus BC, æquales. Dico latera quoque AB, AC, illis ſubtenſa eſſe æqualia. Si enim non ſunt æqualia, ſit, ſi fieri poteſt AB, maius. [a] Et quoniam arcus AC, minor eſt ſemicirculo, [b] abſcindatur ex arcu maiore AB, arcus BD, arcui minori AC, æqualis, [c] & per puncta C, D, arcus circuli maximi ducatur CD. Quoniã ergo duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia ſunt duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, continentq; angulos æquales ACB, DBC; [d] erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum & pars. Quod fieri non poteſt. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, AC, ſed æqualia. Si trianguli igitur ſphærici duo anguli, &c. Quod erat oſtendendum.

a 2. huius.
b 1. huius.
c 20. 1. The.
d 7. huius.



COROLLARIVM.

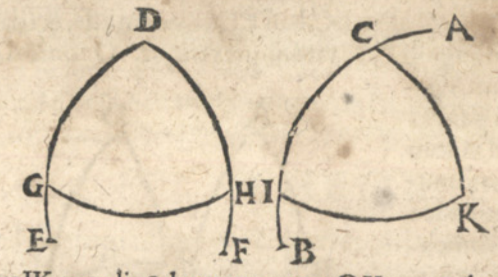
SEQVITVR hinc, omne triangulum ſphæricum æquiangulum, eſſe quoque æquilaterum.

PROBL. 2. PROOS. 10.

AD datum arcum circuli maximi in ſphæra, datumq; in eo punctum, dato angulo ſphærico æqualem angulum ſphæricum conſtituere.

SIT datus arcus maximi circuli in ſphæra AB, datumque in eo punctum C, oporteatq; dato angulo ſphærico D, ad punctum C, æqualem angulum ſphæricum conſtituere. Productis arcubus DE, DF, angulum D, continentibus quantumlibet, ſumatur quadrans DG, [a] atque per G, & polum circuli DE, arcus circuli maximi ducatur GH, ſecans arcum DF, in H. [b] Erit igitur angulus G, rectus. Deinde ſumpto quoque quadrante CI, [c] ducatur per I, & polum circuli AB, arcus maximi circuli IK. [d] Erit igitur & angulus I, rectus. Poſtremo, [e] quia arcus GH, ſemicirculo minor eſt, [f] abſcindatur ei arcus IK, æqualis, [g] ducaturque per C, K, arcus circuli maximi CK. Dico angulum C, æqulem eſſe angulo D. Cum enim latera DG, GH, æqualia ſint lateribus CI, IK, contineantque angulos æquales, vt pote rectos, [h] æquales erunt anguli D, & C. Ad datum ergo arcum circuli maximi, &c. Quod faciendum erat.

a 20. 1. Th.
b 15. 1. The.
c 20. 1. Th.
d 15. 1. The.
e 2. huius.
f 1. huius.
g 20. 1. Th.
h 7. huius.

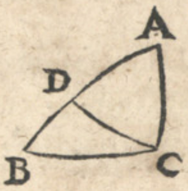


THEOR. 9. PROPOS. 11.

OMNIS trianguli ſphærici maior angulus maiori lateri ſubtenditur. Et maius latus maiorem angulum ſubtendit.

IN triangulo ſphærico ABC, ſit angulus ACB, angulo A, maior. Dico latus AB, maius eſſe latere BC. Quoniam angulus ACB, maior ponitur angulo A, [a] fiat angulus ACD, angulo A, æqualis, ſecetque arcus CD, arcum AB, in D. Quoniam igitur in triangulo ADC, anguli A, & ACD, æquales ſunt; [b] erunt & latera AD, CD, æqualia. Addito ergo communi arcu DB, erunt arcus BD, DC, æquales arcui AB. [c] Sed arcus BD, DC, ſimul maiores ſunt arcu BC. Igitur & arcus AB, eodem arcu BC, maior erit. Quod eſt propoſitum.

a 10. huius.
b 9. huius.
c 3. huius.





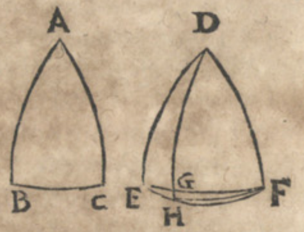
SED iam in triangulo ſphærico ABC, latus AB, maius ſit latere BC. Dico angulum C, maiorem eſſe angulo A. Si enim angulus C, maior non eſt angulo A, erit vel ei æqualis, vel minor. Si eſt æqualis, [a] erunt latera AB, CB, æqualia. Quod eſt abſurdum, cum AB, ponatur maius, quam CB: Si vero minor eſt angulus C, angulo A, erit latus BC, latere AB, maius, vt iam oſtenſum eſt. Quod etiam abſurdum eſt. ponitur enim AB, maius, quam BC. Cum ergo angulus C, æqualis non ſit, neque minor angulo A, erit vtique maior. Quod eſt propoſitum. Omnis ergo trianguli ſphærici maior angulus, &c. Quod erat oſtendendum.

a 9. huius.

THEOR. 10. PROP. 12.

SI duo triangula ſphærica duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem ſub æqualibus arcubus contentum: Et baſim baſi maiorem habebunt. Quod ſi baſim baſi maiorem habuerint: & angulum ſub æqualibus arcubus contentum angulo maiorem habebunt.

SINT duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, ſed angulus EDF, maior ſit angulo A. Dico baſim EF, maiorem quoque eſſe baſi BC. Sint enim primum triangula hæc ſphærica Iſoſcelia, & ex D, polo per puncta E, F, arcus circuli deſcribatur in ſuperficie ſphæræ EGF, qui circulus, ſi maximus fuerit, idem erit omnino, qui EF: alias, [a] cum maximi circuli ſe bifariam ſecent, eſſet EF, ſemicirculus. Quod eſt abſurdum, [b] cum ſit ſemicirculo minor. Tunc autem circulus arcus EGF, maximus erit, cum arcus DE, DF, quadrantes fuerint; [c] quod maximus circulus quadrante abſit à ſuo polo. Sit ergo iam arcus EGF, maximi circuli, & idem, qui EF, [d] fiatque angulus FDG, angulo A, æqualis. [e] Erit arcus DG, arcui DE, atque adeo & arcui AB, æqualis: propterea quod rectæ ſubtendentes DE, DG, ex defin. poli, æquales ſunt. Quia igitur latera AB, AC, æqualia ſunt lateribns DG, DF, anguloſque continent æquales; [f] æquales erunt baſes BC, GF. Cum ergo arcus EF, maior ſit arcu GF, maior quoque erit arcus EF, arcu BC. Quod eſt propoſitum.

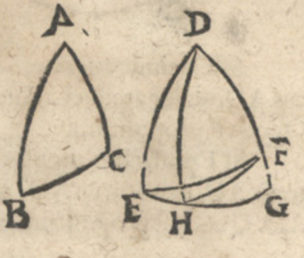


a 11.1. The.
b 2. huius.
c Corol. 16. 1. Theod.
d 10. huius.
e 28. tertij.
f 7. huius.

QVOD ſi circulus ex polo D, per puncta E, F, deſcriptus non fuerit maximus, atq; adeo idem non ſit, qui EF; ſed vel cadat infra arcum EF, ſiue ſupra, (nihil enim intereſt, quocunque cadat.) [g] fiat nihilominus angulus FDH, angulo A, æqualis: [h] eritq; rurſus arcus DH, arcui DE, hoc eſt, arcui AB, æqualis; eo ꝙ rectæ ſubtẽtes DE, DH, æquales ſint, ex def. poli. [i] Ducto igit̃ per puncta FH; arcu circuli maximi FH. Cũ latera AB, AC, lateribus DH, DF, æqualia ſint, anguloſq; contineant æquales; [k] erunt & baſes BC, HF, æquales. Quoniam vero circulus maximus DF, per D, polum circuli EHF, tranſiens [l] eum bifariam ſecat; erit arcus EHF, ſemicirculo minor; (quia arcus à puncto F, per E, vſq; ad illud punctum, in quo, ſi protractus eſſet vltra E, ſecaretur ab arcu FD, ad partes D, producto, eſt ſemicirculus: quandoquidem circulus arcus EHF, bifariam ſecatur à circulo arcus FD, vt dictum eſt.) [m] atq; adeo recta FE, maior, quam recta FH, in eodem circulo: quia illa propinquior eſt centro circuli EHF, hoc eſt, diametro, quam hæc. Cum ergo circuli arcuũ EF, HF, maximi ſint, ideoq; æquales, [n] ſit autem vterq; arcus EF, HF, ſemicircnlo minor; [o] erit arcus EF, maior arcu HF: Oſtenſus autem eſt arcus HF, æqualis arcui BC. Maior igitur erit quoq; arcus EF, arcu BC. Quod eſt propoſitum.

g 10. huius.
h 28. tertij.
i 20.1. The.
k 7. huius.
l 15. 1. The.
m 15. tertij.
n 2. huius.
o Schol. 28. tertij,

SINT deinde triangula propoſita non Iſoſcelia, ſed latus AB, maius ſit latere AC, ac proinde & latus DE, maius latere DF. Producto ergo arcu DF, ad partes F, [p] abſciſſoq; arcu DG, æquali ipſi DE, [q] qui minor eſt ſemicirculo, deſcribatur ex polo D, per puncta E, G, arcus circuli EHG, ſiue maximus is ſit, ſiue non maximus. [r] Fiat rurſus angulus FDH, angulo A, æqualis; [s] eritq; arcus DH, arcui DE, hoc eſt, arcui AB, æqualis; eo quod rectæ ſubtenſæ DH, DE, æquales ſint, ex def. poli. Ducto igitur per puncta H, F, arcu circuli maximi HF, [t] erit, vt prius, arcus BC, arcui HF, æqualis. Quoniam vero circulus maximus DG, per D, polum circuli EG, ducitur, eſtque punctum F, intra peripheriam circuli EG, nempe inter circulum, & polum D.) & præter eius polum; [u] erit arcus FE, maior arcu FH, cum ille propinquior ſit arcui FD, per polum D, tranſeunti, & vterq; arcus FE, FH, ſemicirculo ſit minor: propterea quod non ſe interſecant, niſi in puncto F: Oſtenſus eſt autem arcus HF arcui BC, æqualis. Maior ergo erit quoque arcus EF, arcu BC. Quod eſt propoſitum.



p 1. huius.
q 2. huius.
r 10 huius.
s 28. tertij.
t 7. huius.
u Schol. 21. 2. Theod.

SED iam baſis EF, maior ſit baſi BC. Dico & angulum D, maiorem eſſe angulo A. Si enim angulus D, maior non eſt angulo A, erit vel æqualis, vel minor. Si æqualis dicatur eſſe, [x] erit arcus EF, æqualis arcui BC. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim arcus EF, maior arcu BC. Si vero minor dicatur eſſe angulus D, angulo A, erit, vt iam oſtenſum eſt, arcus BC, maior arcu EF. quod etiam abſurdum eſt, cum EF, maior ponatur, quam BC. Cum ergo angulus D, neq; æqualis ſit angulo A, neq; minor, erit vtiq; maior. Quod eſt propoſitum. Itaque ſi duo triangula ſphærica, &c. Quod demonſtrandum erat.

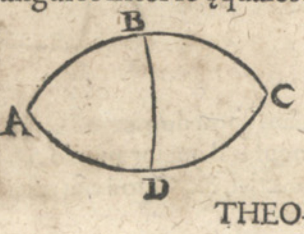


x 7. huius.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

DVO ſemicirculi maximorũ circulorũ ſe mutuo ſecãtes cõtinẽt duos angulos inter ſe ęquales.

DVO ſemicirculi maximorum circulorum ABC, ADC, ſe mutuo ſecent in A, C. Dico angulos A, & C, æquales eſſe. Diuiſo enim ſemicirculo ABC, in B, bifariam vt AB, BC, quadrantes ſint, [a] ducatur per B, & polũ circuli ABC, arcus circuli maximi BD, ſecans arcum ADC, in D; [b] eritq; angulus B, ex vtraq; parte rectus. Quia igitur duo latera AB, BD, duobus lateribus CB, BD, æqualia ſunt, continentq; angulos, æquales, vtpote rectos; [c] erunt & anguli A, & C, æquales. Quare duo ſemicirculi maximorum circulorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

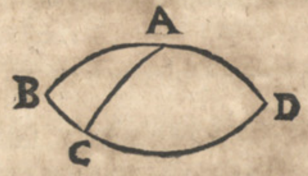


a 20.1. Th.
b 15.1. The.
c 7. huius.

THEO-

THREOR. 12. PROPOS. 14.

CVIVSCVNQVE trianguli ſphærici vno latere producto,ſi reliqua latera ſimul æqualia ſint ſemicirculo,erit angulus externus æqualis angulo interno oppoſito ſupra arcum productum: Si vero minora ſint ſemicirculo,erit angulus externus eodem interno oppoſito maior: ſi denique maiora ſint ſemicirculo, idem angulus externus dicto angulo interno oppoſito minor erit.



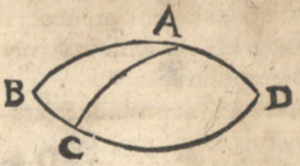
IN triangulo ſphærico ABC,producatur latus BC, ad D, & ſint primum reliqua duo latera AB,AC, ſimul ſemicirculo æqualia. Dico angulum externum ACD,æqualem eſſe interno oppoſito B,ſupra arcum productum BC,&c. Coeat enim arcus BA,productus cum arcu
a 11.1.Theo. BC,producto in D; [a] eritque BAD, ſemicirculus. Quia vero arcus BA,AC,æquales ponuntur ſemicirculo BAD; dempto communi ar-
b 8. huius. cu BA,erunt reliqui arcus AC,AD, æquales. [b] Quare & angulus A-
c 13. huius. CD,angulo D,æqualis erit. [c] Cum igitur anguli B,& D, ſint quoq; æquales, æqualis quoque erit angulus ACD, angulo B. Quod eſt propoſitum.

SINT deinde duo latera AB, AC, minora ſemicirculo BAD. Dempto ergo communi arcu AB, erit
d 11. huius. reliquus AC,reliquo AD,minor, [d] ac propterea angulus ACD,maior angulo D, hoc eſt, angulo B, [e] qui
e 13. huius. angulo D,æqualis eſt. Quod eſt propoſitum.

SINT poſtremo latera AB,AC,maiora ſemicirculo BAD. Dempto igitur communi arcu AB, erit reli-
f 11. huius. quus AC,reliquo AD,maior; [f] ac propterea angulus D,maior erit angulo ACD. [g] Cum ergo angulo D, æ-
g 13. huius. qualis ſit angulus B,erit quoq; angulus B,maior angulo ACD,hoc eſt,angulus ACD,angulo B,minor erit. Cuiuſcunq; ergo trianguli,&c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cuiuſcunque trianguli ſphærici vno latere producto, externus angulus æqualis fuerit interno oppoſito ſupra arcum productum,erunt duo reliqua latera ſimul æqualia ſemicircul . Si vero angulus externus maior fuerit interno eodem,& oppoſito, erunt duo reliqua latera ſemicirculo minora: Si denique externus angulus interno oppoſito dicto minor fuerit, erunt duo latera reliqua ſemicirculo maiora.



POSITO eodem triangulo ſphærico,& conſtructione figuræ eadem; Sit primum angulus ACD, externus æqualis interno oppoſito B. Dico
a 13. huius. latera AB, AC, ſemicirculo eſſe æqualia, &c. [a] Cum enim angulus B,
b 9. huius. angulo D,æqualis ſit,erit quoque angulus ACD, angulo D, æqualis; [b] ideoque & arcus AC, AD, æquales erunt. Addito ergo communi arcu AB,erunt duo arcus AB,AC, ſemicirculo,BAD,æquales. Quod eſt propoſitum.

c 13 huius. SIT deinde angulus ACD,maior angulo B,hoc eſt, angulo D, [c] qui angulo B, æqualis eſt; [d] eritq; ar-
d 11. huius. cus AD,maior arcu AC. Addito ergo communi arcu AB,erunt duo arcus AB, AC,minores ſemicirculo BAD. Quod eſt propoſitum.

e 13. huius. SIT poſtremo angulus ACD,minor angulo B,hoc eſt,angulo D. [e] qui angulo B,æqualis eſt; [f] eritque
f 11. huius. arcus AC, maior arcu AD. Addito ergo communi arcu AB,erunt duo arcus AB, AC, maiores ſemicirculo BAD. Quod eſt propoſitum. Si igitur cuiuſcunq; trianguli ſphærici,&c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI cuiuſcunque trianguli ſphærici duo latera ſimul æqualia ſint ſemicirculo, erunt duo anguli ſupra baſim duobus rectis æquales: Si vero minora ſint ſemicirculo, erunt duobus rectis minores: Si deniq; ſemicirculo ſint maiora,erunt duobus rectis maiores.

IN triangulo ſphærico ABC,ſint primum duo latera AB,AC, ſemicirculo æqualia. Dico duos angulos
a 14. huius. B,C,eſſe æquales duobus rectis,&c. Producto enim arcu BC,ad D, [a] erit angulus ACD, angulo B, æqualis [b]
b 5. huius.



Cum ergo duo anguli ad C, duobus ſint rectis æquales; erunt quoque duo anguli B,& ACB,æquales duobus rectis.

c 5. huius. SINT deinde latera AB, AC, ſemicirculo minora. [c]
d 14. huius. Cum ergo duo anguli ad C,ſint duobus rectis æquales [d] & angulus B,minor ſit angulo ACD;erunt anguli B,& ACB,duobus rectis minores.

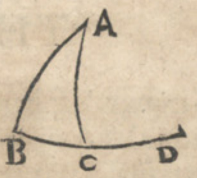
e 5. huius. SINT tandem latera AB,AC,ſemicirculo maiora. [e] Quo-
f 14. huius. niam igitur duo anguli C, ſunt duobus rectis æquales, [f] eſtque angulus B, maior angulo ACB; erunt anguli B,& ACB,maiores duobus rectis. Si igitur cuiuſcunque trianguli ſphærici, &c. Quod erat oſtendendum.

THEO-

THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cuiuſcunq; trianguli ſphærici duo anguli ſupra vnum latus duobus rectis æquales fuerint, erunt reliqua duo latera ſemicirculo æqualia: Si vero duobus rectis fuerint minores, erunt minora ſemicirculo: Si denique maiores extiterint duobus rectis, erunt ſemicirculo maiora.

POSITO eodem triangulo ſphærico. & conſtructione figuræ eadem; Sint primum duo anguli B, C, duobus rectis æquales ſupra latus BC. Dico reliqua duo latera AB, AC, ſemicirculo æqualia eſſe, &c. [a] Cum enim & anguli duo ad C, æquales ſint duobus rectis; Dempto communi angulo ACB, remanebit angulus ACD, angulo B, æqualis, [b] Quare ſemicirculo æquales ſunt arcus AB, AC. a 5. huius. b 15. huius.



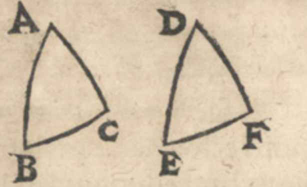
SINT deinde anguli B, ACB, duobus rectis minores. [c] Cum ergo duo anguli ad C, ſint duobus rectis æquales; dempto communi angulo ACB, remanebit angulus ACD, maior angulo B. [d] Arcus ergo AB, AC, ſemicirculo ſunt minores. c 5. huius. d 15. huius.

SINT denique anguli B, ACB, duobus rectis maiores. [e] Cum ergo duo anguli ad C, ſint æquales duobus rectis; ſi dematur communis angulus ACB, erit reliquus ACD, reliquo B, minor; [f] atque adeo arcus AB, AC, ſemicirculo maiores. Quocirca ſi cuiuſcunq; trianguli ſphærici, &c. Quod oſtendendum erat. e 5. huius. f 15. huius.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI duo triangula ſphærica habeant tria latera tribus lateribus æqualia, ſingula ſingulis: habebunt & tres angulos tribus angulis æquales, ſingulos ſingulis, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

SINT duo triangula ſphærica ABC, DEF, habentia tria latera AB, AC, BC, tribus lateribus DE, DF, EF, ſingula ſingulis, æqualia. Dico & angulos tres A, B, C, tribus angulis D, E, F, ſingulos ſingulis, eſſe æquales, ſub quibus æqualia ſubtenduntur latera. Si enim angulus A, (vt ab hoc angulo incipiamus.) non eſt æqualis angulo D, erit vel maior eo, vel minor. Si maior, [a] erit baſis BC, maior quoque baſi EF. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim latera BC, EF, æqualia. Si vero minor eſt angulus A, angulo D, [b] erit baſis EF, maior baſi BC. Quod rurſum eſt abſurdum, cum æquales ponantur. Cum ergo angulus A, neque maior ſit, neque minor angulo D, erit vtique illi æqualis. [c] Igitur & reliqui anguli B, C, angulis reliquis E, F, æquales erunt, nempe B, ipſi E, & C, ipſi F. Si duo ergo triangula ſphærica, &c. Quod erat oſtendendum. a 12. huius. b 12. huius. c 7. huius.



THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo triangula ſphærica habeant tres angulos tribus angulis, ſingulos ſingulis, æquales: habebunt & tria latera tribus lateribus æqualia, ſingula ſingulis, quæ æquales angulos ſubtendunt.

HABEANT duo triangula ſphærica ABC, DEF, tres angulos A, B, C, tribus angulis D, E, F, ſingulos ſingulis, æquales. Dico & tria latera AB, AC, BC, tribus lateribus DE, DF, EF, eſſe æqualia, ſingula ſingulis, quæ angulos æquales ſubtendunt. Si enim latera BC, EF, (vt ab his lateribus exordiamur.) non ſunt æqualia, ſit BC, ſi fieri poteſt, maius; [a] & abſcindatur arcus BG, arcui EF, æqualis. Aut ergo arcus BA, æqualis eſt arcui ED, aut maior, aut minor. Quodcunq; horum dicatur, ſequetur abſurdum ex eo, quod inæqualia dicuntur eſſe latera BC, EF, nempe BC, maius, quam EF. Sit enim primum arcus BA, arcui ED, æqualis, [b] ducaturque per puncta A, G, arcus maximi circuli AG. Igitur cum latera BA, BG, æqualia ſint lateribus ED, EF, angulosq; contineant æquales B, E, ex hypotheſi; [c] erunt anguli BAG, & D, æquales: Eſt autem angulus D, poſitus æqualis angulo BAC. Angulus igitur BAG, æqualis erit quoque angulo BAC, pars toti. Quod eſt abſurdum. a 1. huius. b 20. 1. The. c 7. huius.



SIT deinde arcus BA, maior arcu ED, [d] & abſcindatur arcus BI, æqualis ipſi ED; [e] ac per puncta G, I, arcus circuli maximi ducatur GI, conueniens cum arcu CA, protracto in H. Quoniam igitur latera BI, BG, æqualia ſunt lateribus ED, EF, anguloſque continent æquales B, E; [f] erunt anguli BIG, BGI, angulis D, F, hoc eſt, angulis BAC, BCA, æquales; quod his duobus æquales ſint poſiti D, & F, [g] ſunt autem anguli BIG, BAC, anguli HIA, HAK, ad verticem æquales. Æquales ergo ſunt & anguli HAK, HIA. Igitur cum & angulus BGH, externus æqualis ſit interno BCH, & externus HAK, interno HIK, vt oſtendimus: [h] erunt tam arcus AHI, quam arcus CH, HG, ſemicirculo æquales; atque adeo arcus AH, HI, arcubus CH, HG, æquales erunt, pars toti. Quod eſt abſurdum. d 1. huius. e 20. 1. The. f 7. huius. g 6. huius. h 15. huius.

SIT tandem arcus BA, minor arcu ED, producaturque vltra A, [i] & ex eo abſcindatur arcus BK, æqualis arcui ED; [k] atque per puncta G, K, arcus circuli maximi ducatur GK, ſecans arcum AC, in L. Quoniam ergo i 1. huius. k 20. 1. The.

l 7. huius. latera BK, BG, lateribus ED, EF, æqualia ſunt, anguloſque continent æquales B,E; [l] erunt & anguli BKG, BGK, angulis D,F, hoc eſt, angulis BAC,BCA, (quod his duobus æquales ſint poſiti anguli D,F.) æquales. Itaq;

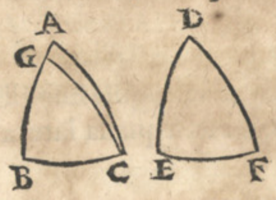


cum & angulus BAL, externus æqualis ſit interno BKL, & externus BGL, interno BCL, vt oſtendimus,
m 15. huius [m] erunt tam arcus AL, LK, quam arcus CL, LG, ſemicirculo æquales; ac proinde duo arcus AC,
n 2. huius. GK, integro circulo æquales erunt. Quod eſt abſurdum. [n] cum vterque arcus AC,GK, ſemicirculo ſit minor. Non ergo inæqualia ſunt latera BC,EF, ſed æqualia. Eodemq; modo oſtendemus, latera AC,DF, nec non AB,DE, æqualia eſſe. Tria ergo latera trianguli ABC, tribus lateribus trianguli DEF, æqualia ſunt. Quare ſi duo triangula ſphærica, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI duo triangula ſphærica duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, quod æqualibus adiacet angulis: Et reliqua latera reliquis lareribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

DVO triangula ſphærica ABC, DEF, habeant duos angulos B, C, duobus angulis E,F, æquales vtrumque vtrique, & latus BC, lateri EF, æquale, quod æqualibus angulis adiacet. Dico & reliqua latera AB, AC, reliquis lateribus DE,DF, æqualia eſſe, vtrumque vtrique, & reliquum angulum A, reliquo angulo D. Si enim la-

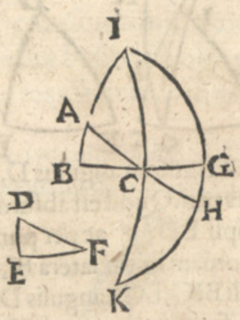


a 1. huius. tera AB, DE, (vt ab his exordiamur.) non ſunt æqualia, ſit AB, maius, [a]
b 20. 1. The. & abſcindatur arcus BG, arcui DE, æqualis, [b] & per puncta C,G, arcus circuli maximi ducatur CG. Quoniam igitur latera GB,BC, æqualia ſunt lateribus DE,EF, anguloſque comprehendunt æquales B,E, ex hypothe-
c 7. huius. ſi; [c] erunt & anguli BCG, & F, æquales: Sed F, æqualis ponitur ipſi BCA. Igitur & angulus BCG, eidem BCA, æqualis erit, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæqualia ſunt latera AB,DE, ſed æqualia. Quare
d 7. huius. cum latera AB,BC, lateribus DE,EF, æqualia ſint, anguloſque comprehendant æquales B,E; [d] erunt & latera AC,DF, æqualia, & anguli A,D, æquales. Quapropter ſi duo triangula ſphærica duos angulos, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI fuerint duo triangula ſphærica rectangula, habuerintque duos alios angulos æquales, & non rectos, nec non duo latera æqualia, quæ ſub rectis angulis ſubtenduntur: Erunt & duo reliqua latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquus angulus reliquo angulo æqualis erit.

SINT in duobus triangulis ſphæricis ABC,DEF, anguli B,E, recti, & duo anguli C,F, æquales, & non rectí, nec non latera AC,DF, rectos angulos ſubtendentia, æqualia. Dico & reliqua latera AB,BC, reliquis lateribꝰ DE, EF, æqualia eſſe, vtrumque vtrique; Item & reliquos angulos A,D, eſſe æquales. Productis enim arcubus
a 1. huius. AC,BC, [a] abſcindatur arcus CH, arcui FD, hoc eſt, arcui CA, & arcus CG, arcui FE, æqualis; [b] & per puncta G,
b 20. 1. The. H, deſcribatur arcus GH, maximi circuli. Et quoniã latera CH,CG, æqualia ſunt lateribus FD,FE, anguloſque
c 6. huius. continent æquales GCH, & F; (Eſt enim hypotheſi angulus F, angulo ACB, æqualis, [c] & ACB, ipſi GCH,
d 7. huius. ad verticem æqualis,) [d] erunt & baſes GH,ED, æquales, & anguli GH, angulis E, D, æquales; ac propterea,
e 20. 1. The. exiſtente angulo E, recto, erit & angulus G, rectus. [e] Ducatur iam per C, & polum arcus BG, in vtramque par-
f 13. 1. The. tem arcus circuli maximi ICK, ſitque I, polus arcus BG. [f] Et quia circuli arcuum BA, HG, tranſeunt quoque per polos eiuſdem arcus BG, ob angulos rectos B,G; conuenient arcus BA,GH, protracti cum arcu CI, in polo I. Conueniat quoque arcus GH, ex altera parte cum eodem arcu ICK, in K, puncto, quod alter polus erit



g Corol. 10. 1. Theo. arcus BG, [g] cum vterque arcus ICK, IGK, per alterum po-
h 28. tertij. lum arcus BG, tranſeat. [h] Erunt igitur tres arcus IB, IC, IG, æquales; propterea quod rectæ ſubtenſæ illis inter ſe æquales ſunt, ex definitione poli: Similiterque æquales erunt arcus KC, KG. Quoniam vero anguli ICG, IGC, æquales ſunt angulis KCG, KGC, [i] cum omnes ſint
i 15. 1. The. recti; quod I, polus ſit arcus BG; illiſque adiacet latus commune CG; [k]
k 20. hui. erunt latera IC,IG, lateribus KC,KG, æqualia, vtrumque vtrique; ac propterea cum IG, arcus arcui IB, æqualis ſit oſtenſus, erit & arcus KG, eidem arcui IB, æqualis. Et quoniam latera IC,CA, æqualia ſunt lateribus KC,C-
l 6. huius. H, (factus enim eſt arcus CH, arcui AC, æqualis.) [l] anguloſque ad ver-
m 7. huius. ticem continent æquales; [m] erunt baſes IA, KH, & anguli IAC, KHC, æquales. Ablatis ergo arcubus æqualibus IA,KH, ex arcubus æqualibus IB,KG, & angulis æqualibus IAC,KH-
n 5. huius. C, ex binis ad A, & H, [n] quorum bini duobus rectis æquales ſunt; remanebunt & arcus AB,HG, & anguli BAC,GHC, æquales: oſtenſus eſt autem arcus HG, arcui DE, & angulus GHC, angulo D, æqualis. Igitur & arcus AB, arcui DE, & angulus BAC, angulo D, æqualis erit. Quare cum latera AB,AC, æqualia ſint lateribus
o 7. huius. DE,DF, anguloſque complectantur æquales; [o] erunt & arcus BC,EF, æquales. Sunt ergo latera AB, BC, lateribus DE,EF, æqualia, & angulus BAC, angulo D. Quamobrem, ſi fuerint duo triangula ſphærica rectangula, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

DEBENT autem latera æqualia ſub rectis angulis ſubtendi. Alioquin, ſi alios angulos ſubtenderent, nihil certi colligi poſſet. Sit enim triangulum ſphæricum quodcunq; ABC, habens duo latera AB, AC, inæqualia inter ſe, ſed ſimul ſemicirculo æqualia: producto vero latere CB, ad partes B, [p] ducatur per A, & polum arcus CD, arcus AD, circuli maximi ſecans CD, p 20. 1. Th.
in D; [q] eritq; angulus D, rectus. Quoniam igitur arcus AB, AC, ſemicirculo ſunt æquales, [r] erit angulus ABD, angulo C, q 15. 1. The.
æqualis. Itaque duo triangula ADB, ADC; angulum rectum D, habent com- r 14. huius.
munem, & duos angulos ABD, & C, æquales, & non rectos: [s] (alias la- s 9. huius.
tera AB, AC, æqualia eſſent, propter angulos B, C, rectos, & æquales:) nec non latus AD, æquales angulos nõ rectos ſubtendens, commune: Et tamẽ nec reliqua latera AB, BD, reliquis laterib. AC, CD, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, nec reliquus angulus BAD, reliquo angulo CAD, vt perſpicuum eſt. Hoc autem inde prouenit, quod latera æqualia non ſubtendunt rectos angulos, ſed latus commune AD, angulos æquales non rectos ſubtendit.



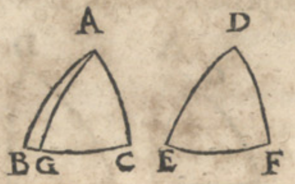
QVAMOBREM decipitur Nicolaus Copernicus lib. 1. Reuolutionum propoſ. 6. triangulorum ſphæricorum, vbi dicit. Error Ni-
[Si bina triangula rectum angulum, ac inſuper alium æqualem habuerint, alterum alteri, vnumq; latus vni la- colai Co-
teri æquale, quod alterutri æqualium angulorum (etiam non recto, vt in demonſtratione dicit) opponitur; re- pernici.
liqua quoque latera reliquis lateribus, alterum alteri, ac angulum angulo, reliquum reliquo æqualem habebunt] Oppoſitum enim apparuit in triangulis rectangulis ADB, ADC, in quibus latus commune AD, opponitur angulis æqualibus ABD, ACD, non rectis.

Vnde verum non ſemper eſt, quod idem Compernicus docet ibidem propoſ. 4. vbi ait. [In quocunque triangulo re- Alius er-
ctum angulum habente, alius inſuper angulus fuerit datus, cum quolibet latere, reliquus etiam angulus cum re- ror Nicolai
liquis lateribus dabitur.] Quamuis enim angulus rectus D, & angulus ABD, noti ſint, cum latera AD, quod angulo noto A- Copernici.
BD, non recto opponitur, non tamen propterea in cognitionem reliqui anguli, & reliquorum laterum veniemus, cum reliqua latera poſſint eſſe vel AB, BD, vel AC, CD, & reliquus angulus vel BAD, vel CAD, vt perſpicuum eſt. Opportebit ergo aliquid aliud præterea conſtare, antequam reliquus angulus cum reliquis lateribus colligatur, vt in ſcholio propoſit. 41. & 42. docebimus.

THEOR. 20. PROP. 22.

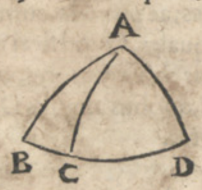
SI fuerint duo triangula ſphærica, quæ duos angulos habeant duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, quod vni æqualium angulorum ſubtenditur, duo vero latera ſubtendentia reliquos angulos, æquales æqualia non ſint ſemicirculo, ſed vel maiora, vel minora: Erunt & duo reliqua latera duobus reliquis lateribus ęqualia, vtrumq; vtriq; & reliquus angulus reliquo angulo æqualis erit.

HABEANT duo triangula ſphærica ABC, DEF, duos angulos B, C, duobus angulis E, F, æquales vtrũque vtrique, & latera AC, DF, ſubtendentia angulos æquales B, E, inter ſe æqualia, reliqua vero latera AB, DE, ſubtendentia alios æquales angulos C, F, non æqualia ſint ſemicirculo, ſed vel maiora, vel minora. Dico reliqua latera CB, BA, reliquis lateribus FE, ED, eſſe æqualia, vtrumque vtrique, & reliquos quoque angulos A, D, eſſe
æquales. Si enim CB, & FE, non ſunt æqualia, ſit CB, maius, [a] & abſcindatur CG, arcus arcui FE, æqualis, [b] & a 1. huius.
per A, G, arcus circuli maximi ducatur AG. Quoniam igitur latera AC, CG, lateribus DF, FE, æqualia ſunt, an- b 20. 1. The.
guloſque continent æquales C, F; [c] erunt & arcus AG, DE, & anguli AGC, & E, æquales: Poſitus eſt autem c 7. huius.
angulus E, angulo B, æqualis. Æqualis igitur eſt etiam angulus AGC, an-
gulo B [d] ac propterea arcus AB, AG, ſemicirculo æquales erunt. Cum d 15. huius.
ergo arcus AG, arcui DE, oſtenſus ſit æqualis, erunt quoque arcus AB, DE, ſemicirculo æquales: Ponuntur autem & non æquales ſemicirculo. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt arcus CB, FE, ſed æquales. Quare cum latera AC, CB, ſint æqualia lateribus DF, FE, anguloſque
æquales contineant C, F, [e] erunt & arcus AB, DE, & anguli BAC, & D, e 7. huius.
æquales. Si igitur fuerint duo triangula ſphærica, &c. Quod demonſtrandum erat.



SCHOLIVM.

DIXIMVS, duo latera ſubtendentia reliquos angulos æquales, non debere eſſe æqualia ſemicirculo. Nam alias propoſitio vera non eſſet. Sit enim triangulum ſphæricum ABC, quodcunque habens duo latera AB, AC, inæqualia inter ſe, ſed ſimul
ſemicirculo æqualia: Producto autem latere BC, vſq; ad D, ita tamen vt BD, ſemicirculo ſit minor, [f] ducatur per A, D, ar- f 20. 1. Th.
cus circuli maximi AD. Quoniam igitur arcus AB, AC, ſemicirculo æquales ſunt, [g] erit g 14. huius.
angulus ACD, angulo B, æqualis. Itaq; duo triangula ABD, ACD; duos angulos B, D, duobus angulis C, D, æquales habent, vtrumque vtrique, & latus AD, commune, quod æqualibus angulis B, C, ſubtenditur; & tamen neque reliqua latera AB, BD, reliquis lateribus AC, CD, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, neque reliquus angulus BAD, reliquo angulo CAD, vt perſpicuum eſt. Hoc autem ideo contingit, quod latera AB, AC, ſemicirculo ſunt æqualia.

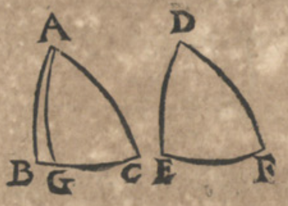


NICOLAVS ergo Copernicus libr. 1. Reuolutionum propoſ. 12. triangulorum ſphæricorum hallucinatur, cum docet, Error Ni-
omne triangulum ſphæricum, cuius duo anguli vtcunq; dati fuerint, cum aliquo latere, datorum effici angulorum, & laterum. colai Co-
Nam in triangulo ACD, licet duo anguli D, & ACD, noti ſint cum latere AD, non tamen ex hoc perueniemus in notitiam reli- pernici.
quorum laterum, & reliqui anguli: cum reliqua latera eſſe poſſint vel AC, CD, vel AB, BD, &c. Oportebit ergo præterea aliquid aliud conſtare, antequam reliquus angulus, cum reliquis lateribus cognoſcatur, vt in ſcholio propoſ. 66. dicemus.

THEO-

THREOR. 21. PROPOS. 23.

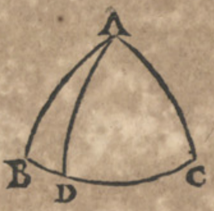
SI fuerint duo triangula ſphærica, quæ duos angulos duobus angulis habeant æquales, vtrumq; vtrique, duoque latera duobus lateribus circa reliquum angulum æqualia, vtrumq; vtrique, & in reliquo angulo dicto non ſit polus reliqui lateris: Erit & reliquum latus reliquo lateri, & reliquus angulus reliquo angulo æqualis.



IN duobus triangulis ſphæricis ABC, DEF, ſint anguli B, C, angulis E, F, æquales, vterque vtrique, & latera AB, AC, circa reliquum angulum A, æqualia lateribus DE, DF, vtrumque vtrique, non ſint autem A, D, poli arcuum BC, EF. Dico & reliqua latera BC, EF, æqualia eſſe, & reliquos angulos A, D. Si enim arcus BC, EF, non ſunt æquales, ſit BC, maior, [a] abſcindaturque arcus CG, æqualis ipſi FE, [b] & per puncta A, G, arcus maximi circuli deſcribatur AG. Quoniam igitur latera AC, CG, æqualia ſunt lateribus DF, FE, anguloſque æquales continent C, F; [c] erunt & arcus AG, DE, & anguli AGC, & E, æquales: Ponitur autem arcus DE, arcui AB, & angulus E, angulo B, æqualis. Igitur & arcus AG, arcui AB, & angulus AGC, angulo B, æqualis erit, atque adeo, [d] cum AGC, AGB, ſint æquales duobus rectis, erunt & B, AGB, duobus rectis æquales: [e] Sunt autem B, & AGB, inter ſe æquales, ob æqualitatem arcuum AB, AG. Vterque igitur rectus erit, [f] ac propterea vterque arcus AB, AG, per polum arcus BC, tranſibit. Eſt ergo A, polus arcus BC. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non eſſe. Non igitur inæquales ſunt arcus BC, EF, ſed æquales, [g] atq; idcirco & anguli BAC, & D, æquales erunt.

a 1. huius.
b 20. 1. The.
c 7. huius.
d 5. huius.
e 8. huius.
f 13. 1. The.
g 18. huius.

S C H O L I V M.



EST autem neceſſaria conditio illa, quod in reliquo angulo polus non ſit reliqui lateris. Falſa enim eſſet propoſitio, ſi in illo angulo polus foret reliqui lateris. Sit enim triangulum ſphæricum ABC, ſitque in A, polus arcus BC; & ex A, arcus circuli maximi deſcendat quicunque AD, ſecans BC, in D. [h] Erunt igitur anguli ad B, C, D, omnes recti, [i] atque omnes tres arcus AB, AC, AD, quadrantes. Itaque duo triangula ABC, ADC, duos angulos B, C, duobus angulis ADC, & C, æquales habent, vtrumque vtrique, & duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, circa angulos BAC, DAC, æqualia, vtrumque vtriq; & tamen neq; reliqua latera BC, DC, æqualia inter ſe ſunt, neque reliqui anguli BAC, DAC, vt manifeſtum eſt. Hoc autem ideo accidit, quod A, polus ſit arcuum BC, DC.

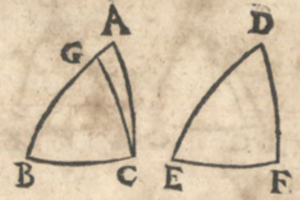
h 15. 1. The.
i Coro. 16. 1. Theo.

Error Nicolai Copernici.

HINC perſpicuum quoq; eſt Copernicum hallucinari lib. 1. Reuolutionum prop. 12. cum aſſerit, omne triangulum ſphæricum, cuius duo anguli vtcunque dati fuerint, cum aliquo latere, datorum, effici angulorum, & laterum. Nam in triangulo ABC, etiamſi dentur duo anguli B, C, cum duobus lateribus AB, AC, (& non cum vno tantum, vt ipſe vult) non tamen ſtatim reliquum latus, & reliquus angulus cognoſcetur, cum reliquum latus eſſe poſſit vel BC, vel DC, & reliquus angulus vel BAC, vel DAC, &c. Aliquid ergo aliud prætereа conſtet, neceſſe eſt, vt reliquus angulus, cum reliquis lateribus cognoſcatur, vt in ſcholio propoſ. 66. oſtendemus.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI fuerint duo triangula ſphærica, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habeant, & duo latera duobus lateribus circa alium angulum æqualia vtrumque vtrique, atque vtrumque reliquorum angulorum vel maiorem recto, vel minorem: Erit & reliquum latus reliquo lateri æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales vterque vtrique.



IN duobus triangulis ſphæricis ABC, DEF, ſint anguli B, E, æquales & duo latera BC, CA, æqualia duobus laterib. EF, FD, vtrũq; vtrique, circa angulos C, F, & vterque angulorum reliquorum A, D, vel minor ſit, vel maior recto. Dico reliqua latera AB, DE, æqualia quoque eſſe, & reliquos duos angulos A, C, reliquis duobus angulis D, F, vtrũq; vtrique. Si enim latera AB, DE, æqualia non ſunt, ſit AB, maius, [a] & abſcindatur arcus BG, æqualis arcui DE, [b] & per puncta C, G, arcus circuli maximi ducatur CG. Quia igitur latera BG, BC, æqualia ſunt lateribus ED, EF, anguloſque comprehendunt æquales BE; [c] erunt & arcus GC, DF, & anguli G, D, æquales; Ponitur autem arcus DF, arcui AC, æqualis. Æqualis igitur erit quoque arcus GC, eidem arcui AC; [d] atque adeo anguli A, & CGA, æquales. [e] Et quoniam anguli duo ad G, ſunt æquales duobus rectis, erunt quoque duo anguli BGC, & A, duobus rectis æquales; ac proinde, cum angulus BGC, oſtenſus ſit æqualis angulo D, erunt & duo anguli D, & A, duobus rectis æquales. Quod fieri non poteſt. Cum enim vterque minor recto ponatur, vel maior, erunt ambo ſimul vel duobus rectis minores, vel maiores. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, DE, ſed æqualia. [f] Quare & duo Anguli A, C, duobus angulis D, F, æquales erunt, vterq; vtriq;. Si fuerint igitur duo triangula, &c. Quod oſtendendum erat.

a 1. huius.
b 20. 1. The.
c 7. huius.
d 8. huius.
e 5. huius.
f 18. huius.

S C H O L I V M.



DIXIMVS, vtrumq; reliquorum angulorum debere eſſe vel maiorem, vel minorem recto. Nam alias falſa eſſet propoſitio. Sit enim triangulum ſphæricum quodcunque ABC, habens duo latera AB, AC, æqualia: Producto autem latere CB, ad D, ita vt CD, ſit arcus ſemicirculo minor, [g] ducatur per puncta A, D, arcus circuli maximi AD. Itaq; triangula ADB, ADC, angulum angulo æqualem habent, nempe D, communem, & duo latera AD, AB, æqualia duobus lateribus AD, AC, vtrumque vtrique; & tamen reliqua latera DB, DC, æqualia non ſunt, nec reliqui anguli DAB, DAC, immo neque anguli ABD, ACD

g 20. 1. The.

BD,ACD,niſi vterq; rectus ſit,vt demonſtrabimus. Hoc autem ideo euenit, quod non vterque angulus ABD, ACD, maior eſt vel minor recto,ſed vel vterque rectus, vel vnus maior recto,& alter minor: quod ita oſtendemus. Sit primum angulus ABD, rectus. Dico & C,rectum eſſe. Recto enim exiſtente angulo ABD,erit & ABC,rectus; [h] *quod ambo anguli ad B,æquales ſint duobus rectis:* [i] *ſed hic æqualis eſt angulo C,ob æqualitatem laterum AB,AC. Igitur & C, rectus erit.*

h 5. *huius.* i 8. *huius.*

SIT deinde angulus ABD,maior recto. Dico C,minorem eſſe recto. Cum enim ABD, ſit recto maior, erit ABC, minor recto, [k] *cum ambo duobus rectis ſint æquales. Igitur & angulus C,* [l] *qui æqualis eſt angulo ABC,recto minor erit.*

k 5. *huius.* l 8. *huius.*

SIT tandem angulus ABD,minor recto. Dico C,eſſe recto maiorem. Cum enim ABD,ſit minor recto, erit ABC, hoc eſt, ſibi æqualis C,maior recto.

HINC manifeſtum eſt,propoſitionem 8. Nicolai Copernici de ſphæricis triangulis,lib. 1. Reuolutionum falſam eſſe, quo ad eam partem,in qua dicit. Si bina triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint,alterum alteri,& angulum angulo æqualem,qui ad baſim fuerit; baſim quoque baſi, ac reliquos angulos reliquis angulis habebunt æquales. *Hoc enim verum non eſt,niſi ponatur vterque reliquorum angulorum ad baſim vel maior recto,vel minor. In triangulis enim propoſitis ADB,ADC,ſunt duo latera AD,AB,duobus lateribus AD,AC,æqualia, angulusq; D, communis eſt ſuper baſes DB,DC; & tamen baſes non ſunt æquales,ob cauſam dictam.*

Error Nicolai Copernici.

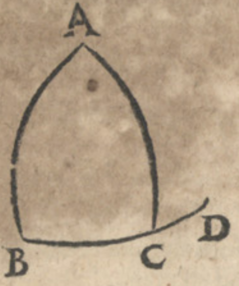
VNDE errat idem Nicolaus in eodem libro propoſ. 11. vbi ait. Omne triangulum, cuius duo latera fuerint data cum aliquo angulo,datorum efficitur angulorum,& laterum. *Nam etiamſi latera AD, AB, nota ſint cum angulo D, non tamen inde in notitiam alterius lateris,& aliorum angulorum perueniemus,cum reliquum latus poſſit eſſe vel DB,vel DC,&c. Neceſſe eſt ergo aliud quippiam præterea conſtare,antequam reliquum latus, cum reliquis angulis notum efficiatur, vt in Scholio propoſ. 67. perſpicuum faciemus.*

Alius error Nicolai Copernici.

THEOR. 23. PROP. 25.

IN omni triangulo ſphærico Iſoſcele,ſi duo latera æqualia ſint quadrantes,erunt duo anguli æquales ſuper baſim recti: ſi vero vtrumque quadrante minus ſit,acuti: ſi denique maius quadrante,obtuſi. Et ſi duo anguli æquales ad baſim ſint recti, erunt duo latera æqualia quadrantes: ſi vero acuti, vtrumque quadrante minus erit: ſi denique obtuſi, vtrumq; quadrante maius.

IN triangulo ſphærico Iſoſcele ABC,ſint primum duo arcus æquales AB, AC,quadrantes. Dico æquales angulos B,C,ad baſim eſſe rectos. Cum enim vterq; arcus AB,AC,quadrans ſit erunt ambo ſimul ſemicirculo æquales. Quare producto arcu BC,ad D, [a] angulus ACD,æqualis erit angulo B: [b] ſed angulus B,angulo ACB,æqualis eſt. Igitur & angulus *ACD*,angulo *ACB*,æqualis erit; atq; adeo, [c] cum duo anguli ad C, duob. rectis æquales ſint,erit vterq; angulus ad C,rectus. Quare & angulus B, [d] qui recto ACB,æqualis eſt,rectus erit. Quod eſt propoſitũ.



a 14. *hui.* b 8. *huius.* c 5. *huius.* d 8. *huius.*

SIT deinde vterque arcuum AB,AC, æqualium quadrante minor. Dico angulos B,C,æquales eſſe acutos. Cum enim vterque arcus AB, AC, quadrante minor ſit,erunt ambo ſimul ſemicirculo minores. [e] Quare angulus ACD, maior erit angulo B, hoc eſt,angulo ACB, [f] cum anguli B, & ACB,æquales ſint. [g] Cum ergo duo anguli ad C,æquales ſint duobus rectis,erit angulus ACB,recto minor; atque adeo angulus B, [h] qui ei æqualis eſt, recto quoque minor erit. Sunt ergo duo anguli B,& ACB,acuti. Quod eſt propoſitum.

e 14. *huius.* f 8. *huius.* g 5. *huius.* h 8. *huius.*

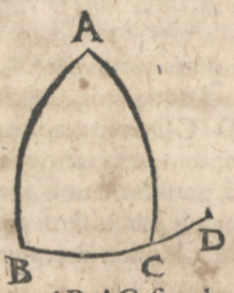
SIT poſtremo vterque arcuum AB,AC,quadrante maior. Dico angulos æquales,B, C,eſſe obtuſos. Cum enim vterque arcus AB,AC, maior ſit quadrante, erunt ambo maiores ſemicirculo. [i] Quare angulus ACD, minor erit angulo B,hoc eſt,angulo ACB, [k] qui angulo B,æqualis eſt. [l] Cum ergo duo anguli ad C, duobus rectis ſint æquales,erit angulus ACB,recto maior,hoc eſt,obtuſus; atque idcirco & angulus B, [m] qui ei æqualis eſt,obtuſus erit. Quod eſt propoſitum.

i 14. *huius.* k 8. *huius.* l 5. *huius.* m 8. *huius.*

SED iam vterque angulorum æqualium B,C,ſit rectus. Dico vtrumq; arcum AB,AC, quadrantem eſſe. Cum enim ACB,rectus ſit, [n] & duo anguli ad C,æquales duobus rectis,erit quoque ACD,rectus, ac proinde recto B,æqualis. [o] Sunt ergo duo arcus AB,AC, ſimul ſemicirculo æquales,ac propterea cum ipſi æquales ponantur,vterque quadrans erit. Quod eſt propoſitum.

n 5. *huius.* o 15. *huius.*

DEINDE vterq; angulorum B,C,ſit acutus. Dico vtrumq; arcum AB,AC,quadrante minorem eſſe. [p] Cum enim duo anguli ad C,æquales duobus rectis ſint, & ACB, ponatur recto minor; erit ACD, recto maior; ac propterea maior,quam B,qui recto etiam minor ponitur. [q] Sunt ergo arcus AB, AC,ſimul ſemicirculo minores; atq; idcirco,cum ipſi ſint æquales, vterque quadrante minor erit. Quod eſt propoſitum.



p 5. *huius* q 15. *huius*

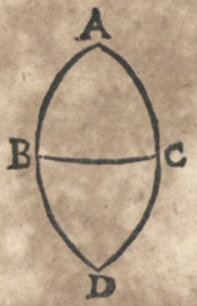
POSTREMO ſit vterque angulorum B,C,obtuſus. Dico vtrumque arcum AB, AC, maiorem eſſe quadrante. [r] Cum enim duo anguli ad C, ſint æquales duobus rectis, & ACB, ponatur maior recto, erit ACD, recto minor,atque idcirco minor angulo B,qui recto quoque maior ponitur. [s] Arcus ergo AB, AC, ſimul maiores ſunt ſemicirculo; atque adeo,cum ipſi æquales ſint,erit vterque quadrante maior. Quod eſt propoſitum. In omni ergo triangulo ſphærico Iſoſcele,&c. Quod demonſtrandum erat.

r 5. *huius.* s 15. *huius.*

COROLLARIVM.

EX his ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquilaterum, ſeu æquiangulum, ſi ſingula latera ſint quadrantes,habere ſingulos angulos rectos: ſi vero quadrante minora,acutos. Si deniq; quadrante maiora,obtuſos. Et omne triangulum ſphæricum æquiangulum,ſeu æquilaterum,ſi ſinguli anguli ſint recti,habere ſingula latera quadrantes: Si vero acuti, quadrante minora: ſi deniq; obtuſi,quadrante maiora.

SCHOLIVM.



CÆTERVM, quando duo latera trianguli ſphærici ſunt quadrantes, vtrumque angulum ad baſim eſſe rectum: Et ſi vterq; angulus ad baſim rectus eſt, vtrumq; latus eſſe quadrantem, demonſtrari etiam poterit hac ratione.

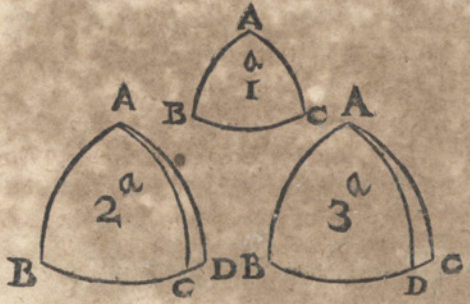
SINT in triangulo ABC, quadrantes AB, AC. Dico angulos B, C, eſſe rectos.
t 11.1. The. *Productis enim arcubus AB, AC, donec coëant in D, [t] vt ſint ABD, ACD, ſemicirculi; erunt quoq; arcus DB, DC, quadrantes, atque adeo vterq; arcus ABD, ACD,*
u Schol. 9. 2. Theod. *bifariam diuidetur ab arcu BC, in punctis B, & C. [u] Igitur arcus BC, per polos arcuum AB, AC, tranſibit;*
x 15.1. The. *[x] atque idcirco rectos angulos ad B, & C, efficiet.*

VERVM iam anguli B, C, recti ſint. Dico latera AB, AC, quadrantes eſſe.
y 13.1. Th. *Cum enim anguli B, C, ſint recti, [y] tranſibit arcus BC, per polos arcuum ABD, ACD,*
z 11.1. Th. *[z] qui quidem ſemicirculi ſunt; [a] atque adeo vtrumque bifariam ſecabit in B, C. Sunt ergo arcus AB, AC, DB, DC,*
a 9.2. Th. *quadrantes. Quod demonſtrandum erat.*

THEOR. 24. PROPOS. 26.

IN omni triangulo Iſoſcele ſphærico, cuius duo latera æqualia ſint quadrantes, ſi angulus ſub ipſis, comprehenſus fuerit rectus, erit baſis quadrans: Si vero acutus, quadrante minor: Si denique obtuſus, quadrante maior. Et ſi baſis fuerit quadrans, erit angulus ſub lateribus comprehenſus, rectus: Si vero minor quadrante, acutus: Si deniq; maior quadrante, obtuſus. Semper autem polus baſis erit in angulo ſub lateribus comprehenſo.

IN triangulo ſphærico Iſoſcele ABC, ſint latera AB, AC, quadrantes, & primum angulus A, ſit rectus, vt
a 25. huius. in prima figura. Dico baſim BC, quadrantem eſſe. Cum enim AB, AC, ſint quadrantes, [a] erunt anguli B, C,
b Coro. 25. huius. recti. [b] Quare omnes arcus erunt quadrantes. Quadrans ergo eſt BC. Quod eſt propoſitum.



SIT deinde angulus A, acutus, vt in ſecunda figura. Dico baſim BC, minorem eſſe quadrante.
c 20.1. Th. [c] Ducto enim per A, & polum arcus AB, arcu circuli maximi AD,
d 15.1. The. [d] erit angulus BAD, rectus, atque adeo maior acuto angulo BAC. Occurret ergo AD, arcus arcui BC, producto, nempe in puncto D.
e 25. huius. [e] Quoniam igitur in triangulo ABC, vterque angulus B, C, rectus eſt, erunt in triangulo ABD, duo anguli recti B, & DAB,
f 9. huius. ideoque æquales; [f] ac propterea & arcus DA, DB, æquales erunt. Quare Iſoſceles eſt DAB, habens ad baſim AB,
g 25. huius. duos angulos rectos; [g] ac proinde vterque arcus AD, BD, quadrans eſt. Igitur BC, quadrante erit minor. Quod eſt propoſitum.

h 20.1. Th. TERTIO ſit angulus A, obtuſus, vt in tertia figura. Dico baſim BC, eſſe quadrante maiorem. [h] Ducto
i 15.1. Th. enim per A, & polum arcus AB, arcu circuli maximi AD, [i] erit angulus DAB, rectus; atq; adeo minor obtuſo
k 25. huius. angulo BAC. Occurret ergo arcus AD, arcui BC, intra triangulum, nempe in puncto D. [k] Quoniam ergo in triangulo ABC, rectus eſt vterque angulus B, C, erunt in triangulo DAB, duo anguli ad baſim AB, recti, & pro-
l 9. huius. pterea æquales; [l] atque idcirco & arcus AD, BD, æquales. Quare Iſoſceles eſt DAB, habens ad baſim AB, du-
m 25. huius os angulos rectos. [m] Vterque igitur arcus AD, BD, quadrans eſt, ideoq; BC, quadrante maior. Quod eſt propoſitum.

n 25. huius. SED iam baſis BC, quadrans ſit, vt in eadem prima figura. Dico angulum A, rectum eſſe. [n] Quoniam enim duo arcus CA, CB, quadrantes ſunt, erit vterque angulus A, B, rectus. Rectus igitur eſt angulus, A.

SIT deinde baſis BC, quadrante minor. Dico angulum BAC, eſſe acutum. Producto enim arcu BC, ad
o 20.1. Th. D, vt ſit BD, quadrans, [o] ducatur per puncta A, D, arcus AD, circuli maximi. Quoniam igitur duo arcus BA,
p 25. huius. BD, quadrantes ſunt, [p] erit vterque angulus D, & DAB, rectus. Acutus igitur eſt angulus BAC.

q 1. huius. SIT tandem baſis B C, maior quadrante. Dico angulum BAC, obtuſum eſſe. [q] Abſcindatur BD,
r 20.1. Th. arcus æqualis quadranti AB; [r] & per puncta A, D, arcus circuli maximi deſcribatur AD. Et quia duo arcus BA,
s 25. huius. BD, quadrantes ſunt, [s] erit vterq; angulus BDA, DAB, rectus. Obtuſus igitur eſt BAC, angulus.

t 25 huius. DICO præterea, in omnibus his punctum A, polum eſſe baſis BC. Cum enim latera AB, AC, ponantur
u 13.1. Th. quadrantes, [t] erit vterque angulus ad baſim BC, rectus, [u] ac propterea vterque arcus AB, AC, per polum arcus BC, tranſibit. Siue igitur BC, quadrans ſit, ſiue minor, ſiue maior quadrante; Et ſiue angulus A, ſit rectus, ſiue acutus, ſiue obtuſus, ſemper punctum A, vbi coëunt arcus AB, AC, polus erit baſis BC. In omni igitur triangulo Iſoſcele ſphærico, cuius duo latera, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

IMMO in omni triangulo ſphærico habente duos angulos rectos, demonſtrabimus eodem modo, in concurſu duorum la-
x 13.1. The. *terum, quæ rectos ſubtendunt angulos, reliqui lateris, quod rectis angulis adiacet, polum eſſe, etiam ſi nondum ſciatur, duo illa latera eſſe quadrantes. Sint enim in triangulo ſphærico ABC, duo anguli recti B, C. Dico A, polum eſſe arcus BC. [x] Nam vterq; arcus AB, AC, per polum arcus BC, tranſibit; ac propterea A, polus erit arcus BC.*
y 25. huius *VERVM eſt tamen, [y] duos arcus AB, AC, eſſe ſemper quadrantes, propter angulos rectos B, C.*

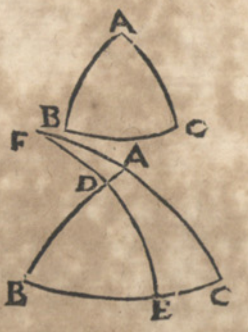
THEO-

THEOR. 25. PROPOS. 27.

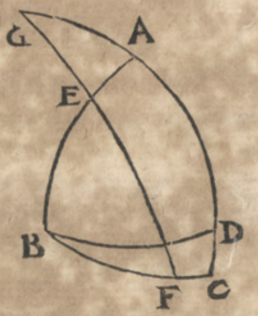
IN omni triangulo ſphærico, cuius omnes arcus ſint quadrante maiores, vel vnus quadrans,& reliqui duo quadrante maiores,omnes tres anguli ſunt obtuſi.

IN triangulo ſphærico ABC, ſint primum ſingula latera quadrante maiora. Dico tres angulos A,B,C, eſſe obtuſos. Aut enim triangulum æquilaterum eſt,aut Iſoſceles, aut Scalenum.

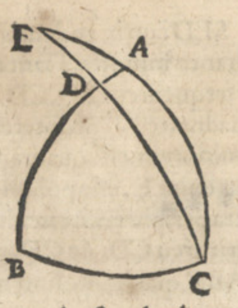
SI æquilaterum, [a] perſpicuum eſt,tres angulos eſſe obtuſos. a Corol.25. huius.
SI vero eſt Iſoſceles, habens duo latera AB.AC,æqualia, [b] erunt duo b 25.huius.
anguli B,C,ad baſim obtuſi. Sint quadrantes BD, BE, [c] & per puncta D, c 20.1.The.
E,arcus circuli maximi ducatur ED,conueniens cum arcu CA,protracto in
F. Quoniam igitur BD, BE, quadrantes ſunt, & angulus B,oſtenſus eſt ob-
tuſus, [d] erit DE,arcus quadrante maior, [e] & anguli BDE.BED,recti: Poni- d 26.huius. e 25.huius.
tur autem & arcus AC,quadrante maior. Igitur arcus DE,AC,ſimul ſemi-
circulo maiores ſunt; ac propterea arcus FD, FA, ſimul minores ſemicir-
culo,cum arcus EF, FC, integro circulo ſimul ſint minores; [f] cum vterq; f 2. huius.
arcus minor ſit ſemicirculo. [g] Angulus igitur FDB, maior eſt angulo F- g 14. hui.
AD: Eſt autem angulus FDB,rectus, [h] quod anguli FDB,BDE,duobus h 5. huius.
rectis æquales ſint,& BDE,rectus oſtenſus. Ergo FAD, acutus eſt; ac pro-
inde, [i] cum FAD,DAC,æquales ſint duobus rectis,angulus BAC,obtuſus erit: oſtenſi ſunt autem & anguli i 5. huius.
B,C,obtuſi. Omnes ergo tres anguli A,B,C, obtuſi ſunt.



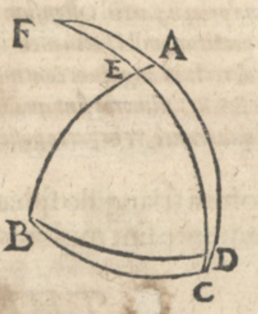
SI denique triangulum ABC,eſt Scalenum, ſit latus AC, latere A-
B, maius, [k] & abſcindatur arcus AD,arcui AB,æqualis; eritque adhuc k 1. huius.
arcus AD,quadrante maior,quod & arcus AB,cui æqualis eſt,maior po-
natur quadrante. [l] Si igitur per puncta B,D,ducatur arcus BD, circuli l 20.1. The.
maximi, [m] erit vterque angulus ADB, ABD, obtuſus. Multo ergo m 25.huius
magis obtuſus erit angulus ABC.Sint quadrantes BE,BF, [n] & per pun- n 20.1. Th.
cta E,F, ducatur arcus EF, circuli maximi,coiens cum arcu CA, produ-
cto in G. Quoniam igitur BE,BF, quadrantes ſunt, [o] erunt anguli ad o 25.huius.
E,& F,recti; & cum angulus EBF,oſtenſus ſit obtuſus, [p] erit arcus EF, p 26.hui.
quadrante maior ponitur autē & arcus AC,quadrante maior.Igitur arcus
EF:AC,ſimul ſemicirculo ſunt maiores; & idcirco multo magis FG,CG,maiores erunt ſemicirculo.[q] Angulus q 14.huius
ergo BFG,quem oſt[illegible]nus eſſe rectum minor eſt angulo BCG; ac propterea angulus C, obtuſus erit. Et
quoniam arcus FG,C[illegible],ſimul integro ſunt circulo minores; [r] quod vterque ſemicirculo minor ſit; & EF,A- r 2. huius.
C,ſimul ſemicirculo maiores; erunt arcus GE, GA, ſimul ſemicirculo minores [s] ac proinde angulus GEB, s 14.huius.
maior erit angulo GAB.Cum ergo angulus GEB,rectus ſit, [t] quod duo anguli ad E,duobus ſint rectis æqua- t 5. huius.
les, & angulus BEF,oſtenſus ſit rectus; erit angulus GAB,acutus. Quapropter [u] cum GAB, BAC, æquales u 5.huius.
ſint duobus rectis,erit BAC,obtuſus. Sunt autem duo etiam anguli ABC,& C,oſtenſi obtuſi. Tres ergo angu-
li A,B,C,trianguli ABC, obtuſi ſunt. Quod eſt propoſitum.



SINT iam in eodem triangulo ABC, duo arcus AB, AC, quadrante
quidem maiores,at BC, quadrans. Aut igitur arcus AB, AC, æquales ſunt,
aut inæquales.Si æquales,[x] erunt duo anguli B,C,obtuſi.Sit quadrans BD, [y] & x 25. huius
per puncta C,D,arcus CD,maximi circuli ducatur conueniens cum arcu CA, y 20.1. Th.
protracto in E.Quia igitur arcus BC,BD,quadrantes ſunt,[z] erunt anguli D,& z 25.huius.
BCD, recti, [a] & arcus CD, propter angulum B, quem obtuſum eſſe oſtendi- a 26.huius.
mus,quadrante maior: Ponitur autem & arcus AC, quadrante maior. Igitur
arcus CD,CA,ſimul maiores ſunt ſemicirculo;ac propterea,cum arcus CDE,
CAE,circulum conficiant, [b] (ꝙ vterq; ſemicirculus ſit) erunt arcus ED,EA, b 11.1.The.
ſemicirculo minores.Quare angulus EDB,qui rectus eſt, [c] (quod duo anguli ad D,æquales ſint duobus rectis, c 5. huius.
[d] & angulus BDC, oſtenſus ſit rectus) maior erit angulo EAD; atque adeo EAD, acutus erit. [e] Cum ergo an- d 14.huius. e 5. huius.
guli EAD, DAC, duobus rectis ſint æquales,erit BAC, obtuſus. Sunt etiam anguli B, C, demonſtrati obtuſi,
Tres igitur anguli A,B,C,trianguli ABC, obtuſi ſunt.



SI vero AB, AC, latera, quæ quadrante maiora ſunt,
non ſunt æqualia,ſit maius AC, [f] & abſcindatur arcus AD, f 1. huius.
æqualis arcui AB, [g] & per puncta B, D, tranſeat arcus BD, g 20.1.The.
circuli maximi: eritque adhuc arcus AD, maior quadrante,
cum ei æqualis AB, maior etiam ponatur. [h] Anguli igitur h 25.huius.
ADB, ABD,obtuſi ſunt. Multo ergo magis obtuſus erit an-
gulus ABC. Sit quadrans BE, [i] & per puncta C,E,tranſeat i 20.1. The.
arcus CE, circuli maximi occurrens arcui CA, producto in
F. Quoniam igitur quadrantes ſunt BE, BC, & angulus k 26.huius.
EBC,oſtenſus eſt obtuſus, [k] erit arcus EC,maior quadran-
te, [l] ſed anguli E,& BCE,recti erunt. Angulus ergo ACB,
obtuſus erit. Et quoniam arcus CE, oſtenſus eſt quadrante
maior,& arcus AC,maior etiam ponitur, quam quadrans; erunt arcus CE, CA, ſimul ſemicirculo maiores. l 25. huius.
Cum ergo arcus CEF,CAF,integro circulo æquales ſint, [m] quod vterque ſit ſemicirculus, erunt arcus, FE, m 21.1.The
FA,ſimul ſemicirculo minores.Quamobrem angulus FEB,qui rectus eſt, [n] (ſunt enim duo anguli ad E,duo- n 5. huius.



o 14. huius bus rectis æquales, & angulus BEC, oſtenſus eſt rectus.) [o] maior erit angulo FAE. Acutus ergo eſt angulus F-
p 5. huius. AE, ac propterea [p] cum duo anguli ad A, ſint æquales duobus rectis, angulus BAC, obtuſus erit. Sunt autem etiam oſtenſi obtuſi anguli ABC, ACB. Tres igitur anguli in triangulo ABC, obtuſi ſunt. In omni ergo triangulo ſphærico, cuius omnes arcus, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

HÆC propoſitio non conuertitur. Non enim omne triangulum ſphæricum, cuius omnes anguli ſunt obtuſi, neceſſario habet omnes arcus quadrante maiores, vel duos quidem maiores quadrante, & vnum quadranti æqualem: Sed poſſunt eſſe duo quidem quadrante maiores, reliquus vero quadrante minor. Sint enim duo ſemicirculi in ſuperficie ſphæræ continentes angulos A, C, obtuſos. Si igitur accipiantur duo arcus æquales AB, AD, quorum vterq; maior ſit ſeſquialtero quadrante, ita vt ambo ſimul tres quadrantes ſuperent;



q 20.1. The. *[q] deſcribatur autem per puncta B, D, arcus circuli maximi BD; erit hic*
r 4. huius. *arcus BD, quadrante minor. [r] Cum enim tres arcus AB, AD, BD, integro circulo minores ſint, ponantur autem duo arcus A-*
s 25. huius. *B, AD, tribus quadrantibus maiores; erit neceſſario tertius arcus BD, minor quadrante: Alias, ſi quadrans eſſet, aut maior quadrante, ſuperarent tres arcus trianguli ABC, integrum circulum. [s] Quoniam igitur duo anguli B, & D, in triangulo ABD, obtuſi ſunt, necnon & tertius angulus A, obtuſus quoque, ex hypotheſi; erunt omnes tres anguli A, B, D, obtuſi: & tamen neque omnes arcus ſunt quadrante maiores; neq; duo tantum, & tertius quadrans: ſed duo quidem AB, AD, quadrante maiores ſunt, at tertius arcus BD, quadrante minor, vt oſtendimus.*

THEOR. 26. PROP. 28.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus ſint quadrante minores, reliqui duo anguli acuti ſunt. Et ſi reliqui duo anguli ſint acuti, erunt ſinguli arcus quadrante minores.

IN triangulo ſphærico ABC, ſit angulus B, rectus, & ſinguli arcus quadrante minores. Dico reliquos an-
a 20.1. The. gulos A, C, eſſe acutos. Producantur enim arcus BA, BC, vt ſint quadrantes BD, BE, [a] & per puncta C, D, arcus maximi circuli ducatur CD, necnon per puncta A, E, arcus circuli maximi AE.



b 13.1. Th. [b] Et quoniam quadrans BD, ob angulum rectum B, per polos arcus BC, tranſit,
c Coro. 16. 1. Theo. [c] abeſtque polus circuli maximi quadrante circuli maximi ab eo, erit D, polus arcus BC.
d 15.1. Th. [d] Igitur erit angulus BCD, rectus; ac propterea angulus ACB, acutus. Eodem modo, quia quadrans BE, ob angulum rectum B,
e 13.1. Th. [e] per polos arcus AB, tranſit,
f Corol. 16. 1. Theod. [f] abeſtque polus circuli maximi quadrante maximi circuli ab eo, erit E, polus arcus AB.
g 15.1. Th. [g] Igitur angulus EAB, rectus erit; ac proinde BAC, acutus.

SED iam in eodem triangulo ABC, angulus B, rectus ſit, & reliqui A, C, acuti. Dico ſingulos arcus eſſe
h 25 huius. quadrante minores. Fiant enim recti anguli BCD, BAE. Quia igitur vterque angulus B, BCD, rectus eſt, [h] erit vterque arcus BD, CD, quadrans. Arcus igitur BA, quadrante minor eſt. Eodem modo arcus BC, minor e-
i 25. huius. rit quadrante; [i] propterea quod & arcus BE, AE, quadrantes ſunt, ob angulos rectos B, BAE. Sed & arcum AC, minorem, eſſe quadrante, ita oſtendemus. Quoniam arcus BE, ducitur per E, polum arcus BD, (oſtendemus enim E, eſſe polum arcus AB, vt ſupra, cum BE, quadrans ſit, rectusque ad arcum AB.) erit punctum
k Schol. 21. C, intra peripheriam circuli arcus BD, in ſuperficie ſphæræ, & præter eiuſdem polum. [k] Quare arcus CA, mi-
2. Theod. nor erit arcu CD. At CD, oſtenſus eſt eſſe quadrans. Igitur AC, quadrante minor erit. Omnes ergo arcus trianguli ABC, quadrante ſunt minores. Quocirca in omni triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod oſtendendum erat.

S C H O L I V M.

PRIMA pars huius propoſitionis vera quoque eſt, ſi ſolum vterque arcus circa angulum rectum ponatur quadrante minor, etiamſi ignoretur, reliquum arcum, qui rectum angulum ſubtendit, minorem eſſe quadrante. Id quod liquido conſtat ex demonſtratione prioris partis. Oſtenſum eſt enim, angulos BAC, BCA, eſſe acutos, ex eo ſolum, quod vterq; arcus BA, BC, quadrante minor ponatur, nulla facta mentione arcus, AC. Erit tamen ſemper arcus rectum angulum ſubtendens quadrante minor, ſi duo arcus rectum angulum continentes quadrante minores ſint, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt. Nam cum e eo, quod arcus BA, BC, minores ſint quadrante, anguli A, C, acuti ſint, vt in priore parte demonſtratum eſt, fit, vt & arcus AC, minor ſit quadrante, vt in parte poſteriori eſt oſtenſum. Itaq; proponi poterit etiam huiuſmodi Theorema.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius duo arcus rectum angulum comprehendentes quadrante ſint minores, erit & arcus angulum rectum ſubtendens quadrante minor.

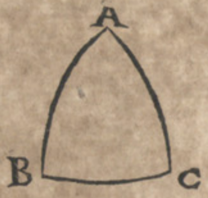
THEOR. 27. PROPOS. 29.

IN omni triangulo ſphærico, cuius omnes anguli ſint acuti, arcus ſinguli quadrante ſunt minores.

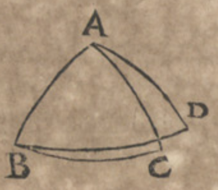


IN triangulo ſphærico ABC, ſint omnes anguli acuti. Dico ſingulos arcus quadrante minores eſſe. Sint enim primum omnes anguli acuti æquales. Quo poſito, [a] erunt ſinguli arcus quadrante minores, vt ſupra demonſtratum eſt. a Corol.25. huius.

DEINDE ſint duo tantum anguli acuti æquales B, C; & A, minor vtroq; illorum. [b] Erit igitur vterque arcus AB, AC, minor quadrante. Et quia angulus B, maior ponitur angulo A, [c] erit arcus AC, maior arcu BC. Cum igitur arcus AC, oſtenſus ſit quadrante minor, erit multo magis arcus BC, minor quadrante. b 25. huius. c 11. huius.



TERTIO ſint duo tantum anguli acuti iterum æquales B, C; & A, acutus vtroq; illorum maior. [d] Erit igitur rurſus vterque arcus AB, AC, quadrante minor. Dico & BC, quadrante eſſe minorem. Fiat enim angulus rectus BAD, ſitque arcus AD, vtrique arcuum AB, AC, æqualis; [e] & per puncta B, D, deſcribatur arcus circuli maximi BD. Quoniam igitur vterq; arcus AB, AC, oſtenſus eſt quadrante minor, erit & AD, minor quadrante. [f] Vterque ergo angulus ABD, & D, acutus eſt. Quare cum in triangulo ABD, angulus BAD, rectus ſit, & reliqui acuti [g] erunt omnes arcus quadrante minores. Arcus igitur BD, quadrante minor eſt: At quia latera AB, AC, lateribus AB, AD, æqualia ſunt, eſtque angulus BAD, angulo BAC, maior; [h] erit & baſis BD, baſe BC, maior: Oſtenſus eſt autem arcus BD, quadrante minor. Multo ergo minor quadrante erit arcus BC. Omnes ergo tres arcus trianguli ABC, quadrante ſunt minores. d 25. hui. e 20.1. Th. f 25. huius. g 2.8 hui. h 12. huius



POSTREMO ſint omnes anguli acuti A, B, C, inæquales; & ſit A, omnium maximus [i] Erit igitur propterea arcus BC, maior vtrouis arcuum AB, AC. Sit quoque angulus C, maior angulo B; [k] eritque propterea arcus AB, maior arcu AC. Quoniam igitur arcus BC, maior eſt arcu AB, & AB, maior, quam AC; abſcindatur arcus BD, æqualis arcui AB, & per puncta A, D, ducatur arcus AD, circuli maximi: [l] eruntque anguli BAD, BDA, æquales: Eſt autem angulus BAD, acutus, cum pars ſit anguli acuti BAC. Igitur & angulus BDA, acutus erit. [m] Vterque igitur arcus AB, BD, quadrante eſt minor. Multo igitur magis arcus AC, qui minor eſt arcu AB, minor erit quadrante. Dico & arcum BC, quadrante minorem eſſe. Fiat enim angulus BAE, rectus, & arcus AE, arcui AC, æqualis, [n] ac per puncta B, E, deſcribatur arcus BE, maximi circuli. Et quia arcus AC, oſtenſus eſt minor quadrante, erit & AE, minor quadrante. In triangulo ergo ABE, angulus BAE, rectus eſt, & vterque arcuum ipſum comprehendentium quadrante minor. [o] Igitur reliqui anguli ABE, AEB, acuti ſunt. Quoniam igitur in eodem triangulo ABE, angulus BAE, rectus eſt, & reliqui duo acuti, [p] erunt omnes arcus quadrante minores. Arcus ergo BE, minor eſt quadrante. Quoniam vero duo latera AB, AE, duobus lateribus AB, AC, æqualia ſunt, eſtque angulus BAE, maior angulo BAC; [q] erit & baſis BE, baſe BC, maior: Oſtenſus eſt autem arcus BE, minor quadrante. Multo igitur minor quadrante erit arcus BC. Tres ergo arcus trianguli ABC, quadrante ſunt minores. Quamobrem, in omni triangulo ſphærico, cuius, &c. Quod demonſtrandum erat. i 11. huius. k 11. huius. l 8. huius. m 25. huius n 20.1. Th. o Scho. 28. huius. p 28. huius. q 12. huius.



SCHOLIVM.

PORRO neq; hæc propoſitio conuerti poteſt. Non enim omne triangulum ſphæricum cuius ſinguli arcus quadrante ſunt minores, neceſſario habet omnes angulos acutos. Nam vnus angulus poteſt eſſe rectus, & reliqui duo acuti, vt ex propoſ. præcedenti conſtat. Immo & vnus poteſt eſſe obtuſus, & reliqui acuti. Sint enim duo ſemicirculi ABC, ADC, continentes angulos A, C, obtuſos, accipianturq; duo arcus æquales AB, AD, quorum vterque ſeſquialterum quadrantem ſuperet, [r] & per puncta B, D, arcus circuli maximi deſcribatur BD, qui minor erit quadrante, vt in ſcholio propoſ. 27. oſtendimus. Erunt igitur in triangulo BCD, tres arcus BC, CD, BD, ſinguli quadrante minores, & tamen non omnes anguli in triangulo BCD, acuti ſunt, ſed C, quidem obtuſus, ex hypotheſi, [s] at vero B, D, acuti, propterea quod duo latera CB, CD, æqualia ſunt, & quadrante minora. r 20.1. The. s 25. huius.



THEOR. 28. PROP. 30.

IN quolibet triangulo ſphærico, cuius vnus quidem arcus quadrante maior ſit, reliquorum vero vterq; quadrante minor, nullus angulorum rectus erit.

IN triangulo ſphærico ABC, ſit quidem arcus AC, quadrante maior, ac tam AB, quam BC, minor quadrante, Dico nullum angulorum eſſe rectum. Sit enim ſi fieri poteſt, angulus B, qui arcui AC, quadrante maiori opponitur, rectus. Abſciſſo igitur AD, quadrante, & producto arcu AB, ad E, vt AE, ſit etiam quadrans, [a] & per puncta D, E, arcu DE, circuli maximi deſcripto, qui arcum BC, ſecet in F; [b] erit vterque angulus D, E, rectus: Ponitur autem & angulus ABC, rectus, hoc eſt, EBC; [c] ſunt enim duo anguli ad B, duobus rectis æquales. [d] Vterq; igitur arcus EF, BF, quadrans erit, atque adeo arcus BC, maior quadrante. Quod eſt abſurdum, cum ponatur quadrante minor. Non ergo angulus B, rectus eſſe poteſt. a 20.1. The. b 25. huius. c 5. huius. d 25. huius.



e 25. huius. QVOD ſi angulus C, rectus eſſe dicatur, [e] erit, ſi eadem fiat conſtructio, eodem modo vterque
f 25. huius. arcus DF, CF, quadrans: (Nam & angulus CDF, rectus eſt, [f] cum vterque D, E, rectus ſit, ob quadrantes AD, AE.) atque adeo arcus BC, quadrante maior. quod eſt contra hypotheſim.

SI denique angulus A, rectus concedatur, ſi ex arcu CA, abſcindatur quadrans CG, & arcus CB, produ-
g 20. 1. The. catur vſque ad H, vt & CH, quadrans ſit, [g] deſcribaturque per puncta G, H, arcus circuli maximi GH, ſecans
h 25. huius. arcum AB, in I; [h] erit vterq; angulus G, H, rectus. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus, erunt in triangu-
i 25. huius. lo AGI, duo anguli A, G, recti. [i] Quare vterque arcus HI, GI, quadrans eſt; atque adeo arcus AB, quadrante maior. Quod eſt contra hypotheſim.



POSSVMVS tamen aliter demonſtrare, angulum A, non poſſe eſſe rectũ, licet non abſcindatur quadrans CG, &c. Si enim angulus A, rectus concedatur,
k 26. huius [k] erit arcus DE, quadrans. Cum ergo & EA, quadrans ſit, [l] erit vterque an-
l 25. huius. gulus A, D, rectus; & E, polus arcus AC, [m] propterea quod vterque arcus D-
m 13. 1. Th. E, AE, per polum arcus AD, tranſit, ob angulos rectos A, D. Eodem modo D, polus erit arcus AB. Quoniam igitur punctum F, eſt intra peripheriam circuli AB, & præter eius polum, duci-
n Scho. 21. 2. Theo. turque arcus FE, per polum circuli AB, nempe per D, [n] erit arcus FB, maior arcu FE. Eadem ratione arcus FC, maior erit arcu FD, cum FD, ducatur per E, polum circuli AC. Totus igitur arcus BC, quadrante DE, maior erit. Quod eſt abſurdum, cum minor quadrante ponatur. Nullus ergo angulorum A, B, C, rectus eſt. Quamobrem, in quolibet triangulo ſphærico, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 29. PROPOS. 31.

CVIVSCVNQVE trianguli ſphærici tres anguli duobus quidem rectis ſunt maiores, ſex vero rectis minores.



SIT triangulum ſphæricum ABC. Dico tres angulos A, B, C, maiores quidem eſſe duobus rectis, minores vero ſex rectis. Si enim omnes tres anguli recti ſint, vel obtuſi; vel duo tantum recti, vel obtuſi; vel vnus tantum rectus, & reliquorum alter obtuſus, perſpicuum eſt, omnes tres duobus eſſe rectis maiores. In quolibet autem triangulo hæc erit demonſtratio. Producto latere BC, ad D, erit angulus ACD, vel æqualis, vel minor
a 15. huius. vel maior angulo B. Sit primum æqualis. [a] Erunt igitur arcus AB, AC,
b 16. huius. AC, ſimul ſemicirculo æquales; [b] atque adeo duo anguli ABC, ACB, duobus rectis æquales. Tres ergo anguli A, B, C, duobus rectis maiores
c 15. huius. erunt. Sit deinde angulus ACD, minor angulo B. [c] Erunt igitur arcus
d 16. huius AB, AC, ſimul maiores ſemicirculo; [d] ac propterea duo anguli ABC, ACB, duobus rectis maiores. Multo er-
e 10. huius. go magis tres anguli A, B, C, duobus rectis maiores erunt. Sit denique angulus ACD, maior angulo B, [e] & fiat angulus DCE, angulo B, æqualis, occurratque arcus CE, arcui BA, producto in E: & tandem arcus CA,
f 15. huius. protrahatur ad F. [f] Erunt igitur arcus EB, EC, ſimul æquales ſemicirculo; ac propterea arcus EA, EC, ſimul
g 14. huius. ſemicirculo minores. [g] Angulus igitur EAF, hoc eſt, angulus BAC, qui illi ad verticem æqualis eſt, maior erit
h 16. huius. angulo ACE: [h] Sed angulus ACE, & anguli ACB, & B, duobus rectis ſunt æquales. Igitur anguli BAC, ACB, & B, maiores erunt duobus rectis. Semper ergo tres anguli ſimul duobus rectis ſunt maiores.

QVIA vero omnis angulus ſphæricus, etiam obtuſus, minor eſt duobus rectis; perſpicuum eſt, tres angulos cuiuſuis trianguli ſphærici ſimul minores eſſe ſex rectis. Cuiuſcunque ergo trianguli ſphærici tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 30. PROPOS. 32.

IN omni triangulo ſphærico, cuius vnus angulus rectus ſit, & alter reliquorum acutus, ſi quidem arcus illis angulis adiacens fuerit quadrans, erit & arcus rectum ſubtendens angulum quadrans; ſi vero minor fuerit quadrante, quadrante quoque minor erit: ſi deniq; quadrante fuerit maior, quadrante quoque maior erit: Semper autem arcus acutum angulum ſubtendens minor erit quadrante.

IN triangulo ABC, angulus C, rectus ſit, & B, acutus, ſitque primum arcus BC, quadrans. Dico & AB,
a 25. huius. quadrantem eſſe. Fiat enim angulus CBD, rectus, coëatque arcus BD, cum arcu CA, producto in D. [a] Erit igitur vterque arcus BD, CD, quadrans: Ponitur autem & BC, qua-
b 26. huius. drans. [b] Ergo B, polus eſt arcus CD, [c] atque adeo rectus erit
c 15. 1. Th. angulus ad A. [d] Quare vterque arcus BC, BA, quadrans erit. Qua-
d 25. huius. drans igitur eſt arcus AB, angulo recto C, oppoſitus.



SIT deinde arcus BC, quadrante minor. Dico & arcum AB, quadrante eſſe minorem. Fiat enim rurſus angulus CBD, rectus, oc-
e 25. huius. currat que arcus BD, arcui CA, producto in D; [e] eritque vt prius, vterque arcus BD, CD, quadrans. Producto autem BC, ad E, vt ſit
f 20. 1. Th. BE, quadrans. [f] ducatur per puncta D, E, arcus circuli maximi DE, quem BA, productus ſecet in F. Quoniam igitur arcus BE, BD,
g 25. & 26. huius. quadrantes ſunt, [g] erit vterque angulus BDE, BED, rectus, & B, polus arcus DE. [h] Rectus ergo erit angu-
h 15. 1. Th. lus ad F; [i] atq; adeo vterq; arcus BE, BF, quadrans erit. Igitur arcus BA, quadrante erit minor.
i 25. huius.

SIT denique arcus BC, quadrante maior. Dico & arcum AB, maiorem quadrante eſſe. Fiat enim rurſus angulus CBD, rectus, conueniatque arcus BD, cum CA, protracto in D; [l] eritque, vt prius, vterque arcus BD, CD, quadrans. Abſciſſo autem quadrante BG, [m] ducatur per puncta D, G, arcus circuli maximi DG, ſecans arcum AB, in H. Quoniam igitur arcus BD, BG, quadrantes ſunt, [n] erit vterque angulus BDG, BGD, rectus, & B, polus arcus DG. [o] Rectus ergo erit angulus ad H; [p] ac proinde vterque arcus BG, BH, erit quadrans. Quare AB, quadrante maior erit.

l 25. huius. m 10. 1. Th. n 25. & 26. huius. o 15. 1. The. p 25. huius.

ET quoniam arcus CD, ſemper oſtenſus eſt eſſe quadrans, erit arcus AG, quadrante minor. Quapropter in omni triangulo ſphærico, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 31. PROPOS. 33.

IN omni triangulo ſphærico, cuius vnus angulus rectus, & alter reliquorum acutus, ſi quidem arcus illis angulis adiacens fuerit quadrans, erit reliquus angulus rectus: ſi vero minor quadrante, acutus: ſi denique quadrante maior, obtuſus.

SIT in triangulo ABC, ſphærico angulus C, rectus, & B, acutus, ſitque primum arcus BC, quadrans. Dico reliquum angulum A, rectum eſſe. [a] Erit enim, & AB, quadrans. [b] Igitur vterque angulus C, A, rectus.

a 32. huius. b 25. huius.



SIT deinde arcus BC, quadrante minor. Dico angulum A, eſſe acutum. [c] Erit enim & arcus AB, quadrante minor; atque adeo arcus AB, BC, ſimul ſemicirculo erunt minores. [d] Quare anguli A, C, duobus rectis ſunt minores; ac proinde, cum C, ſit rectus, erit A, acutus.

c 32. huius. d 16. huius.

SIT tandem arcus BC, maior quadrante. Dico angulum A, obtuſum eſſe. [e] Erit enim & AB, quadrante maior; ac propterea arcus AB, BC, ſimul ſemicirculo maiores erunt. [f] Igitur anguli A, C, duobus rectis ſunt maiores; atque adeo, cum C, ſit rectus, erit A, obtuſus. Quocirca in omni triangulo ſphærico, cuius vnus angulus, &c. Quod erat oſtendendum.

e 32. huius. f 16. huius.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

IN omni triangulo ſphærico, cuius vnus angulus rectus, ſi vteruis reliquorum angulorum ſit rectus, erit arcus eum ſubtendens, quadrans: ſi vero acutus, quadrante minor: ſi denique obtuſus, maior quadrante. Et ſi vteruis arcuum rectum angulum continentium fuerit quadrans, erit angulus, quem ſubtendit, rectus: ſi vero minor quadrante, acutus: ſi deniq; quadrante maior, obtuſus.

SIT in triangulo ſphærico ABC, angulus C, rectus, ſitque primum alter reliquorum, nempe B, etiam rectus. Dico arcum AC, qui eum ſubtendit, quadrantem eſſe. Cum enim vterque angulus B, C, rectus ſit, [a] erit & vterque arcus AB, AC, quadrans.

a 25. huius.



SIT deinde B, angulus acutus. Dico arcum AC, eſſe quadrante minorem. Fiat enim angulus CBD, rectus coeatque arcus BD, cum arcu CA, producto in D. Quoniam igitur vterque angulus C, CBD, rectus eſt, [b] erit & vterque arcus BD, CD, quadrans; atque adeo arcus AC, minor erit quadrante.

b 25 huius.

SIT poſtremo angulus B, obtuſus. Dico arcum AC, quadrante maiorem eſſe. Fiat enim angulus CBE, rectus, ſecetque arcus BE, arcũ AC, in E. Quoniam igitur vterque angulus C, CBE, rectus eſt, [c] erit & vterq; arcus BE, CE, quadrans; atque adeo arcus AC, quadrante maior erit.

c 25. huius.

RVRSVM ſit angulus C, rectus, & ſit primum arcus AC, quadrans. Dico angulum ei ſubtenſum B, eſſe rectum. [d] Erit enim A, polus arcus BC, [e] (cum arcus CA, per polum arcus BC, tranſeat, ob angulum rectum C; [f] atque adeo angulus ABC, rectus.

d Corol 16. 1. Theod. e 13. 1. The. f 15. 1. The.

DEINDE ſit arcus AC, quadrante minor. Dico angulum ei ſubtenſum B, eſſe acutum. Producto enim arcu CA, ad D, vt ſit CD, quadrans, [g] erit eodem modo D, polus arcus CB; [h] cum arcus CA, per polum arcus BC, tranſeat. [i] Ducto ergo per puncta D, B, arcu DB, circuli maximi, [k] erit angulus DBC, rectus; ac proinde ABC, acutus.

g Coro. 16. 1. Theod. h 13. 1. The. i 20. 1. The. k 15. 1. The.

POSTREMO ſit arcus AC, maior quadrante. Dico angulum B, ei ſubtenſum obtuſum eſſe. Abſciſſo enim quadrante CE, [l] erit rurſum E, polus arcus BC; [m] propterea quod arcus CA, per polum arcus BC, tranſit. [n] Ducto ergo per puncta E, B, arcu EB, circuli maximi, [o] erit angulus EBC, rectus; atque adeo ABC, obtuſus. Quapropter, in omni triangulo ſphærico, &c. Quod erat demonſtrandum.

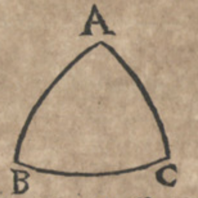
l Coroll. 16. 1. Theod. m 13. 1. Th. n 20. 1. Th. o 15. 1. The.

THEOR. 33. PROPOS. 35.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, ſi vterque arcuum comprehendentium angulum rectum, vel vnus tantum, fuerit quadrans, erit & arcus rectum angulum ſubtendens, quadrans: Si vero vterque dictorum arcuum minor fuerit quadrante, aut maior, erit arcus rectum angulum ſubtendens quadrante minor: ſi denique alter illorum maior fuerit quadrante, & alter minor, erit arcus rectum angulum ſubtendens maior quadrante.

IN triangulo ſphærico rectangulo ABC, ſit angulus B, rectus, & primum vterque arcus AB, BC, vel alter illorum tantum quadrans. Dico & arcum AC, qui rectum angulum ſubtendit, quadrantem eſſe. Si enim vterque arcus AB, BC, quadrans eſt, cum angulus B, ponatur rectus, [a] erit quoque arcus AC, quadrans. Si vero alter tantum arcuum AB, BC, eſt quadrans, ſit AB, quadrans. Quoniam igitur arcus AB, quadrãs eſt, [b] tranſitque per polos arcus BC, propter angulum rectum B, [c] erit A, polus arcus BC; [d] ac propterea angulus C, rectus erit. Cum ergo vterque angulus B, C, rectus ſit, [e] erit vterque arcus AB, AC, quadrans. Eodem modo ſi BC, ponatur quadrans oſtendemus AC, eſſe quadrantem. Erit enim ſimiliter C, polus arcus AB; ac proinde angulus A, rectus. Cum ergo vterque angulus B, A, rectus ſit, [f] erit vterque arcus BC, AC, quadrans.

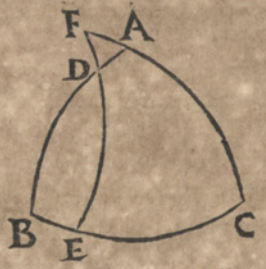
a 26. huius
b 13.1 Th.
c Corol 16. 1 Theod.
d 15.1. The.
e 25. huius.
f 25. huius.



SIT deinde vterque arcus AB, BC, quadrante minor, vel maior. Dico arcum AC, eſſe quadrante minorem. Si enim vterque eſt quadrante minor, producto arcu CB, ad partes B, & BA, ad partes A, vt ſint CD, BE, quadrantes, [g] ducatur per puncta DE, arcus circuli maximi DE, ſecans arcum CA, productum in F. Quoniam igitur in triangulo BED, angulus B, rectus eſt, & arcus BE, quadrans, [h] erit angulus D, quem ſubtendit, rectus. Rurſus quia in triãgulo CDF, angulus D, rectus eſt, & arcus DC, quadrans, [i] erit ſimiliter angulus F, rectus; [k] atq; idcirco vterq; arcus DC, FC, quadrans erit. Quare arcus AC, quadrante minor erit. Si vero vterq; arcus AB, BC, quadrante maior eſt abſciſſis quadrantibus BD, CE, [l] ducatur per puncta D, E, arcus circuli maximi ED, ſecans arcum CA, productum in F. Quoniam igitur in triangulo DBE, angulus B, rectus eſt, & arcus BD, quadrans [m] erit angulus E, quem BD, ſubtendit, rectus. Rurſus quia in triangulo CEF, angulus E, eſt rectus, & arcus EC, quadrans, [n] erit eodem modo angulus F, rectus. [o] Vterque ergo arcus CE, CF, quadrans erit; ac propterea arcus AC, quadrante minor.

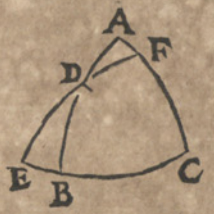
g 20.1. Th.
h 34. huius
34. huius.
k 25. huius.
l 20.1. The.
m 34. hui.
n 34. huius
o 25. huius.





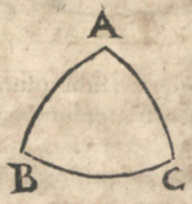
SIT poſtremo arcus AB, quadrante quidem maior, arcus vero BC, minor quadrante. Dico arcum AC, maiorem eſſe quadrante. Auferatur enim quadrans BD, & arcus CB, producatur ad E, vt CE, ſit quadrans; [p] ac per puncta D, E, arcus circuli maximi ducatur ED, ſecans arcum AC, in F. Quia igitur in triangulo BED, angulus B, rectus eſt, & arcus BD, quadrans, [q] erit angulus E, rectus. Rurſus, quia in triangulo CEF, angulus E, rectus eſt, & arcus EC, quadrans, [r] erit eadem ratione angulus F, rectus. [s] Vterque igitur arcus CE, CF, quadrans erit; ac proinde arcus AC, quadrante maior. In omni ergo triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

p 20.1. Th.
q 34. huiu.
r 34 huius.
s 25. huius.



THEOR. 34. PROPOS. 36.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, ſi arcus rectum angulum ſubtendens fuerit quadrans, erit vel vterque arcuum angulum rectum comprehendentium quadrans, vel alter illorum ſaltem: ſi vero fuerit minor quadrante, vterq; reliquorum vel minor, vel maior, quadrante erit: ſi denique quadrante maior fuerit, erit reliquorum alter maior quadrante, & alter minor.



SIT in triangulo ſphærico ABC, angulus B, rectus, & eum ſubtendens arcus AC, ſit primum quadrans. Dico vel vtrumque arcuum AB, BC, eſſe quoq; quadrantem, vel ſaltem alterum illorum. Si enim neuter illorum eſt quadrans erit vel vterque illorum maior, vel minor quadrante, [a] atque adeo arcus AC, quadrante minor; vel alter illorum quadrãte quidem maior, alter vero minor, [b] ac proinde arcus AC, quadrante maior; quorum vtrumque abſurdum eſt, cum arcus AC, ponatur quadrans. Erit ergo vel vterque arcus AB, BC, quadrans, vel ſaltem alter illorum.

a 35. huius.
b 35 huius.

DEINDE ſit arcus AC, quadrante minor. Dico vtrumque arcum AB, BC, eſſe vel quadrante minorem, vel maiorem. Si enim vterque non eſt minor, vel maior quadrante, erit vel vterque quadrans, [c] ideoque & arcus AC, quadrans; vel vnus illorum quadrans, & alter non, [d] atque idcirco & arcus AC, quadrans; vel vnus quidem quadrante minor, alter vero maior, [e] atque adeo & arcus AC, quadrante maior: quæ omnia abſurda ſunt, cum arcus AC, ponatur quad rante minor. Erit ergo vel vterque arcus AB, BC, minor quadrante: vel maior.

c 35. huius.
d 35. huius.
e 35. huius.

TERTIO ſit arcus AC, maior quadrante. Dico alterum reliquorum AB, BC; quadrante quidem eſſe maiorem alterum vero minorem. Si enim non eſt alter maior, & alter minor quadrante, erit vel vterque quadrans, vel alter ſaltem quadrans, & alter non, [f] ac proinde & arcus AC, quadrans; vel vterque minor quadrante, aut maior, [g] atque adeo arcus AC, quadrante minor: quæ omnia ſunt abſurda, cum arcus AC, maior ponatur, quã quadrans. Erit ergo alter arcuum AB, BC, quadrante quidem maior, alter vero minor. Quocirca in omni triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod demonſtrandum erat.

f 35. huius.
g 35. huius.

THEOR. 35. PROPOS. 37.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, ſi vterque reliquorum angulorum, vel alter ſaltem

ſaltem fuerit rectus, erit arcus rectum angulum ſubtendens, quadrans: ſi vero vterque reliquorum angulorum minor fuerit recto, vel maior, erit arcus ſubtendens angulum rectum quadrante minor: ſi denique alter reliquorum fuerit maior recto, & alter minor, erit arcus angulum rectum ſubtendens, quadrante maior.

IN triangulo ſphærico ABC, cuius angulus B, rectus, ſit primum vterque angulorum A, C, vel alter ſaltem nempe C, rectus. Dico arcum AC, qui rectum angulum B, ſubtendit, eſſe quadrantem. Si enim vterque angulus A, C, rectus eſt, vel C, tantum, erit triangulum ABC, rectangulum, habens angulum C, rectum: Eſt autem & angulus B, rectus. [a] Igitur arcus AC, quadrans erit. a 34. huius.



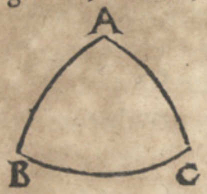
DEINDE ſit vterque angulus A, C, vel minor recto, vel maior. Dico arcum AC, quadrante eſſe minorem. Si namque vterque angulus A, C, eſt minor recto, [b] erit tam arcus BC, quam AB, minor quadrante; ſi vero vterque angulus A, C, maior eſt, recto, [c] erit tam arcus BC, quam AB, quadrante maior. Quare cum in triangulo ABC, angulus B, rectus ſit, & vterque arcus AB, BC, vel minor, vel maior quadrante, [d] erit ſemper arcus AC, quadrante minor. b 34. huius c 34. huius. d 35. huius.

TERTIO ſit angulus A, maior recto, & C, minor. Dico arcum AC, eſſe quadrante maiorem. Cum enim angulus A, obtuſus ſit, [e] erit arcus BC, maior quadrante: Et cum angulus C, acutus ſit, [f] erit arcus AB, quadrante minor. Igitur cum arcus BC, quadrante quidem maior ſit, & AB, minor, [g] erit arcus AC, quadrante maior. Quamobrem in omni triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod erat oſtendendnm. e 34. huius f 34. huius. g 35. huius.

THEOR. 36. PROPOS. 38.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, ſi arcus rectum angulum ſubtendens fuerit quadrans, erit ſaltem alter reliquorum angulorum rectus quoque: ſi vero minor quadrante, erit vterque reliquorum angulorum vel maior recto, vel minor: ſi denique quadrante maior, erit alter reliquorum angulorum maior recto, & alter minor.

IN triangulo ſphærico ABC, cuius angulus B, rectus, ſit primum arcus AC, ſubtendens angulum rectum B, quadrans. Dico ſaltem alterum angulorum A, C, rectum quoque eſſe. Cum enim angulus B, ſit rectus, & arcus AC, quadrans, [a] erit ſaltem alter arcuum AB, BC, quadrans, [b] atque adeo & angulus A, vel C, quem ille arcus ſubtendit, rectus erit. a 36. huius. b 34. huius



SIT deinde arcus AC, quadrante minor. Dico vtrumque angulorum A, C, eſſe maiorem, vel minorem recto. [c] Erit enim vterque arcus AB, BC, vel maior quadrante, vel minor. [d] Quare vterque angulus A, C, maior erit recto, vel minor. c 36. huius d 34 huius

POSTREMO ſit arcus AC, maior quadrante. Dico alterum angulorum A, C, eſſe recto maiorem, & alterum minorem. [e] Erit enim alter arcuum AB, BC, quadrante maior, & alter minor. [f] Igitur alter angulorum A, C, recto erit maior, & alter minor. Quapropter in omni triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod oſtendendum erat. e 36. huius. f 34. huius.

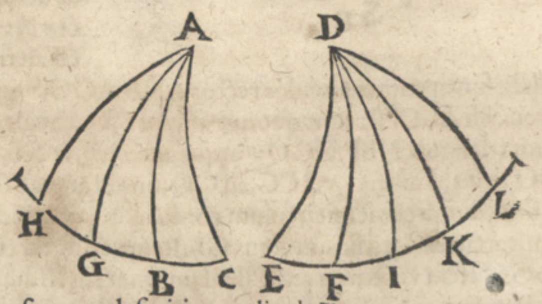
COROLLARIVM.

EX his omnibus colligitu.. In omni triangulo ſphærico, cuius vnus arcuum eſt quadrans, vnusque angulorum rectus, reliquorum quoque arcuum vnum ſaltem eſſe quadrantem, & reliquorum angulorum vnum ſaltem rectum. Nam ſi vnus angulorum rectus eſt, & alter arcuum ipſum comprehendentium quadrans, [g] erit & arcus rectum angulum ſubtendens quadrans; [h] & angulus quem prior quadrans ſubtendit rectus: Si vero arcus angulum rectum ſubtendens quadrans eſt, [i] erit & vel vterque arcuum rectum angulum comprehendentium, vel alter ſaltem quadrans; [k] & vel vterque reliquorum angulorum, vel alter ſaltem rectus. Itaque fieri non poteſt, vt detur triangulum ſphæricum rectangulum, cuius vnus duntaxat arcus ſit quadrans, ſed vel nullus erit quadrans, vel omnes tres, vel duo quadrantes erunt. g 35. huius. h 34. huius i 36. huius. k 38. huius. NOTA.

THEOR. 37. PROPOS. 39.

ANGVLI ſphærici eandem habent rationem, quam eorum arcus.

SINT duo anguli ſphærici BAC, EDF, quorum arcus BC, EF. Dico ita eſſe angulum A, ad angulum D, vt eſt arcus BC, ad arcum EF, [a] Erunt enim A, D, poli arcuum BC, EF; & arcus AB, AC, DE, DF, quadrantes. Productis igitur arcubus BC, EF, ſumantur quotcunq; arcus BG, GH, arcui BC, & quotcunque arcus FI, IK, KL, arcui EF, æquales; [b] ac per puncta G, H, I, K, L, & polos A, D, arcus circulorum maximorum ducantur AG, AH, DI, DK, DL, qui omnes quadrantes erunt, [c] nempe quadrantibus AB, AC, DE, DF, ęquales, propterea quod & rectæ ſubtenſæ AG, AH, DI, DK, DL, rectis ſubtenſis AB, AC, DE, DF, æquales ſunt, ex definition. poli. [d] Erunt ergo omnes anguli ad A, inter ſe æquales; atque adeo quam multiplex eſt arcus CH, arcus BC, tam multiplex erit aggregatum omnium angulorum ad A, anguli BAC: Eademque ratione tam multiplex erit aggregatum omnium angulorum ad D, anguli EDF, quam multiplex eſt arcus EL, arcus EF. Quoniam vero ſi arcus CH, arcui EL, æqualis fuerit, [e] etiam angulus HAC, angulo EDL, æqualis eſt; ſi autem arcus CH, maior fuerit arcu EL, a Deſin. 6. huius. b 20. 1. The. c 28. tertij. d 18. huius. e 18. huius.



f etiam



f12. huius. [f]etiam angulus HAC, angulo EDL, maior eſt; & ſi minor, minor; deficient propterea vna arcus CH, & angulus HAC, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BAC, ab arcu EL, & angulo EDL, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis EF, & quartæ EDF; vel vna æqualia erunt, vel vna excedent. g Defin. 6. quinti. [g] Quare quæ proportio eſt arcus BC, primæ magnitudinis ad arcum EF ſecundam magnitudinē, ea erit anguli BAC, tertiæ magnitudinis ad angulum EDF, quartam magnitudinem. Itaque anguli ſphærici eandem habent rationem, quam eorum arcus. Quod erat demonſtrandum.

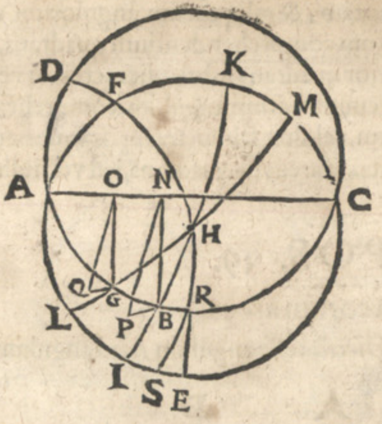
COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, ita eſſe angulum ſphæricum quemcunque ad quatuor angulos rectos ſphæricos, vt eſt arcus illius anguli ad totam circumferentiam circuli maximi; & contra. h 39. huius [h] Cum enim ſit angulus ſphæricus quicunque ad angulum rectum ſphæricum, vt arcus illius anguli ad quadrantem, nimirum ad arcum anguli recti i Scho. 22. quinti. [i] erit quoque idem angulus ad quadruplum anguli recti nempe ad quatuor rectos, vt idem arcus illius anguli ad quadruplum quadrantis, hoc eſt, ad totam circumferentiam, & contra.

THEOR. 38. PROPOS. 40.

SI duo circuli maximi in ſphæra ſe mutuo ſecent, & in eorum peripheriis duo puncta ſignentur, quorum vtrumque vel in eodem ſemicirculo ſumatur; vel in vno ſemicirculo vnum, & alterum in altero eiuſdem circuli; vel vnum in ſemicirculo vno vnius circuli, & alterum in ſemicirculo vtrolibet alterius circuli; atq; per vtrumq; horum punctorum arcus maximi circuli ducatur faciens cum peripheria alterius circuli, ad quamcunque partem, angulum rectum: habebit ſinus arcus intercepti inter vnum illorum punctorum, & alterutram ſectionem circulorum, ad ſinum arcus, qui per illud punctum ductus rectum cum peripheria alterius circuli angulum facit, eandem proportionem, quam habet ſinus arcus inter punctum alterum, & alterutram circulorum ſectionem interiecti, ad ſinum arcus, qui per illud punctum deſcriptus cum alterius circuli peripheria rectum conſtituit angulum.

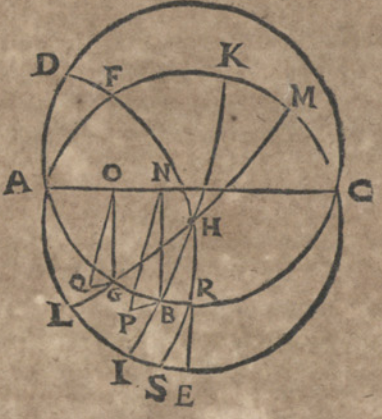
IN ſphæra duo circuli maximi ABCD, AECF, ſe mutuo ſecent in A, & C, & primum ad angulos non rectos; ſignenturque primum in eodem ſemicirculo ABC, duo puncta vtcunque B, G; a 20. 1. Th. [a] per quæ, & polum circuli AECF, qui ſit H, circuli maximi ducantur IBHK, LGHM; b 15. 1. The. [b] eruntque anguli ad I, L, K, M, recti. Dico eandem habere proportionem ſinum arcus AB, vel CB, ad ſinum arcus BI, vel BK, quam habet ſinus arcus AG, vel CG, ad ſinum arcus GL, vel GM. c 3. vndec. [c] Sit enim communis ſectio circulorum recta AC, d 12. prim. [d] ad quam ex B, G, perpendiculares agantur BN, GO, in plano circuli ABCD; eritque BN, ſinus rectus tam arcus AB, quam arcus CB, ex definitione ſinus recti; & eodem modo GO, ſinus vtriuſq; arcus AG, CG. e 31 vnde. [e] Demittantur ab eiſdem punctis B, G, ad planum circuli AECF, perpendiculares BP, GQ. f 38. vnde. [f] Et quoniam rectæ BP, GQ, cadunt in communes ſectiones circulorum IBK, LGM, cum circulo AECF, g 11. 1. The. [g] quem biſariam ſecant in punctis I, K; L, M, hoc eſt, cadunt in diametros circulorū maximorū IBK, LGM; h 15. 1. The. [h] (quod horum circulorum plana recta ſint ad planum circuli AECF,) ac proinde rectos angulos faciunt cum diametris circulorum IBK, LGM, ex defin. 3, lib. 11. Eucl. erit quoq; tam BP, ſinus rectus arcuum BI, BK, quam GQ, ſinus rectus arcuum GL, GM, ex definitione ſinus recti. Ducantur in plano circuli AECF, rectæ NP, OQ; eruntque per defin. 3. lib. 11. Eucl. anguli P, Q, recti, in triangulis NBP, OGQ. i 28. prim. [i] Quia vero tam rectæ BN, GO, parallelæ ſunt, propter angulos rectos ANB, AOG, k 6. vndec. [k] quam rectæ BP, GQ, cum hæ perpendiculares ſint ad planum circuli AECF; l 10. vnde. [l] erunt quoque anguli B, G, æquales in eiſdem triangulis NBP, OGQ. m 32. pri. [m] Æquiangula igitur ſunt triangula NBP, OGQ; n 4. ſexti. [n] atque adeo erit, vt NB, ſinus arcus AB, vel CB, ad BP, ſinum arcus BI, vel BK, ita OG, ſinus arcus AG, vel CG, ad GQ, ſinum arcus GL, vel GM, quomodocunque arcus ſumantur, cum cuilibet ſinui duo arcus ſemicirculum conficientes reſpondeant. Hoc eſt, erit, vt ſinus arcus AB ad ſinum arcus BI, ita ſinus arcus AG, ad ſinum arcus GL. Item vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus BK, ita ſinus arcus AG, ad ſinum arcus GM. Item vt ſinus arcus CB, ad ſinum arcus BI, ita ſinus arcus CG, ad ſinum arcus GL. Item vt ſinus arcus CB, ad ſinum arcus BK, ita ſinus arcus CG, ad ſinum arcus GM. Item vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus BI, ita ſinus arcus CG, ad ſinum arcus GM, &c.



DEINDE ſumatur vnum punctum, puta B, in ſemicirculo ABC, & alterum, nempe D, in altero ſemicirculo CDA, eiuſdem circuli, o 20. 1. The. [o] ducanturque per puncta B, D, & polum circuli AECF, qui ſit H, duo arcus circulorum maximorum IBK, DFS, p 15. 1. Th. [p] eruntque anguli recti F, I, S, K. Dico rurſus, vt eſt ſinus arcus AB, vel CB, ad ſinum

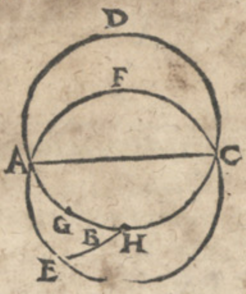
num arcus BI, vel BK, ita eſſe ſinum arcus AD, vel CD, ad ſinum arcus DF, vel arcus, qui cum arcu FD, ſemicir-
culum perficit à puncto D, vſque ad punctum S, ſemicirculi AEC. Nam arcus ab F, per D, vſque ad S, ſemicir-
culus eſt, [q] cum circuli AECF, DFS, ſe mutuo bifariam ſecent in F, S. [r] Sumatur enim arcui AD, arcus AG, æ- q 11.1.The. r 1. huius.
qualis, [s] & per G, & polum circuli AECF, nempe per H, arcus maximi circuli ducatur LGM; [t] eruntque anguli s 20.1.The.
L, M, recti. Quoniam igitur duo anguli A, L, trianguli AGL, duobus angulis A, F, trianguli ADF, æquales ſunt, t 15.1.The.
([u] ſunt enim duo anguli A, ad verticem æquales, & anguli L, F, recti) ſuntque latera AG, AD, rectos ſubten- u 6. huius.
dentia angulos, per conſtructionem, æqualia; [x] erunt quoque arcus GL, DF, æquales, ac propterea & eorum ſi- x 21. huius.
nus æquales erunt, necnon & ſinus arcuum æqualium AG, AD, erunt æquales. Eadem ergo eſt proportio ſinus
arcus AG, ad ſinum arcus GL, quæ ſinus arcus AD, ad ſinum arcus DF: Vt autem ſinus arcus AG, ad ſinum ar-
cus GL, ita demonſtratum eſt, eſſe ſinum arcus AB, vel CB, ad ſinum arcus BI, vel BK, propterea quod puncta
B, G, in eodem ſemicirculo ſumpta ſunt. Igitur erit quoque, vt ſinus arcus AB, vel CB, ad ſinum arcus BI, vel
BK, ita ſinus arcus AD, ad ſinum arcus DF, &c.

POSTREMO ſumatur in ſemicirculo ABC, punctum B, & in alterius circuli ſemicirculo vtrouis nempe
in AEC, aliud punctum L: [y] Et per B, & polum circuli AEC, arcus maximi circuli ducatur IBK: Item per L, & y 20.1.Th.
per polum circuli ABC, arcus LGM, maximi circuli; [z] eruntq; z 15.1.The.
anguli I, G, recti. Dico rurſus, vt eſt ſinus arcus AB, ad ſinum
arcus BI, ita eſſe ſinum arcus AL, ad ſinum arcus LG, &c. [a] Per a 20.1.Th.
polos enim vtriuſque circuli ABCD, AECF, arcus circuli ma-
ximi ducatur RE; [b] eruntque anguli R, E, recti, [c] diuidenturq; b 15.1.The. c 9.2.The.
ſemicirculi ABC, AEC, bifariam in punctis R, E, atque adeo
ſinus quadrantũ AR, AE, æquales erunt; [d] Eademq; proportio d 7. quinti.
erit ſinus arcus AR, ad ſinũ arcus RE, quæ ſinus arcus AE, ad ſi-
nũ arcus ER. Quoniã vero eſt, vt ſinus arcus AR, ad ſinũ arcus



ita ſinus arcus AB, ad ſinũ arcus BI, vt demonſtratum eſt; (ſum
pta ſunt enim duo puncta R, B, in eodẽ ſemicirculo) erit quo-
que, vt ſinus arcus AE, ad ſinum arcus ER, ita ſinus arcus AB,
ad ſinum arcus BI: Sed eadem ratione eſt, vt ſinus arcus AE, ad
ſinum arcus ER, ita ſinus arcus AL, ad ſinum arcus LG. Igitur
erit quoque, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus BI, ita ſinus ar-
cus AL, ad ſinum arcus LG, &c. Quod ſi loco puncti L, ſuma-
tur in altero ſemicirculo AFC, eiuſdem circuli AECF, aliud punctum, nempe F, & arcus FD, faciat angulum
D, rectum, erit adhuc, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus BI, ita ſinus arcus AF, ad ſinum arcus FD, &c. Vt enim
proxime oſtendimus, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus BI, ita eſt ſinus arcus AL, ad ſinum arcus LG. Vt autem
ſinus arcus AL, ad ſinum arcus LG, ita demõſtratum eſt, eſſe ſinum arcus AF, ad ſinum arcus FD, quod puncta
L, F, ſumatur in duobus ſemicirculis eiuſdem circuli. Igitur erit quoque, vt ſinus arcus AB, ad ſinũm arcus BI, ita
ſinus arcus AF, ad ſinum arcus FD: Atque ita in vniuerſum vera eſt propoſitio, quomodocunque duo puncta
ſumantur, quando circuli ABCD, AECF, ſe mutuo ſecant ad angulos non rectos.

SED iam circuli ABCD, AECF, ſecent ſe mutuo ad angulos rectos
in punctis A, C; ſitq; eorum communis ſectio recta AC. Diuiſo autem v.g.
ſemicirculo ABC, bifariam in H, vt ſiat quadrantes AH, CH, ſumantur duo
puncta vtcunque B, G. Dico ita eſſe rurſus ſinum arcus AB, ad ſinum arcus,
qui per B, ductus rectos angulos facit cum circulo AECF, vt eſt ſinus arcus
AG, ad ſinum arcus, qui per G, ductus cum circulo AECF, rectos facit an-
gulos. Quoniam enim circulus ABC, cum rectus ad circulum AEC, pona-
tur, [e] tranſit per polos circuli AEC, [f] erit H, polus circuli AEC. Quare arcus



perpendiculares ad circulum AEC, per puncta B, G, ducti, [g] neceſſario per e 13.1.The. f Coroll. 16. 1. Theod.
H, tranſibunt; atque adeo arcus illi erunt BA, GA: Perſpicuum autem eſt, vt
eſt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus BA, ita eſſe ſinum arcus AG, ad ſinum arcus GA, cum vtrobique ſit propor- g 13.1.The.
tio æqualitatis, ſeu identitatis: Eſt enim idem ſinus arcus AB, & arcus BA, necnon idem ſinus arcus AG, &
arcus GA.

QVOD ſi alterum punctorum ſit H, polus circuli AEC, [h] erit quicunque arcus ex H, ductus, qualis eſt h 15.1.The.
HE, perpendicularis, ad AEC, [i] atque adeo quadrans. Rurſus igitur manifeſtum eſt, ita eſſe ſinum arcus AB, ad i Corol. 16. 1. Theod.
ſinum arcus BA, vt eſt ſinus arcus AH, ad ſinum arcus HE, vel HA; cum vtrobique quoque ſit æqualitatis pro-
portio, &c. Si duo ergo circuli maximi in ſphæra ſe mutuo ſecent, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt ex demonſtratis: Si duo circuli ſe mutuo ſecent, & in vno eorum ex duob. punctis vtcunq; aſſumptis ducantur ad alterius circuli planum duæ lineæ rectæ perpendiculares; ita eſſe ſinum rectum arcus intercepti inter vnum illorũ punctorum, & alterutram circulorum ſectionem, ad perpendicularẽ ex illo puncto in planũ alterius circuli demiſſam, vt eſt ſinus rectus arcus inter alterum punctum, & alterutram ſectionẽ circulorũ interiecti, ad perpendicularẽ ab hoc altero pũcto in planũ alterius circuli demiſſam. Nã in priori figura huius prop. oſtenſum eſt, ita eſſe ſinũ arcus AB, vel CB, ad BP, ſinũ rectũ arcus BI, vt eſt ſinus arcus AG, vel CG, ad GQ, ſinum rectum arcus GL. Cum ergo ſinus BP, GQ, ſint perpendiculares ex pũctis B, G, in planum circuli AECF, demiſſæ, patet propoſitum. Quod ſi vnum punctorum acceptum ſit B, ex vna parte ſectionis A, & alterum punctum acceptum ſit D, ex altera parte ſectionis A, in eodem circulo; erit nihilominus ita ſinus arcus AB, ad perpendicularẽ BP, ex B, demiſſam in planũ alterius circuli AECF, vt ſinus arcus AD, ad perpendicularẽ, quæ ex D, in planũ alterius circuli AECF, demitteretur: propterea ꝙ oſtenſum eſt, ita eſſe ſinũ arcus AB, ad ſinũ arcus BI, vt eſt ſinus arcus AD, ad ſinum arcus DF: qui quidẽ ſinus arcuum BI, DF, ſunt perpendiculares ex punctis B, D, in planũ circuli AECF, cadentes, vt ex demonſtratis in hac propoſ. liquido conſtat. Idem perſpicitur in figura poſteriori; cum ibi etiam ſit, vt ſinus arcus AB, ad perpendicularem

larem ex B, in planum circuli AECF, demiſſam, ita ſinus arcus AG, ad perpendicularem ex G, in planum circuli AECF, demiſ-
k 38. vnd. *ſam: propterea quod ſinus arcuum AB, AG, ſunt ipſæmet perpendiculares ex B, G, in planum circuli AECF, demiſſæ*[k] *cadentes in rectam AC, communem circulorum ſectionem, vt patet.*

HINC facile demonſtrari poterunt ſequentia theoremata, quorum nonnulla plurimum ad ſphæricorum triangulorum calculum conducunt. Primum autem ac ſecundum ſunt duo Theoremata Ptolemæi Cyclica in primo lib. Almageſti, ſed multo breuius, ac facilius demonſtrata ex iis, quæ in hoc ſcholio oſtenſa ſunt. Vnde omittenda non videbantur, licet eorum vſus in hiſce triangulis non appareat.

I.

SI in ſphæræ ſuperficie ab vno puncto duo arcus maximorum circulorum educantur, quorum vterque ſemicirculo ſit minor, & ab eorum terminis in ipſos reflectantur alij duo arcus maximorum circulorum ſe inter duos illos priores arcus interſecantes: proportio, quam ſinus ſegmenti vnius eductorum arcuum inter terminum eius, & arcum reflexum habet ad ſinum alterius ſegmenti eiuſdem arcus educti, componitur ex proportione, quam ſinus ſegmenti arcus reflexi inter eundem terminum, & alterum arcum reflexum habet ad ſinum alterius ſegmenti eiuſdem arcus reflexi, & ex proportione, quam ſinus ſegmenti alterius eductorum arcuum inter eius terminum, & arcum reflexum habet ad ſinum totius eiuſdem arcus educti.

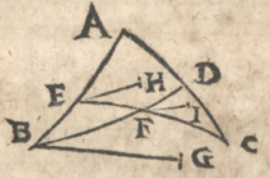


a Schol. 40. huius & permutando.

EX puncto A, in ſuperficie ſphæræ educantur duo arcus AB, AC, ſemicirculis minores, & à terminis B, C, reflectantur ad ipſos duo arcus BD, CE, ſe interſecantes in F. Dico proportionem ſinus arcus BE, ad ſinum arcus EA, componi ex proportione ſinus arcus BF, ad ſinum arcus FD, & ex proportione ſinus arcus CD, ad ſinum arcus CA. Ductis enim ex punctis B, A, D, ad planum circuli CE, tribus perpendicularibus BG, AH, DI; quoniam duo circuli AB, CE, ſe mutuo ſecant in E, & ex punctis B, A, in planum circuli CE, demiſſæ ſunt perpendiculares BG, AH,[a] *erit vt ſinus arcus EB, ad ſinum arcus EA, ita recta BG, ad rectam AH: Item quoniam duo circuli BD, CE, ſe mutuo ſecant in F, & ex punctis B, D, in planum circuli CE, deductæ ſunt perpendiculares BG, DI; erit eadem ratione, vt ſinus arcus FB, ad ſinum arcus FD, ita recta BG, ad rectam DI: Denique quia duo circuli AC, CE, ſe interſecant in C, & ex punctis D, A, in planum circuli CE, demiſſæ ſunt perpendiculares rectæ lineæ DI, AH; erit ſimiliter, vt ſinus arcus CD, ad ſinum arcus CA, ita recta DI, ad rectam AH. Proportio autem rectæ BG, ad rectam AH, (poſita media linea DI,) componitur ex proportione rectæ BG, ad rectã DI, & ex proportione rectæ DI, ad rectam AH. Igitur & proportio ſinus arcus BE, ad ſinum arcus EA, (quæ eadem eſt, quæ proportio BG, ad AH,) componetur ex proportione ſinus arcus BF, ad ſinum arcus FD, (quæ eadem eſt, quæ proportio BG, ad DI,) & ex proportione ſinus arcus CD, ad ſinum arcus AC, (quæ eadem eſt, quæ DI, ad AH.) Quod eſt propoſitum.*

II.

IISDEM poſitis, proportio ſinus vnius arcuum eductorum ad ſinum ſegmenti eiuſdem arcus inter punctum eductionis, & arcum reflexum, componitur ex proportione ſinus arcus reflexi à termino dicti arcus ad ſinum ſegmenti eiuſdem arcus reflexi inter alterum arcum eductum, & alterum arcum reflexum, & ex proportione ſinus ſegmenti alterius arcus reflexi inter terminum alterius arcus educti, & priorem arcum reflexum ad ſinum totius poſterioris arcus reflexi.



a Schol. 40. huius. & permutando.

HOC eſt, proportio ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AE, componitur ex proportione ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DF, & ex proportione ſinus arcus CF, ad ſinum arcus CE. Ductis enim ex punctis B, E, F, ad planum circuli AC, tribus perpendicularibus BG, EH, FI; quoniam duo circuli AB, AC, ſe mutuo ſecant in A, & ex punctis B, E, in planum circuli AC, demiſſæ ſunt perpendiculares BG, EH;[a] *erit, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AE, ita recta BG, ad rectam EH: Item quia duo circuli BD, AC, ſe interſecant in D, & ex punctis B, F, in planum circuli AC, deductæ ſunt perpendiculares BG, FI; erit pari ratione, vt ſinus arcus DB, ad ſinum arcus DF, ita recta BG, ad rectam FI. Denique quoniam duo circuli AC, CE, ſe in C, interſecant & ex punctis F, E, in planum circuli AC, demiſſæ ſunt perpendiculares FI, EH; erit eadem argumentatione, vt ſinus arcus CF, ad ſinum arcus CE, ita recta FI, ad rectam EH. Componitur autem proportio rectæ BG, ad rectam EH, (poſita media linea FI,) ex proportione rectæ BG, ad rectam FI, & ex proportione rectæ FI, ad rectam EH. Igitur & proportio ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AE, (quæ eadem eſt, quæ BG, ad EH,) componetur ex proportione ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DF, (quæ eadem eſt, quæ BG, ad FI,) & ex proportione ſinus arcus CF, ad ſinum arcus CE, (quæ eadem eſt, quæ FI, ad EH.) Quod eſt propoſitum.*

III.

IISDEM poſitis, proportio ſinus vnius arcuum eductorum ad ſinum ſegmenti eiuſdem arcus inter eius terminum, & arcum reflexum, componitur ex proportione ſinus ſegmenti alterius arcus educti inter punctum eductionis, & arcum reflexum ad ſinum reliqui ſegmenti, & ex proportione ſinus ſegmenti arcus reflexi à termino poſterioris arcus educti inter terminum arcum reflexum ad ſinum reliqui ſegmenti eiuſdem arcus reflexi.

HOC

HOC eſt, (repetita figura primi theorematis) proportio ſinus arcus AC, ad ſinũ arcus CD, componitur ex proportione ſinus arcus AE, ad ſinum arcus EB, & ex proportione ſinus arcus BF, ad ſinum arcus FD. Quoniam enim duo circuli AC, CE. ſe interſecant in C, & ex punctis A, D, demiſſæ ſunt perpendiculares AH, DI, ad planum circuli CE; [a] *erit, vt ſinus arcus CA, ad ſinum arcus CD, ita recta AH, ad rectam DI: Item quoniam duo circuli AB, CE, ſe mutuo ſecant in E, & ex punctis A, B, in planum circuli CE, deductæ ſunt perpendiculares AH, BG; erit ſimili modo, vt ſinus arcus EA, ad ſinum arcus EB, ita recta AH, ad rectam BG: Denique quia duo circuli BD, CE, ſe mutuo ſecant in F, & ex punctis B, D, ad planum circuli CE, ductæ ſunt perpendiculares BG, DI; erit eadem ratione, vt ſinus arcus FB, ad ſinum arcus FD, ita recta BG, ad rectam DI. Componitur autem proportio rectæ AH, ad rectam DI, (poſita media linea BG,) ex proportione rectæ AH, ad rectam BG, & ex proportione rectæ BG, ad rectam DI. Igitur & proportio ſinus arcus AC, ad ſinum arcus CD, (quæ eadem eſt, quæ AH, ad DI,) componetur ex proportione ſinus arcus AE, ad ſinum arcus EB, (quæ eadem eſt, quæ AH, ad BG,) & ex proportione ſinus arcus BF, ad ſinum arcus FD, (quæ eadem eſt, quæ BG, ad DI.) Quod eſt propoſitum.*



a Schol. 40. huius, & permutando.

IV.

IISDEM poſitis, proportio ſinus ſegmenti vnius arcuum reflexorum inter terminum arcus educti, & alterum arcum reflexum ad ſinum reliqui ſegmenti, componitur ex proportione ſinus ſegmenti vnius arcuum eductorum inter eundem terminum, & alterum arcum reflexum ad ſinum reliqui ſegmenti, & ex proportione ſinus alterius arcus educti ad ſinum ſegmenti illius inter terminum, & arcum reflexum.

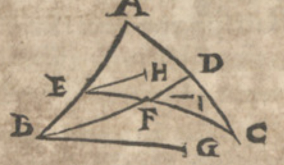
HOC eſt, (repetita eadem figura primi theorematis) proportio ſinus arcus BF, ad ſinum arcus FD, componitur ex proportione ſinus arcus BE, ad ſinum arcus EA, & ex proportione ſinus arcus AC, ad ſinum arcus CD. Cum enim duo circuli BD, CE, ſe mutuo ſecent in F, & ex BD, ad planum circuli CE, perpendiculares BG, DI, ſint demiſſæ; [a] *erit, vt ſinus arcus FB, ad ſinum arcus FD, ita recta BG, ad rectam DI: Quia item duo circuli BA, CE, ſe mutuo ſecant in E, & ex punctis B, A, ad circulum CE, perpendiculares ductæ ſunt BG, AH: erit quoque, vt ſinus arcus EB, ad ſinum arcus EA, ita recta BG, ad rectam AH: Denique quia duo circuli AC, CE, ſeſe in C, ſecāt, & ex punctis A, D, ad planum circuli CE, demiſſæ ſunt perpendiculares AH, DI; erit ſimiliter, vt ſinus arcus CA, ad ſinum arcus CD, ita recta AH, ad rectam DI. Proportio autem rectæ BG, ad rectam DI, (poſita media linea AH,) componitur ex proportione rectæ BG, ad rectam AH, & ex proportione rectæ AH, ad rectam DI. Igitur & proportio ſinus arcus BF, ad ſinum arcus FD, (quæ eadem eſt, quæ BG, ad DI,) componetur ex proportione ſinus arcus BE, ad ſinum arcus EA, (quæ eadem eſt, quæ BG, ad AH,) & ex proportione ſinus arcus AC, ad ſinum arcus CD, (quæ eadem eſt, quæ AH, ad DI.) Quod eſt propoſitum.*

a Schol. 40. huius, & permutando.

V.

IISDEM poſitis, proportio ſinus vnius arcuum reflexorum ad ſinum ſegmenti eiuſdem inter terminum arcus educti, & alterum arcum reflexum, componitur ex proportione ſinus ſegmenti alterius arcus educti inter punctum eductionis, & arcum reflexum ad ſinum totius arcus educti; & ex proportione ſinus alterius arcus reflexi ad ſinum ſegmenti eiuſdem inter priorem arcum eductum & priorem arcum reflexum.

HOC eſt, (repetita figura ſecundi theorematis) proportio ſinus arcus CE, ad ſinum arcus CF, componitur ex proportione ſinus arcus AE, ad ſinum arcus AB, & ex proportione ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DF. Nam cum duo circuli AC, CE, ſe in C, mutuo ſecent, & ex punctis E, F, ad planum circuli AC, ductæ ſint perpendiculares EH, FI, [a] *erit vt ſinus arcus CE, ad ſinum arcus CF, ita recta EH, ad rectam FI: Item cum duo circuli AB, AC, ſe interſecent in A, & ex punctis E, B, ad planum circuli AC, cadant perpendiculares EH, BG; erit etiam, vt ſinus arcus AE, ad ſinum arcus AB, ita recta EH, ad rectam BG: Quia denique duo circuli AC, BD, ſe mutuo ſecant in D, & ex punctis B, F, ad planum circuli AC, demiſſæ ſunt perpendiculares BG, FI, erit pari ratione, vt ſinus arcus DB, ad ſinum arcus DF, ita recta BG, ad rectam FI. Componitur autē proportio rectæ EH, ad rectā FI, (poſita media linea BG,) ex proportione rectæ EH, ad rectam BG, & ex proportione BG, ad rectam FI. Igitur proportio quoque ſinus arcus CE, ad ſinum arcus CF, (quæ eadem eſt, quæ EH, ad FI,) componetur ex proportione ſinus arcus AE, ad ſinum arcus AB, (quæ eadem eſt, quæ EH, ad BG,) & ex proportione ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DF, (quæ eadem eſt, quæ BG, ad FI.) Quod eſt propoſitum.*

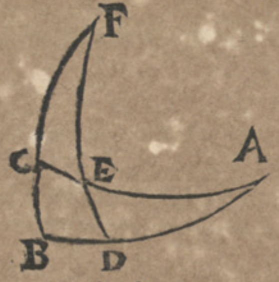


a Scho. 40. huius, & permutando.

VI.

SI in ſphæræ ſuperficie duo maximi circuli ſe mutuo non ad angulos rectos ſecent, & à duobus punctis in vno aſſumptis ad alterum circulum ducantur duo arcus perpendiculares: Erit, vt ſinus arcus inter punctum interſectionis, & alterutrum angulorum rectorum intercepti ad tangentem illius arcus perpendicularis, ita ſinus arcus inter punctum interſectionis, & alterum angulum rectum interiecti ad tangentem alterius huius arcus perpendicularis.

DVO circuli maximi AB, AC, ſe mutuo ſecent in A, non ad angulos rectos, & ex punctis C, E, in circulo AC, aſſumptis ad circulum AB, ducantur arcus perpendiculares CB, ED. Dico ita eſſe ſinum arcus AB, ad tangentem arcus CB, vt eſt ſinus



a 25. huius. b Theorema 3. huius ſcholij. c 18. Sinuū

arcus AD, ad tangentem arcus ED. Productis enim arcubus BC, DE, donec coeant in F,[a] erunt BF, DF, quadrantes. Quoniam vero à puncto B, duo arcus maximorum circulorum BA, BF, educuntur, ab eorumque terminis A, F, ad ipſos duo arcus AC, FD, reflectuntur ſe interſecantes in E;[b] componetur proportio ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AD, ex proportione ſinus arcus BC, ad ſinum arcus CF, & ex proportione ſinus arcus EF, ad ſinum arcus DE.[c] Eſt autem, (cum CF, ſit complementum arcus BC,) vt ſinus arcus CF, ad ſinum arcus BC, ita ſinus totus ad tangentem arcus BC; conuertendoque vt ſinus arcus BC, ad ſinum arcus CF, ita tangens arcus BC ad ſinum totum: Item (cum EF, ſit complementum arcus DE,) vt ſinus arcus EF, ad ſinum arcus DE, ita ſinus totus ad tangentem arcus DE. Igitur proportio ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AD, componetur quoque ex proportione tangentis arcus BC, ad ſinum totum, & ex proportione ſinus totius ad tangentem arcus DE. Cum ergo & proportio tangentis arcus BC, ad tangentem arcus DE, componatur ex proportione tangentis arcus BC, ad ſinum totum, & ex proportione ſinus totius ad tangentem arcus DE; quod ſinus totus inter dictas tangentes ſit poſitus: erit, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AD, ita tangens arcus BC, ad tangentem arcus DE; & permutando, vt ſinus arcus AB, ad tangentem arcus CB, ita ſinus arcus AD, ad tangentem arcus ED. Quod eſt propoſitum.

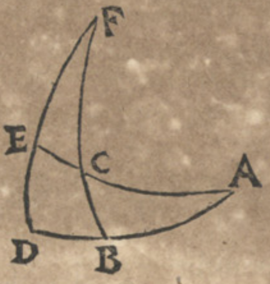
VII.

SI in ſphæræ ſuperficie duo quadrantes maximorum circulorum ſe interſecent ad angulos non rectos, & per extrema puncta arcus maximi circuli ducatur, necnon ab aliquo puncto vnius quadrantis ad alterum arcus perpendicularis demittatur: Erit, vt ſinus totus ad tangentem huius arcus perpendicularis, ita tangens complementi arcus per extremitates quadrantum ducti ad ſinum arcus quadrantis, ad quem perpendicularis arcus demiſſus eſt, inter punctum ſectionis, & arcum perpendicularem interiecti.

a 25. huius. b 25. huius

DVO quadrantes maximorum circulorum AD, AE, ſecent ſeſe in A, ad angulos non rectos, & per D, E, arcus circuli maximi deſcribatur DE:[a] eruntque anguli D, E, recti. Item ex C, puncto quocunque demittatur ad AD, arcus perpendicularis CB: Productis autem arcubus DE, BC, donec in F, coeant,[b] erunt DF, BF, quadrantes. Dico ita eſſe ſinum totum ad tangentem arcus BC, vt eſt tangens arcus EF, qui complementum eſt arcus DE, ad ſinum arcus AB. Quoniam enim à puncto D, duo arcus circulorum maximorum educti ſunt DA, DF, & ab eorum terminis A, F, duo alij reflectuntur AE, FB, ſecantes ſeſe in C;[c] erit proportio ſinus arcus CF, ad ſinum arcus BC, compoſita ex proportione ſinus arcus EF, ad ſinum arcus DE, & ex proportione ſinus totius quadrantis AD, ad ſinum arcus AB.[d] Eſt autem, (cum CF, ſit complementum arcus BC,) vt ſinus arcus CF, ad ſinum arcus CB, ita ſinus totus ad tangentem arcus BC: Item, (cum DE, ſit complementum arcus EF,) vt ſinus arcus DE, ad ſinum arcus EF, ita ſinus totus ad tangentem arcus EF; & conuertendo, vt ſinus arcus EF, ad ſinum arcus DE, ita tangens arcus EF, ad ſinum totum. Igitur & proportio ſinus totius ad tangentem arcus BC, compoſita erit ex proportione tangentis arcus EF, ad ſinum totum, & ex proportione ſinus totius quadrantis AD, ad ſinum arcus AB. Cum ergo proportio tangentis arcus EF, ad ſinum arcus AB, componatur quoque ex proportione tangentis arcus EF, ad ſinum totum, & ex proportione ſinus totius ad ſinum arcus AB; quod ſinus totus ſit medius inter illam tangentem, & hunc ſinum: erit, vt ſinus totus ad tangentem arcus BC, ita tangens arcus EF, ad ſinum arcus, AB. Quod eſt propoſitum.

c Theorema 4. hui. ſcholij. d 18. Sinuū



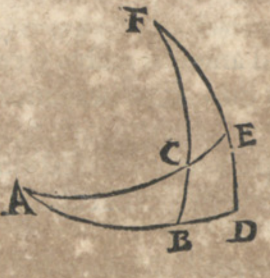
VIII.

SI in ſphæræ ſuperficie duo maximi circuli ad angulos non rectos ſe mutuo ſecent, & à duobus punctis in vno aſſumptis ad alterum circulum duo arcus perpendiculares ducantur: Erit, vt ſinus arcus inter punctum ſectionis, & alterutrum punctorum ſumptorum ad ſecantem complementi arcus per reliquum punctum aſſumptum ducti, ita ſinus arcus inter punctum ſectionis, & reliquum hoc punctum ſumptum ad ſecantem complementi arcus per alterum illud punctum aſſumptum ducti.

a 25. huius.

IN proxima figura ſecent ſeſe duo maximi circuli AD, AE, in A, ad angulos non rectos, & ex punctis C, E, ad AD, arcus perpendiculares ducantur CB, ED, producanturque, donec coeant in F.[a] Erunt BF, DF, quadrantes, ac propterea CF, EF, complementa arcuum BC, DE. Dico ita eſſe ſinum arcus AE, ad ſecantem arcus CF, vt eſt ſinus arcus AC, ad ſecantem arcus EF. Quoniam enim à puncto D, duo arcus educuntur DA, DF, à quorum terminis A, F, duo alij ad ipſos reflectuntur AE, FB, ſe interſecantes in C;[b] erit proportio ſinus arcus AE, ad ſinum arcus AC, compoſita ex proportione ſinus arcus DE, ad ſinum totum quadrantis DF, & ex proportione ſinus totius quadrantis BF, ad ſinum arcus BC.[c] Eſt autem, vt ſinus arcus DE, ad ſinum totum quadrantis DF, ita ſinus totus ad ſecantem arcus EF;[d] propterea quod ſinus totus medio loco proportionalis eſt inter ſinum rectum arcus DE, & ſecantem arcus EF, qui complementum eſt arcus DE: Eademque ratione ita eſt ſecans arcus CF, ad ſinum totum, vt ſinus totus quadran-

b Theorema 5. huius ſcholij. c 18. Sinuū. d 18. Sinuū



quadrantis BF, ad ſinum arcus BC; quod ſinus totus medio quoque loco ſit proportionalis inter ſecantem arcus CF, qui complementum eſt arcus BC, & ſinum rectum arcus BC. Igitur proportio ſinus arcus AE, ad ſinum arcus AC, componetur quoque ex proportione ſecantis arcus CF, ad ſinum totum, & ex proportione ſinus totius ad ſecantem arcus EF. Cum ergo & proportio ſecantis arcus CF, ad ſecantem arcus EF, componatur ex proportione ſecantis arcus CF, ad ſinum totum, & ex proportione ſinus totius ad ſecantem arcus EF; quod ſinus totus ſit medius inter has ſecantes: erit, vt ſinus arcus AE, ad ſinum arcus AC, ita ſecans arcus CF, ad ſecantem arcus EF; & permutando, vt ſinus arcus AE, ad ſecantem arcus CF, ita ſinus arcus AC, ad ſecantem arcus EF. Quod eſt propoſitum.

ALITER. [c] *Quoniam eſt, vt ſinus arcus AE, ad ſinum arcus ED, ita ſinus arcus AC, ad ſinum arcus CB; hoc eſt, permutando, vt ſinus arcus AE, ad ſinum arcus AC, ita ſinus arcus ED, ad ſinum arcus CB:* [f] *Eſt autem ita ſecans arcus CF, ad ſecantem arcus EF, vt ſinus arcus ED, qui complementum eſt poſterioris arcus EF, ad ſinum arcus CB, qui complementum eſt arcus prioris CF; erit quoque, vt ſinus arcus AE, ad ſinum arcus AC, ita ſecans arcus CF, ad ſecantem arcus EF. Et permutando, vt ſinus arcus AE, ad ſecantem arcus CF, ita ſinus arcus AC, ad ſecantem arcus EF. Quod eſt propoſitum.* c 40. huius f 22. Sinuū.

EADEM hæc demonſtratio locum etiam habet, licet duo puncta aſſumpta ſint ad diuerſas partes puncti ſectionis. Secent enim rurſum ſeſe duo circuli maximi EF, BA, in D; & à punctis F, E, arcus EF, ducantur ad BA, arcus perpendiculares FA, EB. Dico ita eſſe ſinum arcus ED, ad ſecantem complementi arcus FA, vt eſt ſinus arcus DF, ad ſecantem complementi arcus EB. [g] *Nam quoniam eſt, vt ſinus arcus ED, ad ſinum arcus EB, ita ſinus arcus DF, ad ſinum arcus FA; & permutando, vt ſinus arcus ED, ad ſinum arcus DF, ita ſinus arcus EB, ad ſinum arcus FA:* [h] *Vt autem ſinus arcus EB, ad ſinum arcus FA, ita eſt ſecans complementi arcus FA, ad ſecantem complementi arcus EB: erit quoque, vt ſinus arcus ED, ad ſinum arcus DF, ita ſecans complementi arcus FA, ad ſecantem complementi arcus EB; & permutando, vt ſinus arcus ED, ad ſecantem complementi arcus FA, ita ſinus arcus DF, ad ſecantem complementi arcus EB. Quod eſt propoſitum.* g 40. huius. h 22. Sinuū



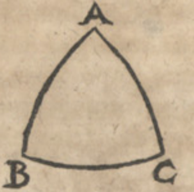
REPETIVIMVS autem hic figuram quartam propoſ. 35. licet arcuum BC, CF, nulla fiat mentio, ne nouam figuram cogeremur extruere.

THEOR. 39. PROPOS. 41.

IN omni triangulo ſphærico, ſinus cuiuslibet arcus ad ſinum anguli, quem ſubtendit, eandem habet proportionem, quam ſinus vtriuſque reliquorum arcuum ad ſinum anguli, quem ſubtendit.

SIT triangulum ſphæricum quodcunque ABC. Dico ita eſſe ſinum arcus AB, ad ſinum anguli C, quem ſubtendit, vt eſt ſinus arcus AC, ad ſinum anguli B, quem ſubtendit, & vt ſinus arcus BC, ad ſinum anguli A, quē ſubtendit. Sint enim primum omnes tres anguli recti; [a] eruntque propterea omnes arcus quadrantes. Manifeſtum igitur eſt, vt eſt ſinus totus quadrantis AB, ad ſinum totum anguli recti C, ita eſſe ſinum totum quadrantis AC, ad ſinum totum anguli recti B, & ſinum totum quadrantis BC, ad ſinum totum anguli recti A. a Coroll. 25. huius.

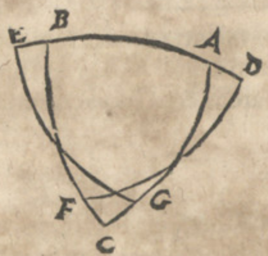
DENDE ſint duo tantum anguli A, B, recti, [b] eruntq; idcirco arcus AC, BC, quadrantes, [c] & C, polus arcus AB. Itaque rurſus perſpicuum eſt, vt eſt ſinus arcus AB, ad ſinum anguli C, hoc eſt, ad ſinum arcus AB, (Eſt enim AB, arcus anguli C, cum C, ſit polus arcus AB, vt oſtenſum eſt) ita eſſe ſinum totum quadrantis AC, ad ſinum totum anguli recti B, & ſinum totum quadrantis BC, ad ſinum totum anguli recti A; cum ſemper ſit æqualitatis proportio. b 25. huius c Schol. 26. huius.

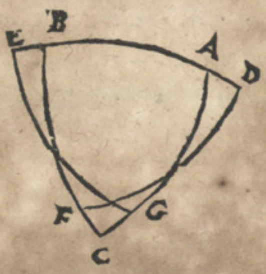


TERTIO ſit angulus duntaxat C, rectus, & reliquorum angulorum A, B, vterque recto minor, vel maior; vel alter recto maior, & alter minor. Si igitur vterque recto minor eſt, [d] erunt omnes arcus quadrante minores. Producantur omnes, & fiant quadrantes BD, AE, BF, AG, [e] & per puncta D, F, arcus maximi circuli DF, & per puncta E, G, arcus maximi circuli EG, ducatur; [f] eruntque anguli D, F, E, G, recti, [g] & B, polus arcus DF, & A, polus arcus EG; ac proinde arcus DF, EG, arcus erunt angulorum B, A. Tam vero quadrans BD, quam AE, arcus eſt anguli recti C, vt ex defin. 6. perſpicuum eſt. Quoniam igitur duo circuli maximi BD, BF, ſe mutuo ſecant in ſphæra in puncto B, & in arcu BD, ſumpta ſunt duo puncta A, D, à quibus ad arcum BF, ducti ſunt arcus perpendiculares AC, DF; [h] erit vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ita ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DF, & permutando, vt ſinus arcus AB, trianguli ABC, ad ſinum quadrantis BD, hoc eſt, ad ſinum totum anguli recti C, in eodem triangulo ABC, ita ſinus arcus AC, trianguli eiuſdem ABC, ad ſinum arcus DF, hoc eſt, ad ſinum anguli B, eiuſdem trianguli ABC. Eodem modo erit, vt ſinus arcus AB, in triangulo ABC, ad ſinum quadrantis AE, hoc eſt, ad ſinum totum anguli recti C, eiuſdem trianguli ABC, ita ſinus arcus BC, eiuſdem trianguli ABC, ad ſinum arcus EG, hoc eſt, ad ſinum anguli A, in eodem triangulo ABC. Patet ergo propoſitum. d 28. huius. e 20. 1. The. f 25. huius. g Schol. 26. huius. h 40. huius



SI vero vterque angulorum A, B, eſt recto maior, [i] erit arcus AB, quadrante minor: [k] & tam arcus AC, quam BC, quadrante maior. Producto igitur arcu AB, in vtramque partem, vt ſint quadrantes AE, BD, abſciſſiſque quadrantibus AG, BF, [l] ducatur per puncta D, F, arcus maximi circuli DF, & per E, G, maximi circuli arcus EG; [m] eritque rurſum B, polus arcus DF, & A, polus arcus EG. Igitur DF, EG, arcus erunt angulorum B, A, necnon tam quadrans BD, quam AE, arcus anguli recti C, ex defin. 6. Item propter quadrantes BD, BF, [n] vterque angulus D, F; & propter qua- i 37. huius. k 34. huius. l 20. 1. Th. m 26. hui. n 25. huius



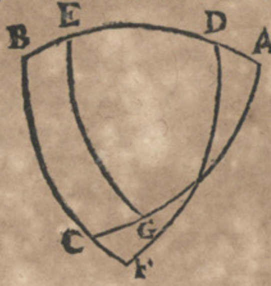


drantes AE, AG, vterq; angulus E, G, rectus erit. Quia igitur duo maximi circuli BD, BC, ſe mutuo in ſphæra ſecant in B, ſumptaque ſunt in BD, duo puncta A, D, à quibus ad BC, ducti ſunt duo arcus

o 40.huius AC, DF, perpendiculares, [o] erit vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ita ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DF: & permutando, vt ſinus arcus AB, trianguli ABC, ad ſinum quadrantis BD, hoc eſt, ad ſinum totum anguli recti C, in eodem triangulo ABC, ita ſinus arcus AC, eiuſdem trianguli ABC, ad ſinum arcus DF, hoc eſt, ad ſinum anguli B, in eodem triangulo ABC. Eademque ratione erit vt ſinus arcus AB, trianguli ABC, ad ſinum quadrantis AE, hoc eſt, ad ſinum totum anguli recti C, in eodem triangulo ABC, ita ſinus arcus BC, eiuſdem trianguli ABC, ad ſinum arcus EG, hoc eſt, ad ſinum anguli A, in eodem triangulo ABC. Quod eſt propoſitum.

SI denique alter angulorum A, B, recto maior eſt, & alter minor; ſit B, maior & A, minor. [p] Erit igitur arcus AB, quadrante maior. [q] Item arcus AC, quadrante etiam maior, at vero BC, minor quadrante. Abſcindantur ergo quadrantes BD, AE, & AG, productoque arcu BC, fiat quadrans BF; [r] & per puncta D, F, ducatur arcus DF, circuli maximi, necnon per E, G, arcus circuli maximi EG; [s] eritque rurſus B, polus arcus DF, & A, polus arcus EG. Igitur DF, EG, arcus erunt angulorum B, A; necnon tam quadrans BD, quam AE, arcus anguli C, recti, ex defi. 6. Item propter quadrantes AE, AG, [t] vterque angulus E, G, rectus erit. Quoniam igitur duo circuli maximi BA, BF, in ſphæra ſe mutuo ſecant in B, ſumptaque ſunt in BA, duo puncta A, D, à quibus ad BF, ducti ſunt duo arcus perpendiculares AC, DF, [u] erit, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ita ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DF: & permutando, vt ſinus arcus AB, trianguli ABC, ad ſinum quadrantis BD, hoc eſt, ad ſinum totum anguli recti C, in eodem triangulo ABC, ita ſinus arcus AC, trianguli eiuſdem ABC, ad ſinum arcus DF, hoc eſt, ad ſinum anguli B, in triangulo eodem ABC. Eodemque modo erit, vt ſinus arcus AB, trianguli ABC, ad ſinum quadrantis AE, hoc eſt, ad ſinum totum recti anguli C, in eodem triangulo ABC, ita ſinus arcus BC, eiuſdem trianguli ABC, ad ſinum arcus EG, hoc eſt, ad ſinum anguli A, eiuſdem trianguli ABC. Quod eſt propoſitum.

p 37.huius.
q 34.huiu.
r 20.1.Th.
s 26.huius
t 25. huius
u 40.huiu.



QVARTO ac vltimo nullus angulorum A, B, C, rectus ſit. [x] Per punctum A, & polum circuli BC, ducatur arcus circuli maximi AD, cadatque primum in latus BC, intra triangulum; [y] eruntque anguli ad D, recti. Quoniam igitur in triangulo ABD, angulus D, rectus eſt; erit, vt iam demonſtratum eſt, vt ſinus arcus AB, ad ſinum anguli ADB, ita ſinus arcus AD, ad ſinum anguli B: & permutando, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AD, ita ſinus anguli ADB, ad ſinum anguli B. Sed eodem modo, cum in triangulo ADC, angulus D, rectus ſit; eſt, vt ſinus arcus AD, ad ſinum anguli ACD, ita ſinus arcus AC, ad ſinum anguli ADC: & permutando, vt ſinus arcus AD, ad ſinum arcus AC, ita ſinus anguli ACD, ad ſinum anguli ADC, hoc eſt, ad ſinum anguli ADB, cum anguli ad D, ſint recti. Ex æqualitate ergo, & perturbata proportione, erit, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ita ſinus anguli ACD, ad ſinum anguli B; vt in appoſita formula apparet. Igitur & permutando erit, vt ſinus arcus AB, in triangulo ABC, ad ſinum anguli ACB, in eodem triangulo ABC, ita ſinus arcus AC, eiuſdem trianguli ABC, ad ſinum anguli B, in eodem triangulo ABC.

x 20.1.The.
y 15.1.The.



z 15.1.The. CADAT deinde arcus per A, & polum circuli BC, ductus in arcum BC, productum ad E, [z] eritque angulus E, rectus. Quoniam igitur in triangulo ABE, angulus E, rectus eſt, erit vt demonſtratum eſt, vt ſinus arcus AB, ad ſinum anguli E, ita ſinus arcus AE, ad ſinum anguli B: & permutando, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AE, ita ſinus anguli E, ad ſinum anguli B. Sed eadem ratione, cum in triangulo ACE, angulus E, rectus ſit, eſt, vt ſinus arcus AE, ad ſinum anguli ACE, ita ſinus arcus AC, ad ſinum anguli E: & permutando, vt ſinus arcus AE, ad ſinum arcus AC, ita ſinus anguli ACE, ad ſinum anguli E. Igitur ex æqualitate, & perturbata proportione, erit vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ita ſinus anguli ACE, hoc eſt, anguli ACB, (cum idem ſit ſinus vtriuſque anguli ad C, quod eorum arcus ſemicirculum conſtituant, vt conſtat ex coroll propoſ. 5. huius tractatus. Perſpicuum autem eſt ex iis, quæ in tractatione ſinuum diximus, duos arcus ſemicirculum conficientes, eundem habere ſinum) ad ſinum anguli B; vt in appoſita formula apparet. Igitur & permutando erit, vt ſinus arcus AB, in triangulo ABC, ad ſinum anguli ACB, eiuſdem trianguli ABC, ita ſinus arcus AC, in eodem triangulo ABC, ad ſinum anguli B, eiuſdem trianguli ABC. Quod ſi ex B, ad arcum AC, ducatur alius arcus perpendicularis, qui vel intra triangulum cadet, vel in arcum productum, oſtendemus eodem modo, ita eſſe ſinum arcus AB, ad ſinum anguli ACB, vt eſt ſinus arcus BC, ad ſinum anguli BAC. Itaq; in omni triangulo ſphærico, ſinus cuiuslibet arcus, &c. Quod erat oſtendendum.

arcus	anguli
AB.	ACD.
AD.	ADB.
AC.	B.

arcus	anguli
AB.	ACE.
AE.	E.
AC.	B.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, in omni triangulo ſphærico rectangulo, vt eſt ſinus arcus rectum angulum ſubtendentis ad ſinum totum nempe ad ſinum anguli recti, quem ſubtendit, ita eſſe ſinum cuiuslibet reliquorum arcuum

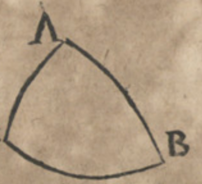
arcuum ad ſinum anguli, quem ſubtendit. Quod idcirco dixerim, quia plerique ſcriptores hoc corollarium, tanquam propoſitionem ab hac noſtra propoſitione 41. diuerſam, demonſtrant: ſed placuit nobis propoſitionem hanc magis vniuerſalem reddere, prout nimirum complectitur & triangulum ſphæricum rectangulum, & non rectangulum.

SCHOLIVM.

IN hac, & ſequentibus propoſitionibus adducemus problemata, quibus ſphæricorum triangulorum rectangulorum calculus perficitur, quæque ex ipſis propoſitionibus eliciuntu[r]. Quanquam autem nonnunquam in problemate aliquo plura proponantur inueſtiganda, primum tamen ſemper potiſſimum eſt, quod quæritur, infertur que primo ac per ſe ex ipſo problemate. Ex hac igitur propoſitione ſequentia tria problemata colliguntur.

I.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato arcu, qui recto angulo opponitur & alterutro arcuum angulum rectum ambientium; inuenire angulum huic arcui oppoſitum.



IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, dati ſint arcus AB, AC. Dico dari quoq; angulum B, arcui AC, oppoſitum.[a] Quoniam enim eſt, vt ſinus arcus AB, ad ſinum totum anguli recti C, ita ſinus arcus AC, ad ſinum anguli B: a 41. huius.

SI fiat, vt ſinus arcus dati recto angulo oppoſiti ad ſinum totum, ita ſinus arcus circa angulum rectum dati ad aliud, reperietur ſinus anguli quæſiti. Praxis.

VERVM hic diligenter attendendum eſt, num angulus quæſitus B, ſit acutus, an obtuſus. Si enim acutus eſt, dabit arcus ſinui inuento reſpondens angulum B: Si vero eſt obtuſus, relinquet idem arcus ex ſemicirculo ſublatus angulum B. Pulchre autem arcus datus AC, circa angulum rectum C, docebit, an angulus B, acutus ſit, vel obtuſus.[b] Nam ſi AC, eſt minor quadrante erit angulus B, acutus: Si vero quadrante maior, obtuſus. Sumimus autem hic triangulum ſphæricum, in quo vnus tantum angulus rectus eſt, & proinde nullus arcus Quadrans, quod etiam in ſequentibus intelligatur. b 34. huius

II.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato arcu, qui recto angulo opponitur, & alterutro angulorum non rectorum; inuenire arcum huic angulo oppoſitum.

IN eodem triangulo datus ſit arcus AB, recto angulo C, oppoſitus, & inſuper angulus B. Dico dari quoque arcum AC, angulo B, oppoſitum.[a] Cum enim ſit, vt ſinus arcus AB, ad ſinum totum anguli recti C, ita ſinus arcus AC, ad ſinum anguli B; erit conuertendo, vt ſinus totus ad ſinum arcus AB, ita ſinus anguli B, ad ſinum arcus AC. a 41. huius

SI igitur fiat, vt ſinus totus ad ſinum arcus angulo recto oppoſiti, ita ſinus anguli dati ad aliud, inuenietur ſinus arcus quæſiti. Praxis.

[b] Hic autem arcus erit quadrante minor, ſi datus angulus eſt acutus: quadrante autem maior, ſi obtuſus. b 34. huius

III.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato alterutro arcuum circa angulum rectum, & angulo, qui ei opponitur; inuenire arcum recto angulo oppoſitum. Oportet autem cõſtare, num tertius angulus ſit acutus, an obtuſus: vel an tertius arcus ſit quadrante minor, aut maior.

IN eodem triangulo datus ſit arcus AC, circa angulum C, rectum, & angulus præterea B, illi oppoſitus. Dico dari quoque arcum AB, recto angulo oppoſitum.[a] Cum enim ſit, vt ſinus arcus AC, an ſinum anguli B, ita ſinus arcus AB, ad ſinum totum anguli recti C; erit conuertendo, vt ſinus anguli B, dati ad ſinum arcus AC, dati, ita ſinus totus ad ſinum arcus AB, recto angulo oppoſiti, qui quæritur. a 41. huius.

SI igitur fiat, vt ſinus anguli dati ad ſinum dati arcus, ita ſinus totus ad aliud, reperietur ſinus arcus quæſiti, qui recto angulo opponitur. Praxis.

OPORTET *autem conſtare, num tertius angulus A, acutus ſit, an obtuſus: vel an tertius arcus CB, quadrante minor ſit, aut maior. Hinc enim diſcemus, quando arcus quæſitus AB, eſt quadrante minor, & quando maior; ſi aliunde id non conſtiterit. Nam ſi angulus A, fuerit acutus, ſi quidem & B, datus ſit acutus: Vel ſi A, fuerit obtuſus, ſiquidem & B, datus ſit obtuſus; [b] erit arcus AB, recto angulo oppoſitus quadrante minor. Si vero angulus A, fuerit acutus, at B, datus obtuſus: Vel ſi A, fuerit obtuſus, at B, datus acutus; erit arcus AB, maior quadrante. Ita etiam, ſi arcus CB, fuerit quadrante minor, ſiquidem & AC, datus ſit quadrante minor: Vel ſi CB, fuerit quadrante maior, ſi quidem & AC, datus ſit maior quadrãte;[c] erit arcus AB, recto angulo oppoſitus quadrante minor. Si vero arcus CB, fuerit minor quadrante, at AC, datus quadrante maior: Vel ſi CB, fuerit quadrante maior, at AC, datus quadrante minor; erit arcus AB, maior quadrante. Itaque non ſatis eſt, dari vnum arcum circa rectum angulum, cum angulo oppoſito, vt vult Copernicus propoſ. 4. de triangulis ſphæricis: Id quod in ſcholio propoſ. 21. ſupra admonuimus; ſed dari etiam debet ſpecies tertij anguli vel tertij arcus. Qua in re etiam lapſus eſt Ioan. Regiom. propoſ. 27. lib. 4. triangulorum.* b 37. huius. c 35. huius.

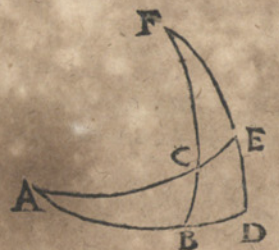
THEOR. 40. PROPOS. 42.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius nullus arcuum quadrans ſit, ſinus vtriuslibet reliquorum angulorum eandem habet proportionem ad ſinum totum, quam ſinus complementi reliqui anguli ad ſinum complementi arcus ipſum ſubtendentis.

a Schol. 25. huius.

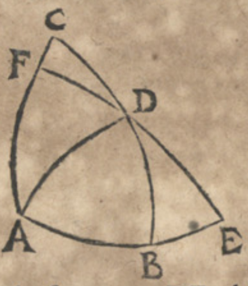
IN triangulo ſphærico ABC, angulus B, ſit rectus, & nullus arcuum quadrans. Dico ita eſſe ſinum anguli C, ad ſinum totum, vt eſt ſinus complementi reliqui anguli A, ad ſinum complementi arcus BC, angulum A, ſubtendentis. Quoniam enim nullus arcuum ponitur quadrans, nullus reliquorum angulorum rectus erit:[a] Alias triangulum ABC, duos habens angulos rectos haberet duos arcus quadrantes; quod non ponitur. Sit ergo primum angulus A, acutus, & arcus AB, ipſi, & recto angulo B, adiacens quadrante minor. Quo poſito, [b] erit & angulus C, acutus: [c] atque adeo omnes arcus trianguli ABC, quadrante minores. Producantur arcus AB, AC, & fiant quadrantes AD, AE, [d] ac per puncta D, E, arcus DE, circuli maximi ducatur DE, conueniens cum arcu BC, producto in F. [e] Erit ergo vterque angulus D, E, rectus, ob quadrantes AD, AE; atque adeo, cum & angulus B, rectus ſit, [f] vterque arcus BF, DF, quadrans erit, ob angulos rectos B, D. Erit quoque DE, arcus anguli A; [g] propterea quod A, polus eſt arcus DE, ob quadrantes AD, AE. Item arcus EF, cōplementum erit arcus DE, & arcus CF, complementum arcus BC, ob quadrantes DF, BF. Quoniam vero in triangulo CEF, angulus E, rectus eſt; [h] erit vt ſinus arcus CF, ad ſinum totum, ita ſinus arcus EF, ad ſinum anguli ECF: & conuertendo, vt ſinus anguli ECF, hoc eſt, anguli ACB, [i] qui illi æqualis eſt ad verticem, ad ſinum arcus EF, ita ſinus totus ad ſinum arcus CF: & permutando, vt ſinus anguli ACB, ad ſinum totum, ita ſinus arcus EF, hoc eſt, ſinus complementi anguli A, ad ſinum arcus CF, id eſt, ad ſinum complementi arcus CB. Quod eſt propoſitum.

b 33. huius.
c 28. huius.
d 20. 1. Th.
e 25 huius.
f 25. huius.
g 26. huius
h Coro. 41. huius.
i 16. huius.



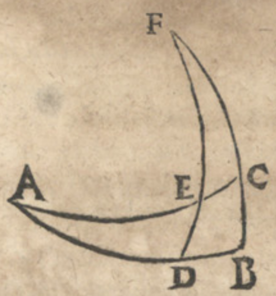
k 20. 1. Th.
l Schol. 25. huius.
m 26. hui.
n Corol. 16. 1. Theod.
o 15. 1. The.
d Coro. 41. huius.

SIT deinde angulus A, obtuſus, & adhuc arcus AB, quadrante minor. Fiat angulus BAD, rectus, ſecetq; arcus AD, arcum BC, in D. Producto quoq; arcu AB, fiat quadrans AE, [k] & per puncta E, D, ducatur arcus ED, circuli maximi ſecans arcum AC, in F. Et quia duo anguli DAB, DBA, recti ſunt, [l] erunt arcus AD, BD, quadrantes; atque adeo cum AE, quadrans quoque ſit, & angulus DAE, rectus, [m] erit & DE, quadrans, & A, polus arcus DE. Igitur & arcus AF, quadrans erit, [n] cum arcus EF, quadrante ſemper abſit à ſuo polo. [o] Angulus item vterq; ad F, cum arcus AF, tranſeat per A, polū arcus EF, rectus erit. Præterea EF, erit arcus anguli BAC, ob quadrantes AE, AF. Erit quoq; arcus DF, cōplementū arcus EF, ſeu anguli BAC; & arcus CD, complementum arcus BC, ob quadrantes DE, BD. Quoniā igitur in triangulo CDF, angulus F, rectus eſt, [p] erit vt ſinus arcus CD, ad ſinū totum, ita ſinus arcus DF, ad ſinum anguli C: & conuertendo, vt ſinus anguli C, ad ſinum arcus DF, ita ſinus totus ad ſinum arcus CD: & permutando, vt ſinus anguli C, ad ſinum totum, ita ſinus arcus DF, hoc eſt, ſinus cōplementi anguli BAC, ad ſinum arcus CD, id eſt, ad ſinum complementi arcus BC. Quod eſt propoſitum.



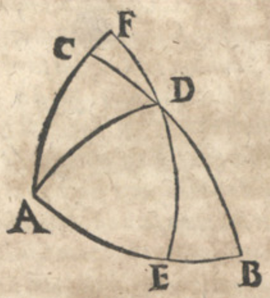
q 33 huius.
r 37. huius.
s 20. 1. The.
t 25. huius.
u 25. huius.
x 26. huius
y Coro. 41. huius.

SIT tertio angulus A, acutus, & arcus AB, quadrante maior. Quo poſito, [q] erit reliquus angulus C, obtuſus; [r] ac proinde arcus AC, rectum angulum B, ſubtendens quadrante quoque maior. Abſcindantur quadrantes AD, AE, [s] & per puncta D, E, ducatur arcus DE, circuli maximi coiens cum arcu BC, protracto in F; [t] eritque vterq; angulus D, E, rectus, ob quadrantes AD, AE; atq; idcirco, cum & angulus B, ſit rectus, [u] quadrantes erunt BF, DF. Erit quoque DE, arcus anguli A, [x] quod A, polus ſit arcus DE. Quare EF, complementum eſt anguli A; & CF, complementum arcus BC, ob quadrantes DF, BF. Quoniam igitur in triangulo CEF, angulus E, rectus eſt, [y] erit vt ſinus arcus CF, ad ſinum totum, ita ſinus arcus EF, ad ſinum anguli ECF: & conuertēdo vt ſinus anguli ECF, hoc eſt, anguli ACB. (Habent enim duo anguli ad C, eundem ſinum, cum eorum arcus ſemicirculum conficiant, ex coroll. propoſ. 5.) ad ſinum arcus EF, hoc eſt, ad ſinum complementi anguli A, ita ſinus totus ad ſinum arcus CF, hoc eſt, ad ſinum complementi arcus BC: & permutando, vt ſinus anguli ACB, ad ſinum totum, ita ſinus arcus EF, ſiue complementi anguli A, ad ſinum arcus CF, ſeu complementi arcus BC. Quod eſt propoſitum.



z 20. 1. Th.
a 25. huius.
b 26. huius
c 15. 1. The.
d Coro. 41. huius.
e Coroll. 5. huius.

QVARTO ac vltimo ſit angulus A, obtuſus, & adhuc arcus AB, quadrante maior. Fiat angulus rectus BAD, ſecetque arcus AD, arcum BC, in D. Abſcindatur quoque, ex AB, quadrans AE, [z] & per puncta E, D, ducatur arcus ED, circuli maximi ſecans arcum AC, productum in F. Et quia angulus B, rectus ponitur, & angulus BAD, rectus quoq; ex conſtructione eſt, [a] erunt arcus AD, BD, quadrantes. Rurſus quia arcus AD, AE, quadrantes ſunt, continentque angulum DAE, rectum, [b] erit arcus DE, quadrans, & A, polus arcus DE; ac proinde cum arcus AF, tranſeat per A, polum arcus EF, [c] erit angulus F, rectus. Item EF, erit arcus anguli BAC. Præterea arcus DF, complementum erit arcus EF, ſeu anguli BAC, & arcus CD, complementum arcus BC, ob quadrantes DE, BD. Quoniam igitur in triangulo CDF, angulus F, rectus eſt, [d] erit vt ſinus arcus CD, ad ſinum totum; ita ſinus arcus DF, ad ſinum anguli DCF: Et conuertendo, vt ſinus anguli DCF, hoc eſt, anguli ACB. (Habent enim arcus angulorum DCF, ACB, eundem ſinum, [e] cum ſemicirculum conſtituant) ad ſinum arcus DF, hoc eſt, ad ſinum complementi anguli BAC, ita ſinus totus ad ſinum arcus CD, hoc eſt, ad ſinum complementi arcus BC: Et permutando, vt ſinus anguli ACB, ad ſinum totum, ita ſinus arcus DF, ſiue complementi anguli BAC, ad ſinum arcus CD, ſeu complementi arcus BC. Quod eſt propoſitum. Igitur in omni triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod demonſtrandum erat.



SCHOLIVM.

COLLIGEMVS ex hac propoſitione duo hæc problemata.

IN

I.

IN triangulo ſphærico rectangulo, datis duobus angulis non rectis; inuenire arcum vtr- ..bet eorum oppoſitum, vna cum arcu, qui recto angulo opponitur.

IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, dati ſint duo anguli A, B. Dico vtrumuis arcuum AC, BC, quoq; dari, cum arcu AB. [a] *Quoniam enim eſt, vt ſinus anguli A, ad ſinum ..tum, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi arcus AC. Item, vt ſinus an- .. B, ad ſinum totum, ita ſinus complementi anguli A, ad ſinum complementi arcus BC.* a 42. huius



SI fiat, vt ſinus anguli dati, qui quæſito lateri adiacet, ad ſinum totum, ita ſinus complementi reliqui anguli dati ad aliud, producetur ſinus complementi arcus huic poſteriori angulo oppoſiti, qui quæritur. Inuento autem vtroque arcu circa angulum rectum, reperietur quoque ex vtrolibet illorum, & ex angulo, qui ei opponitur dato, arcus recto angulo oppoſitus, vt in problemate 3. propoſ. 41. oſtendimus. Praxis.

VTRVM autem arcus AC, BC, ſint minores quadrante, aut maiores, ita diſcemus. Si angulus B, eſt acutus, [b] *erit arcus AC, ei oppoſitus quadrante minor: Si vero obtuſus, quadrante maior. Eadem ratione ſi angulus A, fuerit acutus, erit arcus ei oppoſitus BC, quadrante minor: ſi vero obtuſus, quadrante maior.* b 34. huius.

II.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato alterutro angulorum non rectorum, cum alterutro arcuum circa angulum rectum; inuenire alium angulum non rectum, & reliquos duos arcus.

IN eodem triangulo datus ſit primum arcus AC, cum angulo A, ſibi adiacente. Dico dari quoque angulum B, cum arcubus BC, AB. [c] *Cum enim ſit, vt ſinus anguli A, ad ſinum totum, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi arcus AC erit conuertendo, vt ſinus totus ad ſinum anguli A, dati, ita ſinus complementi dati arcus AC, ad ſinum complem...i anguli B, qui quæritur.* c 42. huius

QVANDO ergo datur arcus cum angulo ſibi adiacente, ſi fiat, vt ſinus totus ad ſinum anguli dati, ita ſinus complementi arcus dati ad aliud, reperietur ſinus complementi alterius anguli; qui quæritur. ..c ex duobus angulis non rectis iam cognitis, cognoſcentur reliqui duo arcus, vt in proxime antecedenti problemate demonſtratum eſt. Tertius autem datus eſt ex hypotheſi. Praxis, quando datur arcus cum angulo adiacente.

NVM vero angulus B, quæſitus ſit acutus, obtuſuſve, docebit datus arcus AC. [d] *Si enim fuerit quadrante minor, erit angulus B, acutus: ſi vero maior quadrante, obtuſus.* d 34. huius.

DATVS deinde ſit arcus AC, cum angulo B, ſibi oppoſito, conſtetq; de reliquo angulo A, num acutus ſit, an obtuſus: vel de altero arcu BC, circa rectum angulum, qualis ſit. Dico rurſum dari & reliquum angulum A, & reliquos arcus BC, AB. Nam [e] *cum ſit, vt ſinus anguli A, ad ſinum totum, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi arcus AC; erit conuertendo, vt ſinus complementi arcus AC, dati ad ſinum complementi anguli B, dati, ita ſinus totus ad ſinum anguli A, quæſiti.* e 42. huius.

IGITVR cum datur arcus cum angulo ſibi oppoſito, ſi fiat, vt ſinus complementi arcus dati ad ſinum complementi anguli dati, ita ſinus totus ad aliud, procreabitur ſinus reliqui anguli, qui quæritur. Ex duobus ergo angulis non rectis iam cognitis, cognoſcentur reliqui duo arcus, vt in præcedenti problemate monſtrauimus. Tertius autem per hypotheſim datus eſt. Praxis, quando datur arcus cum angulo oppoſito.

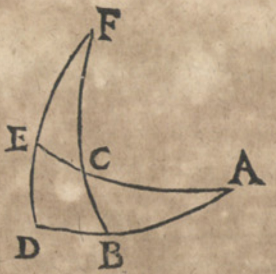
OPORTET autem conſtare, num reliquus angulus A, ſit acutus, an obtuſus, vt ſciatur, qualis angulus ſinui inuento reſpondens ſit accipiendus, acutuſne, an obtuſus. Quod ſi conſtaret de arcu BC, qualis ſit, illico cognoſceretur quoq; ſpecies anguli A. Nam ſi arcus BC, fuerit quadrante minor, [f] *erit angulus A, acutus: ſi autem quadrante maior, obtuſus. Pari ratione, ſi ſciretur, qualis ſit arcus AB, angulo recto oppoſitus, continuo ſpeciem anguli A, cognoſceremus. Nam ſi arcus AB, fuerit minor quadrante, & datus quidem angulus B, acutus,* [g] *erit quoque angulus A, acutus; Si vero datus angulus B, ſit obtuſus, erit quoq; obtuſus angulus A. At ſi arcus AB, fuerit maior quadrante, & datus quidem angulus B, acutus, erit angulus A, obtuſus: Si vero datus angulus B, ſit obtuſus, erit angulus A, acutus. Itaq; non eſt, ..tu, dari angulum non rectum, cum arc.. oppoſito, vt vult Copernicus propoſ. 4. de triangulis ſphæricis: Id quod ſupra quoq; monuimus in ſcholio propoſ. 21. ſed debet etiam dari ſpecies tertij anguli, vel ſpecies arcus alterius circa rectum angulum; vel certe ſpecies arcus recto angulo oppoſiti. Qua in re lapſus eſt Nicolaus Copernicus, qui voluit in propoſ. 4. de triangulis ſphæricis, ſatis eſſe, vt detur arcus circa rectum angulum, cum alterutro angulorum non rectorum. Falſum enim hoc eſt de angulo dato arcui oppoſito, niſi aliud præterea conſtet, vt hic diximus, & in ſcholio propoſ. 21. monuimus.* f 34. huius. g 38. huius. Error Copernici.

THEOR. 41. PROPOS. 43.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius nullus arcuum quadrans ſit, ſinus complementi arcus rectum angulum ſubtendentis ad ſinum complementi vtriuſve reliquorum arcuum eandem habet proportionem, quam ſinus complementi reliqui arcus ad ſinum totum.

IN triangulo ſphærico rectangulo ABC, angulus B, ſit rectus, & nullus arcuum quadrans. Dico ita eſſe ſinum complementi arcus AC, ad ſinum complementi arcus v.g. AB, vt eſt ſinus complementi reliqui arcus BC, ad ſinum totum. Quoniã enim nullus arcuũ ponitur quadrans, nullus reliquorũ angulorũ erit rectus. [a] Alias trianguũ ABC, duos angulos habẽs rectos haberet duos arcus quadrantes, quod non ponitur. Sit ergo primũ angu- a Schol. 25 huius.

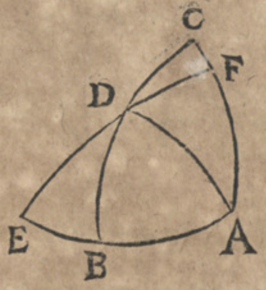
 lus



lus A, acutus, & arcus AB, ipſi & recto angulo B, adiacens quadrante minor. Quo poſito, b erit & angulus C, acutus; c atq; adeo omnes arcus trianguli ABC, quadrante minores. Producantur arcus AB, AC, & fiant quadrantes AD, AE; d ac per puncta D, E, arcus DE, circuli maximi ducatur DE, conueniens cum arcu BC, producto in F. e Erit ergo vterque angulus D, E, rectus, ob quadrantes AD, AE; atque adeo, cum & angulus B, ponatur rectus, erit vterque arcus BF, DF, quadrans, ob rectos angulos B, D. Praeterea BD, erit arcus anguli F; f propterea quod F, polus eſt arcus BD, ob quadrantes BF, DF. Item CF, complementum erit arcus BC; & BD, CE, complementa arcuum AB, AC, ob quadrantes BF, AD, AE. g Manifeſtum autem eſt in triangulo CEF, ita eſſe ſinum arcus CE, hoc eſt, ſinum complementi arcus AC, ad ſinum anguli F, hoc eſt, ad ſinum arcus BD, ſeu complementi arcus AB, vt eſt ſinus arcus CF, hoc eſt, ſinus complementi arcus BC, ad ſinum anguli recti E, id eſt, ad ſinum totum. Quod eſt propoſitum.

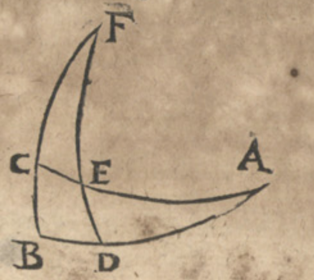
b 33. *huius.* c 28. *huius.* d 20. 1. *Th.* e 25. *huius.* f 26. *huius.* g 41. *huius.*

SIT deinde angulus A, obtuſus, & adhuc arcus AB, quadrante minor. Fiat angulus BAD, rectus ſecetque arcus AD, arcum BC, in D. Producto quoque arcu AB, fiat quadrans AE, h & per puncta E, D, ducatur arcus ED, circuli maximi, ſecans arcum AC, in F. Et quia duo anguli DAB, DBA, recti ſunt, i erunt arcus AD, BD, quadrantes; atque adeo cum AE, quoq; ſit quadrans, & angulus DAE, rectus, k erit & arcus DE, quadrans; ac proinde BE, ob quadrantes BD, ED, erit arcus anguli BDE, hoc eſt, anguli CDF, l qui illi ad verticem eſt aequalis. m Quoniam vero A, polus eſt arcus ED, erit & arcus AF, quadrans, n cum arcus EF, quadrante ſemper abſit à ſuo polo; o necnon & angulus AFE, & angulus CFD, rectus. Praeterea erit arcus CF, complementum arcus AC; & arcus BE, complementum arcus AB; & arcus CD, complementum arcus BC, ob quadrantes AF, AE, BD, p Perſpicuum autem eſt in triangulo CDF, ita eſſe ſinum arcus CF, hoc eſt ſinum complementi arcus AC, ad ſinũ anguli CDF, hoc eſt, ad ſinum arcus BE, ſiue complementi arcus AB, vt eſt ſinus arcus CD, nempe ſinus complementi arcus BC, ad ſinum anguli recti F, hoc eſt, ad ſinum totum. Quod eſt propoſitum.



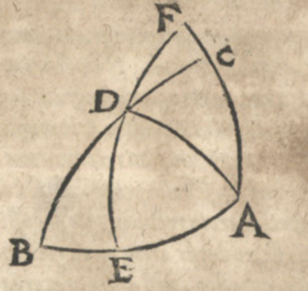
h 20. 1. *Th.* i *Schol.* 25. *huius.* k 26. *huius* l 6. *huius.* m 26. *hui.* n *Coro.* 16. 1. *Theod.* o 15. 1. *Th.* p 41. *huius*

q 33. *huius.* TERTIO ſit angulus A, acutus, & arcus AB, quadrante maior. Quo poſito, q erit reliquus angulus C, obtuſus; r ac proinde arcus A C, rectum angulum B, ſubtendens quadrante quoque maior. Abſcindantur quadrantes AD, AE, s & per puncta D, E, ducatur arcus DE, circuli maximi conueniens cum arcu BC, producto in F; t Eritque vterque angulus D, E, rectus, ob quadrantes AD, AE; atque adeo, cum & angulus B, rectus ſit, u quadrantes erunt arcus BF, DF; propterea q; BD, arcus erit anguli F. Item arcus CF, complementum erit arcus BC, & arcus DB, EC, complementa arcuum AB, AC, ob quadrantes BF, AD, AE. x Perſpicuum eſt autem in triangulo CEF, ita eſſe ſinum arcus EC, id eſt, ſinum complementi arcus AC, ad ſinum anguli F, hoc eſt, ad ſinum arcus DB, hoc eſt, ad ſinum complementi arcus A B, vt eſt ſinus arcus C F, nempe ſinus complementi arcus B C, ad ſinum anguli recti E, hoc eſt, ad ſinum totum. Quod eſt propoſitum.



r 37. *huius.* s 20. 1. *Th.* t 25. *huius.* u 25. *huius.* x 41. *huius*

POSTREMO ſit angulus A, obtuſus & adhuc arcus AB, quadrante maior. Fiat angulus rectus BAD, ſecetque arcus AD, arcum BC, in D. Abſcindatur quoque ex AB, quadrans AE, y & per puncta E, D, deſcribatur arcus ED, circuli maximi ſecans arcum AC, productum in F. Et quia angulus B, ponitur rectus, & angulus BAD, rectus factus eſt, z erunt arcus AD, BD, quadrantes. Rurſus quia arcus AD, AE, quadrantes ſunt, continentq; angulum rectum DAE, a erit & arcus DE, quadrans, & A, polus arcus ED; b atque adeo angulus F, rectus erit. Praeterea quia DB, DE, quadrantes ſunt oſtenſi, erit E, B, arcus anguli BDE, hoc eſt, anguli CDF, qui illi c ad verticem eſt aequalis. Item cum A, polus ſit arcus EF, erit arcus AF, quadrans, d quod arcus EF, quadrante ſemper abſit à ſuo polo. Arcus item CF, complementum erit arcus AC; & arcus EB, complementum arcus AB; & arcus CD, complementum arcus BC, ob quadrantes AF, AE, BD. e Manifeſtum eſt autem in triangulo CDF, ita eſſe ſinum arcus CF, id eſt, ſinum complementi arcus AC, ad ſinum anguli CDF, hoc eſt, ad ſinum arcus BE, ſiue complementi arcus AB, vt eſt ſinus arcus CD, nempe ſinus complementi arcus BC, ad ſinum anguli recti F, hoc eſt, ad ſinum totum. Quod eſt propoſitum. In omni ergo triangulo ſphaerico rectangulo, &c. Quod erat oſtendendum.



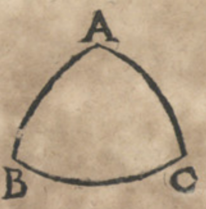
y 20. 1. *Th.* z 25. *huius.* a 26. *huius* b 15. 1. *The.* c 6. *huius.* d *Coro.* 16. 1. *Theod.* e 41. *huius.*

SCHOLIVM. I.

SEQVENS problema ex hac propoſ. colligemus hunc in modum.

IN triangulo ſphaerico rectangulo, datis duobus arcubus quibuslibet, inuenire tertium arcum, & reliquos duos angulos non rectos.

IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, dati ſint primum duo arcus AC, CB, circa angulum rectum C. Dico dari quoq; tertium arcum AB, cum duobus angulis A, B, [a] *Quoniam enim eſt, vt ſinus complementi arcus AB, ad ſinum complementi arcus AC, ita ſinus complementi arcus CB, ad ſinum totum; erit conuertendo, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus C B, ita ſinus complementi arcus A C, ad ſinum complementi arcus A B.*



a 43. huius

QVAMOBREM, datis duobus rectum angulū arcubus ambientibus, ſi fiat, vt ſinus totus ad ſinum complementi vtriuslibet arcuum datorum, ita ſinus complementi alterius arcus dati ad aliud, producetur ſinus complementi arcus recto angulo oppoſiti, qui quæritur. Ex dato autem arcu, qui recto angulo opponitur, cum vtrouis arcu circa rectum angulum, inuenietur angulus ei oppoſitus, vt in problemate 1. propoſ. 41. tradidimus.

Praxis, quando dantur duo arcus circa angulum rectum.

VTRVM vero quæſitus arcus AB, quadrante minor ſit, aut maior, docebunt duo arcus dati. Si enim vterq; fuerit minor aut maior quadrante, [b] *erit arcus AB, quadrante minor: Si vero vnus ſit quadrante minor, & alter maior, erit arcus AB, quadrante maior.*

b 35. huius.

DATVS deinde ſit arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum alterutro arcuum circa angulum rectum, vt cum AC. Dico rurſum dari reliquum arcum CB, cum duobus angulis A, B. [c] *Nam cum ſit, vt ſinus complementi arcus AB, ad ſinum complementi arcus AC, ita ſinus complementi arcus CB, ad ſinum totum; erit conuertendo, vt ſinus complementi arcus AC, ad ſinum complementi arcus AB, ita ſinus totus ad ſinum complementi arcus CB.*

c 43. huius.

QVAPROPTER, dato arcu, qui recto angulo opponitur, cum alterutro arcuum circa angulum rectum, ſi fiat, vt ſinus complementi arcus dati circa angulum rectum ad ſinum complementi arcus angulo recto oppoſiti, ita ſinus totus ad aliud, inuenietur ſinus complementi alterius arcus circa angulum rectum, qui quæritur. Ex quouis autem arcu dato circa rectum angulum, cum arcu, qui recto angulo opponitur, reperietur angulus illi arcui oppoſitus, vt in problemate 1. propoſ. 41. demonſtratum eſt.

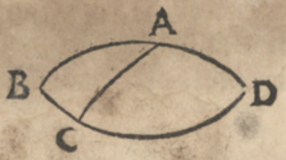
Praxis, quando datur arcus recto angulo oppoſitus cum alterutro circa angulum rectum.

AN vero tertius arcus CB, quæſitus ſit quadrante minor, aut maior, intelligemus ex duobus arcubus datis. Si namque arcus AB, angulo recto oppoſitus fuerit quadrante minor, ſi quidem & alter datus AC, ſit quadrante minor, [d] *erit & arcus CB, quadrante minor; ſi vero AC ſit quadrante maior, erit & CB, maior quadrante. Si autem AB, fuerit quadrante maior, ſi quidem & AC, ſit quadrante maior, erit CB, quadrante minor; ſi vero AC, ſit minor quadrante, erit CB, quadrante maior.*

d 36. huius.

SCHOLIVM II.

QVAMVIS & hanc propoſ. 43. & antecedentem 42. quadrimembrem fecerimus, vt vtraq; in omnibus caſibus demonſtraretur: ſatis tamen fuiſſet, ſi vtraq; in primo caſu, exiſtentibus nimirum omnibus arcubus quadrante minoribus, demonſtratione fuiſſet confirmata. Eo enim caſu demonſtrato, facile demonſtrationem omnibus aliis caſibus accommodabimus. Sit namq; triangulum ſphæricum quodcunq; rectangulum ACD, habens angulum C, rectum. Aut igitur duo arcus AC, CD, circa angulum rectum quadrante ſunt minores, [e] *ac proinde & tertius arcus AD, quadrante quoque minor; aut vnus quadrante maior, & alter minor; aut denique ambo quadrante maiores: Nam de eo ſolo ſphærico triangulo rectangulo agimus, in quo nullus arcus eſt quadrans. Sint primum duo arcus AC, CD, circa angulum rectum quadrante minores: quo poſito,* [f] *erit vterque angulus D, A, acutus, proptereaq; triangulo ACD, demonſtratio vtriuſq; propoſitionis conueniet, quoad primum caſum.*



Quicquid demonſtratur de triāgulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus ſint quadrante minores, locum etiam habet in omni triangulo ſphærico rectangulo.

SIT deinde arcus DC, quadrante maior, & CA, minor. Productis arcubus DC, DA, donec coeant in B; [g] *erunt DAB, DCB, ſemicirculi; atq; adeo CB, quadrante minor. Sunt ergo in triangulo ABC, duo arcus AC, CB, circa angulum rectum C, quadrante minores. Quare, vt proxime oſtendimus, ei vtriuſq; propoſitionis demonſtratio, quo ad primum caſum, conueniet. Cum ergo iidem ſinus tam recti, quam complementorum, ſint arcuum, & angulorum trianguli ACB, qui arcuum, & angulorum trianguli ACD; (Nam, vt in ſinubus diximus, arcus CD, CB, eundem ſinum habent tam rectum, quam complementi, necnon & arcus AD, AB. Item tam recti anguli ad C, eundem ſinum habent, nempe totum, quam anguli obliqui ad A,* [h] *cum duobus rectis ſint æquales. Deniq; & anguli D, B, eundem ſinum habent,* [i] *cum ſint inter ſe æquales: Arcus autem AC, vtrique triangulo communis eſt.) liquido conſtat, quicquid de ſinubus arcuum, angulorumq; trianguli ACB, fuerit oſtenſum, idem in ſinubus arcuum, & angulorum trianguli ACD, locum habere.*

e 35. huius.
f 34. huius.
g 11. 1. Theo.
h 5. huius.
i 13. huius.

POSTREMO ſint duo arcus DC, CA, quadrante maiores: quo poſito, erit arcus CB, minor quadrante. Habet igitur triangulum ACB, arcum AC, circa angulum rectum C, quadrante maiorem, & CB, minorem. Quare ei, vt proxime eſt demonſtratum, vtraque propoſitio conueniet. Cum ergo iidem ſinus tam recti, quam complementorum, ſint arcuum, & angulorum trianguli ACB, qui arcuum, & angulorum trianguli ACD, vt paulo ante diximus, liquet eaſdem propoſitiones triangulo quoque ACD, conuenire. Perſpicuum ergo eſt, quicquid de ſinubus arcuum, angulorumque trianguli ſphærici rectanguli, cuius duo arcus circa angulum rectum quadrante ſunt minores, demonſtratum fuerit, locum etiam habere in quocunq; alio triangulo ſphærico rectangulo.

IDEM prorſus dicendum eſt de tertio caſu propoſ. 41. Satis enim fuiſſet illum demonſtraſſe in triangulo rectangulo, cuius omnes arcus ſunt quadrante minores, quale eſt triangulum ſecundæ figuræ prop. 41. dictæ; cum eius trianguli demonſtratio omnibus aliis conueniat, vt ex demonſtratis in hoc ſcholio eſt manifeſtum.

EX his, quæ proximis tribus propoſitionibus demonſtrauimus, abſolutus iam per ſinus eſt calculus triangulorum ſphæricorum rectangulorum: quare iam non rectangulorum calculus ſequi deberet. Sed quia per lineas tangentes, ac ſecantes breuius plerumq; triangulorum rectangulorum calculus, quam per ſinus, expeditur, adiungemus ſequentes propoſitiones ad triangula quoq; ſphærica rectangula ſpectantes, antequam triangulorum ſphæricorum non rectangulorū calculum exponamus. Vt autem clariores fiant demonſtrationes, & minus confuſæ, proponemus ſemper triangulum ſphæricum rectangulum, cuius duo arcus circa angulum rectum, ac proinde omnes tres, minores ſint quadrante. Nam eadem demonſtrationes aliis omnibus conueni-

conuenient, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus: quippe cum & tam duo arcus ſemicirculum conficientes, quam duo anguli duobus rectis æquales, eandem habeant tangentem, ac ſecantem, quemadmodum & eundem ſinum, vt in tractatione tangentium, & ſecantium monuimus.

THEOR. 42. PROP. 44.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus quadrante ſint minores: ſinus totus ad ſinum vtriuſuis arcuum circa rectum angulum eandem habet proportionem quam tangens anguli non recti dicto arcui adiacentis ad tangentem reliqui arcus circa angulum rectum, huic angulo oppoſiti.

IN triangulo ſphærico ABC, cuius omnes arcus quadrante minores, ſit angulus C, rectus. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum arcus BC, vt eſt tangens anguli B, ad tangentem arcus AC. Productis enim arcubus BC, BA, donec fiant quadrantes BF, BD, ac per puncta F, D, arcu FD, circuli maximi deſcripto; [a] erit vterq; angulus, F, D, rectus, ob quadrantes BF, BD: & DF, arcus erit anguli B, [b] cum B, polus ſit arcus DF. Quia igitur duo circuli maximi in ſphæra BF, BD, ſecant ſeſe in B, ductique ſunt ex A, D, ad BF, arcus perpendiculares AC, DF; [c] erit, vt ſinus quadrantis BF, hoc eſt, ſinus totus, ad tangentem arcus FD, hoc eſt, ad tangentem anguli B, ita ſinus arcus BC, ad tangentem arcus AC: Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum arcus BC, ita tangens anguli B, ad tangentem arcus AC. Non aliter demonſtrabimus, ita eſſe ſinum totum ad ſinum arcus AC, vt eſt tangens anguli A, ad tangentem arcus BC: vt patet, ſi arcus AC, AB, producantur, donec fiant quadrantes AG, AE, perque G, E, arcus maximi circuli deſcribatur GE: [d] Erit enim rurſus, vt ſinus quadrantis AG, id eſt, ſinus totus, ad tangentem arcus EG, ſeu anguli A, ita ſinus arcus AC, ad tangentem arcus BC: Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum arcus AC, ita tangens anguli A, ad tangentem arcus BC. In omni ergo triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 25. huius.
b 26. huius.
c Theor. 6. ſchol. 40. huius.
d Theor. 6. ſchol. 40. huius.

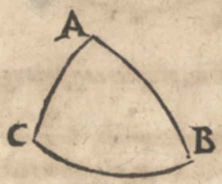


SCHOLIVM.

HINC colligemus duo ſequentia problemata.

I.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato alterutro arcuum circa angulum rectum, cum alterutro angulorum non rectorum, reperire alium arcum circa rectum angulum, & reliquum angulum non rectum, cum arcu, qui recto angulo opponitur: dum modo, quando angulus datus opponitur arcui dato, conſtet an reliquus arcus circa rectum angulum ſit quadrante minor, maiorve; vel an reliquus angulus non rectus ſit acutus, obtuſuſve.



e 44. huius.

Praxis, cũ datur arc9 cum angulo adiacente.

IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, datus ſit primum arcus AC, cum angulo A, ſibi adiacente. Dico dari quoque arcum BC, vna cum angulo B, & arcu AB. [e] *Quoniam enim eſt, vt ſinus totus ad ſinum arcus AC, ita tangens anguli A, ad tangentem arcus BC:*

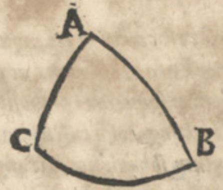
SI (quando datur arcus cum angulo adiacente) fiat, vt ſinus totus ad ſinum dati arcus, ita tangens anguli dati ad aliud, producetur tangens arcus quæſiti. Ex eodem vero arcu dato, & angulo dato, inuenietur alter angulus non rectus, & arcus recto angulo oppoſitus, vt in problemate 2. propoſ. 42. demonſtrauimus.

f 34. huius. *AN vero arcus quæſitus BC, ſit quadrante minor, maiorue, indicabit angulus datus A. Nam ſi fuerit acutus,* [f] *erit arcus BC, quadrante minor; ſi vero obtuſus, quadrante maior.*

g 44. huius *SIT deinde datus arcus AC, cum angulo B, ſibi oppoſito, conſtetque præterea de altero arcu BC, num quadrante minor ſit, an maior; vel an alter angulus A, acutus ſit, an obtuſus. Dico rurſum dari arcum BC, vna cum angulo B, & arcu AB.* [g] *Cum enim ſit, vt tangens anguli B, ad tangentem arcus AC, ita ſinus totus ad ſinum arcus BC:*

Praxis, cũ datur arc9 cũ angulo oppoſito.

SI (quando datur arcus cum angulo oppoſito) fiat, vt tangens anguli dati ad tangentem dati arcus, ita ſinus totus ad aliud, reperietur ſinus arcus quæſiti. Ex dato vero arcu, & angulo dato dabitur & alter angulus non rectus, & arcus recto angulo oppoſitus, vt in problemate 2. propoſitionis 42. diximus.

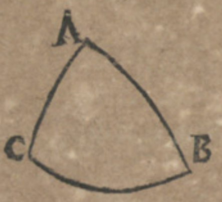


OPORTET autem conſtare, an arcus BC, ſit quadrante minor, an maior, vt ſciamus, qualis arcus inuento ſinui reſpondens accipiendus ſit, an videlicet minor quadrante, an vero maior. Quod ſi conſtaret de angulo A, qualis ſit, ſtatim cognoſceremus, qualis ſit arcus BC. Exiſtente enim angulo A, acuto, [h] *erit arcus BC, quadrante minor: exiſtente vero obtuſo, quadrante maior. Sic etiam, ſi ſciretur, qualis ſit arcus AB, recto angulo oppoſitus, ſpeciem quoque arcus BC, cognoſceremus.*

h 34. huius

Nam

Nam ſi AB, ſit quadrante minor, [i] erit vterq; AC, BC, vel minor quadrante, vel maior: qualis ergo eſt datus arcus AC, talis quoq; erit arcus BC. Si vero AB, fuerit maior quadrante, & datus arcus AC, minor quidem quadrante, erit BC, quadrante maior; ſi vero datus arcus AC, ſit quadrante maior, erit BC, quadrante minor. Itaq; non ſatis eſt, dari arcum, cum angulo oppoſito, vt vult Copernicus propoſ. 4. de triangulis ſphæricis. Id quod ſupra in ſcholio propoſ. 21. monuimus. i 36. huius.



II.

IN triangulo ſphærico rectangulo, datis duobus arcubus circa rectum angulum, vtrumlibet angulorum non rectorum, vna cum arcu reliquo, qui angulo recto opponitur, explorare.

IN eodem triangulo dati ſint duo arcus AC, BC. Dico dari quoque vtrumuis angulorum A, B, & arcum AB. [k] Cum enim ſit, vt ſinus totus ad ſinum arcus AC, ita tangens anguli A, ad tangentem arcus BC: Et conuertendo, vt ſinus arcus AC, ad ſinum totum, ita tangens arcus BC, ad tangentem anguli A; Eademque ratione, vt ſinus arcus BC, ad ſinum totum, ita tangens arcus AC, ad tangentem anguli B: k 44. huius

SI fiat, vt ſinus vtriuſuis arcuum circa angulum rectum ad ſinum totum, ita tangens alterius arcus ad aliud, inuenietur tangens anguli huic poſteriori arcui oppoſiti. Ex datis quoq; duobus arcubus circa angulum rectum cognoſcetur & tertius arcus recto angulo oppoſitus, vt in problemate propoſit. 43. traditum eſt. Vel certe ex dato vno arcu, & alterutro angulorum inuento, vt in problemate 2. propoſ. 42. oſtenſum eſt. Praxis.

NVM autem angulus quæſitus ſit acutus, obtuſuſve, docebit arcus ei oppoſitus. Hic enim ſi minor quadrante fuerit [l] erit angulus ei oppoſitus, acutus, ſi vero maior, obtuſus. l 34. huius.

QVONIAM vero in ſcholio 2. propoſ. præcedentis diximus, per lineas tangentes, ac ſecantes breuius nonnulla expediri, quam per ſinus, intelligendum id eſt de iis, quæ primo loco in problematibus quæruntur, non autem, quæ ſecundo loco inueſtigantur. Quod vt planius fiat, exponemus, quo pacto vtrumq; problema hic propoſitum abſoluendum ſit per ſinus. Itaq;, vt ex arcu circa angulum rectum dato, cum alterutro angulorum acutorum, inueniatur alter arcus circa angulum rectum; qui primo loco in primo problemate inueſtigandus proponitur: ita progrediendum erit. Si arcus circa rectum angulum detur cum angulo oppoſito, inquirendus primum erit arcus recto angulo oppoſitus, ex problemate 3. propoſ. 41. Deinde ex hoc arcu inuento, & dato arcu, eliciendus erit, per problema propoſ. 43. alter arcus circa angulum rectum, qui quæritur. Si vero detur arcus circa angulum rectum cum angulo adiacente, quærendus eſt primum per problema 2. propoſ. 42. alter angulus acutus. Deinde per problema 1. eiuſdem propoſ. 42. ex hoc angulo inuento, & angulo dato, arcus dato angulo oppoſitus eliciendus. At, vt ex duobus arcubus circa angulum rectum datis, vteruis angulorum acutorum eruatur; qui primo loco in ſecundo problemate inquiritur: reperiendus erit primum arcus recto angulo oppoſitus per problema propoſ. 43. ex datis duobus arcubus. Deinde per problema 1. propoſ. 41. ex hoc arcu inuento, & alterutro circa angulum rectum dato, inueniendus angulus huic dato arcui oppoſitus. Vides igitur, id, quod primo loco in vtroq; problemate quæritur, duplici opere inueſtigari per ſinus, quod ſimplici per tangentes inuenimus. Eadem ratio eſt in ſequentibus problematibus, quod ſemel hic monuiſſe ſatis ſit.

THEOR. 43. PROPOS. 45.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus quadrante ſint minores: ſinus totus ad ſinum complementi vtriuſuis angulorum acutorum eandem proportionem habet, quam tangens arcus recto angulo oppoſiti ad tangentem arcus dicto acuto angulo adiacentis.

IN triangulo ſphærico ABC, cuius omnes arcus quadrante minores, ſit angulus B, rectus. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi anguli A, vt eſt tangens arcus AC, ad tangentem arcus AB. Productis enim arcubus AB, AC, dictum angulum comprehendentibus, donec quadrantes fiant AD, AE; deſcriptoque per D, E, arcu circuli maximi DE, productoque, donec cum arcu BC, producto coëat in F: [a] erit vterque angulus D, E, rectus, ob quadrantes AD, AE; & DE, arcus erit anguli A, [b] cum A, ſit polus arcus DE. Item arcus DF, BF, quadrantes erunt, ob rectos angulos B, D; ac proinde arcus EF, complementum anguli A. Quoniam igitur duo circuli maximi in ſphæra BF, DF, ſe interſecant in F; ductique ſunt ex punctis B, C, arcus BF, ad arcum DF, arcus perpendiculares BD, CE; [c] erit vt ſinus totus quadrantis DF, ad tangentem arcus BD, ita ſinus arcus EF, hoc eſt, ſinus complementi anguli A, ad tangentem arcus CE: Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli A, ita tangens arcus BD, ad tangentem arcus CE. [d] Eſt autem (cum AC, AB, ſint complementa arcuum CE, BD.) vt tangens arcus BD, ad tangentem arcus CE, ita tangens arcus AC, ad tangentem arcus AB. Igitur erit quoque, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli A, ita tangens arcus AC, recto angulo oppoſiti ad tangentem arcus AB, acuto angulo A, adiacentis. Eodem modo oſtendemus, ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi anguli C, vt eſt tangẽs arcus AC, recto angulo oppoſiti ad tangentem arcus BC, angulo acuto C, adiacentis, ſi nimirum arcus CA, CB, angulum C, continentes produçantur, &c. In omni ergo triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod oſtendendum erat.

a 25. huius
b 26. huius.
c Theor. 6. ſchol. 40. huius.
d 21. Sinuũ



S C H O L I V M.

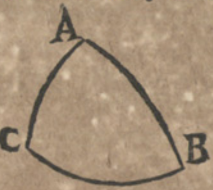
EX hoc theoremate abſoluemus ſequentia tria problemata.

I.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato alterutro arcuum circa angulum rectum, cum angulo non recto adiacente, inuenire arcum recto angulo oppoſitum, & reliquum arcum circa angulum rectum, cum reliquo angulo non recto.

IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, datus ſit arcus AC, & angulus A. Dico dari quoque arcum AB, cum arcu B-
a 45. huius *C, & angulo B.* [a] *Cum enim ſit, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli A, ita tangens arcus AB, ad tangentem arcu AC, Et conuertendo, vt ſinus complementi anguli A, ad ſinum totum, ita tangens arcus AC, ad tangentem arcus AB:*

Praxis.



SI fiat, vt ſinus complementi anguli dati ad ſinum totum, ita tangens arcus dati ad aliud, reperietur tangens arcus recto angulo oppoſiti, qui quæritur. Ex arcu vero AB, & angulo A, inuenietur arcus BC, per problema 2. propoſ. 41. Et ex arcubus AB, AC, angulus B, arcui AC, oppoſitus, per problema 1. eiuſdem propoſ. 41.

ITA autem ſciemus, an arcus quæſitus AB, ſit quadrante maior, an minor. Si da-
b 34. huius *tus angulus A, fuerit acutus,* [b] *erit arcus BC, quadrante minor. Si ergo datus arcus AC, ſit quoque minor,* [c] *erit & arcus*
c 35. huius. *AB, minor quadrante. Si vero AC, ſit quadrante maior,* [d] *erit & AB, maior. At ſi datus angulus A, fuerit obtuſus, erit arcus*
d 34. huius *BC, quadrante maior: Si ergo datus arcus AC, ſit quoq; maior,* [e] *erit arcus AB, minor quadrante; Si vero AC, ſit minor*
e 35. huius. *quadrante, erit AB, maior.*

II.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato alterutro arcuum circa angulum rectum, cum arcu, qui recto angulo opponitur, inueſtigare angulum à dictis arcubus comprehenſum, hoc eſt, arcui, qui circa angulum rectum datus eſt, adiacentem, cum reliquo arcu, & angulo.

f 45. huius. *IN eodem triangulo dati ſint arcus AC, AB. Dico dari etiam angulum A, cum arcu BC, & angulo B.* [f] *Quoniam enim eſt, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli A, ita tangens arcus AB, ad tangentem arcus AC: Hoc eſt, vt tangens arcus AB, ad tangentem arcus AC, ita ſinus totus ad ſinum complementi anguli A:*

Praxis. *SI fiat, vt tangens arcus recto angulo oppoſiti ad tangentem dati arcus circa rectum angulum, ita ſinus totus ad aliud, procreabitur ſinus complementi anguli quæſiti. Hinc reliqua inuenientur, vt in præcedenti problemate.*

VTRVM vero angulus A, quæſitus ſit acutus, obtuſuſve, ita diſcernemus. Si arcus AB, recto angulo oppoſitus fuerit qua-
g 36. huius. *drante minor,* [g] *erit vterq; arcus AC, BC, vel minor quadrante, vel maior. Si ergo datus arcus AC, ſit minor, erit quoq; BC,*
h 34. huius *minor,* [h] *ac proinde angulus A, acutus; ſi vero AC, ſit quadrante maior, erit & BC, maior, ac propterea angulus A, obtuſus.*
i 36. huius. *At ſi arcus AB, fuerit quadrante maior,* [i] *erit alter reliquorum arcuum maior, & alter minor: Si igitur datus arcus AC,*
k 34. huius *ſit maior, erit BC, minor,* [k] *proptereaque angulus A, acutus; Si vero AC, ſit quadrante minor, erit BC, maior, & angulus A, obtuſus:*

III.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato arcu, qui recto angulo opponitur, cum alterutro angulorum non rectorum, inuenire arcum huic angulo adiacentem, cum reliquo arcu, & angulo.

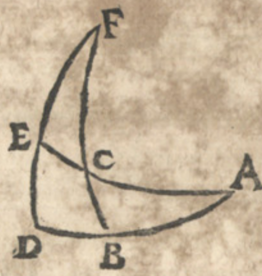
l 45. huius. *IN eodem triangulo datus ſit arcus AB, cum angulo A. Dico dari quoq; arcum AC, &c.* [l] *Nam cum ſit, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli A, ita tangens arcus AB, ad tangentem arcus AC:*

Praxis. *SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli dati, ita tangens arcus recto angulo oppoſiti ad aliud, producetur tangens arcus quæſiti. Reliqua inuenientur, vt in primo problemate huius propoſ.*

NVM autem quæſitus arcus AC, ſit minor quadrante, maiorve, hinc cognoſcemus. Si arcus AB, angulo recto oppoſitus
m 38. huius *fuerit minor quadrante,* [m] *erit vterq; angulus A, B, vel acutus, vel obtuſus. Quare ſi datus angulus A, ſit acutus, erit quoq;*
n 34. huius. *B, acutus,* [n] *atq; adeo arcus AC, quadrante minor; Si vero A, ſit obtuſus, erit & B, obtuſus, ideoq; arcus AC, quadrante ma-*
o 38. huius *ior. At ſi arcus AB, fuerit maior quadrante,* [o] *erit alter reliquorum angulorum acutus, & alter obtuſus Si ergo A,*
p 34. huius. *dat ſit acutus, erit B, obtuſus,* [p] *& idcirco arcus AC, quadrante maior; Si vero A, ſit obtuſus, erit B, acutus, & arcus AC, quadrante minor.*

THEOR. 44. PROPOS. 46.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus quadrante ſint minores: ſinus ad totus ſinum complementi vtriuſuis angulorum acutorum eandem proportionem habet, quam tangens complementi arcus circa angulum rectum dicto angulo adiacentis ad tangentem complementi arcus recto angulo oppoſiti.



IN triangulo ABC, cuius omnes arcus quadrante minores, ſit angulus B, rectus. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi anguli A, vt eſt tangens complementi arcus AB, ad tangentem complementi arcus AC. Facta namq; conſtructione, vt in præcedenti propoſ. quoniam duo circuli maximi in ſphæra BF, DF, ſe mutuo ſecant in F, productique ſunt ex punctis B, C, arcus BF, ad arcum DF, arcus perpendiculares B D, C E; [q] erit, vt ſinus totus quadrantis D F, ad tangentem arcus B D, ita ſinus arcus E F, ad tangentem arcus C E: Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum arcus E F, hoc eſt, ad ſinum complementi anguli A, ita tangens arcus B D, hoc eſt, ita tangens complemen-

q Theor. 6. ſchol. 40. huius.

plementi arcus AB, ad tangentem arcus CE, hoc eſt, ad tangentem complementi arcus AC. Non aliter demonſtrabimus, ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi anguli C, vt eſt tangens complementi arcus BC, ad tangentem complementi arcus AC, ſi nimirum arcus CB, CA, angulum C, continentes producantur, &c. In omni igitur triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

INFEREMVS hinc problema ſequens, quod quamuis in problemate primo antecedentis propoſ. demonſtratum quoque facilius tamen hic abſoluitur, cum in aurea regula primum locum ſortiatur ſinus totus.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato alterutro atcuum circa angulum rectum, cum angulo non recto adiacente, inuenire arcum recto angulo oppoſitum, vna cum reliquo arcu circa angulum rectum, & reliquo angulo non recto.

IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, datus ſit arcus AC, cum angulo A, ſibi adiacente. Dico dari quoq; arcum AB, vna cum arcu BC, & angulo B. [b] *Nam cum ſit, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli A, ita tangens complementi arcus AC, ad tangentem complementi arcus AB.* b 46. huius.



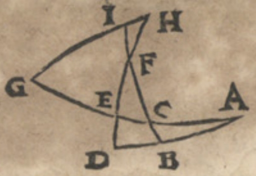
SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli dati, ita tangens complementi arcus dati ad aliud, producetur tangens complementi arcus recto angulo oppoſiti, qui quæritur. Reliqua inuenientur, vt in problemate 1. propoſitionis antecedentis dictum eſt. Praxis.

ARCVM autem AB, quæſitum eſſe quadrante minorem, maioremve, cognoſcemus, vt in dicto problemate 1. ſuperioris propoſ. oſtendimus.

THEOR. 45. PROPOS. 47.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus quadrante ſint minores: ſinus totus ad ſinum complementi arcus recto angulo oppoſiti eandem proportionem habet, quam tangens vtriusvis angulorum non rectorum ad tangentem complementi reliqui anguli.

IN triangulo ABC, cuius omnes arcus quadrante minores, ſit angulus B, rectus. Dico, ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi arcus AC, vt eſt tangens anguli C, ad tangentem complementi anguli A. Facta cõſtructione, vt in propoſ. 45. productoque arcu CE, ad G, vt CG, ſit quadrans, deſcribatur ex polo C. ad interuallum quadrantis CG, arcus circuli maximi GH, ſecans arcus CF, EF, productos in I, H:[a] eritque CI, quadrans quoque; cum circulus GH, à polo C, abſit quadrante.[b] Arcus item GH, EH, quadrantes erunt, propter rectos angulos G, E. Eſt enim angulus E, rectus, vt propoſ. 45. oſtenſum eſt; at G, rectus eſt,[c] propterea quod circulus CG, ad circulum GH, rectus eſt. Rurſus IG, arcus eſt anguli C; & CE, complementum arcus AC, recto angulo oppoſiti; & FE, complementum arcus DE, id eſt, anguli A. Quoniam igitur duo circuli maximi CG, CI, in ſphæra ſe interſecant in C, ductique ſunt ex arcus CI, punctis F, I, ad arcum CG, arcus perpendiculares FE, IG;[d] erit, vt ſinus totus quadrantis CG, ad tangentem arcus IG, hoc eſt, anguli C, ita ſinus arcus CE, hoc eſt, complementi arcus AC, ad tangentem arcus FE, hoc eſt, complementi anguli A: Et permutando erit, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus AC, recto angulo oppoſiti, ita tangens anguli C, ad tangentem complementi anguli A. Simili modo, aliter conſtructa figura, demonſtrabimus, ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi arcus AC, vt eſt tangens anguli A, ad tangentem complementi anguli C. In omni igitur triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod oſtendendum erat.



a Corol 16. 1 Theod.
b 25. huius.
c 15. 1. Theo.
d Theor. 6. ſcholij 40. huius.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate ſequens problema colligitur.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato arcu, qui recto angulo opponitur, cum alterutro angulorum non rectorum, inuenire alterum angulum non rectum, & duos arcus circa angulum rectum.

IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, datus ſit arcus AB, cum angulo B. Dico dari quoq; reliquum angulum A, & duos arcus AC, CB. [e] *Cum enim ſit, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus AB, ita tangens anguli B, ad tangentem complementi anguli A.* e 47. huius



SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus recto angulo oppoſiti, & dati; ita tangens anguli dati ad aliud, reperietur tangens complementi anguli quæſiti. Hinc ex arcu AB, & vtroque angulo B, A, vterq; arcus AC, CB, inuenietur, vt in 2. problemate propoſ. 41. oſtendimus. Praxis.

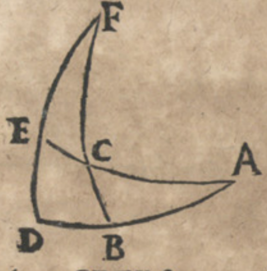
AN vero angulus quæſitus A, acutus ſit, obtuſusve, diſcemus ex arcu dato AB, & dato angulo B. Nam ſi AB, eſt quadrante minor, & angulus B, acutus quidem, [f] *erit & A, acutus; ſi autem B, eſt obtuſus, erit & A, obtuſus. At ſi AB, eſt maior quadrante, & B, quidem acutus, erit A, obtuſus: ſi vero B, eſt obtuſus, erit A, acutus.* f 38. huius.

THEOR. 46. PROPOS. 48.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus quadrante ſint minores: Sinus totus ad ſinum vtriusvis arcuum circa angulum rectum eandem habet proportionem, quam

quam tangens complementi alterius arcus circa angulum rectum ad tangentem complementi anguli oppoſiti.

IN triangulo ſphærico ABC, cuius omnes arcus minores quadrante, ſit rectus angulus B. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum arcus AB, vt eſt tangens complementi arcus BC, ad tangentem complementi anguli A. Facta enim conſtructione, vt in propoſ. 45. erit angulus D, rectus, & CF, complementum arcus BC; & EF, complementum anguli A; & AD, quadrans, vt ibi oſtenſum eſt. Quoniam igitur duo circuli maximi AD, AE, in ſphæra ſe mutuo ſecant in A, ducique ſunt ex punctis C, E, ad arcum AD, arcus perpendiculares CB, ED, [b] erit, vt ſinus totus quadrantis AD, ad tangentem arcus DE, ita ſinus arcus AB, ad tangentem arcus BC: Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum arcus AB, ita tangens arcus DE, ad tangentem arcus BC. [c] Eſt autem, (cum CF, EF, ſint complementa arcuum BC, DE,) vt tangens, arcus DE, ad tangentem arcus BC, ita tangens arcus CF, ad tangentem arcus EF. Igitur erit quoque, vt ſinus totus ad ſinum arcus AB, in tangens arcus CF, hoc eſt, complementi arcus BC, ad tangentem arcus EF, hoc eſt, complementi anguli A, arcui BC, oppoſiti. Non aliter oſtendemus, ſi aliter figura conſtruatur, ita eſſe ſinum totum ad ſinum arcus BC, vt eſt tangens complementi arcus AB, ad tangentem complementi anguli C. In omni triangulo ergo ſphærico rectangulo, &c. Quod demonſtrandum erat.



b *Theor. 6. ſcholij 40. huius.*

c *21. Sinuū.*

S C H O L I V M.

INFERTVR ex theoremate hoc ſequens problema: quod licet demonſtratum quoque ſit problemate 2. propoſ. 44. facilius tamen hic abſoluitur, cum in aurea regula ſinus to tus primum obtineat locum.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, datis duobus arcubus circa angulum rectum, vtrumlibet angulorum non rectorum, vna cum arcu reliquo, qui angulo recto opponitur, indagare.



d *48 huius*

IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, ſint dati duo arcus AC, CB. Dico vtrumuis angulorum A, B, & arcum AB, quoque dari. [d] Nam cum ſit, vt ſinus totus ad ſinum arcus AC, ita tangens complementi arcus CB, ad tangentem complementi anguli A. Item vt ſinus totus ad ſinum arcus CB, ita tangens complementi arcus AC, ad tangentem complementi anguli B.

Praxis.

SI ſiat, vt ſinus totus ad ſinum vtriusvis arcuum circa angulum rectum, ita tangens complementi alterius arcus circa rectum angulum ad aliud, reperietur tangens complementi anguli huic poſteriori arcui oppoſiti. Ex datis quoque duobus arcubus circa angulum rectum cognoſcetur & tertius arcus angulo recto oppoſitus, vt in problemate propoſ. 43. oſtendimus. Vel certe ex dato vtrolibet arcu, & angulo, qui ei opponitur, inuento, vt in problemate 3. propoſ. 41. traditum eſt.

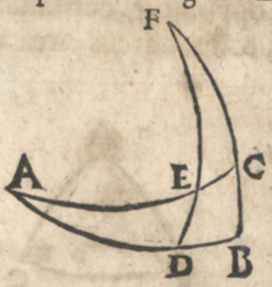
VTRVM autem angulus quæſitus ſit acutus, obtuſusve, docebit arcus ei oppoſitus. Hic enim ſi minor fuerit quadrante, [e] erit angulus ei oppoſitus, acutus; ſi vero maior, obtuſus.

e *34. huius*

THEOR. 47. PROPOS. 49.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus ſint minores quadrante: ſinus totus ad tangentem vtriusvis arcuum circa angulum rectum eandem proportionem, habet, quam tangens complementi anguli oppoſiti ad ſinum alterius arcus circa rectū angulum.

IN ſphærico triangulo ADE, cuius arcus omnes quadrante minores, ſit angulus D, rectus. Dico ita eſſe ſinum totum ad tangentem arcus DE, vt eſt tangens complementi anguli A, ad ſinum arcus AD. Repetita enim conſtructione figuræ propo. 45. erunt AB, AC, quadrantes, & CF, complementum arcus BC, id eſt, anguli A, vt ibi oſtenſum eſt. Igitur quoniam quadrantes ſunt AB, AC, & arcus ED, & AB, perpendicularis; [a] erit, vt ſinus totus ad tangentem arcus ED, ita tangens complementi arcus CB, hoc eſt anguli A, ad ſinum arcus AD. Eodem modo oſtendetur, ita eſſe ſinum totum ad tangentem arcus AD, vt eſt tangens complementi anguli E, ad ſinum arcus DE: ſi nimirum aliter figura conſtruatur. In omni ergo triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.



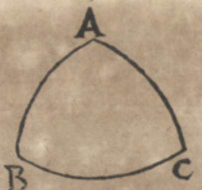
a *Theor. 7. ſcholij 40. huius.*

S C H O L I V M.

HINC tale problema colligitur, quod per problema 1. propoſ. 44. alio modo abſolui quoq; poteſt.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato alterutro arcuum circa angulum rectum, cum angulo oppoſito, reliquum arcum circa rectum angulum, & arcum recto angulo oppoſitum, cum reliquo angulo non recto inquirere: ſi modo conſtet, num arcus quæſitus ſit maior quadrante, minorve: Vel an reliquus angulus non rectus ſit acutus, obtuſusve.

IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, datus ſit arcus AC, cum angulo oppoſito B. Dico dari quoq; arcum BC, &c. [b] *Cum enim ſit, vt ſinus totus ad tangentem arcus AC, ita tangens complementi anguli B, ad ſinum arcus BC.* b 49. huius



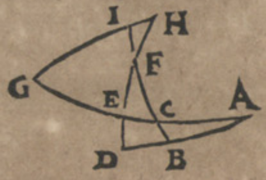
SI fiat, vt ſinus totus ad tangentem dati arcus, ita tangens complementi anguli dati ad aliud, producetur ſinus arcus quæſiti. Ex duobus porro arcubus circa rectum angulum cognitis in cognitionem reliqui arcus, & reliqui anguli non recti perueniemus, vt in problemate propoſ. 43. demonſtrauimus; vel certe ex vtrutro arcuum circa angulum rectum, & dato angulo, vt in problemate 2. propoſ. 42. docuimus. Praxis.

OPORTET autem hic conſtare, nũ arcus quæſitus BC, ſit quadrante maior, minorve; vel an angulus A, reliquus ſit acutus, obtuſusve: quemadmodum in poſteriore parte problematis 1. propoſ. 44. traditũ eſt: Vbi etiã errorẽ Copernici deteximus.

THEOR. 48. PROPOS. 50.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus quadrante ſint minores: ſinus totus ad tangentem complementi vtriusvis angulorum non rectorum habet proportionem eandem, quam tangens complementi reliqui anguli ad ſinum complementi arcus recto angulo oppoſiti.

IN triangulo ABC, cuius omnes arcus quadrante minores, ſit angulus B, rectus. Dico ita eſſe ſinum totum ad tangentem complementi anguli A, vt eſt tangens complementi anguli C, ad ſinum complementi arcus AC. Repetita namque figura propoſ. 47. cum CG, CI, quadrantes ſint ſe interſecantes in C, & arcus IG, FE, ad CG, perpendiculares, vt ex conſtructione ibidem facta perſpicuum eſt; [a] erit, vt ſinus totus ad tangentem arcus EF, qui complementum eſt arcus DE, hoc eſt, anguli A, ita tangens complementi arcus IG, id eſt, anguli C, ad ſinum arcus CE, hoc eſt, complementi arcus AC, recto angulo oppoſiti. Simili ratione oſtendemus, ſi aliter figuræ conſtructio inſtituatur, ita eſſe ſinum totum ad tangentem complementi anguli C, vt eſt tangens complementi anguli A, ad ſinum complementi arcus AC. Quam ob rem in omni triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod demonſtrandum erat.



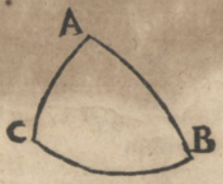
a Theor. 7. ſcholii 40. huius.

SCHOLIVM.

INFEREMVS ex hac propoſ. problema ſequens.

IN triangulo ſphærico rectangulo, datis duobus angulis non rectis, inquirere arcum angulo recto oppoſitum, & reliquos duos arcus circa angulum rectum.

IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, dati ſint duo anguli non recti A, B. Dico dari quoq; arcum AB, vna cum arcubus AC, BC. [b] *Quoniam enim eſt, vt ſinus totus ad tangentem complementi anguli A, ita tangens complementi anguli B, ad ſinum complementi arcus AB.* b 50. huius



SI fiat, vt ſinus totus ad tangentem complementi vtriusvis angulorum datorum, ita tangens complementi alterius dati anguli ad aliud, procreabitur ſinus complementi arcus recto angulo oppoſiti. Iam ex arcu, qui recto angulo opponitur, & vtrolibet angulorum non rectorum, inuenietur arcus ei oppoſitus, vt in 2. problemate propoſ. 41. monſtrauimus. Praxis.

PORRO an arcus quæſitus quadrante ſit maior, aut minor, ita diſcemus. Si vterq; angulorum A, B, fuerit obtuſus, vel acutus, [c] *erit arcus AB, quadrante minor; ſi vero alter eorum acutus fuerit, & alter obtuſus, erit idẽ arcus quadrante maior.* c 37. huius

THEOR. 49. PROPOS. 51.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius arcus omnes ſint minores quadrante: ſinus totus ad tangentem complementi arcus recto angulo oppoſiti proportionem habet eandem, quam tangens vtriusuis arcuum circa angulum rectum ad ſinum complementi anguli non recti adiacentis.

IN triangulo ſphærico ABC, cuius omnes arcus quadrante minores, rectus ſit angulus B. Dico ita eſſe ſinum totum ad tangentem complementi arcus AC, vt eſt tãgens arcus AB, ad ſinum complementi anguli A. Repetita namq; conſtructione figuræ propoſ. 45. erunt AD, AE, quadrantes & anguli D, E, recti, necnon & BF, DF, quadrantes, vt ibi eſt oſtenſum. Quia igitur in ſphæra arcus DB, per extremitates quadrantum BF, DF, ſeſe in F, ſecantium ducitur, & CE, ad DF, perpendicularis eſt; [a] erit vt ſinus totus ad tangentẽ arcus CE, qui complementum eſt arcus AC, recto angulo oppoſiti, ita tangens complementi arcus DB, hoc eſt, tangens arcus AB, ad ſinum arcus EF, qui complementum eſt arcus DE, ſeu anguli A. Non aliter demonſtrabitur, ita eſſe ſinum totum ad tangentem complementi arcus AC, vt eſt tangens arcus BC, ad ſinum complementi anguli C, ſi aliter inſtituatur conſtructio figuræ. Quocirca in omni triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod erat oſtendendum.



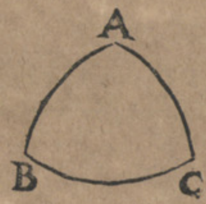
a Theor. 7. ſcholij 40. huius.

SCHOLIVM.

ORITVR ex hoc theoremata problema huiuſmodi, quod problemate 2. propoſ. 45. declaratum quoq; fuit.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato arcu, qui recto angulo opponitur, cum alterutro arcuum circa eundem rectum angulum, reperire angulum non rectum huic arcui adiacētem, hoc eſt, à datis arcubus comprehenſum, cum reliquo arcu, & angulo non recto.

b 51. huius



IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, datus ſit arcus AB, cum arcu AC. Dico dari quoque angulum A, cum arcu BC, & angulo B.[b] *Quoniam enim eſt, vt ſinus totus ad tangentem complementi arcus AB, it tangens arcus AC, ad ſinum complementi anguli A.*

Praxis.

SI fiat, vt ſinus totus ad tangentem complementi arcu recto angulo oppoſiti, ita tangens dati arcus circa rectum angulum ad aliud, inuenietur ſinus complementi anguli adiacentis, qui quæritur. Hinc reliqua inuenientur, vt in problemat 1. propoſ. 45. traditum eſt.

NVM vero quæſitus angulus acutus ſit, nec ne, addiſcemus, vt in problemate 2. propoſ. 45. docuimus.

THEOR. 50. PROPOS. 52.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus quadrante ſint minores: ſinus totus ad ſinum vtriusvis angulorum non rectorum habet proportionem eandem, quam ſecans alterius anguli non recti ad ſecantem arcus huic angulo oppoſiti.

IN triangulo ſphærico ABC, cuius omnes arcus quadrante minores, ſit angulus B, rectus. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum anguli A, vt eſt ſecans anguli C, ad ſecantem arcus AB. Facta conſtructione, vt in propoſ.



a 15. 1. Theo.

47. erunt GH, HE, AE, AD, DF, quadrantes, & GI, arcus anguli C, & DE, arcus anguli A, vt partim in propoſ. 45. partim vero in 47: oſtenſum eſt. Item angulus I, rectus erit,[a] propterea quod arcus CI, tranſiens per C, polum arcus GH, rectus eſt, ad GH. Itaque quoniam duo circuli maximi BI, DH, in ſphæra ſe mutuo ſecant in F, & ex punctis D, H, arcus DH, ad arcum BI, ducti ſunt arcus perpendiculares DB, HI;[b] erit, vt ſinus totus quadrantis DF, ad ſecantem arcus GI, qui complementum eſt arcus HI, ita ſinus arcus FH, ad ſecantem arcus AB, qui complementum eſt arcus DB: Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum arcus FH, vel arcus DE, (ſunt enim arcus FH, DE, æquales, quod & toti quadrantes EH, DF, æquales ſint) hoc eſt, anguli A, ita ſecans arcus GI, id eſt, anguli C, ad ſecantem arcus AB, angulo C, oppoſiti. Pari ratione, ſi aliter conſtruatur figura, demonſtrabimus, ita eſſe ſinum totum ad ſinum anguli C, vt eſt ſecans anguli A, ad ſecantem arcus BC. In omni ergo triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod erat oſtendendum.

b Theor. 8. ſcholii 40. huius.

SCHOLIVM.

ELICITVR hinc ſequens problema, quod aliter etiam in probl. 1. ſcholij propoſ. 42. ſolutum fuit.

IN triangulo ſphærico rectangulo, datis duobus angulis non rectis, elicere arcum vtrilibet eorum oppoſitum, vna cum arcu, qui recto angulo opponitur.

c 52. huius.



IN triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, dati ſint duo anguli A, B. Dico dari quoq; vtrumuis arcuū BC, AC, vna cum arcu AB.[c] *Nam cum ſit, vt ſinus totus ad ſinum anguli A, ita ſecans anguli B, ad ſecantem arcus AC: Item, vt ſinus totus ad ſinum anguli B, ita ſecans anguli A, ad ſecantem arcus BC.*

Praxis.

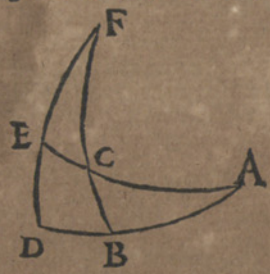
SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum anguli non recti quæſito lateri adiacentis, ita ſecans alterius anguli non recti ad aliud, reperietur ſecans arcus huic poſteriori angulo oppoſiti, qui quæritur. Inuento autem vtroque arcu circa angulum rectum, reperietur ex ipſis tertius arcus recto angulo oppoſitus, vt in problemate propoſ. 43. oſtendimus: Vel certe ex inuento alterutro arcu, & angulo dato, qui ei opponitur, vt in problemate 3. propoſ. 41. diximus.

NVM vero duo arcus quæſiti circa angulum rectum minores quadrante ſint, maioresve, ſciemus, vt in problemate 1. propoſ. 42. docuimus.

THEOR. 51. PROPOS. 53.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus quadrante minores ſint: ſinus totus ad ſinum complementi vtriusuis arcuum circa angulum rectum habet eandem proportionem quam ſecans arcus recto angulo oppoſiti ad ſecantem reliqui arcus.

IN triangulo ſphærico ABC, cuius omnes arcus quadrante minores, ſit angulus B, rectus. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi arcus BC, vt eſt ſecans arcus AC, ad ſecantem arcus AB. Facta namq; conſtructione figuræ, vt in propoſ. 45. erit BF, quadrans; CE, BD, ad DF, perpendiculares, vt ibi eſt demonſtratum. Quia ergo in ſphæra duo circuli maximi BF, DF, ſe mutuo ſecant in F, ductique ſunt ex punctis B, C, ad DF, perpendiculares arcus BD, CE; [a] erit, vt ſinus totus quadrantis BF, ad ſecantem complementi arcus CE, hoc eſt, ad ſecantem arcus AC, ita ſinus arcus FC, qui complementum eſt arcus BC, ad ſecantem complementi arcus BD, hoc eſt, ad ſecantem arcus AB: Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus BC, ita ſecans arcus AC, ad ſecantem arcus AB. Simili modo oſtendemus, ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi arcus AB, vt eſt ſecans arcus AC, ad ſecantem arcus BC, ſi nimirum figura paulo aliter conſtruatur. In omni ergo triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.



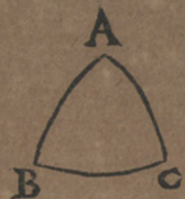
a Theor. 8. ſcholii 40. huius.

SCHOLIVM.

SEQVENS problema ex hoc theoremate colligitur.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato arcu, qui recto angulo opponitur, cum alterutro arcuum circa rectum angulum, inueſtigare tertium arcum, cum duobus angulis non rectis.

In triangulo ABC, cuius angulus C, rectus, datus ſit arcus AB, vna cum arcu AC. Dico dari quoque arcum BC, cum angulis A, B. [a] Cum enim ſit, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus AC, ita ſecans arcus AB, ad ſecantem arcus BC. *a 53. huius.*



SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum complementi dati arcus circa angulum rectum, ita ſecans arcus angulo recto oppoſiti ad aliud, producetur ſecans tertij arcus, qui inquiritur. Hinc ex duobus arcubus circa rectum angulum cognitis, vterlibet angulorum non rectorum cognoſcetur, vt in 5. problemate ſcholij propoſ. 44. vel in problemate ſcholij propoſ. 48. docuimus. *Praxis.*

VTRVM vero quæſitus arcus BC, ſit quadrante maior, minorve, diſcemus ex datis duobus arcubus, vt ad finem problematis ſcholij 1. propoſ. 43. traditum eſt.

THEOR. 52. PROPOS. 54.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus quadrante ſint minores: ſinus totus ad ſinum vtriuslibet angulorum non rectorum proportionem habet eandem, quam ſecans complementi arcus illi angulo oppoſiti ad ſecantem complementi arcus recto angulo oppoſiti.

IN triangulo ABC, cuius arcus omnes ſint minores quadrante, ſit angulus B, rectus. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum anguli A, vt eſt ſecans complementi arcus BC, ad ſecantem complementi arcus AC. Repetita enim conſtructione figuræ propoſ. 47. erit angulus I, rectus, vt in prop. 52. monſtratum eſt; necnon & angulus G. Item GH, EH, DF, BF, AE, quadrãtes, vt ex demonſtratis in propoſ. 45. & 47. cõſtat. Quia igitur in ſphæra duo circuli maximi EH, GH, ſe mutuo ſecant in H, & ex punctis E, F, arcus EH, ad arcum GH, ducti ſunt arcus perpendiculares EG, FI; [a] erit, vt ſinus totus quadrantis EH, ad ſecantem complementi arcus FI, hoc eſt, ad ſecantem arcus CF, qui complementum etiam eſt arcus BC, ita ſinus arcus FH, hoc eſt, arcus DE, (eſt enim arcus FH, arcui DE, æqualis, ob quadrantes EH, DF, æquales) qui arcus eſt anguli A, ad ſecantem complemẽti arcus EG, id eſt, ad ſecantem arcus EC, qui complementum quoque eſt arcus AC. Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum arcus DE, hoc eſt, anguli A, ita ſecans complementi arcus BC, ad ſecantem complementi arcus AC. Non ſecus oſtendemus, ſi aliter figura conſtruatur, ita eſſe ſinum totum ad ſinum anguli C, vt eſt ſecans complementi arcus AB, ad ſecantem complementi arcus AC. In omni igitur triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.



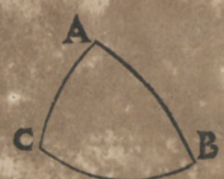
a Theor. 8. ſcholij 40. huius.

SCHOLIVM.

SEQVITVR ex hoc theoremate ſequens problema, quod aliter etiam abſoluimus in problemate 3. propoſ. 41.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato vtrolibet angulorum non rectorum, cum arcu oppoſito, inueſtigare arcum recto angulo oppoſitum, vna cum tertio arcu, & reliquo angulo non recto: dummodo conſtet, num arcus angulo recto oppoſitus ſit maior quadrante, minorve: aut an alter angulus non rectus ſit acutus, obtuſuſve.

IN triangulo ABC, rectum habente angulum C, datus ſit angulus B, cum arcu AC. Dico dari quoque arcum AB, vna cum arcu BC, & angulo A. [b] Cum namq; ſit, vt ſinus totus ad ſinum anguli B, dati, ita ſecans complementi arcus dati AC, ad ſecantem complementi arcus AB. *b 54. huius*



SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum dati anguli, ita ſecans complementi dati arcus ad aliud, producetur ſecans complementi arcus recto angulo oppoſiti, qui inquiritur. Ex arcubus vero AB, AC, cognitis notus fiet tertius arcus BC, ex problemate 1. propoſ. 43. Item ex arcubus AB, BC, notis cognitus fiet angulus A, ex problemate 1. propoſ. 41. *Praxis.*

OPORTET autem hic conſtare, num arcus quæſitus AB, ſit quadrante maior, an minor: Vel an reliquus angulus non rectus A, ſit acutus, obtuſuſue, alioquin neſciremus, qualis arcus pro AB, aſſumendus ſit, cum poßit eſſe maior quadrante, vel minor, vt perſpicuum eſt. Id quod ad problema 3. propoſ. 41. monuimus. Vbi etiā Copernici, atq; Ioh. Regiom. errorem aperuimus.

THEOR. 53. PROPOS. 55.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius omnes arcus minores quadrante ſint: ſinus totus ad ſinum arcus recto angulo oppoſiti eandem proportionē habet, quam ſecans complementi vtriuslibet arcuum circa angulum rectum ad ſecantem complementi anguli huic arcui oppoſiti.

IN ſphærico triangulo ABC, cuius omnes arcus ſint minores quadrante, angulus B, rectus ſit. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum arcus AC, vt eſt ſecans complementi arcus BC, ad ſecantem complementi anguli A, arcui BC, oppoſiti. Repetita enim conſtructione figuræ propoſ. 45. erit AE, quadrans; DE, arcus anguli A, & EF, eius complementum; atque CF, complementum arcus BC, vt ibi demonſtratum eſt. Quia ergo in ſphæra duo maximi circuli AE, AD, ſe interſecant in A, & ex punctis C, E, arcus AE, ad arcum AD, ducti ſunt perpendiculares arcus CB, ED;[a] erit vt ſinus totus quadrantis AE, ad ſecantem complementi arcus CB, hoc eſt, ad ſecantem arcus CF, ita ſinus arcus AC, ad ſecantem complementi arcus DE, ſiue anguli A, id eſt, ad ſecantem arcus EF: Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum arcus AC, ita ſecans complementi arcus BC, ad ſecantem complementi anguli A. Pari ratione, ſi aliter figura extruatur, erit, vt ſinus totus ad ſinum arcus AC, ita ſecans complementi arcus AB, ad ſecantem complementi anguli C. Quare in omni triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod erat oſtendendum.



a Theor. 8. ſcholij 40. huius.

SCHOLIVM.

EX his ſequens problema diſſoluemus, quod alio quoque modo in problemate 1. propoſ. 41. abſolutum fuit.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato arcu, qui recto angulo opponitur, cum alterutro arcuum circa rectum angulum, inuenire angulum huic arcui oppoſitum: cum reliquo arcu, & angulo.

IN triangulo ABC, (in figura ſcholij propoſ. 54.) cuius rectus angulus C, datus ſit tam arcus AB, quam AC. Dico dari quoque angulum B, vna cum arcu BC, & angulo A.[b] *Quia enim eſt, vt ſinus totus ad ſinum arcus AB, ita ſecans complementi arcus AC, ad ſecantem complementi, anguli B.*

b 55. huius.

Praxis.

SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum arcus angulo recto oppoſiti, ita ſecans complementi arcus circa rectum angulum dati ad aliud, producetur ſecans complementi anguli quæſiti, qui dicto arcui opponitur. Iam ex datis duobus arcubus tertium inueniemus, vt in problemate propoſ. 43. vel in problemate propoſ. 53. tradidimus. Item ex arcu, qui recto angulo opponitur, & hoc arcu inuento, reperiemus reliquum angulum huic inuento arcui oppoſitum, vt dictum eſt in hoc problemate, vel certe, vt in problemate 1. propoſ. 41. oſtendimus.

AN vero quæſitus angulus B, acutus ſit, an obtuſus, docebit arcus AC, circa angulum rectum datus, vt in problemate 1. propoſ. 41. præcepimus.

THEOR. 54. PROPOS. 56.

IN omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius arcus ſint omnes quadrante minores: ſinus totus ad ſinum complementi vtriuslibet arcuum circa rectum angulum eandem proportionem habet, quam ſecans anguli huic arcui oppoſiti ad ſecantem complementi reliqui anguli n[illegible] recti.

IN triangulo ſphærico ABC, angulum B, rectum habente, ſint omnes arcus quadrante minores. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi arcus BC, vt eſt ſecans anguli non recti A, ad ſecantem complementi anguli C. Repetita enim conſtructione figuræ propoſ. 47. erunt anguli G, E, recti, & arcus BF, DF, CI, EH, GH, quadrantes, & DE, arcus anguli A, & GI, arcus anguli C, vt ex demonſtratis in propoſ. 45. & 47. liquet. Igitur quia duo maximi in ſphæra circuli CG, CI, ſe in C, interſecant, ductiq; ſunt ex punctis F, I, arcus CI, ad arcum CG, arcus perpendiculares FE, IG;[a] erit, vt ſinus totus quadrantis CI, ad ſecantem complementi arcus FE, hoc eſt, ad ſecantem arcus DE, anguli A, ita ſinus arcus CF, qui complementum eſt arcus BC, ad ſecantem complementi arcus GI, anguli C: Et permutando, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus BC, ita ſecans anguli A, ad ſecantem complementi anguli C. Non ſecus oſtendemus, ſi aliter conſtruatur figura, ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi arcus AB, vt eſt ſecans anguli C, ad ſecantem complementi anguli A. Quapropter in omni triangulo ſphærico rectangulo, &c. Quod demonſtrandum erat.



a Theor. 8. ſcholij 40. huius.

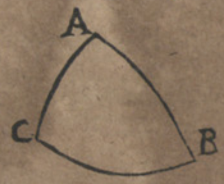
SCHOLIVM.

INFERTVR hinc problema huiuſmodi.

IN triangulo ſphærico rectangulo, dato vtrouis arcuum circa angulum rectum, cum angulo non recto oppoſito, inquirere reliquum angulum non rectum, & inſuper reliquos duos arcus: modo conſtet, an quæſitus angulus ſit acutus, obtuſusve: Vel certe, an alter arcus circa angulum rectum ſit minor quadrante, an maior.

IN triangulo ABC, angulum C, rectum habente, datus ſit arcus AC, cum angulo B. Dico dari quoque angulum A, cum arcubus BC, AB. [a] *Cum enim ſit, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus AC, dati, ita ſecans anguli dati B, ad ſecantem complementi anguli A:*

a 56. huius



Praxis.

SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus dati, ita ſecans dati anguli ad aliud, reperietur ſecans complementi anguli alterius non recti. Hinc ex duobus angulis non rectis notis inueſtigabitur arcus recto oppoſitus angulo, vt in problemate propoſ. 50. monſtrauimus, ac proinde & reliquus arcus, ex arcu, qui recto angulo opponitur, & ex noto angulo, qui reliquo arcui opponitur, vt in problemate 2. propoſ. 41. diximus.

OPORTET *autem conſtare, an reliquus angulus non rectus, qui quæritur, ſit acutus, obtuſusve; vel, an reliquus arcus circa angulum rectum ſit minor, aut maior quadrante, vt ad calcem problematis 2. propoſ. 42. monuimus, vbi errorem etiam Nicolai Copernici deteximus*

QVONIAM *vero abſolutus iam eſt triangulorum ſphæricorum rectangulorũ calculus, libet hoc loco omnia problemata hactenus explicata in tabulam quandam referre, vt facilius quilibet id, quod maxime ſcire deſiderat, poſſit inuenire. Itaq; cum in omni triangulo ſphærico rectangulo id, quod primo loco quæritur, ſi vel arcus recto angulo oppoſitus, vel vterlibet arcuum circa rectum angulum, vel deniq; alteruter angulorum non rectorum, (quamuis eo, quod potiſſimum quæritur, inuento, cætera quoq; reperiantur, vt ad praxes ſingulorum problematum monuimus) trimembrem tabulam, pro numero quæſitorum, confecimus, appoſuimusq; problemata propoſitionum, in quibus inuentiones quæſitorum demonſtratæ ſunt.*

Sequuntur problemata ſuperiorum propoſitionum in trimembrem tabulam digeſta.

Inuentio arcus recto angulo oppoſiti.

Quando datur.	1.	Arcus circa angulum rectum: Et angulus non rectus ei oppoſitus.	Probl. 3. propoſ. 41. & (Probl. propoſ. 54.
	2.	Vterque arcus circa angulum rectum.	Probl. propoſ. 43.
	3.	Arcus circa angulum rectum: Et angulus non rectus ei adiacens.	Probl. 1. propoſ. 45. (& Probl. propoſ. 46.
	4.	Vterque angulus non rectus.	Probl. propoſ. 50.

Inuentio arcus vtriuslibet circa angulum rectum.

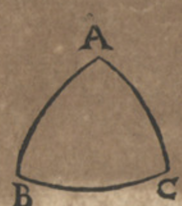
Quando datur	1.	Arcus recto angulo oppoſitus: Et angulus non rectus quæſito arcui oppoſitus.	Probl. 2. propoſ. 41.
	2.	Vterque angulus non rectus.	Probl. 1. propoſ. 42. (& Probl. propoſ. 52.
	3.	Arcus recto angulo oppoſitus: & alter arcus circa rectum angulum.	Probl. propoſ. 43. & 53.
	4.	Arcus alter circa angulum rectum: Et vteruis angulorum non rectorum.	Probl. 1. propoſ. 44.
	5.	Arcus recto angulo oppoſitus: Et angulus non rectus quæſito arcui adiacens.	Probl. 3. propoſ. 45.
	6.	Arcus alter circa angulum rectum: Et alter angulus non rectus ei oppoſitus.	Probl. propoſit. 49. & (Probl. 1. propoſ. 44.

Inuentio anguli non recti vtriuſuis.

Quando datur	1.	Arcus recto angulo oppoſitus: Et arcus circa angulum rectum quęſito angulo oppoſitus.	Probl. 1. propoſ. 41. & (Probl. propoſ. 55.
	2.	Arcus circa angulum rectum: Et alter angulus non rectus.	Probl. 2. propoſ. 42.
	3.	Vterque arcus circa rectum angulum.	Probl. 2. propoſ. 44. (& Probl. propoſ. 48.
	4.	Arcus recto angulo oppoſitus: Et arcus circa rectum angulum quęſito angulo adiacens.	Probl. 2. propoſ. 45. (& Probl. propoſ. 51.
	5.	Arcus recto angulo oppoſitus: Et alter angulus non rectus.	Probl. propoſ. 47.
	6.	Arcus circa angulum rectum quæſito angulo adiacens: Et alter angulus non rectus huic arcui oppoſitus:	Probl. propoſit. 56. & (Probl. 2. propoſ. 42.

Quid agẽdum in triangulo rectãgulo, in quo quadrãtes sũt.
a *Coro. 38. huius.*
b *35. huius.*
c *25. huius.*
d *Coro. 26. huius.*

SED quia hactenus de eo ſolum triangulo rectangulo egimus, cuius nullus arcuum quadrans eſt, doceamus breuiter, (rem quidem cuilibet perfacilem ex demonſtratis) quo pacto nos gerere debeamus in eo, quod duos ſaltem arcus habet, quadrantes, & duos angulos rectos. [a] *Nullum enim triangulum eſſe poteſt rectangulum, cuius vnus duntaxat arcus ſit quadrans, ſed vel nullus erit quadrans, vel omnes tres quadrantes erunt, vel duo, &c. Sit ergo triangulum ſphæricum ABC, in quo angulus B, ponatur rectus, & arcus AB, circa angulum rectum quadrans. Hoc poſito,* [b] *erit & arcus AC, recto angulo oppoſitus, quadrans. Quare cum duo arcus AB, AC, quadrantes ſint,* [c] *erunt duo anguli B, C, recti;* [d] *ac propterea A, polus erit arcus BC; & BC, arcus anguli A, ex definitione 6. Igitur ſi datus ſit tertius angulus A, datus etiam erit tertius arcus BC: Et contra, ſi datus ſit tertius arcus BC, datus quoque erit tertius angulus A. Eodem modo, ſi alter arcus BC, circa angulum rectum quadrans ponatur, oſtendemus & arcum AC, recto angulo oppoſitum quadrantem eſſe, & angulum A, rectum. Si ergo detur tertius angulus C, dabitur quoq; tertius arcus AB, & contra, vt prius. Quod ſi quantitas tertij anguli, aut arcus data non fuerit, nihil certi colligi poterit, licet duo alij anguli recti ſint, duoque arcus illis oppoſiti, quadrantes, vt manifeſtum eſt.*



e *36. huius.*

PONATVR iam arcus AC, recto angulo B, oppoſitus quadrans. Quo poſito, [e] *erit & alter ſaltem arcuum AB, BC, circa angulum rectum quadrans. Quamobrem reliqua conſequentur, vt proxime demonſtratum eſt.*

f *26. vel 35. huius.*
g *Corol. 25. [huius].*

QVOD ſi quando duo arcus AB, BC, circa angulum rectum quadrantes ponantur, [f] *erit quoque tertius arcus AC, recto angulo oppoſitus, quadrans. Quocirca cum omnes arcus quadrantes ſint,* [g] *erunt omnes anguli recti.*

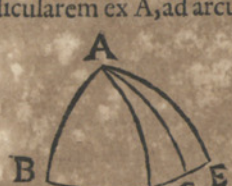
EX his facile quiuis intelliget, quid agere debeat, quando aliquis arcus in triangulo rectangulo quadrans ponitur: præſertim ſi propoſ. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. attente conſiderentur.

SEQVITVR iam, vt calculum triangulorum non rectangulorum tandem exponamus: Verum prius aliquot theoremata a[d ha]nc rem perutilia demonſtranda ſunt.

THEOR. 55. PROPOS. 57.

SI in triangulo ſphærico ſupra vnum arcum duo anguli acuti, aut obtuſi conſiſtant; Perpendicularis arcus à tertio angulo in eum arcum demiſſus intra triangulum cadit. Si vero duorum angulorum ſupra vnum arcum conſiſtentium vnus ſit acutus, & obtuſus alter; Perpendicularis arcus à tertio angulo in eum arcum demiſſus extra triangulum cadit.

IN triangulo ſphærico ABC, ſint duo anguli B, C, ſupra arcum BC, acuti, vel obtuſi. Dico arcum perpendicularem ex A, ad arcum BC, demiſſum cadere intra triangulum, cuiuſmodi eſt arcus AD. Si enim dicatur cadere extra, cadat, ſi fie[ri p]oteſt, arcus AE, ad BC, arcum productum perpendicularis extra triangulum, & ponantur primum duo anguli B, C, acuti, ac proinde angulus ACE, obtuſus. Quoniam igitur in triangulo ACE, angulum E, habente rectum, angulus ACE, obtuſus eſt, [a] erit arcus AE, quadrante maior. Rurſus in triangulo ABE, habente angulum rectum E, angulus B, acutus eſt, [b] erit arcus AE, quadrante minor: Sed & quadrante maior oſtenſus eſt; quod eſt abſurdum.



a *34. huius.*
b *34. huius.*

PONAN-

PONANTVR deinde anguli B, C, obtuſi, atque adeo angulus ACE, acutus. Quia ergo in triangulo ACE, habente rectum angulum E, angulus ACE, acutus eſt, [c] erit arcus AE, minor quadrante. Rurſus quoniam in triangulo ABE, rectum habente E, angulum, angulus B, obtuſus eſt, [d] erit arcus AE, quadrante maior: Sed & quadrante minor oſtenſus eſt; quod eſt abſurdum. Non cadit ergo arcus perpendicularis extra triangulum: ſed neq; cum altero arcuum AB, AC, coincidet, quod neuter angulorum B, C, ponatur rectus. Cadit ergo intra triangulum. c 34. huius d 34. hui.

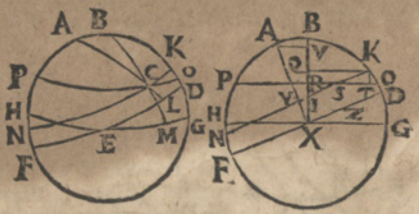
IAM vero ponatur in eodem triangulo ABC, angulus B, acutus, & C, obtuſus. Dico perpendicularem arcum ex A, ad arcum BC, demiſſum extra triangulum cadere, cuiuſmodi eſt arcus AE. Nam ſi intra dicatur cadere, cadat, ſi fieri poteſt, arcus AD, ad BC, perpendicularis intra triangulum. Itaque quia in triangulo ACD, angulum rectum habente D, angulus C, obtuſus eſt, [e] erit arcus AD, maior quadrante. Rurſus cum in triangulo ABD, rectum habente angulum D, angulus B, acutus ſit, [f] erit arcus AD, quadrante minor: Sed & quadrante oſtenſus eſt maior; quod eſt abſurdum. Arcus ergo perpendicularis non cadit intra triangulum; ſed neque cum altero arcuum AB, AC, coincidit, cum neuter angulorum B, C, rectus ponatur. Cadit ergo extra triangulum, Quapropter, ſi in triangulo ſphærico ſupra vnum arcum duo anguli acuti, &c. Quod erat demonſtrandum. e 34. huius. f 34. huius.

THEOR. 56. PROPOS. 58.

IN omni triangulo ſphærico, cuius duo arcus ſint inæquales; quadratum ſinus totius ad rectangulum ſub ſinubus rectis duorum arcuum inæqualium contentum, eandem proportionem habet, quam ſinus verſus anguli à dictis arcubus comprehenſi ad differentiam duorum ſinuum verſorum, quorum vnus differentiæ eorundem arcuum debetur, alter vero tertio arcui, qui prædicto angulo oppoſitus eſt, reſpondet.

IN triangulo ſphærico ABC, ſint duo arcus AB, AC, inæquales, ille minor, & hic maior. Dico ita eſſe quadratum ſinus totius ad rectangulum ſub ſinubus rectis arcuum AB, AC, contentum, vt eſt ſinus verſus anguli A, ad differentiam inter ſinum verſum arcus, quo arcus AB, AC, inter ſe differunt, & ſinum verſum arcus BC. Cuius rei demonſtrationem, vt clarior fiat, & generalior, in quindecim caſus diuidemus.

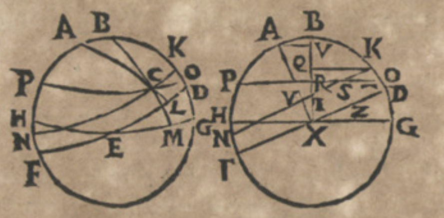
1. SINT omnes tres arcus quadrante minores. Compleatur minoris arcus AB, circulus ABDGH, productisque arcubus AC, BC, fiant quadrantes AL, BM; & polis A, B, interuallis autem quadrantum AL, BM, circuli maximi deſcribantur DLEF, GMEH: Et eiſdem polis, interuallis autem AC, BC, circuli non maximi delineentur kCN, OCP, [a] qui illis maximis paralleli erunt: [b] & tam hi, quam illi ad circulum ABDGH, recti erunt, cum ille per horum polos tranſiens ad ipſos ſit rectus. Poſt hæc, vt confuſio vitetur, in circulo ABDGH, ſeorſum deſcripto ſint cõmunes ſectiones ipſius, & circulorũ ex polis A, B, deſcriptorum, nempe DF, GH, communes ſectiones ipſius, & maximorum circulorum DL, EF, GMEH, quæ ipſorum diametri erunt ſeſe in centro ſphæræ X, interſecantes: At kN, OP, communes ſectiones eiuſdem, & circulorum kCN, OCP, ſe interſecantes in S; [c] quæ ipſis DF, GH, parallelæ erunt; & diametri circulorum kCN, OCP; [d] quod maximus circulus ABDGH, per eorum polos tranſiens eos bifariam ſecet, nimirum per eorum diametros. Ducantur quoque ſemidiametri AX, ſecans kN, in Y; & BX, ſecans KN, OP, in I, R. [e] Eruntque ſemidiametri AX, BX perpendiculares ad circulos per DF, kN, GH, OP, ductos; cum ab eorum polis A, B, ducantur per X, ſphæræ centrum: ac proinde anguli ad Y, & R, recti erunt, ex definit. 3. libr. 11. Euclidis. Ducantur denique ad BX; OP, perpendiculares AV, kQ, kT. Erit igitur, per ea, quæ in tractatione ſinuum ſcripſimus, AV, ſinus rectus arcus AB; & kY, ſinus rectus arcus Ak, hoc eſt, arcus AC, cum arcus Ak, AC, ex definit. poli, æquales ſint, vt in primo circulo apparet. BR, erit ſinus verſus arcus BO, id eſt, arcus BC, cum arcus BO, BC, æquales ſint, ex defin. poli. BQ, ſinus verſus erit arcus Bk, qui differentia eſt arcuum inæqualium AB, AC, propterea quod, ex defin. poli, arcus Ak, arcum AB, arcu Bk, ſuperans, æqualis eſt arcui AC: ac proinde QR, vel kT, differentia erit inter BR, ſinum verſum tertii arcus BC, & BQ, ſinum verſum differentiæ arcuum inæqualium AB, AC, hoc eſt ſinum verſum arcus Bk. Poſtremo erit kS, ſinus verſus arcus kC, in circulo non maximo kCN, cum recta ex C, in communes ſectiones circulorum kCN, OCP, cum circulo ABDGH, hoc eſt, in punctum S, cadens, [f] (quæ quidem ad circulum ABDGH, recta eſt, vtpote communis ſectio circulorum kCN, OCP, ad eundem circulum ABDGH, rectorum) ſinus rectus ſit eiuſdem arcus kC. Sumatur quoque DZ, ſinus verſus arcus DL, hoc eſt, anguli A, [g] qui quidem arcus arcui kC, ſimilis eſt. Demonſtrandum igitur eſt, ita eſſe quadratum ſinus totius, hoc eſt, rectangulum ſub DX, XA, contentum, ad rectangulum ſub ſinubus rectis AV, kY, arcuum AB, AC, contentum, vt eſt ſinus verſus DZ, anguli A, ad kT, differentiam inter BR, ſinum verſum arcus BC, & BQ, ſinum verſum arcus Bk, differentiæ arcuum inæqualium AB, AC. quod ita fiet.



1. caſus. a 2. 2. Th. b 15. 1. Th. c 16. vnd. d 15. 1. The. e Schol. 10. 1. Theo. f 19. vnde. g 10. 1. Th.

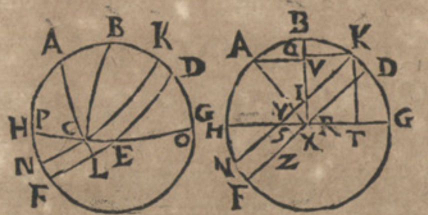
[h] QVONIAM angulus XIY, angulo RIS, æqualis eſt, & angulus rectus Y, angulo recto R; [i] erit reliquus angulus IXY, trianguli IXY, reliquo angulo ISR, trianguli ISR, æqualis, hoc eſt, angulo ad verticem kST. Cum ergo & angulus rectus V, recto angulo T, æqualis ſit, erit & reliquus angulus XAV, trianguli XAV, reliquo angulo SkT, trianguli SkT, æqualis. [k] Quam ob rem erit, vt XA, ad AV, ita Sk, ad kT. Rurſus quia DZ, kS, ſinus verſi ſunt arcuum ſimilium DL, kC; erit, vt DX, ad kY, ſinus totus ad ſinum totum, ita DZ, ad kS, per lemma propoſ. 1. noſtræ Gnomonices. [l] Quia vero proportio rectanguli ſub DX, XA, ad rectan- h 15. primi. i 32. primi. k 4. ſexti. l 23. ſexti.

rectangulum ſub KY, AV, componitur ex proportione DX, ad KY, hoc eſt, DZ, ad KS, & ex proportione XA ad AV: Et proportio DZ, ad KT, componitur ex eiſdem proportionibus, nempe (poſita media recta KS,) ex proportione DZ, ad KS, & ex proportione KS, ad KT, hoc eſt, ex proportione XA, ad AV; erit, vt rectangulum ſub DX, XA, ideſt, quadratum ſinus totius, ad rectangulum ſub KY, AV, ſinubus rectis arcuum inæqualium AC, AB, ita DZ, ſinus verſus anguli A, ad KT, differentiam inter BR, ſinum verſum arcus BC, angulo A, oppoſiti, & BQ, ſinum verſum differentiæ arcuum inæqualium AC, AB. Quod eſt propoſitum.



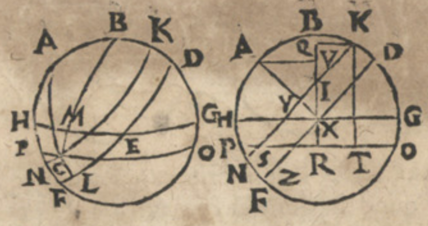
2. caſus. 2. SINT duo arcus inæquales AB, AC, quadrante quidem minores, at BC, quadrans. Compleatur minoris arcus AB, circulus ABDGH, & producto arcu AC, vt fiat quadrans AL, deſcribantur ex polis A, B, ad interualla quadrantum AL, BC, circuli maximi DELF, GECH: Item ex polo A, ad interuallum A C, circulus non maximus KCN, o qui ipſi DELF, parallelus erit, p ſecabitque circulus ABDGH, circulos DELF, GECH, KCN, ad angulos rectos, & bifariam: ac proinde horum cum illo communes ſectiones DF, GH, KN, diametri eorum erunt, & DF, GH, ſe in X, centro ſphæræ interſecabunt, q paralleIæque erunt DF, KN. Reliqua fiant, vt in præcedenti caſu, niſi quod hic punctum R, idem eſt, quod X, propterea quod circulus OCP, à circulo GEH, atque adeo recta ORP, à recta GH, non differt. Erit, vt prius, AV, ſinus rectus arcus AB; & KY, ſinus rectus arcus AK, hoc eſt, arcus AC, ipſi AK, ex defin. poli, æqualis. Item BR, ſinus verſus erit arcus BG, id eſt, arcus BC, ipſi BG, æqualis. At BQ, ſinus erit verſus arcus BK, differentiæ arcuum AB, AC; ideoque QR, vel KT, differentia erit inter ſinus verſos BR, BQ, arcuum BC, BK. Denique KS, erit ſinus verſus arcus KC. Sumpto ergo DZ, ſinu verſo arcus DL, hoc eſt, anguli A, demonſtrandum eſt, ita eſſe quadratum ſinus totius, id eſt, rectangulum ſub DX, XA, ad rectangulum ſub AV, KY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt ſinus verſus DZ, anguli A, ad KT, differentiam ſinuũ verſorum BR, BQ, arcuum BC, BK. Quod quidem demonſtrabitur, vt in præcedenti caſu niſi quod triangulum XAV, oſtendetur hic æquiangulum eſſe triangulo SKT, ex eo quod angulus IXY, angulo YSX, æqualis eſt, r propterea quod triangula IXY, YSX, ſimilia ſunt inter ſe. Hinc enim fit, rectangula trianguli XAV, SKT, inter ſe omnino æquiangula eſſe.

o 2.2.The.
p 15.1.Th.
q 16.vnd.
r 8.ſexti.



3. caſus. 3. SINT rurſus AB, AC, quadrante minores, at BC, maior. Compleatur minoris arcus AB, circulus, & ex CB, abſcindatur quadrans BM, producaturque AC, vt fiat quadrans AL. Reliqua conſtruantur, vt in primo caſu. Erunt hic ſinus, vt ibi. Demonſtandum ergo eſt, ita eſſe quadratum ſinus totius, nempe rectangulum ſub DX, XA, ad rectangulum ſub AV, KY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt ſinus verſus DZ, anguli A, ad KT, differentiam ſinuum verſorum BR, BQ, arcuum BC, BK. quod quidem oſtendetur, vt in primo caſu, niſi quod triangulum XAV, oſtendemus hic triangulo SKT, æquiangulum eſſe, s ex eo, quod angulus XIY, angulo SKT, externus interno, æqualis eſt. Hinc enim efficitur, in triangulis rectangulis XIY, SKT, reliquos angulos IXY, KST, æquales eſſe; atque idcirco rectangula triangula XAV, SKT, eſſe æquiangula.

s 29.primi.

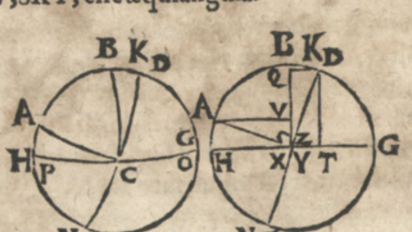


4. caſus. 4. SIT arcus AC, quadrans, atque adeo AB, quadrante minor; ſtatuatur quoque BC, minor quadrante. Completo circulo ABDGH, minoris arcus AB; productoque arcu BC, vt fiat quadrans BM, deſcribantur ex polis A, B, ad interualla quadrantum AC, BM, circuli maximi DCEF, GMEH: Item ex polo B, ad interuallum arcus BC, circulus non maximus OCP. Reliqua conſtruantur, vt in primo caſu, niſi quod hic duo circuli paralleli DEF, KCN, inter ſe non differunt, propter quadrantem AC. Ex quo fit, rectas, DF, kN, inter ſe quoq; non differre. Quod etiam de ſinubus verſis kS, DZ, dicendum eſt. Alii ſinus ſunt, vt prius. Iam vero, ita eſſe quadratum ſinus totius, ſiue rectangulum ſub DX, XA, ad rectangulum ſub AV, KY, ſinubus rectis arcuũ AB, AC, vt eſt DZ, ſinus verſus anguli A, ſiue arcus KC, ad KT, differentiam ſinuum verſorum BR, BQ arcuum BC, BK, oſtendemus, vt in primo caſu; excepto, quod hic triangulum XAV triangulo SKT, æquiangulum eſſe demonſtrabimus, ex eo, quod angulus AXV, angulo YSR, æqualis eſt, t (propterea quod triangula IXR, RSY, ſimilia ſunt) atque adeo angulo KST. Hinc enim fit rectangula triangula XAV, SKT, eſſe æquiangula.

t 8.ſexti.

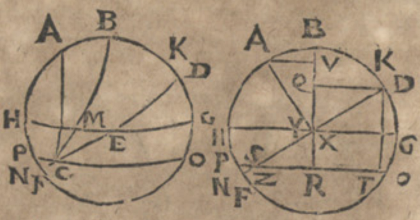


5. caſus. 5. SIT rurſus AC, quadrans, propoptereaque AB, quadrante minor, ſed BC, ponatur quoq; quadrans. Completo circulo ABDGH, minoris arcus AB, deſcribantur ex polis A, B, ad interualla quadrantum AC, BC, circuli maximi DCF, GCH, & reliqua fiant, vt prius, niſi quod hic circuli KN, OP, non maximi à maximis DF, GH, non differunt, &c. Demonſtrandum igitur eſt, ita eſſe quadratum ſinus totius, hoc eſt, rectangulum ſub DX, XA, ad rectangulum

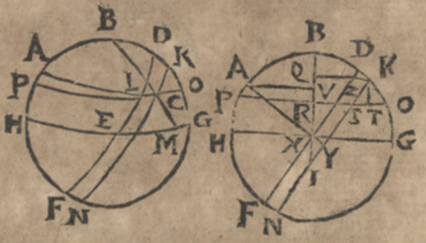


lum ſub AV, kY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt DZ, ſinus verſus anguli A, ſeu arcus kC, ad kT, differentiam ſinuũ verſorum BY, BQ, quorum ille arcui BC, hic autem arcui Bk, debetur. Quod quidem oſtendemus, vt in primo caſu, Solum triangulum XAV, ita demonſtrabitur triangulo SKT, æquiangulum. Quoniam anguli DSA, BSH, recti ſunt, cum AS, BS, axes ſint circulorum DF, GH; erunt, dempto communi ASB, reliqui DSB, ASH, æquales: [a] ſed ille angulo alterno SKT, & hic alterno angulo XAV, æqualis eſt. Igitur & anguli SkT, XAV, æquales erunt: ac proinde triangula rectangula XAV, SkT, æquiangula erunt. a 29. prim.

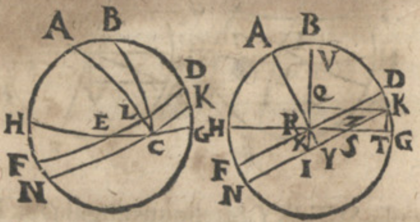
6. SIT adhuc AC, quadrans, ideoq; AB, minor quadrante, ſed BC, quadrante ſtatuatur maior. Completo circulo ABDGH, arcus minoris AB; & ex BC, abſciſſo quadrante BM, deſcribantur ex polis A, B, ad interualla quadrantum AC, BM, maximi circuli DEF, GEH: Item ex polo B, ad interuallum BC, circulus non maximus OCP, [b] qui ipſi GEH, parallelus erit. Reliqua fiant, vt prius, niſi quod hic inter ſe non differunt circuli DF, KN, &c. Iam demonſtrabimus, vt in primo caſu, ita eſſe quadratum ſinus totius, id eſt, rectangulum ſub DX, XA, ad rectangulum ſub AV, KY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt D Z, ſinus verſus anguli A, ſeu arcus D C, ad K T, differentiam ſinuum verſorum BR, BQ, arcuum BC, BK. Verum triangulum XAV, triangulo SKT, æquiangulum eſſe, ita monſtrabimus. Cum anguli recti ſint AXK, BXG, reliqui æquales erunt AXV, KXG: [c] ſed hic æqualis eſt oppoſito, & interno TSK. Igitur & angulus AXB, angulo TSK, æqualis erit: atque adeo rectangula triangula XAV, SKT, æquiangula erunt. 6. caſus. b 2. 2. Theo. c 29. prim.



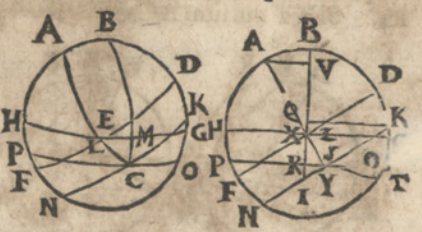
7. SIT arcus AC, quadrante maior, & AB, BC, quadrante minores. Completo circulo ABDGH, & abſciſſo quadrante AL, ex AC, productoq; arcu BC, vt fiat quadrans FM, fiant reliqua omnia, vt in primo caſu. Demonſtrabimus enim, vt ibi, ita eſſe quadratum ſinus totius, ſiue rectangulum ſub DX, XA, ad rectangulum ſub AV, KY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt DZ, ſinus verſus anguli A, ſiue arcus DL, ad KT, differentiam ſinuum verſorum BR, BQ, arcuum BC, BK: ſed triangulum AXV, ita probabitur æquiangulum eſſe triangulo SKT. [d] Angulus KST, angulo ISR, æqualis eſt. Igitur in triangulis rectangulis SKT, ISR, reliqui anguli SKT, SIR, æquales erunt; ac proinde & in rectangulis triangulis SKT, XIY, reliqui anguli KST, IXY, æquales erunt. [e] Cum ergo angulus IXY, angulo AXV, æqualis ſit, erit quoque KST, eidem AXV, æqualis; propterea que in triangulis rectangulis SKT, XAV, reliqui anguli SKT, XAV, æquales erunt. 7. caſus. d 15. primi. e 15. primi.



8. SIT adhuc AC, quadrante maior, & AB, minor quadrante, ſed BC, quadrans. Completo circulo ABDGH, & abſciſſo quadrante AL, ex AC, deſcribantur ex polis A, B, ad interualla quadrantum AL, BC, maximi circuli DEF, GEH: Item ex polo A, ad interuallum A C, circulus non maximus KCN, & alia fiant, vt in primo caſu. Demonſtrabitur, vt ibi, ita eſſe quadratum ſinus totius, nimirum rectangulum ſub DX, XA, ad rectangulum ſub AV, KY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt DZ, ſinus verſus arcus DL, ſiue anguli A, ad KT, differentiam ſinuum verſorum BR, BQ, arcuum BC, BK: ſi tamen triangula XAV, SKT, oſtendamus æquiangula eſſe, vt in ſeptimo caſu. 8. caſus.

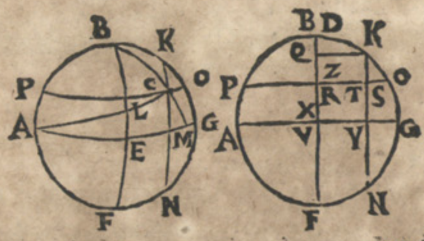


9. SIT rurſus AC, maior quadrante, & AB, quadrante minor, ſed BC, maior etiam quadrante. Completo circulo ABDGH, & abſciſſis quadrantibus AL, BM, ex AC, BC, reliqua conſtruantur, vt in primo caſu. Nam, vt ibi, ita hic demonſtrabitur, ita eſſe quadratum ſinus totius, rectangulum videlicet ſub DX, XA, ad rectangulum ſub AV, KY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt DZ, ſinus verſus arcus DL, ſiue anguli A, ad KT, differentiam ſinuum verſorum BR, BQ arcuum B C, B K. Sed triangula X A V, S K T, eſſe æquiangula, ita confirmabitur. [f] Angulus KST, angulo ISR, æqualis eſt. Igitur in rectangulis triangulis SKT, SIR, & reliqui anguli SKT, SIR, æquales erunt; ac proinde in triangulis rectangulis SKT, IXY, reliqui quoque anguli KST, IXY, hoc eſt, AXV, [g] (cum hic ipſi IXY, ſit æqualis) inter ſe æquales erunt. Quare & reliqui anguli SKT, XAV, in triangulis rectangulis SKT, XAV, erunt æquales. 9. caſus. f 15. primi. g 15. primi.



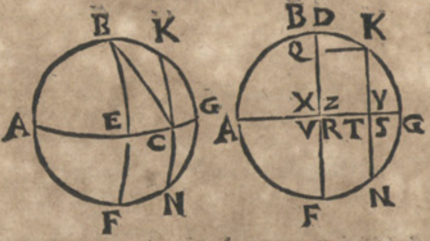
10. SIT arcus AC, maior quadrante, & AB, quadrans, at BC, quadrante minor. Completo circulo ABGF, abſciſſoq; quadrante AL, ex AC, & producto BC, vt fiat quadrans BM, deſcribantur ex polis A, B, ad interualla quadrantum AL, BM, circuli maximi BLEF, AEMG, incedetque ille per punctum B, & hic per punctum A, ob quadrantem AB; [h] propterea quod maximus circulus à polo abeſt quadrante maximi circuli. Item ex eiſdem polis, A, B, ad interualla AC, BC, delineentur circuli non maximi KCN, OCP, [i] qui prioribus erunt paralleli. Deſcriptis deinde in alio circulo communibus ſectionibus horum circulorum cum circulo A B G F, [k] quæ inter ſe parallelæ erunt, ſeſeque ad angulos rectos ſecabunt; [l] (Nam AX, ex A, polo circuli B F, in ſphæræ centrum X, cadens ad ipſum circulum recta eſt; ac propterea, ex definitione 3. libr. 11. Euclidis anguli ad X, recti erunt. Ex quo fit, [m] etiam angulos ad R, S, Y, rectos eſſe, ob parallelas lineas BF, KN, & AG, OP.) erit AV, ſinus rectus quadrantis AB; KY, ſinus rectus arcus AC, ſiue arcus AK, illi, ex definit. poli æqualis; B R, ſinus verſus arcus BC, ſeu arcus BO, illi, ex poli definit. æqualis; BQ, (ducta KQ, ad BF, perpendiculari) ſinus verſus arcus BK, quo arcus AB, AC, inter ſe differunt: Denique KS, ſinus 10. caſus. h Coro. 16. 1. Theod. i 2. 2. Th. k 16. vnd. l Schol. 10. 1. Theod. m 29. pri.

verſus

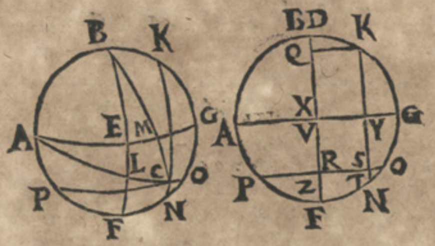


verſus arcus KC. Itaque ſi ſumatur DZ, ſinus verſus anguli A, ſiue arcus BL, qui arcui KC, ſimilis eſt, demonſtrabimus, vt in primo caſu, ita eſſe quadratum ſinus totius, nempe rectangulum ſub DX,XA, ad rectangulum ſub AV,KY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt DZ, ſinus verſus anguli A, ſiue arcus BL, ad KT, ſiue ad QR, differentiam ſinuum verſorum BR,BQ, arcuum BC, BK, niſi quod hic non inueniuntur triangula æquiangula, ſed AV, ab XA, non differt, quemadmodum nec KS, à KT.

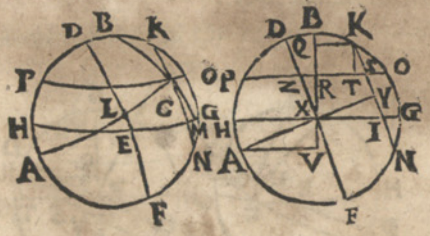
11. caſus. 11. SIT iterum AC, quadrante maior, at tam AB, quam BC, quadrans. Completo circulo ABGF, & reſecto quadrante AE, ex AC, deſcribantur ex polo A, ad interualla AE, AC, circuli BEF, kCN, & ex polo B, ad interuallum BC, circulu. AEG, aliaque fiant, vt in præcedenti caſu. Oſtendemus ergo, vt in primo caſu, ita eſſe quadratum ſinus totius, hoc eſt, rectangulum ſub DX, XA, ad rectangulum ſub AV,kY, ſinubus rectis arcuum AB,AC, vt eſt DZ, ſinus verſus anguli A, ſiue arcus BE, ad kT, ſeu QR, differentiam ſinuum verſorum BR,BQ, arcuum BC, Bk, niſi quod hic nulla adſint æquiangula triangula, quemadmodum nec in præcedenti caſu, atque AV, ab XA, & DZ, à BR, & kS, à kT, non differt.



12. caſus. 12. SIT arcus AC, quadrante maior, & AB, quadrans, ſed BC, maior etiam quadrante. Completo circulo ABGF, & ablatis quadrantibus AL,BM, ex arcubus AC,BC, deſcribantur circuli ex polis A,B, ad interualla quadrantum AL,BM, & arcuum AC,BC, cæteraque fiant, vt in præcedentibus. Erit ergo rurſus, vt in primo caſu demonſtratum eſt, ita quadratum ſinus totius, id eſt, rectangulum ſub DX,XA, ad rectangulum ſub AV, kY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt DZ, ſinus verſus anguli A, ſiue arcus EL, ad KT, differentiam ſinuum verſorum BR,BQ, arcuum BC,BK; quamuis nulla hic appareant triangula æquiangula, ſed XA, AV, inter ſe non differant, quemadmodum neque kS, kT.

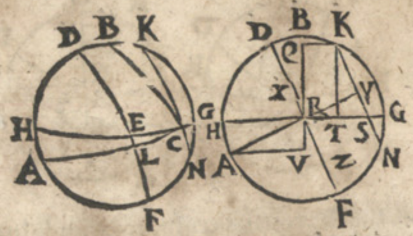


13. caſus. 13. SINT arcus AC,AB, quadrãte maiores, at BC, minor quadrante. Cõpleto circulo ABGF, & reſecto quadrãte AL, ex AC, ꝓducto item arcu BC, vt fiat quadrãs BM, reliqua fiant, vt in ſuperioribus. Demõſtrabimus iam, vt in primo caſu, ita eſſe quadratum ſinus totius, nimirum rectangulum ſub DX,XA, ad rectangulum ſub AV, kY, ſinubus rectis arcuum AB, AC, vt eſt DZ, ſinus verſus anguli A, ſeu arcus DL, ad kT, differentiam ſinuum verſorum BR, BQ, arcuum BC,Bk; niſi quod triangulum XAV, triangulo SkT, demonſtrandum eſt eſſe æquiangulum hac ratione. [a] Quoniam angulus kST, angulo oppoſito, & interno YIX, æqualis eſt, erit in triangulis rectangulis, SkT, IXY, & reliquus angulus SkT, reliquo angulo IXY, hoc eſt, angulo oppoſito, & interno VAX, (cum parallelæ ſint AV,GH.) æqualis. Igitur in triangulis rectangulis SkT, XAV, anguli quoque reliqui kST, AXV, æquales erunt, ac proinde ęquiangula erunt triangula SkT, XAV.



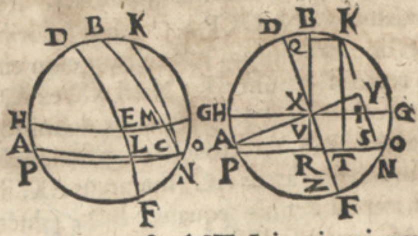
a 29. prim.

14. caſus. 14. SINT rurſum AC,AB, maiores quadrante, at BC, quadrans. Completo circulo ABGF, & abſciſſo quadrante AL, ex AC, necnon deſcriptis circulis DEF, KCN, ex polo A, ad interualla AL, AC, deſcribatur quoq; ex polo B, ad interuallum quadrantis BC, circulus maximus GEH, atque alia fiant, vt ſupra. Demonſtrandum ergo eſt, ita eſſe quadratum ſinus totius, id eſt, rectangulum ſub DX, XA, ad rectangulum ſub AV, kY, ſinubus arcuum AB, AC, vt eſt DZ, ſinus verſus anguli A, arcuſve DL, ad kT, differentiam inter ſinus verſos BR, BQ, arcuum BC, Bk. Quod quidem oſtendemus, vt in primo caſu. Solum triangula SkT, XAV, probabuntur æquiangula eſſe, hoc modo. Angulus S, communis eſt vtrique triangulo rectangulo SkT, SRY. Igitur angulus reliquus SkT, reliquo angulo SRY, [b] hoc eſt, angulo oppoſito, & interno VAX, (cum parallelæ ſint AV, GH.) æqualis erit. Quare rectangula triangula SkT, XAV, æquiangula erunt.



b 29. prim.

15. caſus. 15. SINT poſtremo omnes tres arcus trianguli ABC, quadrante maiores. Completo circulo ABGF, & reſectis quadrantibus AL,BM, ex arcubus AC,BC, fiant omnia alia, vt prius. Oſtendemus non ſecus, ac in primo caſu, ita eſſe quadratum ſinus totius, nempe rectangulum ſub DX,XA, ad rectangulum ſub AV, kY, ſinubus rectis arcuum AB,AC, vt eſt DZ, ſinus verſus anguli A, ſeu arcus DL, ad kT, differentiam inter ſinus verſos BR, BQ, arcuum BC,Bk; ſi modo triangula SkT, XAV, æquiangula eſſe concludamus, hac argumentatione. [c] Angulus YIX, æqualis eſt interno & oppoſito kST. Igitur in triangulis rectangulis SkT, IXY, reliquus angulus SkT, reliquo angulo IXY,



c 29. prim.

IXY, hoc eſt, angulo interno, & oppoſito XAV, (cum parallelæ ſint AV, GH.) æqualis erit; ac proinde triangula rectangula SKT, XAV, æquiangula erunt. Quapropter in omni triangulo ſphærico, cuius duo arcus ſint inæquales, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM. I.

EX omnibus quindecim caſibus huius demonſtrationis liquet, arcum BC, angulo A, ſub arcubus inæqualibus comprehenſo oppoſitum ſemper maiorem eſſe arcu BK, hoc eſt, differentia arcuum inæqualium. In omnibus enim figuris arcus BC, per defin. poli, arcui BO, (vel arcui BG, quando BC, quadrans eſt, vt in caſu 2. 5. 8. 11. & 14.) æqualis eſt. Conſtat autem arcum BO, (vel arcum BH, in dictis quinque caſibus,) maiorem eſſe arcu BK: quod tamen ita eſſe, facile ſequens quoq; theorema demonſtrabit.

IN omni triangulo ſphærico, cuius duo arcus ſint inæquales; arcus reliquus maior eſt arcu, quo inæquales arcus inter ſe differunt.

IN triangulo enim ABC, ſit arcus AB, maior arcu AC, & ex polo A, ad interuallum AC, arcus circuli deſcribatur CD. Erit ergo arcus AD, arcui AC, per defin. poli, æqualis, atque adeo arcus BD, differentia arcuum inæqualium AB, AC. Dico arcum BC, arcu BD. maiorem eſſe. a *Quoniam enim duo arcus AC, CB, ſimul maiores ſunt arcu AB; ablatis æqualibus arcubus AC, AD, reliquus quoque CB, reliquo BD, maior erit. Quod eſt propoſitum.* a 23. huius



ITAQVE in omni ſphærico triangulo, cuius duo arcus inæquales ſint, ſinus verſus reliqui arcus ſemper maior eſt ſinu verſo differentiæ arcuum inæqualium. Cum enim arcus ille reliquus oſtenſus ſit maior, quam ea differentia, maior autem arcus habeat ſemper maiorem ſinum verſum, vt ex tractatione ſinuum conſtat, perſpicuum fit, reliqui arcus ſinum verſum maiorem eſſe ſinu verſo differentiæ arcuum inæqualium.

In triangulo ſphærico duorum arcuum inæqualium, ſinus vers9 tertij arcus maior eſt ſinu verſo differentiæ arcuum inæqualium.

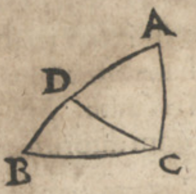
HOC idcirco dixerim, vt rationem videas, quare in praxi propoſ. 64. differentia inter ſinus verſos, quorum vnus reliquo tertio arcui, alter vero differentiæ inæqualium arcuum debetur, adijcienda præcipiatur ſinui verſo differentiæ arcuum inæqualium, vt componatur ſinus verſus reliqui tertii arcus, nunquam autem detrahenda à ſinu verſo dictæ differentiæ, vt ſinus verſus reliqui arcus relinquatur.

SCHOLIVM II.

CÆTERVM ex hac prop. 58. colligemus ſequens theorema ad calculum triangulorum ſphæricorum non rectangulorum perutile, videlicet.

IN omni triangulo ſphærico, cuius duo arcus ſint inæquales: ſinus totus ad quantitatem, quæ ſinui toti, & duobus ſinubus arcuum inæqualium quarto loco proportionalis eſt, eandem proportionem habet, quam ſinus verſus anguli ſub dictis arcubus comprehenſi ad differentiam inter ſinum verſum reliqui tertii arcus, & ſinum verſum arcus, quo duo inæquales arcus inter ſe differunt.

IN triangulo ſphærico ABC, proxime antecedenti ſit arcus AB, maior arcu AC, & ex polo A, ad interuallum AC, deſcribatur arcus circuli CD, vt arcus AC, AD, per defin. poli, ſint æquales, atque adeo arcus BD, exceſſus ſit, ſeu differentia arcuum AB, AC. Fiat iam, vt ſinus totus ad ſinum arcus AB, ita ſinus arcus AC, ad aliud, quod quantitas quarta proportionalis vocetur, vt hic vides:



Sinus totus.	ſinus arcus AB.	ſinus arcus AC.	quantitas quarta. proportionalis.

Dico ita eſſe ſinum totum ad quantitatem quartam ſinui toti, & duobus ſinubus arcuum inæqualium proportionalem, vt eſt ſinus verſus anguli A, ad differentiam inter ſinum verſum arcus BC, & ſinum verſum arcus BD, quo inter ſe arcus AB, AC, differunt. Quoniam enim proportio ſinus totius ad quantitatem quartam proportionalem componitur (poſito ſinu arcus AB, medio) ex proportione ſinus totius ad ſinum arcus AB, & ex proportione ſinus arcus AB, ad quantitatem quartam proportionalem: Et proportio quadrati ſinus totius ad rectangulum ſub ſinubus rectis arcuum AB, AC, b *componitur ex eiſdem proportionibus, nempe ex proportione ſinus totius ad ſinum arcus AB, & ex proportione ſinus totius ad ſinum arcus AC, quæ eadem eſt, quæ proportio ſinus arcus AB, ad quantitatem quartam proportionalem: (Nam cum ſit, vt ſinus totus ad ſinum arcus AB, ita ſinus arcus AC, ad quantitatem quartam proportionalem; erit permutando, vt ſinus totus ad ſinum arcus AC, ita ſinus arcus AB, ad quantitatem quartam proportionalem) erit, vt ſinus totus ad quantitatem quartam proportionalem, ita quadratum ſinus totius ad rectangulum ſub ſinubus arcuum AB, AC, contentum.* c *Cum ergo ſit, vt quadratum ſinus totius ad rectangulum ſub ſinubus arcuum AB, AC, ita ſinus verſus anguli A, ad differentiam ſinuum verſorum arcuum BC, BD; erit quoque, vt ſinus totus ad quantitatem quartam proportionalem, ita ſinus verſus anguli A, ad differentiam inter ſinus verſos arcuum BC, BD. Quod eſt propoſitum.*

b 23. ſexti.

c 58. primi.

THEOR. 57. PROPOS. 59.

SI duo triangula ſphærica duos angulos duobus angulis æquales habeant, vtrumque vtrique: erunt ſinus arcuum circa reliquum angulum vnius ſinubus arcuum circa reliquum angulum alterius proportionales, homologiq; erunt ſinus arcuum æquales angulos ſubtendentium. Et ſi vnus angulus vnius vni angulo alterius ſit æqualis, ſinuſq; arcuum circa alium angulum vnius ſinubus arcuum circa alium angulum alterius proportionales, ita vt ſinus arcuum æquales angulos ſubtendentium ſint homologi: erunt & anguli arcubus reliquorum ſinuum homologorum oppoſiti inter ſe æquales, vel æquales duobus rectis.

a 41. huius — SINT in duobus triangulis ſphæricis ABC, DEF, duo anguli inter ſe æquales B, E, necnon duo CF. Dico ita eſſe ſinum arcus AB, ad ſinum arcus AC, vt eſt ſinus arcus DE, ad ſinum arcus DF. [a] Quia enim eſt, vt ſinus arcus AB, ad ſinum anguli C, ita ſinus arcus AC, ad ſinum anguli B; erit permutando, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ita ſinus anguli C, ad ſinum anguli B, hoc eſt, ita ſinus anguli F, ad ſinum anguli E, cum hi anguli illis ponantur æquales. [b] Item quia eſt, vt ſinus arcus DE, ad ſinum anguli F, ita ſinus arcus DF, ad ſinum anguli E; erit permutando, vt ſinus arcus DE, ad ſinum arcus DF, ita ſinus anguli F, ad ſinum anguli E. Oſtenſum autem eſt, ita etiam eſſe ſinum arcus AB, ad ſinum arcus AC, vt eſt ſinus anguli F, ad ſinum anguli E. Igitur erit, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ita ſinus arcus DE, ad ſinum arcus DF. Quod eſt propoſitum.

b 41. huius



c 41. huius. Et permutando. — SED ſint iam anguli B, E, æquales, & ita ſit ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, vt eſt ſinus arcus DE, ad ſinum arcus DF. Dico angulos quoque C, F, æquales eſſe, vel certe duobus rectis æquales. [c] Oſtendemus enim, vt prius, ita eſſe ſinum arcus AB, ad ſinum arcus AC, vt eſt ſinus anguli C, ad ſinum anguli B. Item ita eſſe ſinum arcus DE, ad ſinum arcus DF, vt eſt ſinus anguli F, ad ſinum anguli E. Quare cum ponatur, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ita ſinus arcus DE, ad ſinum arcus DF; erit, vt ſinus anguli C, ad ſinum anguli B, ita ſinus anguli F, ad ſinum anguli E: Et conuertendo, vt ſinus anguli B, ad ſinum anguli C, ita ſinus anguli E, ad ſinum anguli F. Cum ergo ſinus æqualium angulorum B, E, æquales ſint, [d] erunt & ſinus angulorum C, F, æquales; ac proinde vel anguli C, F, æquales erunt, vel duobus rectis æquales. Quod eſt propoſitum. Itaq; ſi duo triangula ſphærica duos angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

d 14. quin.

SCHOLIVM.

QVOD ſi anguli B, E, vel C, F, non forent æquales, ſed ſolem æquales duobus rectis, adhuc theorematis veritas retinetur: propterea quod anguli B, E, ſemper æquales ſinus rectos habent, ſiue ipſi inter ſe æquales ſint, ſiue æquales duobus rectis. Quod etiam de angulis C, F, dicendum eſt. Id quod perſpicue conſtare poteſt ex iis, quæ in tractatione ſinuum tradidimus.

THEOR. 58. PROPOS. 60.

SI ab angulo ſphærici trianguli ad baſim arcus maximi circuli demittatur diuidens angulum bifariam: habebunt ſinus ſegmentorum baſis eandem proportionem, quam ſinus reliquorum duorum arcuum. Et ſi ſinus ſegmentorum baſis eandem proportionem habeant, quam ſinus reliquorum duorum arcuum: diuidet arcus demiſſus angulum bifariam.

a 19. huius. & eius ſcholium. — IN triangulo ſphærico ABC, ſecet arcus AD, angulum A, bifariam. Dico ita eſſe ſinum arcus AB, ad ſinum arcus AC, vt eſt, ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DC. Quia enim triangula ABD, ACD, angulos ad A, habent æquales, & angulos ad D, æquales duobus rectis; [a] erit, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus BD, ita ſinus arcus AC, ad ſinum arcus CD: Et permutando, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ita ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DC. Quod eſt propoſitum.



SED iam ſit, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus AC, ſinus arcus BD, ad ſinum arcus DC. Dico angulum A, ſectum eſſe bifariam. Erit enim permutando quoque, vt ſinus arcus AB, ad ſinum arcus BD, ita ſinus arcus AC, ad ſinum arcus CD. Habent igitur triangula ABD, ACD, angulos ad D, æquales duobus rectis, & ſinus arcuum circa angulos B, C, proportionales, homologiq; ſunt ſinus arcuum angulis ad D, oppoſitorum. [b] Igitur & anguli ad A, vel æquales erunt inter ſe, vel duobus rectis æquales: Non poſſunt autem duobus rectis eſſe æquales, quod angulus A, ſit duobus rectis minor. Igitur æquales inter ſe erunt. Quod eſt propoſitum. Si igitur ab angulo ſphærici trianguli ad baſim, &c. Quod oſtendendum erat.

b 59. huius. & eius ſcholium.

THEO-

THEOR. 59. PROPOS. 61.

SI ab angulo ſphærici trianguli ad baſim, etiam productam, arcus perpendicularis deducatur: habebunt ſinus angulorum, quos arcus perpendicularis cum duobus arcubus dictum angulum comprehendentibus facit eandem proportionem, quam ſinus complementorum reliquorum duorum trianguli angulorum.

IN triangulo ABC, deducatur ex angulo A, ad baſim BC, arcus perpendicularis AD, cadens ſiue intra triangulum, ſiue extra, ſitque neuter angulorum B, C, item neuter angulorum BAD, DAC, ad A, factorum rectus. Quando enim alter horum rectus fuerit, in ſcholio propoſitio demonſtrabitur. Similiter, quando vterque B, C, vel alteruter ipſorum rectus fuerit, in eodem ſcholio dicetur, quid inde ſequatur. Dico ita eſſe ſinum anguli BAD, ad ſinum anguli DAC, vt eſt ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi anguli C. Nam in triangulo ABD, cuius angulus D, rectus, [a] erit vt ſinus anguli BAD, ad ſinum totum, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi arcus AD. Item in triangulo CAD, habente angulum D, rectum, erit, vt ſinus anguli DAC, ad ſinum totum, ita ſinus complementi anguli C, (habent autem duo anguli ad C, in ſecundo triangulo eundem ſinum) ad ſinum complementi arcus AD: Et conuertendo, vt ſinus totus ad ſinum anguli DAC, ita ſinus complementi arcus AD, ad ſinum complementi anguli C. Ex æqualitate ergo (vt in appoſita formula vides) erit, vt ſinus anguli BAD, ad ſinum anguli DAC, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi anguli C. Si igitur ab angulo ſphærici trianguli ad baſin, &c. Quod oſtendendum erat.



a 42. huius

Sin. ang. BAD.	*Sin. compl. ang. B.*
Sinus totus.	*Sin. compl. arcus AD.*
Sin. ang. DAC.	*Sin. compl. ang. C.*

SCHOLIVM.

SI vterque angulorum B, C, fuerit rectus, non erit vera propoſitio, niſi quando arcus perpendicularis AD, ſecat baſim BC, bifariam. [b] Tunc enim & anguli ad A, æquales erunt, ac proinde eorum ſinus proportionem habebunt æqualitatis, qualem etiam habent ſinus complementorum angulorum rectorum B, C, cum hæc complementa ſint Nihil. b 7. huius.

SI vero alter tantum angulorum B, C, ſit rectus, nullo modo vera erit propoſitio. Cum enim complementum anguli recti ſit Nihil, non poterunt ſinus complementorum angulorum B, C, eandem proportionem habere, quam ſinus angulorum ad A, factorum; cum illa proportio ſit Nihil ad aliquid, vel alicuius ad Nihil: hæc vero alicuius ad aliquid.

QVOD ſi quando contingat, alterum angulorum ad A, factorum eſſe rectum, hoc modo demonſtranda erit propoſitio. Sit primum rectus angulus BAD. [c] Ergo AB, DB, quadrantes ſunt; ac propterea AD, arcus anguli B. Igitur erit, vt ſinus anguli recti BAD, ad ſinum totum, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinũ complementi ar cuus AD; cum vtrobiq; ſit proportio æqualitatis. Eſt enim idem complementum anguli B, & arcus AD, cum AD, ſit arcus anguli B. Rurſus [d] quia eſt, vt ſinus anguli DAC, (qui ſemper minor eſt recto BAD, cum totus angulus BAC, minor ſit duobus rectis, vt in priori figura: In poſteriori autem idem DAC, pars eſt recti BAD) ad ſinum totum, ita ſinus complementi anguli C, ad ſinum complementi arcus AD: erit conuertendo, vt ſinus totus ad ſinum anguli DAC, ita ſinus complementi arcus AD, ad ſinum complementi anguli C. Igitur, vt prius, erit ex æqualitate, vt ſinus anguli recti BAD, ad ſinum anguli DAC, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi anguli C. Quod eſt propoſitum. c 25. huius. d 42. huius

SIT deinde rectus angulus DAC. [e] Ergo quadrantes ſunt AC, DC; ac propterea AD, arcus anguli C. [f] Et quia eſt, vt ſinus anguli BAD, (qui in prima figura minor eſt recto, in ſecunda autem maior) ad ſinum totum, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi arcus AD. Item, vt ſinus totus ad ſinum anguli recti DAC, ita ſinus complementi arcus AD, ad ſinum complementi anguli C, cum vtrobique ſit proportio æqualitatis. Eſt enim idem complementum arcus AD, & anguli C; cum AD, ſit arcus anguli C: Erit ex æqualitate, vt prius, vt ſinus anguli BAD, ad ſinum anguli recti DAC, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi anguli C. Quod eſt propoſitum. e 25. huius. f 42. huius.

SCIENDVM porro hic eſt, quando neuter angulorum B, C; Item neuter angulorum BAD, DAC, ad A, factorum rectus eſt, vt in demonſtratione propoſitionis ponitur; nullum arcum in triangulis ABD, ACD, eſſe quadrantem. Nam ſi vnus eſſet quadrans, cum angulus D ſit rectus, eſſent ſaltem duo quadrantes, ex Coroll. propoſ. 38. huius: [g] ac proinde ſaltem duo anguli forent recti. Quod non ponitur. Pari ratione quando alter angulorum ad A, rectus eſt, nullus arcus in triangulo, cuius angulus A, recto minor eſt, quadrans eſt, vt in demonſtratione ſcholij ſumitur. Neuter enim tunc angulorum B, C, rectus eſſe poteſt: quia cum anguli ad A, ſint inæquales, propoſitio locum non haberet, vt hoc ſcholio oſtenſum eſt. g 25. huius.

PROBL. 3. PROP. 62.

DATIS omnibus angulis trianguli ſpærici non rectanguli, omnes tres arcus efficere notos.

IN triangulo ſphærico non rectangulo A B C, dati ſint omnes anguli A, B, C: ſintque primum omnes tres anguli inæquales. Oportet ex his tres eius arcus perſcrutari. Quoniam nullus angulus ponitur rectus, erunt ſaltem duo vel acuti, vel obtuſi: ſint B, C, vel ambo acuti, vel obtuſi, quicquid ſit de reliquo A, à quo ad arcum BC, ar- *Quando omnes tres anguli ſunt inæquales.*

a 57. huius. *b 61. huius.*

BC, arcus perpendicularis ducatur, [a] qui neceſſario cadet intra triangulum. [b] Et quia eſt, vt ſinus anguli BAD, ad ſinum anguli DAC, ita ſinus complementi anguli B, ad ſinum complementi anguli C: proportio autem hæc poſterior data eſt in ſinubus complementorum angulorum B, C, datorum; erit quoque proportio ſinus anguli BAD, ad ſinum anguli DAC, data, nempe in ſinubus complementorum angulorum B, C: Sed & aggregatum eorundem duorum angulorum BAD, DAC, datum eſt, & minus ſemicirculo, nempe totus angulus BAC, qui duobus rectis minor eſt. [c] Sigillatim igitur vterque angulorum BAD, DAC, cognitus erit. Quoniam ergo in triangulo ABD, cuius angulus D, rectus, dati ſunt duo anguli non recti B, & BAD; [d] dabitur quoque arcus AB, recto angulo oppoſitus. Hinc, quia in eodem triangulo ABD, angulum habente rectum D. cognitus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, & inſuper angulus non rectus BAD:



c 6 triang. rectilinei. *d Schol. 50. huius.*

VEL certe, quoniam dati ſunt duo anguli non recti B, & BAD;

e Schol. 41. huius. *e Schol. 42. vel 52. hu.* *f Schol. 50. huius.*

[e] notus quoquè fiet, ex ſcholiis in margine citatis, arcus BD, circa angulum rectum angulo BAD, oppoſitus. Eadem ratione, quia in triangulo ACD, cuius angulus D, rectus, dati ſunt duo anguli non recti C, & CAD; [f] dabitur quoque arcus AC, angulo recto oppoſitus. Hinc, quoniam in eodem triangulo ACD, habente rectum angulum D, cognitus iam eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, cum angulo non recto CAD:

AVT certe, quia dati ſunt duo anguli non recti C, & CAD;

g Schol. 41. huius. *g Schol. 42. vel 52. hu.* *h 25. hui.*

[g] cognoſcetur etiam, ex eiſdem ſcholiis in margine adductis, arcus CD, circa angulum rectum angulo CAD, oppoſitus. Atque ita iam duo arcus AB, AC, cogniti ſunt: Aggregatum vero duorum arcuum BD, CD, inuentorum tertium arcum BC, notum etiam efficiet.

QVOD ſi quando alter angulorum ad A, nempe BAD, inuentus fuerit rectus, cum & D, rectus ſit, [h] erit vterque arcus AB, BD, quadrans: atque ita ſine vlla moleſtia inuenti erunt dicti arcus. Pari ratione, ſi angulus CAD, deprehenſus fuerit rectus, non autem BAD, (fieri enim non poteſt, vt vterq; angulus ad A, rectus ſit, cum angulus BAD, duobus rectis ſit minor.) erunt arcus AC, CD, quadrantes; atque adeo noti, ſine alio labore.

Praxis. quando omnes tres dati anguli inaquales ſunt.

Propoſitio 6: triang. rectilinea intelligenda etiam eſt de angulis ſphæricis.

PRAXIS huius problematis, cum ex propoſ. 6. triangul. rectilinei & ex ſcholiis in margine ſcriptis petenda ſit, non eſt, quod hic pluribus explicetur. Nam ſi ſtatuantur duo ſinus complementorum angulorum B, C, acutorum, vel obtuſorum, pro terminis proportionis ſinus anguli BAD, ad ſinum anguli CAD, inueniemus vtrumq, angulum BAD, CAD, per primam, vel ſecundam praxim propoſ. 6. triangulorum rectilineorum, quod hæ expeditiores ſint, quam tertia. Nam licet propoſitio illa 6. de arcubus, & angulis rectilineis tantum propoſita ſit, intelligenda tamen etiam eſt de angulis ſphæricis, cum illorum ſinus à ſinubus arcuum eorundem angulorum non diſcrepent. Inuento autem vtroque angulo BAD, CAD, adhibenda erit praxis problematis ſcholÿ propoſ. 50. huius, vt tam arcus AB, recto angulo D, in triangulo ABD, oppoſitus, quam arcus AC, angulo recto D, in triangulo ACD, oppoſitus inueniatur. Poſtremo adducenda eſt praxis problematis 2. ſcholii propoſ. 41. vel problematis 1. ſcholii propoſ. 42. vel certe praxis ſcholii propoſ. 52. ad eruendum tam arcum BD, angulo non recto BAD, in triangulo ABD, oppoſitum, quam arcum CD, angulo non recto CAD, oppoſitum in triangulo ACD.

Praxis per ſolos ſinus, quando omnes tres anguli dati ſunt inæquales.

QVOD ſi in hoc problemate enodando ſolis ſinubus vti libeat, inueniendus erit vterque angulus BAD, CAD, per praxim tertiam propoſ. 6. triangul. rectilin. non autem per primam, vel ſecundam. Deinde ex praxi problematis 1. ſcholÿ propoſ. 42. huius, eliciendus tam arcus BD, angulo non recto BAD, oppoſitus in triangulo ABD, quam arcus CD, angulo non recto CAD, in triangulo ACD, oppoſitus. Ad extremum, per praxim problematis 3. ſcholii propoſit. 41. inueſtigandus tam arcus AB, quam arcus AC, recto angulo D, quilibet in ſuo triangulo oppoſitus: quia præter inuentum arcum BD, & oppoſitum angulum BAD; necnon præter arcum inuentum CD, & angulum CAD, oppoſitum, conſtat etiam ſpecies tam anguli B, quam anguli C, cum vterq, datus ſit.

Quando omnes tres anguli dati vel duo ſaltem, ſunt æquales. *i 9. huius.* *k 57. huius.* *l 21. huius.*

LONGE facilius fit hoc problema, quando omnes tres anguli dati, vel duo ſaltem ſunt æquales., [i] Nam ſi ſint duo v. g. anguli B, C, æquales, quicquid ſit de reliquo A; erunt & arcus AB, AC, æquales. Et quoniam triangulum ABC, ponitur non rectangulum, erit vterq; angulorum æqualium B, C, vel acutus, vel obtuſus [k] Quare arcus perpendicularis AD, ex tertio angulo A, ad arcum BC, demiſſus intra triangulum cadet. Quia ergo triangula ABD, ACD, angulos ad D, rectos habent, & angulos B, C, non rectos, æquales; necnon & arcus AB, AC, rectis angulis oppoſitos, æquales, vt oſtendimus; [l] erũt & arcus BD, CD, & anguli BAD, CAD, æquales; ac proinde vterque angulus BAD, CAD, cum dimidium ſit dati anguli BAC, notus erit. Poſt hæc, quoniam in triangulo ABD, rectum habente angulum D, datus eſt vterque angulus non rectus B, & BAD; [m] dabitur quoque arcus AB, recto angulo oppoſitus; proptereaque & illi æqualis AC, notus erit. Atque ita iam duo arcus AB, AC, noti facti ſunt. Rurſus quia in eodem triangulo ABD, dati ſunt duo anguli non recti B, & BAD:



m Schol. 50 huius.

VEL,

Vel quoniam datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, & angulus non rectus B:

VEL denique, quia datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum angulo non recto BAD;

[n] cognitus etiam erit arcus BD, circa angulum rectum: qui duplicatus totum tertium arcum BC, notum exhibebit. Omnes ergo tres arcus, qui quæruntur, noti effecti ſunt. n Schol. 42. vel 52. n Schol. 45 huius. n Schol. 41. huius.

NON eſt obſcura praxis huius rei. Pendet enim ex ſcholiis in margine citatis. At ſi ſolis ſinubus quis uti velit, inquirendus erit per problema 1. ſcholii propoſ. 42. arcus BD, in triangulo ABD, in quo datus eſt angulus B, & angulus BAD, nempe dimidium anguli dati BAC: qui arcus BD, duplicatus dabit totum arcum BC. Deinde per proble. 3. ſcholii prop. 41. in eodẽ triangulo, in quo repertus eſt arcus BD, & angulus oppoſitus BAD, conſtatq; ſpecies alterius anguli non recti B, dati, eliciendus erit arcus AB, angulo recto oppoſitus: quo inuento, inuentus quoque erit ei æqualis AC. *Praxis per ſolos ſinus, quando omnes tres anguli dati, vel duo ſaltem ſunt æquales.*

DATIS igitur omnibus angulis trianguli ſphærici non rectanguli, omnes tres arcus effecimus notos. Quod faciendum erat.

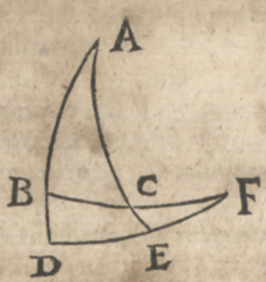
SCHOLIVM.

DIFFERT ergo, vt vides, ſphæricum triangulum non rectangulum à rectilineo non rectangulo; quod in ſphærico ex ſolis angulis datis inueniuntur omnes arcus, vt in hoc problemate oſtenſum eſt, in rectilineo vero ex datis ſolis angulis latera cognoſci nequeũt, niſi vnũ ſaltem latus etiam detur. Cuius rei cauſa hæc eſt, quod duo triangula rectilinea, ſimilia quãuis latera vnius laterib. alterius valde ſint inæqualia, ſingula ſingulis, angulos tamen habeãt angulis æquales, ſingulos ſingulis; ita vt dari poſſint duo triangula rectilinea inter ſe quidem æquiangula, non tamen æquilatera: [o] At vero duo triangula ſphærica inter ſe æquiangula eſſe non poſſunt, quin etiam æquilatera exiſtant. Ex quo fit, in ſphærico triangulo ex datis angulis dari etiam arcus, cum angulis determinati reſpondeant arcus; in rectilineo vero ex datis angulis latera dari non poſſe, cum angulis determinata latera non reſpondeant, ſed poſſint eiſdem maiora, vel minora latera ſubtendi. o 19. huius.

PROBL. 4. PROP. 63.

DATIS omnibus arcubus trianguli ſphærici non rectanguli, omnes tres eius angulos inueſtigare.

IN triangulo ſphærico non rectangulo ABC, dati ſint omnes tres arcus. Oportet ex ipſis omnes tres angulos reperire. Sit primo loco quærendus angulus A: Neque enim ſemper omnibus angulis indigemus; ſed ſæpenumero vnus, aut alter ex datis arcubus inquirendus eſt. Aut igitur duo arcus AB, AC, angulum A, qui quæritur, complectentes, ſunt inæquales, aut æquales: Si inæquales, aut ambo ſunt quadrante minores; aut maiores; aut vnus maior, & alter minor; aut vnus quadrans, & alter quadrante minor; aut denique vnus quadrans, & alter maior quadrante. Neque enim ambo eſſe poſſe quadrantes, [a] quia duo anguli ipſis oppoſiti eſſent recti. Quod eſſet abſurdum, cum triangulum ponatur non rectangulum. Sint primum duo arcus AB, AC, inæquales, & quadrante minores, quicquid ſit de arcu BC. Productis arcubus AB, AC, vt fiant quadrantes AD, AE, deſcribatur per D, E, arcus circuli maximi DE, occurrens arcui BC, in vtramuis partem producto in F: Hortarer autem, vt produceretur verſus maiorem arcum, qui hic ſit AC. Erunt autem anguli D, E, recti, ob quadrantes AD, AE. Quoniam igitur duo maximi circuli BF, DF, ſe interſecant in F, & à punctis B, C, arcus BF, ad arcum DF, demiſſi ſunt perpendiculares arcus BD, CE; [b] erit, vt ſinus arcus BF, ad ſinum arcus BD, ita ſinus arcus CF, ad ſinum arcus CE: Et permutando, vt ſinus arcus BF, ad ſinum arcus CF, ita ſinus arcus BD, ad ſinum arcus CE. Eſt autem proportio ſinus arcus BD, ad ſinum arcus CE, data quod arcus BD, CE, dati ſint, vtpote complementa datorum arcuum AB, AC. Igitur proportio ſinus arcus BF, ad ſinum arcus CF, data quoque erit, nempe in ſinubus complementorum arcuum datorum AB, AC: Sed & eorundem arcuum BF, CF, [c] quorum ſinguli ſemicirculo minores ſunt, differentia data eſt, nempe arcus BC. [d] Vterque ergo arcus BF, CF, notus reddetur. Itaq; quoniam in triangulo BFD, habente angulum D, rectum, datus eſt arcus BF, recto angulo oppoſitus cum arcu BD, complemento videlicet arcus AB, dati; [e] cognitus erit & tertius arcus DF. Eadem ratione, cum in triangulo CFE, angulum habente rectum E, datus ſit arcus CF, angulo recto oppoſitus, cum arcu CE, complemento nimirum arcus dati AC; [f] cognoſcetur etiam tertius arcus EF: qui ſubtractus ex inuento arcu DF, notum reddet arcum reliquum DE, anguli A; ac proinde angulus A, cognitus erit. Rurſus in triangulo priore BFD, cuius angulus D, rectus, cum datus ſit arcus BF, recto angulo oppoſitus, cum arcu BD, complemento videlicet arcus dati AB:



a 25. huius. *Quando duo arcus angulum primo loco inueniendũ comprehendentes ſunt inæquales.* b 40. huius. c 2. huius. d triang. rectilinea. e Schol. 53. vel 43. hu. f Schol. 53. vel 43. hu.

VEL cum duo arcus BD, DF, circa angulum rectum dati ſint:

AVT denique, cum datus ſit arcus BF, recto angulo oppoſitus, & arcus DF;

f Schol. 51. vel 45. hu. f Schol. 44. vel 48. hu. f Schol. 55. vel 41. hu.

f inuenietur quoque, ex ſcholiis in margine citatis, angulus DBF: ideoque & reliquus duorum rectorũ ABC, notus erit. Eadem ratione, cum in poſteriore triangulo CFE, angulum E, habente rectum, datus ſit arcus CF, angulo recto oppoſitus, cum arcu CE, complemento nimirum arcus dati AC:

VEL, cum duo arcus CE, EF, circa rectum angulum dati ſint:

AVT denique, cum datus ſit arcus CF, recto angulo oppoſitus, & inſuper arcus EF;

g Schol. 41. vel 45. hu. g Schol. 44. vel 48. hu. g Schol. 55. vel 41. hu. h 6. huius. i 11. 1. The.

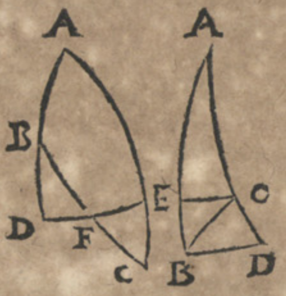
g cognoſcetur etiam, ex ſcholiis in margine poſitis, angulus ECF: ideoque & angulus ACB, h qui ei ad verticem æqualis eſt, notus erit. Tres ergo anguli trianguli ABC, omnes noti facti ſunt.



SINT deinde duo arcus inæquales AB, AC, maiores quadrante. Producantur, donec coëant in D. Erunt in triangulo DBC, duo arcus DB, DC, quadrante minores, atque adeo noti, cum reliqui ſint ex arcubus ABD, ACD, i qui ſemicirculi ſunt. Igitur, vt proxime demonſtrauimus, omnes eius tres anguli noti fient, ac proinde & reliqui duorum rectorum ABC, ACB, necnon & angulus A, k cum angulo D, ſit æqualis

k 13. huius. l 25. huius.

SIT tertio arcus quidem AB, quadrante minor, at AC, maior. Producto arcu AB, vt fiat quadrans AD, & reſecto quadrante AE, ex AC, vt in prima harum figurarum, ducatur per D, E, arcus circuli maximi DE, ſecans arcum BC, in F. l Eruntque anguli D, E, recti, ob quadrãtes AD, AE. Quia ergo duo maximi circuli BC, DE, ſecãt ſeſe in F, & à pũctis B, C. arcus BC, ad arcum DE, ducti ſunt arcus perpẽdiculares BD, CE; m erit, vt ſinus arcus BF, ad ſinũ arcus BD, ita ſinus arcus CF, ad ſinũ arcus CE: Et permutando, vt ſinus arcus BF, ad ſinũ arc⁹ CF, ita ſinus arcus BD, ad ſinũ arcus CE. Eſt autẽ proportio ſinus arcus BD, ad ſinum arcus CE, cognita, quod arcus BD, CE, dati ſint, cum ſint complementa datorum arcuum AB, AC. Igitur & proportio ſinus arcus BF, ad ſinum arcus CF, cognita erit, vtpote in ſinubus complementorum arcuum AB, AC, datorum: Sed & eorundem arcuũ BF, CF, aggregatum datum eſt, (nimirum totus arcus BC.) & minus ſemicirculo; n quod latus quolibet trianguli ſphærici ſemicirculo ſit minus. o Igitur vterque arcus BF, CF, cognitus erit. Quoniam ergo in triangulo BFD, cuius angulus D, rectus, datus eſt arcus BF, angulo recto oppoſitus, cum arcu BD, qui complementum eſt arcus AB, dati, p notus erit quoque tertius arcus DF. Simili modo, quia in triangulo CFE, rectũ habente angulum E, datus eſt arcus CF, angulo recto oppoſitus, & arcus CE, complementum ſcilicet arcus AC; q reperietur quoque tertius arcus EF: qui additus arcui DF, inuento, notum efficiet totum arcum DE, anguli A; proptereaque angulus A, notus erit, Rurſus in triangulo priori BFD, cuius angulus D, rectus, quoniam datus eſt arcus BF, recto angulo oppoſitus, & arcus BD, complementum nimirum dati arcus AB:



m 40. hui. n 2. huius. o 6 triang. rectilinea. p Schol. 53. vel 43. hu.

AVT quia duo arcus BD, DF, circa rectum angulum dati ſunt:

VEL certe, quia datus eſt arcus BF, recto angulo oppoſitus, cum arcu DF;

q Schol. 53. vel 43. hu.

r notus efficietur quoque angulus DBF, ex ſcholiis in margine adductis; atque adeo & reliquus duorum rectorum ABC, notus erit. Pari ratione, cum in poſteriori triangulo CFE, cuius angulus E, rectus, datus ſit arcus CF, recto angulo oppoſitus, cum arcu CE, complemento videlicet arcus AC, dati;

VEL cum duo arcus CE, EF, circa angulum rectum dati ſint:

VEL certe, cum datus, ſit arcus CF, recto angulo oppoſitus, cum arcu EF;

r Schol. 51. vel 45. hu. r Schol. 44. vel 48. hu. r Schol. 55. vel 41. hu. s Schol. 51. vel 45. hu. s Schol. 44 vel 48. hu. s Schol. 55. vel 41. hu. t 25. huius. u Schol. 53. vel 43. hu. x Schol. 51. vel 45. hu. x Schol. 44. vel 48. hu. x Schol. 55. vel 41. hu.

s dabitur etiam angulus C, per ſcholia in margine deſcripta. Atque ita omnes tres anguli A B C, noti facti ſunt.

[illegible] quarto arcus AB, quadrans, & AC, minor, vt in poſteriore proximarum figurarum. Producto arcu AC, vt fiat quadrans AD, ducatur per B, D, arcus circuli maximi BD. t Eruntque anguli A B D, & D, recti, ob quadrantes A B, A D. Et quoniam in triangulo B C D, cuius angulus D, rectus, datus eſt arcus B C, angulo recto oppoſitus, & inſuper arcus C D, quippe qui complementum ſit dati arcus AC, u dabitur quoque arcus tertius BD, anguli A, ideoque angulus A, notus erit. Deinde quia in eodem triangulo BCD, habente angulum rectum D, datus eſt arcus BC, recto angulo oppoſitus, cum arcu CD, complemento ſcilicet arcus dati AC:

VEL, quia duo arcus BD, CD, circa angulum rectum dati ſunt:

VEL certe, quoniam datus eſt arcus BC, recto angulo oppoſitus, cum arcu BD;

x inuenietur etiam ex ſcholiis notatis in margine, angulus B C D: ac proinde & duorum rectorum reliquus A C B, notus erit. Poſtremo, cum in eodem proximo triangulo B C D, angulum rectum habente D, datus ſit arcus BC, angulo recto oppoſitus, & præterea arcus C D, complementum videlicet dati arcus AC:

AVT.

AVT cum dati ſint duo arcus BD, CD, circa angulum rectum:

VEL cum datus ſit arcus BC, recto angulo oppoſitus, cum arcu BD;

AVT cum datus ſit angulus BCD, cum arcu CD, vel BD; Nam quando datur arcus BD, conſtat de altero arcu CD, circa rectum angulum, cum datus ſit, an ſit maior quadrante, vel minor: [d Scho. 44. vel 48. hu.]

VEL denique, quia datus eſt arcus BC, recto angulo oppoſitus, cum angulo BCD; [d Schol. 51. vel 45. hui.]

[d] notus fiet quoq; ex ſcholijs in margine citatis, angulus CBD; atque adeo & eius complementum, angulus ſcilicet ABC, cognoſcetur. Omnes ergo tres anguli trianguli ABC, cogniti ſunt. [d Schol. 47. huius.]

SIT quinto, & vltimo arcus AC, quadrans, & AB, maior, vt in eadem poſteriore proximarum figurarum. [d Scho. 47. huius.] Abſciſſo quadrante AE, ex AB, ducatur per C, E, arcus circuli maximi CE, [e] Eruntq; anguli ACE, & E, recti, ob quadrantes AC, AE. [e 25. huius] Quia ergo in triangulo ACE, angulum rectum habente E, datus eſt arcus BC, recto angulo oppoſitus, & præterea arcus BE, nempe complementum dati arcus AB, [f] dabitur quoque tertius arcus CE, anguli A; proindeque & angulus A, cognitus fiet. [f Schol. 53. vel 43. hu.] Rurſus, cum in eodem triangulo BCE, cuius angulus E, rectus, datus ſit arcus BC, recto angulo oppoſitus, cum arcu BE, complemento nimirum dati arcus AB:

AVT cum dati ſint duo arcus BE, CE, circa angulum rectum. [g Schol. 51. vel 45. hu.]

VEL denique, cum datus ſit arcus BC, angulo recto oppoſitus, cum arcu CE; [g Scho. 44. vel 48. hu.]

[g] dabitur etiam angulus CBE, ex ſcholiis in margine adductis. [g Schol. 55. vel 41. hu.] Denique quia in triangulo eodem BCE, angulum rectum habente E, datus eſt arcus BC, angulo recto oppoſitus, & arcus etiam BE, cum ſit complementum arcus AB, dati:

VEL, quia duo arcus BE, CE, circa angulum rectum dati ſunt:

AVT, quoniam notus eſt arcus BC, recto angulo oppoſitus, & arcus CE: [h Schol. 55. vel 41. hui.]

VEL, quia datus eſt angulus CBE, & arcus BE, vel CE; Nam quando datur arcus CE, conſtat etiam, an alter arcus BE, circa angulum rectum datus, maior ſit quadrante, vel minor: [h Scho. 44. vel 48. hu.] [h Schol 51. vel 45. hu.]

AVT denique, quia notus eſt arcus BC, angulo recto oppoſitus, cum angulo CBE; [h Schol. 42. huius.]

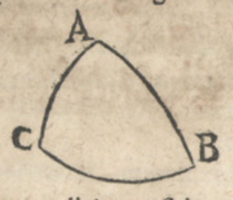
[h] notus quoque fiet, ex ſcholiis, in margine citatis angulus BCE; atque idcirco, addito recto angulo ACE, totus angulus ACB, datus erit. Rurſus ergo omnes tres anguli trianguli ABC, inuenti ſunt. [h Scho. 47. huius.]

PRAXIS huius problematis petenda eſt ex ſcholiis in margine citatis. Solum, vt cognoſcantur arcus BF, CF, in primo caſu, & tertio, ſtatuendi erunt ſinus complementorum arcuum datorum AB, AC, pro terminis proportionis ſinus arcus BF, ad ſinum arcus CF, & in primo quidem caſu adhibenda vel prima praxis propoſ. 7. triangulorum rectilineorum, vel aliqua ex aliis eiuſdem propoſ. prout res exiget; in tertio vero caſu adducenda erit prima, vel ſecunda praxis propoſition. 6. triangulorum rectilineorum, &c. [Praxis, quãdo duo arcus quæſitum angulum cõtinẽtes ſunt inæquales.]

QVOD ſi ſolis vti libeat ſinubus, inueſtigandi erunt arcus BF, CF, in primo caſu, per ſecundam praxim propoſ. 7. triang. rectil. In tertio vero per praxim tertiam propoſ. 6. Deinde in triangulo BFD, per praxim ſcholij 1. propoſ. 43. eruendus arcus DF: Et eodem modo in triangulo CFE, arcus EF; vt reliquus arcus DE, in primo caſu, vel totus arcus DE, in tertio caſu habeatur, qui quidem eſt arcus anguli A. Poſt hæc per praxim problematis 1. ſcholij propoſ. 41. inueniendus in triangulo BFD, angulus DBF: ex quo reliquus duorum rectorum ABC, notus fiet. Atque eodem pacto in triangulo CFE, eliciendus angulus ECF, ex quo in primo caſu angulus quoque ACB, ad verticem cognitus erit. [Praxis, per ſolos ſinus, quando arcus duo angulum quæſitum ambientes ſunt inæquales.]

AT vero in quarto caſu ex praxi ſcholij 1. propoſ. 43. inueniendus eſt arcus BD, anguli A, in triangulo BCD: Et eodem modo in quinto caſu arcus CE, anguli eiuſdem A, in triangulo BCE. Deinde in quarto caſu, per praxim problematis 1. ſcholij propoſ. 41. in triangulo BCD, indagandus angulus BCD; ex quo reliquus duorum rectorum ACB, notus fiet: Atque eadem ratione in quinto caſu, angulus EBC, in triangulo BCE, inueniendus. Ad extremum in quarto caſu, per praxim problematis 2. propoſ. 42. in triangulo BCD, exquirendus angulus CBD; ex quo & ABC, reliquus recti ABD, notus erit: Et ſimiliter in quinto caſu, eliciendus angulus BCE; qui additus recto angulo ACE, totum angulum ACB, notum exhibebit.

ALITER, & multo breuius. Sint rurſum dati tres arcus trianguli ABC, arcuſque AB, AC, angulum A, inquirendum continentes, inæquales. [Alia demonſtratio breuior, & per ſolos ſinus.] [i] Quoniã igitur eſt, vt ſinus totus ad quãtitatem quartam proportionalem ſinui toti, & duobus ſinubus arcuum AB, AC, inæqualium, ita ſinus verſus anguli A, ad differentiam inter ſinum verſum arcus BC, angulo A, oppoſiti, & ſinum verſum arcus, quo ſe mutuo excedunt arcus inæquales AB, AC: [i Schol. 2. 58. huius.] Et conuertendo, vt dicta quantitas quarta proportionalis ad ſinum totum, ita differentia inter ſinum verſum arcus BC, & ſinum verſum arcus, quo inter ſe arcus inæquales AB, AC, differunt, ad ſinum verſum anguli A, quæſiti.



Praxis, breuior, & per ſolos ſinus, quando duo arcus [illegible] quæſitum angulum comprehẽdentes ſunt inæquales.

SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum vtriuslibet arcuum inæqualium quæſitum angulum comprehendentium, ita ſinus alterius arcus circa eundem angulum ad aliud, inuenietur numerus quartus proportionalis ſinui toti, & duobus ſinubus dictorum duorum arcuum. Si ergo rurſum fiat, vt numerus quartus proportionalis proxime inuentus ad ſinum totum, ita differentia inter ſinum verſum arcus quæſito angulo oppoſiti, & ſinum verſum arcus, quo duo arcus quæſitum angulum ambientes inter ſe differunt, ad aliud, producetur ſinus verſus anguli, qui quæritur: Ex quo arcum anguli quæſiti, atque adeo ipſum angulum, elicies, vt in explicatione, atque vſu tabulæ Sinuum docuimus.

Inuentio differentiæ inter ſinũ verſum arcus angulo quæſito oppoſiti & ſinum verſum differentiæ arcuũ eundem angulum ambientium.

CAETERVM differentia inter ſinum verſum arcus quæſito angulo oppoſiti, & ſinum verſum differentiæ arcuum eundem angulum continentium, ita facile reperietur. Quando arcus angulo quæſito oppoſitus quadrante minor eſt, detrahendus erit ſinus eius complementi ex ſinu complementi differentiæ arcuum quæſitum angulum ambientium. Reliqua enim erit differentia, quæ inquiritur. Id quod liquido conſtat ex figuris caſuum 1. 4. 7. 10. & 13. propoſ. 58. Quando vero arcus quæſito angulo oppoſitus quadrans eſt, dabit ſinus complementi differentiæ arcuum angulum quæſitum comprehendentium differentiam inter dictos ſinus verſos quæſitam: vt manifeſtum ex figuris caſuum 2. 5. 8. 11. & 14. eiuſdem propoſ. 58. Quando denique arcus quæſito angulo oppoſitus quadrante maior eſt; adijciendus erit ſinus eius complementi ad ſinum complementi differentiæ arcuum quæſitum angulum continentium. Compoſitus namque numerus erit differentia quæſita: vt facile apparere poteſt ex figuris caſuum 3. 6. 9. 12. & 15. eiuſdem propoſ. 58.

EODEM modo inueſtigabimus angulos B, C, ſi arcus illos continentes fuerint inæquales.

PORRO, inuento vno angulo, nullo fere negotio reliqui duo inuenirentur, ſi conſtaret, qualis quiſque eorum ſit, acutuſne, an obtuſus. Nam inuento v. g. angulo A. ſi eſſet inueniendus angulus B, ſumeremus pro eius ſinu numerum, qui quartus proportionalis eſt ſinui arcus BC, inuento angulo A, oppoſiti; ſinui anguli inuenti A; & ſinui arcus AC, quæſito angulo B, oppoſiti: Si autem quærendus eſſet angulus C, acciperemus pro eius ſinu numerum, qui quartus proportionalis eſt ſinui arcus BC, inuento angulo A, oppoſiti; ſinui anguli inuenti A, & ſinui arcus AB, angulo quæſito C, oppoſiti: [a] propterea quod eſt, vt ſinus arcus BC, ad ſinum anguli A, ita tam ſinus arcus AC, ad ſinum anguli B, quam ſinus arcus AB, ad ſinum anguli C. Quocirca ſi conſtaret, qualis ſit tam angulus B, quam angulus C; illico ex ſinu illo quarto proportionali angulum quæſitum in tabula ſinuum reperiremus.

a 41. huius.

Quando omnes tres arcus, vel duo tãtum angulum primo loco inueſtigãdum continentes ſunt æquales.

IAM vero ſi omnes tres arcus dati, vel duo tantum AB, AC, angulum A, cõplectentes, æquales ſint, quicquid ſit de reliquo arcu BC, longe facilius angulum A, & reliquos duos B, C, inquiremus. Quoniam duo arcus AB, AC, æquales ſunt, erunt & duo anguli B, C, æquales inter ſe, [b] propterea quod Iſoſcelium triangulorum ſphæricorum, qui ad baſin ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales. Cum ergo triangulum ABC, ponatur nõ rectangulum, neuter angulorum B, C, rectus erit, ac proinde neuter arcuum AB, AC, quadrans: [c] quia alias duo anguli B, C, eſſent recti. Erit igitur vterque angulus B, C, vel acutus, vel obtuſus. [d] Demiſſus ergo ex A, ad arcum BC, arcus perpendicularis AD, intra triangulum cadet. Duo ergo triangula ABD, ACD, angulos ad D, rectos habent, & angulos B, C, non rectos æquales, necnon & arcus AB, AC, rectis oppoſitos angulis æquales. [e] Quare & arcus BD, CD, & anguli ad A, inter ſe æquales erunt. Itaque quoniam in triangulo ABD, cuius angulus D, rectus eſt, arcus AB, recto angulo oppoſitus datus eſt, & præterea arcus BD, quippe qui dimidium ſit dati arcus BC; [f] dabitur quoque angulus BAD, arcui BD, circa angulum rectum dato oppoſitus: qui duplicatus totum angulum quæſitum BAC, notum efficiet; cum anguli ad A, oſtenſi ſint æquales. Rurſus, quia in eodem triangulo ABD, angulum rectum habente D, arcus AB, angulo recto oppoſitus datus eſt, cum arcu BD, nempe cum dimidio dati arcus BC;



b 8. huius.
c 25. huius
d 57. huius.
e 21. huius.
f Schol 55. vel 41. hui.

Vel, quia datus eſt angulus non rectus BAD, cum arcu oppoſito BD, circa angulum rectum; conſtatque præterea ſpecies reliqui anguli non recti B. Nam ſi AB, quadrante minor ſit, [g] erit angulus B, acutus, quemadmodum & BAD, acutus eſt; Si vero AB, ſit maior quadrante, erit idem angulus B, obtuſus, cum BAD, acutus ſit:

VEL certe, quoniam datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum angulo non recto BAD;

g Schol. 51. vel 45. hui.
g Schol. 52. vel 56. hui.
ʒ 38. huius.
h Scho. 47. huius.

[h] datus quoque erit angulus B; ac proinde & reliquus angulus C, ipſi B, æqualis notus erit. Atque ita omnes tres anguli in triangulo ABC, inuenti ſunt.

Praxis, quãdo duo arcus quæſitum angulum ambientes ſunt æquales.

QVANDO ergo duo arcus ſunt æquales, adhibenda erit praxis ſcholij propoſ. 55. vel problematis 1. propoſ. 41. vt ex altero arcuum æqualium, & ex dimidio tertij arcus eliciatur angulus, qui duplicatus angulum tertio arcui oppoſitum exhibeat. Deinde adhibenda praxis ſcholij propoſ. 51. vel 45. vt ex eiſdem arcubus inueniatur alter angulorum æqualium ſupra tertium arcum, vel aduocanda praxis problematis 2. ſcholij propoſ. 42. vel propoſ. 56. aut certe praxis ſcholij propoſ. 47.

Praxis per ſolos ſinus, quãdo duo arcus datũ quæſitum angulum continẽtes ſunt æquales.

PER ſolos ſinus ita rem peragemus. Ex praxi problematis 1. propoſ. 41. inueniemus angulum BAD, qui duplicatus totum BAC, dabit. Deinde per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 42. reperiemus angulum B, qui ipſi C, æqualis eſt.

SCHOLIVM.

IOANNES Regiom. & Nicolaus Copernicus alio etiam modo, datis omnibus arcubus trianguli ſphærici, omnes tres angulos

gulos inquirunt, inueſtigantes nimirum angulum quendam rectilineum in centro ſphæræ, cuius arcus angulum ſphæricum quæſitum exhibet notum. Sed eam rationem, quamuis acutam, & ſubtilem, quoniam obſcurior eſt, & longior, dedita opera hic omiſimus: præſertim, cum eam quilibet apud Regiom. propoſ. 34. lib. 4. triangulorum, & apud Copernicum lib. 1. Reuolutionum propoſ. 13. de triangulis ſphæricis, legere poßit.

MALVIMVS in ſecunda demonſtratione huius problematis vſurpare theorema ſcholij 2. prop. 58. quã cum Ioan. Regiom. theorema eiuſdem propoſ. 58. vt laboris difficultatem effugeremus. [a] *Nam cum ſit, vt rectangulum ſub ſinubus arcuum inæqualium angulum quæſitum ambientium ad quadratum ſinus totius, ita differentia inter ſinum verſum arcus eidem angulo oppoſiti, & ſinum verſum differentiæ arcuum illorum inæqualium, ad ſinum verſum anguli quæſiti: ſi vellemus hoc theoremate propoſ. 58. vti, obtineret rectangulum illud primum aureæ regulæ locum. Quare laborioſa redderetur diuiſio, vt patet. Facilior autem ſit diuiſio ſecundum theorema ſcholij 2. eiuſdem propoſ. 58. cum primum locum aureæ regulæ quantitas quarta proportionalis occupet, quæ multo minor eſt illo rectangulo, facileque inuenitur per abiectionem ſolam tot figurarum ad dexteram ex eo rectangulo, quot cifræ in ſinu toto continentur; propterea quod dictum rectangulum per ſinum totum ſit diuidendum, vt illa quantitas quarta proportionalis producatur.*

a 58. [illegible] & p[illegible]mu- tan[illegible]

PROBL. 5. PROPOS. 64.

DATIS duobus arcubus trianguli ſphærici non rectanguli, cum angulo ab ipſis comprehenſo; reliquum arcum, cum reliquis angulis reperire.

IN ſphærico triangulo ABC, non rectangulo dati ſint duo arcus AB, BC, cum angulo B. Oportet ex his & reliquum arcum AC, & reliquos angulos BAC, & ACB, exquirere. Sint primum dati arcus inæquales, & ex termino vnius eorum, nempe ex termino A, arcus AB, ad alterum arcum BC, demittatur arcus perpendicularis AD: qui an intra triangulum, an vero extra cadat, calculus, & operatio docebit. Quoniam enim in triangulo ABD, cuius angulus D, rectus, datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum angulo B; [b] dabitur quoque arcus perpendicularis AD, dato angulo B, oppoſitus. Rurſus, quia in eodem triangulo datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum angulo B:

Quando duo arcus dati inæquales ſunt & neuter quadrans.

b Schol. 41. huius.

VEL, quia cognitus eſt arcus AD, & præterea angulus B, datus: conſtatque ſpecies alterius arcus BD, circa angulum rectum. Nam quando arcus AB, eſt minor quadrante, ſi quidem & inuentus AD, ſit minor, [c] erit & BD, minor; Si vtro AD, ſit quadrante maior, erit & BD, maior: At ſi AB, eſt maior quadrante, ſi quidem & inuentus AD, ſit maior, erit BD, minor; ſi autem AD, ſit minor, erit BD, maior:

c 36. huius

VEL denique, quia datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, & arcus AD, circa rectum angulum:

d Schol 45. huius.
d Scho. 49. vel 44. hu.
d Schol 53. vel 43. hu.

[d] inuenietur quoque, ex ſcholiis in margine adductis, arcus BD. Si igitur arcus hic BD, inuentus fuerit minor dato arcu BC, argumento eſt, arcum perpendicularem AD, intra triangulum cecidiſſe; extra vero, ſi maior. Et quoniam ad vtramque partem arcus AB, duci poteſt arcus perpendicularis ad BC, nos quando is extra triangulum cadit, eum in hac, & ſequentibus propoſitionibus eligimus, qui angulum ABC, ſubtendit. Iam ablato arcu inuento BD, ſi minor eſt, quam datus arcus BC, ex arcu BC; vel ſi maior eſt, ſublato arcu dato BC, ex inuento arcu BD, notus fiet reliquus arcus CD. Quare cum in triangulo ADC, angulum habente rectum D, arcus duo AD, CD, circa rectum angulum cogniti ſint; dabitur quoque arcus AC, recto angulo oppoſitus, qui in triangulo ABC, quærebatur.



POST hæc, quoniam in triangulo ABD, rectum habente angulum D, datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum angulo B:

VEL, quia notus eſt arcus AD, circa angulum rectum, cum angulo B, non recto; conſtatq; præterea de reliquo arcu BD, circa rectum angulum inuento, an maior ſit quadrante, minorve.

AVT quia datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, & inſuper arcus AD, circa rectum angulum:

VEL denique, quia datus eſt arcus AB, oppoſitus angulo recto, & præterea arcus BD, circa rectum angulum;

e Schol. 1. 43. huus.
e Schol. 47. huius.
e Schol. 56. vel 42. hu.

[e] cognitus quoque erit, per ſcholia in margine notata, angulus BAD. Sic quoque, quia in triangulo ACD, rectum, habente angulum D, datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, cum arcu AD, circa rectum angulum.

VEL certe, quia datur arcus AC, recto angulo oppoſitus, & præterea arcus CD, circa angulum rectum;

e Schol. 51. vel 45. hu.
e Schol. 55. vel 41. hu.

[f] notus efficietur etiam, per ſcholia in margine appoſita, angulus CAD. Additus autem angulus CAD, proxime inuentus angulo BAD, nuper etiam inuento, quando arcus AD, intra triangulum cadit; vel quando cadit extra, ablatus angulus CAD, ex angulo BAD, notum efficiet angulum BAC, qui in triangulo ABC, quærebatur.

f Schol. 51. vel 45. hu.
f Schol. 55. vel 41. hui.

AD, extremum, cum in triangulo ACD, rectum habente angulum D, datus ſit arcus AC, angulo recto oppoſitus, & angulus CAD, iam inuentus:

VEL

Vel cum ſit cognitus arcus CD, circa angulum rectum, ac præterea angulus CAD; conſtetque de reliquo arcu AD, circa rectum angulum noto iam facto, an minor quadrante ſit, an maior:

g Schol.56. v... .hu. g Sch l. 51. vel 3. hui. g Schol. 55. vel 41.hui.

AVT, cum datus ſit arcus AC, angulo recto oppoſitus, cum arcu CD, circa angulum rectum:

VEL denique, quoniam notus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, vna cum arcu AD, circa angulum rectum; g cognitus quoque fiet, per ſcholia in margine adducta, angulus ACD; qui quidem in priori triangulo, vbi arcus AD, intra triangulum cadit, quærebatur: in poſteriori autem, vbi arcus AD, extra triangulum cadit, idem angulus ACD, ex duobus rectis ablatus, notum relinquit quæſitum angulum ACB. Atq; ita inuentus eſt & arcus reliquus AC, & reliqui anguli BAC, ACB.

h 35.huius.

NVLLA porro ratione alteruter arcuum AD, BD, eſſe poteſt quadrans: h quia alias & arcus AB, recto angulo oppoſitus quadrans foret: quod eſt contra hypotheſim.

i 35. huius. k 34.huius

QVOD ſi quando arcus CD, deprehenſus fuerit quadrans; i erit & arcus AC, quæſitus, & recto angulo oppoſitus, quadrans; & angulus CAD, rectus. Atque ita ſine vllo labore inuentus erit & arcus AC, qui quæritur, k & angulus CAD. Reliqua reperientur, vt prius.

Praxis per ſolos ſinus, quando duo dati arcus ſunt inæquales, & neuter quadrans.

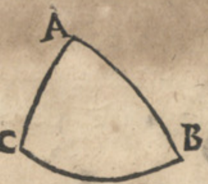
PRAXIS ad enodandum hoc problema petenda eſt ex ſcholiis in margine citatis.

VERVM per ſolos ſinus ita progrediendum erit. Ex praxi problematis 2. ſcholij propoſ. 41. inquirendus erit arcus AD.

DEINDE ex praxi ſcholij 1. propoſ. 43. arcus BD; ex quo arcus CD, notus efficietur, auferendo inuentum arcum BD, ex dato arcu BC, vel datum arcum BC, ex ipſo inuento arcu BD, prout minor inuentus fuerit, quam datus arcus BC, aut maior.

AD hæc, in triangulo BAD, explorandus erit angulus BAD, per praxim problematis 1. propoſ. 41. vel per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 42. Similiter in triangulo ACD, eliciendus angulus CAD, ex praxi problematis 1. ſcholij propoſ. 41. Ex duobus autem angulis BAD, CAD, inuentis notus euadet angulus BAC, trianguli propoſiti; addendo ſcilicet vnum alteri, vt in priori triangulo, vel auferendo angulum CAD, ex angulo BAD, vt in triangulo poſteriori.

PER praxim deniq; problematis 1 ſcholij propoſ. 41. vel problematis 2. ſcholij propoſ. 42. in triangulo ACD, eodem indagandus angulus ACD. Hic enim in priori triangulo propoſito eſt quæſitus, in poſteriori vero reliquus duorum rectorum eſt is, qui quæritur.



Alia demonſtratio breuior. l Schol. 58. huius.

ALITER, & quidem magis expedite. Sint rurſus in triangulo ABC, dati duo arcus inæquales AB, AC, cum angulo A. l Quoniam igitur eſt, vt ſinus totus ad quantitatem quartam proportionalem ſinui toti; & duobus ſinubus arcuum inæqualium AB, AC, ita ſinus verſus anguli A, ad differentiam inter ſinum verſum arcus BC, angulo A, oppoſiti, & ſinum verſum differentiæ arcuum AB, AC:

Praxis breuior, per ſolos ſinus quando dati duo arcus ſunt inæquales, & neuter quadrans. m Schol. 2. 58. huius.

SI fiat, vt ſinus totus ad ſinum vtriuslibet arcuum inæqualium datorum, ita ſinus alterius arcus dati ad aliud, producetur numerus quartus proportionalis ſinui toti, & duobus ſinubus dictorum duorum arcuum. Si ergo rurſus fiat, vt ſinus totus ad numerum quartum proportionalem proxime inuentum, ita ſinus verſus anguli A, dati ad aliud, reperietur differentia inter ſinum verſum tertij arcus, qui quæritur, & ſinum verſum differentiæ arcuum datorum inæqualium: m *Et quia ſupra monſtrauimus, ſinum verſum tertij arcus maiorem ſemper eſſe ſinu verſo differentiæ duorum arcuum inæqualium: ſi differentia nuper inuenta adijciatur ad ſinum verſum differentiæ datorum arcuum inæqualium, componetur ſinus verſus tertij arcus dato angulo oppoſiti, qui quæritur, ex quo arcum ipſum eliciemus, vt in expo...ione, atque vſu tabulæ ſinuum dictum eſt. Angulum porro C, inueniemus ex cognitis arcubus AC, CB; & angulum B, ex notis arcubus AB, BC, vt in praxi ſecundæ demonſtrationis præcedentis propoſ. præcepimus, ſi duo arcus angulum quemlibet quæſitum continentes fuerint inæquales. Nam ſi aliquando æquales ſint, adhibenda erit praxis poſtremæ demonſtrationis eiuſdem propoſitionis antecedentis. Quod ſi ſciremus, an anguli B, C, ſint acuti, vel obtuſi, facili negotio, inuento arcu BC, ipſos inueniremus, vt ad finem ſecundæ demonſtrationis antecedentis propoſ. monuimus.*

Quando alter arcuum datorũ inæqualiũ eſt quadrans. n 36. huius o 25. huius. p 34. huius q 26. huius

QVOD ſi alter inæqualium arcuum datorum ſit quadrans, nempe AB, ducemus ab eius extremo A, ad alterum arcum BC, arcum perpendicularem AD. n *Eritque alter ſaltẽ arcuum AD, BD, quadrans quoque. Non poteſt autem AD, eſſe quadrans; quia alias, cum & AB, quadrans ponatur,* o *eſſent anguli B, D, recti, atque adeo triangulum ABC, eſſet rectangulum, quod non ponitur. Erit ergo BD, quadrans,* p *ideoque angulus oppoſitus BAD, rectus.* q *Polus quoque arcus AD, erit B, ob quadrantes AB, BD: propterea que arcus AD, ex angulo ipſo B, dato cognitus erit. Atque ita duo arcus AD, BD, cum angulo BAD, facti erunt noti ſine vllo negotio multiplicationis. Reliqua inuenientur, vt prius.*

Quando duo arcus dati ſunt æquales.

SED ſint iam dati arcus AB, AC, datum angulum A, comprehendentes, æquales. Erunt igitur duo anguli B, C, æquales, nempe vel acuti, vel obtuſi, & neuter arcuum AB, AC, quadrans; arcuſque perpendicularis AD, ex A, in BC, demiſſus intra triangulum cadet, necnon & arcus BD, CD, & anguli ad A, æquales erunt, vt in vltima figura

figura præcedentis propoſ. oſtendimus: ac proinde vterque angulus ad A, datus erit, cum dimidium ſit anguli BAC, dati. Quoniam ergo in triangulo ABD, angulum habente rectum D, datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum angulo BAD, nimirum cum dimidio dati anguli BAC; [a] cognitus erit arcus BD, dato angulo BAD, oppoſitus: qui duplicatus totum arcum BC, quæſitum reddet notum. Rurſus quia in eodem triangulo ABD, rectum habente angulum D; datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, cum arcu BD, circa angulum rectum.



a Schol. huius.

VEL, quia datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, & præterea angulus non rectus BAD.

VEL denique, quia datus eſt arcus BD, circa rectum angulum, vna cum angulo non recto BAD, qui dato arcui BD, opponitur, conſtatque præterea ſpecies reliqui anguli non recti B. Nam ſi AB, fuerit quadrante minor, [b] erit angulus B, acutus, ſicut & BAD, acutus eſt: Si vero AB, maior quadrante extiterit, erit angulus B, obtuſus, quandoquidem BAD, acutus eſt;

[c] notus erit quoque, ex ſcholiis in margine adductis, angulus B; ideoque & angulus C, illi æqualis.

b Schol. 51. vel 45. hui.
b Scho. 47. huius.
b Schol. 56. vel 42. hu.
c 38. huius.

PRAXIS petatur ex ſcholÿs in margine adductis.

SOLIS ſinubus ita vtemur. Per praxim problematis 2. ſcholÿ propoſ. 41. exquiremus arcum BD; qui duplicatus totum BC, qui quæritur, dabit. Deinde ex praxi problematis 2. ſcholÿ propoſ. 42. quæremus angulum B; cui æqualis eſt alter angulus C.

Praxis.

Praxis per ſolos ſinus, quando dati duo arcus ſunt æquales.

DATIS igitur duobus arcubus trianguli ſphærici non rectanguli, cum angulo ab ipſis comprehenſo; reliquum arcum, cum reliquis angulis reperimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

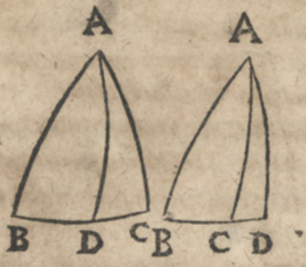
HIC quoque potius vti voluimus theoremate ſcholÿ 2. propoſ. 58. in demonſtratione ſecunda huius problematis, quam theoremate eiuſdem propoſ. 58. vt praxis minus fieret laborioſa. [d] Nam cum ſit, vt quadratum ſinus totius ad rectangulum ſub ſinubus datorum arcuum inæqualium contentum, ita ſinus verſus anguli dati à dictis arcubus comprehenſi ad differentiam inter ſinum verſum arcus dato angulo oppoſiti, & ſinum verſum differentiæ duorum arcuum datorum inæqualium: ſi vellemus vti hoc theoremate propoſ. 58. moleſta redderetur multiplicatio in aurea regula, cum ſinus verſus dati anguli multiplicandus eſſet per dictum rectangulum. At in noſtra praxi multo breuior fit multiplicatio, vt patet, quamuis bis regulam auream adhibeamus.

d 58. huius.

PROBL. 6. PROOS 65.

DATIS duobus angulis trianguli ſphærici non rectanguli, vna cum arcu ipſis adiacente; reliquos arcus, cum reliquo angulo ſcrutari.

IN triangulo ſphærico ABC, non rectangulo dati ſint duo anguli B, & BAC, cum arcu adiacente AB, Oportet ex his reliquos arcus AC, BC, cum reliquo angulo C, ſcrutari. Sit primum datus arcus AB, non quadrans, ſed vel maior, vel minor quadrante, & dati anguli B, BAC, inæquales, à quorum vno, nempe à BAC, ad arcum oppoſitum BC, arcus perpendicularis demittatur AD: qui an intra triangulum, an vero extra cadat, calculus, atque operatio indicabit. Nam cum in triangulo ABD, rectum habente angulum D, datus ſit arcus AB, angulo recto oppoſitus, & angulus B; [a] dabitur etiam angulus BAD: qui ſi minor repertus fuerit dato angulo BAC, cadet arcus AD, intra triangulum; extra vero, ſi maior. Iam ablato angulo BAD, inuento, ſi minor eſt dato angulo BAC, ex angulo BAC, vel ſi maior eſt, ſubducto angulo dato BAC, ex inuento angulo BAD, notus euadet reliquus angulus CAD.



Quando duo anguli dati ſunt inæquales, & arcus adiacẽs datus maior aut minor quadrãte.

a Scho. 47. huius.

NVNQVAM vero inuentus angulus BAD, eſſe poteſt rectus: [b] quia duo arcus AB, BD, eſſent quadrantes, ob angulos rectos BAD, ADB; cum tamen AB, ponatur eſſe non quadrans: ſed CAD, poterit aliquando eſſe rectus.

b 25. huius.

RVRSVS, quia in eodem triangulo ABD, rectum habente angulum D, datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, & angulus non rectus B:

VEL, quia notus eſt vterq; angulus non rectus B, & BAD:

AVT denique, quoniam datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, vna cum angulo non recto BAD;

[c] cognoſcetur quoque, per ſcholia adducta in margine, arcus AD. Eodemque pacto, quia in eodem triangulo BAD, cuius angulus D, rectus, datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, vna cum angulo BAD:

VEL, quia cognitus eſt vterque angulus non rectus B, & BAD:

VEL, quoniam notus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, vna cum angulo non recto B:

AVT, quia datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, & præterea arcus AD, circa rectum angulum:

VEL, quoniam notus eſt arcus AD, circa angulum rectum, vna cum angulo non recto B, ei oppoſito: conſtatque præterea, an alter arcus BD, circa rectum angulum ſit maior, minorue quadrante. Nam

c Schol. 41. huius.
c Schol. 52. vel 42. hu.
e Schol. 45. huius.

ſi inuen-

ſi inuentus angulus BAD, eſt acutus, erit arcus BD, quadrante minor maior autem, ſi obtuſus.

d Schol. 41. huius. d Schol. 52. vel 42. hu. d Schol. 45. huius d Schol. 53. vel 43. hu. d Scho. 49. vel 44. hu. d Schol. 44. huius. e Schol. 46. vel 45. hui. f Schol. 41. huius. f Schol. 43. vel 53. hui. f Schol. 44. huius.

VEL denique, quoniam notus eſt arcus AD, circa rectum angulum, & præterea angulus non rectus BAD, ei adiacens; [d] cognoſcetur quoque, ex ſcholiis in margine citatis, arcus BD. Præterea, quia in triangulo ACD, habente rectum angulum D, cognitus eſt arcus AD, circa angulum rectum, vna cum angulo non recto CAD, ei adiacente [e] Inuenietur quoque arcus AC, recto angulo oppoſitus. Atque ita iam vnus reliquorum arcuum repertus eſt AC.

POST hæc, quoniam in eodem triangulo ACD, cuius angulus D, rectus, datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, vna cum angulo non recto CAD:

VEL, quia datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, & præterea arcus AD, circa eundem angulum rectum:

VEL denique, quia datus eſt arcus AD, circa angulum rectum, vna cum angulo non recto CAD, ei adiacente:

[f] notus quoque fiet, ex ſcholiis in margine deſcriptis, arcus CD, qui adiectus arcui inuento BD, quando perpendicularis arcus AD, intra triangulum cadit; vel, quando extra cadit, ſublatus ex arcu inuento BD, notum exhibebit arcum BC, qui eſt alter reliquorum arcuum, qui quæruntur.

AD extremum in eodem triangulo ACD, quoniam datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, cum arcu AD, circa rectum angulum:

VEL, quia datus eſt arcus AD, circa angulum rectum, & angulus non rectus CAD, ei adiacens:

VEL, quia datus eſt arcus AD, circa angulum rectum, & angulus non rectus ACD, ei oppoſitus; conſtatque præterea, an reliquus arcus CD, circa rectum angulum inuentus ſit maior quadrante, aut minor:

AVT, quia datus eſt vterque arcus AD, CD, circa angulum rectum:

AVT, quia datus eſt arcus AC, angulo recto oppoſitus, & inſuper arcus CD, circa rectum angulum:

AVT denique, quoniam datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, cum angulo non recto CAD;

g Schol. 41. vel 55. hui. g Schol. 42. huius. g Schol. 56. vel 42. hu. g Schol. 48. vel 44. hu. g Schol. 45. vel 51. hui. g Scho. 47. huius.

[g] notus quoque fiet, ex ſcholiis in margine nominatis, angulus ACD, qui in priori triangulo eſt is, qui quæritur in poſteriori vero ſubductus ex duobus rectis reliquum facit quæſitum angulum ACB. Atque ita iam omnia, quæ propoſita ſunt, inuenimus.

DE praxi nihil noui præcipimus, ſed recurrendum erit ad praxes ſcholiorum, quæ in margine citata ſunt.

Praxis per ſolos ſinus, quando dati duo anguli inæquales ſunt & arcus datus illis adiacens non eſt quadrans.

PER ſolos autem ſinus ita propoſitum exequemur. Per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 41. in triangulo ABD, rectangulo inueſtigabimus arcum AD: Et per praxim problematis ſcholij 1. propoſ. 43. arcum BD. Deinde per praxim problematis 1. ſcholij propoſ. 41. angulum BAD: quem, ſi minor eſt dato angulo BAC, auferemus ex angulo BAC, dato; vel, ſi maior eſt, ab eo datum angulum BAC, detrahemus, vt notus fiat angulus CAD.

HINC per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 42. eliciemus in triangulo rectangulo ACD, angulum ACD: qui erit quæſitus ACB, in triangulo ABC, ſi inuentus angulus BAD, fuerit minor angulo dato BAC: Si autem maior, idem angulus ACD, ex duobus rectis demptus reliquum faciet angulum quæſitum ACB.

IAM vero per praxim problematis 3. ſcholij propoſ. 41. inueniemus in triangulo eodem ACD, arcum AC, recto angulo oppoſitum. Datur enim arcus AD, circa angulum rectum, & angulus non rectus ACD, conſtatque præterea, qualis ſit alter angulus non rectus CAD, iamdudum inuentus: qui quidem arcus AC, eſt vnus reliquorum, qui in triangulo ABC, quæruntur.

PER praxim tandem problematis 2. ſcholij propoſ. 41. reperietur arcus CD: Vel per praxim problematis 1. ſcholij propoſ. 42. vel certe per praxim problematis ſcholij 1. propoſ. 43. eundem arcum CD, cognoſcemus: qui additus inuento arcui BD, quando angulus BAD, inuentus minor fuerit dato angulo BAC; vel, quando maior fuerit, ab eodem arcu BD, ſubtractus, notum efficiet arcum BC, qui eſt alter eorum in triangulo ABC, qui inueſtigari debent.

h 25. huius. Quando duo anguli ſunt inæquales, & arcus adiacens datus quadrans.

QVOD ſi quando angulus inuentus CAD, fuerit rectus, cum & ADC, rectus ſit, [h] erunt AC, CD, quadrantes; & AD, arcus anguli C; ac proinde angulus C, ex arcu inuento AD, cognitus erit. Reliquus autem arcus BC, cognoſcetur ex quadrante CD, & arcu BD, inuento, vt prius.

i 36. huius k 25. huius. l 34. huius. m 26. hui.

IAM vero ſi datus arcus AB, ſit quadrans, exiſtentibus adhuc angulis B, & BAC, inæqualibus, erit angulus BAD, rectus, & arcus etiam BD, quadrans. Nam cum in triangulo rectangulo ABD, arcus AB, angulo recto oppoſitus ponatur quadrans, [i] erit ſaltem alter reliquorum arcuum quadrans. Non poteſt autem AD, eſſe quadrans: [k] quia duo anguli B, D, eſſent recti, ob quadrantes AB, AD, cum tamen triangulum ABC, ponatur non rectangulum. Igitur BD, quadrans erit; [l] ac propterea oppoſitus angulus BAD, rectus. [m] Polus quoque arcus AD, erit B, ob quadrantes BA, BD; ac proinde AD, arcus erit dati anguli B, ideoque datus. Inuentis autem arcubus AD, BD, & angulo recto BAD, ſine vllo labore, cum in eis inueſtigandis nullo problemate ex præcedentibus egeamus, reliqua inueniemus, vt prius.

SINT

Quando duo anguli dati ſunt æquales, [f] *9. huius.*

SINT deinde in triangulo ABC, dati duo anguli B, & C, æquales,cum arcu BC, illis adiacente, ſiue quadrans is ſit, ſiue quadrante maior, aut minor. [f] Erunt arcus AB,AC, æquales;ideoque arcus perpendicularis AD, ad datum arcum BC, ex oppoſito angulo A, demiſſus intra triangulum cadet, ſecabitque & arcum datum BC, & angulum BAC, oppoſitum bifariam, vt in poſteriori caſu propoſ. 62. monſtrauimus. Quoniam ergo in triangulo ABD, rectum habente angulum D, datus eſt arcus BD, circa rectum angulum, quippe qui dimidium ſit dati arcus BC, & inſuper angulus B, ei adiacens,[g] dabitur & arcus AB,recto angulo oppoſitus,ideoque & AC,illi æqualis datus erit. Atque ita duo arcus reliqui iam noti facti ſunt.Rurſus quia in eodem triangulo datus eſt,per inuentionem,arcus AB,recto angulo oppoſitus,cum arcu BD, circa rectum angulum:



g Schol 45. vel 46.hui.
g Schol.41. vel 55. hui.
g Scho.42. huius.
g Scho.47. huius.

VEL,quia datus eſt arcus BD,circa angulum rectum,vna cum angulo non recto B,ei adiacente:

VEL certe, quia datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, cum angulo non recto B;

[h] reperietur,per ſcholia in margine adducta,angulus quoque BAD:qui duplicatus totum angulum BAC,quæſitum efficiet cognitum.

Praxis, per ſolos ſinus, quando duo anguli dati ſunt æquales.

SED per ſolos ſinus ita praxis ſe habet. Per praxim problematis 2. ſcholÿ propoſ. 42. ex arcu BD, circa angulum rectum dato, & ex angulo B,ei adiacente dato, inueniemus angulum BAD, qui duplicatus totum angulum quæſitum BAC, dabit. Deinde per praxim problematis 3. ſcholÿ propoſ. 41. ex arcu BD, circa rectum angulum, & angulo BAD, oppoſito iam inuento, eruemus arcum AB, recto angulo oppoſitum, ideoque & arcum AC, illi æqualem. Nam præter data conſtat etiam ſpecies reliqui anguli B, dati non recti.

DATIS igitur duobus angulis trianguli ſphærici non rectanguli, vna cum arcu ipſis adiacente; reliquos arcus, cum reliquo angulo ſcrutati ſumus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM

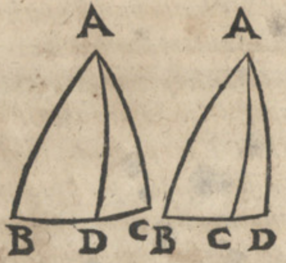
IN triangulis rectilineis non rectangulis problema huic ſimile propoſitum non fuit: propterea quod datis duobus angulis,[i] datur & tertius: qui nimirum reliquitur, ſi duo illi ex duobus rectis tollantur. Quare cum vnum etiam latus detur, duo reliqua latera per propoſ. 10. triang. rectil. efficientur nota. [i] *32. huius.*

PROBL. 7. PROPOS 66.

DATIS duobus angulis trianguli ſphærici non rectanguli, cum arcu, qui alteri illorum opponitur; reliquos arcus, cum reliquo angulo indagare. Oportet autem conſtare, num arcus alteri angulo dato oppoſitus maior ſit quadrante, an minor, aut certe quadrans.

Quando duo anguli dati inæquales ſunt & arcus datus qui vni eorum opponitur, non quadrans.

IN triangulo ABC, non rectangulo dati ſint duo anguli B, C, cum arcu AB, qui angulo C, opponitur, conſtetque, an arcus AC, maior quadrante ſit, minorve, an quadrans. Oportet ex his & reliquos arcus AC, BC, & reliquum angulum BAC, inuenire. Sint primum dati duo anguli B, C, inæquales, & datus arcus AB, non quadrans. Ducatur ex angulo A, ad arcum BC, datis angulis adiacentem arcus perpendicularis AD: [a] qui intra triangulum cadet, ſi vterque angulorum B, C, datorum fuerit acutus vel obtuſus; extra vero, ſi vnus fuerit acutus, & obtuſus alter. Quia ergo in triangulo ABD, rectum habente angulũ D, datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, cum angulo nõ recto B; [b] notus fiet arcus AD, circa angulum rectum dato angulo B, oppoſitus. Hinc in eodem triangulo ABD, quoniam datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum arcu AD, circa angulum rectum:



a 57. huius.
b Scho.41. huius.
c Scho. 43. vel 53. hui.
c Schol.42. huius.
c Schol.49. vel 44 hu.
d 36. huius

VEL, quia datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, & præterea angulus B. non rectus:

VEL denique, quoniam datus eſt arcus AD, circa rectum angulum, cum angulo B, non recto ei oppoſito; conſtatque præterea ſpecies arcus BD. Nam ſi AB, datus fuerit minor quadrante, ſi quidem & AD, inuentus ſit minor,[c] erit quoque BD, minor; ſi autem maior, maior. Si vero AB, datus fuerit quadrante maior; ſi quidem & AD, inuentus ſit maior, erit BD, minor; ſi vero AD, ſit minor, erit BD, maior;

[d] reperietur quoque, ex ſcholiis in margine citatis, alter arcus BD, circa angulum rectum. Hinc rurſus in eodem triangulo ABD, quoniam datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, & præterea arcus BD, circa angulum rectum:

AVT, quia datus eſt vterque arcus AD, BD, circa angulum rectum

VEL, quia datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum arcu AD, circa angulum rectum:

VEL, quia datus eſt arcus AD, circa rectum angulum, & inſuper angulus non rectus B, ei oppoſitus; conſtatque præterea ſpecies anguli BAD. Nam ſi BD, arcus inuentus ſit quadrante maior,[f] erit angulus BAD, obtuſus; ſi vero minor, acutus. *f 34. huius*

V VEL

VEL denique, quia datus eſt arcus AD, angulo recto oppoſitus, cum angulo non recto B;

e Schol. 41. vel 55. hui. e Scho. 44. vel 48. hu. e Schol. 45. vel 51. hui. e Schol. 56. vel 4 . hu. e Scho. 47. huius. g Scho. 41. vel. 54. hu.

[e] notus fiet quoque angulus non rectus BAD, ex ſcholiis in margine appoſitis.

DEINDE in triangulo ACD, rectum habente angulum D, quoniam datus eſt arcus AD, circa rectum angulum, cum angulo C, oppoſito; (Nam quando perpendicularis arcus AD, extra triangulum cadit, dabitur angulus ACD, ſi datus angulus ACB, ex duobus rectis ſubducatur) poniturque præterea conſtare ſpecies arcus AC, qui in propoſito triangulo ABC, alteri dato angulo B, opponitur, in hoc vero triangulo ACD, recto angulo D, oppoſitus eſt,[g] notus quoque euadet arcus AC; qui vnus eſt reliquorum arcuum, qui inueſtigandi proponuntur in triangulo ABC. Hinc quia in eodem triangulo ACD, datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, & arcus AD, circa rectum angulum.

VEL, quia datus eſt arcus AC, angulo recto oppoſitus, cum angulo non recto C:

VEL denique, quoniam datus eſt arcus AD, circa angulum rectum, cum angulo C, ei oppoſito, conſtatque præterea ſpecies arcus CD. Nam ſi arcus AC, recto angulo oppoſitus, inuentus fuerit minor quadrante, [h] erit vterque arcus AD, CD, vel minor etiam, vel maior; atque ita ex cognito arcu AD, ſciemus an CD, minor ſit, vel maior quadrante: Si vero inuentus arcus AC, fuerit quadrante maior, & AD, minor, erit CD, maior; at ſi AD, maior fuerit, erit CD, minor;

h 36. huius. i Scho. 43. vel 53. hui. i Schol. 45. huius. i Schol. 49. vel 44. hu.

[i] cognoſcetur etiam, per ſcholia in margine poſita, arcus CD: qui additus arcui iamdudum inuento BD, ſi perpendicularis arcus AD, intra triangulum cadit; vel, ſi extra, ablatus ex arcu BD, inuento, notum efficiet arcum BC, quæſitum. Atque ita iam reliqui duo arcus AC, BC, inuenti erunt.

POSTREMO, quia in eodem proximo triangulo ACD, datus eſt arcus AC, angulo recto oppoſitus cum arcu CD, circa rectum angulum:

VEL, quoniam datus eſt arcus CD, circa rectum angulum, & præterea angulus non rectus C:

l 36 huius.

VEL, quia datus eſt arcus AD, circa angulum rectum, vna cum angulo non recto C, oppoſito; conſtatque præterea ſpecies alterius anguli CAD. Nam ſi arcus inuentus CD, minor eſt quadrante, [l] erit angulus CAD, acutus; obtuſus vero, ſi CD, quadrante maior eſt:

k Scho. 41. vel. 55. hui. k Scho. 42. huius. k Scho. 42. vel 56. hui. k Scho. 44. vel 48 hu. k Schol 45. vel 51. hui. k Schol. 47. huius.

VEL, quia datus eſt vterque arcus AD, CD, circa angulum rectum.

VEL, quoniam datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, & arcus AD, circa rectum angulum;

VEL denique, quia datus eſt arcus AC, angulo recto oppoſitus, vna cum angulo C, non recto;

[k] fiet quoque notus angulus CAD, ex ſcholiis in margine adductis. Hic autem angulus CAD, additus angulo BAD, iam antea inuento, ſi arcus perpendicularis AD, intra triangulum cadit; vel ſi extra, ablatus ex inuento angulo BAD, cognitum exhibebit angulum BAC, quæſitum.

m 35. huius

CÆTERVM nullo modo alteruter arcuum AD, BD, quadrans eſſe poteſt in hoc caſu: quia ſi alter illorum eſſet quadrans, [m] eſſet quoque arcus AB, angulo recto oppoſitus, quadrans, quod eſt contra hypotheſim.

Praxis, per ſolos ſinus, quando dati anguli inæquales ſunt, & datus arcus, qui vno eorum opponitur, non quadrans.

PRAXIS huius problematis pendet ex ſcholiis in margine notatis.

SOLIS autem ſinubus ita rem perficiemus. Per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 41. inueniemus arcum AD: Et per praxim problematis ſcholij 1. propoſ. 43. arcum BD: Et per praxim problematis 1. ſcholij propoſ. 41. angulum BAD.

DEINDE per praxim problematis 3. ſcholij propoſ. 41. cognoſcemus arcum AC, cum conſtet ex hypotheſi eius ſpecies. Hinc per praxim problematis ſcholij 1. propoſ. 43. arcus CD, notus fiet; ex quo, ſi addatur arcui inuento BD, vel ab eodem ſubtrahatur, prout perpendicularis arcus AD, intra, vel extra triangulum ceciderit, cognitus fiet arcus BC.

AD extremum, per praxim problematis 1. ſcholij propoſ. 41. eruemus angulum CAD; qui additus angulo inuento BAD, vel ab eo ſubtractus, prout arcus perpendicularis AD, intra triangulum ceciderit, vel extra, notum faciet angulum BAC.

n 36. huius o 34. huius *Quando duo anguli dati inæquales ſunt & datus arcus vni eorum oppoſitus, quadrans.*

QVOD ſi quando arcus AC, alteri angulo B, dato oppoſitus, ſit quadrans, quod euenire poteſt, non exiſtente quadrante AB; [n] erit alter ſaltem reliquorum quoque arcuum AD, CD, in triangulo ACD, quadrans. Cum ergo AD, eſſe non poſſit quadrans, erit CD, quadrans, [o] ac proinde angulus ei oppoſitus CAD, rectus. Itaque tunc inuentus erit & arcus CD, & angulus CAD, ſine vllo alio labore: ex quibus & arcus BC, & angulus BAC, deprehendentur, vt dictum eſt.

p 36 huius. q 5. huius. r 54. huius. s 26. huius. t 25. huius.

SIT iam arcus datus AB, quadrans, & adhuc duo anguli dati B, C, inæquales. Erit arcus BD, quadrans etiam, & angulus BAD, rectus. Cum enim in triangulo ABD, arcus AB, angulo recto oppoſitus quadrans ponatur; [p] erit ſaltem & alter reliquorum arcuum AD, BD, quadrans. Non poteſt autem AD, eſſe quadrans: [q] quia duo anguli B, D, ob quadrantes AB, AD, recti eſſent, ideoque triangulum ABC, rectangulum, quod non ponitur. Erit ergo BD, quadrans, [r] ac proinde angulus oppoſitus BAD, rectus. [s] Erit quoque B, polus arcus AD, ob quadrantes AB, BD; proptereaque datus angulus B, arcum AD, notum efficiet. Inuentis autem arcubus AD, BD, cum angulo recto BAD, ſine vlla multiplicationis moleſtia, inuenientur reliqua, vt prius. In hoc tamen caſu arcus AC, nullo pacto quadrans erit, ne duo quadrantes ſint AB, AC, in triangulo ABC, ac proinde duo anguli B, C, recti. Quod eſt contra hypotheſim, cum triangulum ponatur non rectangulum.

VERVM ſint iam in triangulo ABC, dati duo anguli B, C, æquales. Erunt duo arcus AB, AC, æquales; atque adeo neuter eorum quadrans, ne duo anguli B, C, recti exiſtant. Demiſſus igitur arcus perpendicularis AD, ex tertio angulo A, intra triangulum cadet, diuidetque tam arcum BC, quam angulum BAC, bifariam, vt ſupra in ſecundo caſu propoſ. 62. oſtendimus. Igitur quia in triangulo ABD, rectum habente angulum D, datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, cum angulo B, [h] cognitus erit & arcus BD: qui duplicatus totum arcum BC, notum efficiet: Sed & AC, notus eſt, cum dato arcui AB, æqualis ſit. Deinde quoniam in eodem triangulo ABD, datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, cum arcu BD, circa angulum rectum proxime inuento;

Quando duo dati anguli æquales ſunt.

h S... huius.



VEL, quia datus eſt arcus BD, circa angulum rectum, cum angulo non recto adiacente B:

VEL denique, quoniam datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus cum angulo non recto B;

[i] dabitur quoque, per ſcholia in margine adducta, angulus BAD: qui duplicatus totum BAC, quæſitum præbebit.

ITA autem ſolis ſinubus in hoc caſu vtemur. Per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 41. reperiemus arcum AD: Et hinc per praxim problematis ſcholij 1. propoſ. 43. arcum BD; qui duplicatus totum arcum BC, dabit notum. Deinde per praxim problematis 1. ſcholij propoſ. 41. Vel per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 42. inueniemus angulum BAD, ac proinde eius duplum BAC, qui quæritur. Tertius autem arcus AC, dato arcui AB, æqualis eſt, atque adeo cognitus.

DATIS igitur duobus angulis trianguli ſphærici non rectanguli, cum vno arcu, qui alteri illorum opponitur, &c. Quod erat faciendum.

i Schol. 41. vel 55. hui. i Scho. 42, huius. i Scho. 47. huius.

Praxis per ſolos ſinus quando dati duo anguli æquales ſunt.

SCHOLIVM.

HVIC etiam problemati nullam propoſitionem reſpondentem attulimus in triangulis rectilineis, propter cauſam in ſcholio antecedentis propoſ. allatam.

OPORTET autem in primo caſu huiuſce problematis dari etiam neceſſario ſpeciem arcus AC, alteri angulo dato B, oppoſiti. Alioquin in triangulo ACD, ex dato arcu AD, & angulo C, oppoſito, (cum nihil certi adhuc exploratum habeamus de arcu CD, vel angulo CAD, quales nam ſint) non inueniretur arcus AD, recto angulo oppoſitus, cum is poſſit eſſe vel maior quadrante, vel minor, & nondum ex datis, vel demonſtratis conſtet, qualis futurus ſit.

Cæterum non ſatis eſſe, ſi dentur anguli duo, cum arcu vni eorum oppoſito, ad eliciendos reliquos arcus, & reliquum angulum, iampridem admonuimus in ſcholio propoſ. 22. & 23. Vbi etiam Copernicum hallucinatum ea in re eſſe lib. 1. Reuolutionum propoſ. 12. triang. ſphær. indicauimus. Quod tamen hic breuiter ita rurſum demonſtrabimus. Sint duo arcus inæquales AB, AC, angulum BAC, continentes, & ſemicirculo ſimul æquales; atque adeo vnus quadrante maior, & alter minor.



Ducto autem per B, C, arcu circuli maximi BC, ducatur ad eum productum ex A, alius arcus AD, neque per polos arcus AC, neque per polos arcus BC; ita vt anguli D, & CAD, ſint non recti. Sed neque angulus ACD, rectus eſt. Nam ſi foret rectus, eſſet angulus ABC [k] cui ille æqualis eſt, rectus quoque; [l] atque ita duo arcus AB, AC, propter rectos angulos B, C, æquales eſſent, & quadrantes. Quod eſt contra hypotheſin. Triangulum ergo ACD, non rectangulum eſt; in quo licet duo anguli ACD, & D, dentur, cum arcu AD, qui angulo ACD, opponitur; non tamen inde colligemus arcum AC, alteri dato angulo D, oppoſitum, cum eidem opponatur in triangulo ABD, etiam arcus AB, ipſi AC, inæqualis; propterea quod eadem hypotheſis manet in triangulo ABD, nempe anguli dati B, D, (cum angulus B, angulo ACD, æqualis ſit, vt oſtendimus) & arcus datus AD, angulo B, oppoſitus. Neceſſe eſt ergo, vt detur ſpecies arcus angulo D, oppoſiti, vt ſciamus, num maior quadrante is ſit, an minor, hoc eſt, num arcus AB, an AC, ſumendus ſit, cum vnus eorum maior quadrante ſit, & alter minor, &c.

HAC in re lapſus etiam eſt Ioan. Regiom. lib. 4. triangulorum propoſ. 32. cum vult ex duobus angulis datis, cum vno latere oppoſito, reliqua inuenire, quod tamen non ſatis eſſe, hic demonſtrauimus.

Error Copernici. Non ſatis eſſe, dari duos angulos cum arcu vni eorum oppoſito, ad reliqua inuenienda in triangulo non rectãgulo.

k 14. huius l 25. huius.

Error Regiom.

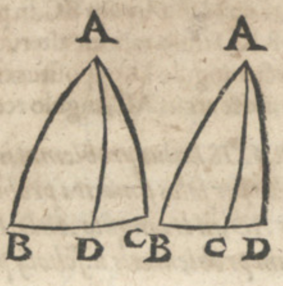
PROBL. 8. PROPOS. 67.

DATIS duobus arcubus trianguli ſphærici non rectanguli, cum angulo, qui alteri eorum opponitur; reliquos angulos, cum reliquo arcu inuenire. Oportet autem conſtare, num angulus alteri arcui dato oppoſitus acutus ſit, an obtuſus.

IN triangulo ſphærico non rectangulo ABC, dati ſint duo arcus AB, AC, cum angulo B, qui arcui AC, opponitur, conſtetque, an angulus C, acutus ſit, an obtuſus. Oportet ex his & reliquos angulos C, BAC, & reliquum arcum BC, ſcrutari. Sint primum dati duo arcus AB, AC, inæquales, & neuter eorum quadrans. Ducantur ab angulo A, tertio arcui oppoſito ad ipſum arcum tertium BC, arcus perpendicularis AD; [a] qui intra triangulum cadet, ſi vterque angulus B, C, acutus eſt, vel obtuſus, extra vero, ſi vnus acutus, & alter obtuſus fuerit: conſtat autem ex datis, an vterque angulus acutus ſit, obtuſuſve, an vnus acutus, & obtuſus alter; cum datus ſit angulus B, cum ſpecie anguli C. Itaque quoniam in triangulo ABD, rectum habente angulũ D,

Quando neuter datorum arcuum inæqualium eſt quadrans.

a 37. huius.



b Schol. 41. huius.

datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, cum angulo B; [b] datus etiam erit arcus AD, circa rectum angulum dato angulo B, oppoſitus. Hinc in eodem triangulo ABD, quia datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, & inſuper arcus AD, circa eundem angulum rectum.

VEL, quia datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, & præterea angulus non rectus B:

c Schol. 43. vel 53. hui. c Schol. 45. huius. c Scho. 49. vel 44. hu. d 36. huius

VEL denique, quia datus eſt arcus AD, circa angulum rectum, cum angulo B, oppoſito; conſtatque ſpecies præterea arcus BD. Nam ſi AB, datus fuerit minor quadrante; ſi quidem & AD, inuentus minor ſit, [c] erit quoque BD, minor; ſi autem maior, maior. At ſi AB, datus fuerit maior quadrante; ſi quidem & AD, inuentus maior ſit, erit BD, minor; ſi autem AD, minor ſit, erit BD maior;

[d] cognitus etiam erit, ex adductis ſcholiis in margine, alter arcus BD, circa angulum rectum. Hinc rurſus in eodem triangulo ABD, quia datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, cum arcu BD, circa eundem rectum angulum:

VEL, quia datus eſt vterque arcus AD, BD, circa angulum rectum:

VEL, quoniam datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum arcu AD, circa eundem angulum rectum:

e Schol. 41. vel 55. hui. e Schol. 44. vel 48. hu. e Schol. 45. vel 51. hui. e Schol. 56. vel 42, hu. e 34. huius. f Schol. 47. huius. g Schol. 51. vel 45. hui.

VEL, quia datus eſt arcus AD, circa angulum rectum, cum angulo oppoſito B, conſtatque præterea ſpecies anguli BAD. Nam ſi BD, arcus inuentus ſit minor quadrante, [e] erit angulus BAD, acutus; obtuſus vero, ſi maior:

VEL denique, quoniam datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, & inſuper angulus non rectus B;

[f] efficietur quoque notus, ex ſcholiis in margine poſitis, angulus non rectus BAD.

DEINDE, quia in triangulo ACD, rectum habente angulum D, datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, & inuentus arcus AD, circa angulum rectum, [g] cognoſcetur quoq; angulus CAD, à dictis arcubus comprehenſus: qui additus inuento angulo BAD, vel ab eo ſubtractus, prout arcus perpendicularis AD, intra triangulum cadit, aut extra, (quod quidem cognoſcemus, vt ad initium diximus, ex dato angulo B, & ſpecie data anguli C,) dabit quæſitum angulum BAC.

RVRSVS, quoniam in eodem triangulo ACD, datus eſt arcus AC, angulo recto oppoſitus, & inuentus arcus AD, circa rectum augulum:

VEL, quia datus eſt arcus AD, circa angulum rectum, & inſuper angulus non rectns CAD:

AVT denique, quoniam datus eſt arcus AC, angulo recto oppoſitus, & præterea angulus non rectus CAD:

h Schol 55. vel 41. hui, h Scho. 42. huius. h Scho. 47. huius. i 41. huius.

[h] cognitus quoque erit angulus ACD. Si igitur arcus perpendicularis AD, cadit intra triangulum, inuentus angulus erit ACB, qui quæritur; ſi vero cadit extra, angulus inuentus ACD, demptus ex duobus rectis, notum relinquet quæſitum angulum ACB. Qui quidem angulus ACB, ita quoque reperietur, licet arcus AD, non adeſſet. Quoniam eſt, vt ſinus arcus AC, ad ſinum anguli B, ita ſinus arcus AB, ad ſinum anguli ACB: ſi fiat, vt ſinus dati arcus dato angulo oppoſiti ad ſinum dati anguli, ita ſinus alterius arcus dati ad aliud, producetur ſinus anguli huic arcui oppoſiti; ac proinde angulus ipſe ACB, cognitus erit, cum conſtet eius ſpecies. Atque ita inuentiam ſunt reliqui duo anguli BAC, ACB.

QVONIAM denique in eodem triangulo ACD, datus eſt arcus AC, angulo recto oppoſitus, cum angulo CAD, proxime inuento:

VEL, quia datus eſt vterque angulus non rectus ACD, CAD:

VEL, quia datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, cum arcu AD, circa angulum rectum:

k Schol. 41. huius, k Scho. 42, vel 52. hui. k Schol. 43. vel 53. hui. k Scho. 44. huius. k Scho. 49. vel 44. hu. k 34. huius l Schol. 45. huius. m 35. huius

VEL, quia datus eſt arcus AD, circa angulum rectum, cum angulo non recto CAD:

VEL, quoniam datus eſt arcus AD, circa rectum angulum, cum angulo oppoſito ACD, conſtatq; præterea ſpecies alterius arcus CD, circa rectum angulum. Exiſtente enim angulo inuento CAD, acuto [k] erit arcus CD, quadrante minor; maior autem, ſi obtuſus.

VEL denique, quia datus eſt arcus AC, recto angulo oppoſitus, cum angulo non recto ACD;

[l] reperietur quoque, per ſcholia in margine adducta, arcus CD, circa rectum angulum: qui vel additus arcui BD, iam dudum inuento, vel ab eo ſubductus, (prout nimirum arcus perpendicularis AD, intra triangulum ceciderit, vel extra) dabit arcum BC, in propoſito triangulo ABC, quæſitum.

PORRO nulla ratione alteruter arcuum AD, BD, in hoc caſu, quadrans eſſe poteſt: [m] quia alioquin & arcus AB, recto angulo D, oppoſitus eſſet quadrans, quod eſt contra hypotheſim. Eadem ratione neq; CD, quadrant erit, ne & arçus AC, angulo recto oppoſitus quadrans ſit, quod eſſet etiam contra hypotheſim.

Praxis per ſolos ſinus quando neuter datorum arcuum inæqualium eſt quadrans.

PRAXIS huius problematis petatur ex ſcholiis in margine poſitis.

SED per ſolos ſinus ita problema abſoluetur. Per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 41. inuenietur arcus AD, in triangulo ABD: Et hinc per praxim problematis ſcholij propoſ. 43. arcus BD. Deinde per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 42. reperietur angulus BAD.

POST

ACD, qui eſt vnus quæſitorum, ſi conſtet angulum C, eiuſdem eſſe ſpeciei cum angulo dato B; ſi vero diuerſæ, reliquus duorum rectorum erit angulus ACB, quæſitus, m *quia ibi arcus perpendicularis intr triangulum cadit, hic vero extra. Rurſus per praxim problematis ſcholij propoſ. 43. notus efficietur arcus CD, qui in priori triangulo additus inuẽto arcui BD, in poſteriori vero ex eodem ſublatus exhibebit reliquum arcum BC, in propoſito triangulo notum. Ad extremum, per praxim problematis 1. ſcholij propoſ. 41. reperietur angulus CAD, qui additus, vel ſubductus ex inuento angulo BAD, tertium angulum BAC, qui quæritur, notum efficiet.*

m 57. huius.

QVOD ſi alter arcuum datorum inæqualium AB, AC, ſit quadrans; ſi quidem AB, quadrans fuerit, erit quoque BD, quadrans & angulus BAD, rectus, necnon B, polus arcus AD; atque adeo angulus datus B, eundem arcum AD, notum exhibebit, vt in præcedenti prop. oſtendimus, quando arcus AB, ponebatur eſſe quadrans. Inuentis igitur arcubus AD, BD & angulo BAD, ſine vllo negotio, reliqua inueniemus, vt prius. Si vero arcus AC, ſit quadrans, erit eadem ratione CD, quadrans, & angulus CAD, rectus, nec non C, polus arcus AD; atque adeo inuentus arcus AD, angulum ACD, notum faciet: qui vnus erit ex quæſitis, quando arcus AD, cadit intra triangulum; ſi vero extra, reliquus duorum rectorum dabit angulum quæſitum ACB. Atque ita inuentus tunc erit, ſine multiplicatione vlla, & arcus CD, & angulus CAD necnon angulus ACD; ex quibus reperientur reliqua, vt prius.

Quando alter duorum arcuũ inæqualiũ datorum eſt quadrans.



SINT iam dati duo arcus AB, AC, æquales; Erunt duo anguli B, C, æquales; & arcus perpendicularis AD, e... in BC, demiſſus intra triangulum cadet; necnon & arcus BD, CD, & anguli ad A, æquales erunt, vt in vltimo caſu propoſ. 63. oſtendimus. Cum ergo angulus B, datus ſit, erit quoque C, illi æqualis, datus. Deinde quia in triangulo ABD, habente rectum angulum D, datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, cum angulo B; n dabitur quoque angulus BAD, qui duplicatus totum angulum BAC, quæſitum offeret notum. Hinc, quoniam in eodem triangulo ABD, datus eſt arcus AB, recto angulo oppoſitus, cum angulo BAD, inuento:

VEL, quia vterque angulus non rectus B, & BAD, datus eſt:

VEL denique, quia datus eſt arcus AB, angulo recto oppoſitus, cum angulo B, non recto;

o cognoſcetur quoque, per ſcholia in margine allata, arcus BD, circa angulum rectum; atque adeo & eius du- p ius BC, qui inquirendus proponitur.

Quando dati duo arcus æquales ſunt.

n Scho. 47. huius.

o Schol. 41. huius.
o Scho. 42, vel 52. hui.
o Schol. 45. huius,

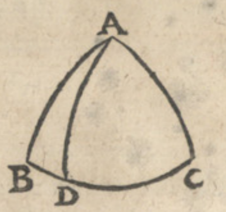
PRAXIS facile colligi poteſt ex ſcholiis in margine appoſitis.

SI vero ſolos ſinus adhibere malueris, inueniendus primum erit arcus AD, per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 41. Atque hinc per praxim problematis ſcholij propoſ. 43. arcus BD: qui duplicatus totum quæſitum BC, dabit. Deinde per praxim problematis 1. ſcholij propoſ. 41. vel per praxim problematis 2. ſcholij propoſ. 42. reperiendus angulus BAD; ex quo eius duplus BAC, quem quærimus, notus erit: tertius autem angulus C, iam datus eſt, cum æqualis ſit dato angulo B.

Praxis, per ſolos ſinus, quando duo arcus dati æquales ſunt.

DATIS igitur duobus arcubus trianguli ſphærici non rectanguli, cum vno angulo, qui alteri eorum opponitur, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.



NECESSE eſt autem conſtare in hoc problemate, num angulus C, alteri dato arcui oppoſitus ſit acutus, obtuſusve, vt ſciatur, num perpendicularis arcus AD, intra triangulum cadat, nec ne. Hoc enim ignorato, neſciremus, an angulus CAD, addendus ſit angulo BAD, an ab eo ſubtrahendus, vt inueniatur angulus BAC, quæſitus: Item an arcus CD, arcui BD, ſit adijciendus, an ſubducendus ex eo, vt arcus quæſitus BC, reperiatur. Vel denique, num angulus inuentus ACD, ſit is, qui quæritur, an vero reliquus duorum rectorum, vt manifeſtum eſt. Non eſſe porro ſatis, ſi duo arcus dentur, cum angulo vni eorum oppoſito, ad ... reliquos angulos, cum reliquo arcu, iam dudum ſupra docuimus in ſcholio propoſ. 24. Qua in re Nicolaum Copernicum erraſſe lib. 1. Reuolutionum, propoſ. 11. triang. ſphær. ibidem monuimus. Quod tamen breuiter ita hic rurſus oſtendemus. Sint duo arcus æquales AD, AC, angulum DAC, ambientes, & vterque quadrante minor, aut maior. Ducto autem per C, D, arcu circuli maximi CD, ducatur ad eum productum alius arcus AB, ex A, neque per polos arcus CD, neque per polos arcus AD, ita vt anguli B, & DAB, ſint non recti. Sed neque angulus ADB, rectus eſt. Si namque vterque arcus AD, AC, minor eſt quadrante, erunt duo anguli C; & ADC, acuti; ſi vero vterque arcus AD, AC, quadrante maior eſt, erunt duo anguli C, & ADC, obtuſi. Ex quo fit, angulum ADB, eſſe vel obtuſum, quando nimirum ADC, acutus eſt; vel acutum, quando videlicet ADC, eſt obtuſus: p *cum duo anguli ad D, duobus rectis ſint æquales. Triangulum ergo ABD, non rectangulum eſt: in quo licet duo arcus AB, AD, dentur, cum angulo B, qui arcui AD, opponitur; non tamen inde colligere poterimus reliquum angulum alteri arcui dato AB, oppoſitum eſſe ADB; cum eidem arcui AB, opponatur quoque in triangulo ABC, angulus C, ipſi ADC, inæqualis: propterea quod in triangulo ABC, eadem hypotheſis manet, nempe arcus duo dati AB, AC, (ponitur enim arcus AC, arcui AD, æqualis) & angulus datus B, arcui AC, oppoſitus. Oportet ergo conſtare, num angulus alteri arcui AB, oppoſitus ſit acutus, aut obtuſus, hoc eſt, an ſumendus ſit angulus ADB, an vero C, cum vnus obtuſus ſit, & alter acutus, &c.*



Error Copernici. Non ſatis eſſe, dari duos arcus cum angulo vni eorũ oppoſito, in triangulo non rectãgulo, vt reliqua inueniãtur, 25. huius.

p 5. huius.

SCHOLIVM II.

HACTENVS demonſtrauimus ea, quæ ad triangulorum calculum requiruntur, pluribus ſane propoſitionibus, & fortaſſe longioribus, quam in calculo, qui facilis & breuis eſſe debet, quis deſideret. Quare operæ pretium me facturum arbitror, ſi Epilogi loco praxes omnium problematum, quæ in triangulis rectilineis, & ſphæricis demonſtratæ ſunt, ſeorſum hic, in vnum quaſi locum congeſtas, deſcribam; vt in promptu eas ſemper, & quaſi ad manus habeamus, quando vſurpandæ ſunt, ne fruſtra in eis è tanta propoſitionum multitudine ſeligendis tempus teramus. In margine porro propoſitiones, ac problemata, in quibus earum demonſtrationes continentur, adducemus, vt facile à quovis, cum res exiget, poßint reperiri. Itaque quod ad calculum triangulorum attinet, ſatis erit, ſi pauca hæc, quæ ſequuntur, attente, cum opus fuerit, perlegantur. In eis enim ſumma omnium, quæ de triangulis demonſtrauimus, comprehenditur. Quamuis autem in triangulis ſphæricis non rectangulis plerunque arcus, & angulos triangulorum, in quæ triangula non rectangula reſoluimus, pluribus viis inueſtigauerimus, in praxibus tamen ſequentibus, vt omnem confuſionem vitaremus, vnam tantum in quouis arcu, ſiue angulo inquirendo, quam videlicet iudicauimus eſſe commodiorem, delegimus.

SEQVVNTVR PRAXES PROBLEMATVM omnium triangulorum ex demonſtrationibus ſuperioribus excerptæ, in quibus totus fructus noſtrorum triangulorum tam rectilineorum, quam ſphæricorum conſiſtit.

TRIAN-

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM RECTANGVLORVM PROBLEMATA, ET PRAXES.

1. DATIS angulis omnibus cuiuſcunque trianguli; inuenire omnium laterum proportiones.

Quærũtur proportiones laterũ.

ADSCRIBANTVR ſingulis lateribus ſinus recti angulorum oppoſitorum. [a] Latera enim eas inter ſe proportiones habent, quæ inter dictos ſinus angulorum lateribus oppoſitis adſcriptos reperiuntur. Quod ſi duo tantum anguli dati ſint, inueniendus primum erit tertius angulus, per ſubtractionem duorum datorum ex duobus rectis, ac tum demum eodem modo proportiones laterum indagandæ.

a Schol. pro poſ. 1. triangul. rectilin.

Aliter.

DVPLICETVR ſinus rectus cuiuſuis anguli acuti, [b] habebiturque latus illi angulo oppoſitum in partibus ſinus totius, quem refert ſemidiameter circuli triangulo circumſcripti. Pro latere vero, quod recto angulo opponitur, ſi forte triangulum eſt rectangulum, ſumatur ſinus totus duplicatus. Pro latere denique, quod angulo obtuſo opponitur, ſi forte obtuſangulum eſt triangulum, accipiatur duplum ſinus recti, qui ſemiſſi aggregati ex duplis duorum angulorum acutorum debetur.

b Schol. pro poſ. 1. triangul. rectil.

2. DATO latere in triangulo rectangulo, quod recto angulo opponitur, cum vno angulorum acutorum, ac proinde & cum altero acuto: (cum ambo ſint vni recto æquales) inuenire latus circa angulum rectum vtrilibet acutorum angulorum oppoſitum.

Quæritur latus, circa angulũ rectum vtrilibet angulotum acutorum oppoſitum.

FIAT, vt ſinus totus ad datum latus recto angulo oppoſitum, ita ſinus vtriuſuis anguli acuti dati ad aliud, [c] producetúrque latus illi dato acuto angulo oppoſitum in partibus menſuræ, ſecundum quam datum eſt latus angulo recto oppoſitum.

c Propoſ. 2. triang. rectil.

3. DATO vno latere trianguli rectanguli circa rectum angulum, cum vno acutorum angulorum, atque adeo & cum altero acuto: (quod ambo vni recto ſint æquales) inuenire alia duo latera.

Quæritur latus recto angulo oppoſitum, & alterutrũ duorum circa eundem angulum rectum.

FIAT, vt ſinus totus ad latus datum circa angulum rectum, ita tangens acuti anguli dato lateri adiacentis ad aliud, [d] inuenieturque alterum latus circa angulum rectum: Fiat item, vt ſinus totus ad latus idem circa angulum rectum datum, ita ſecans eiuſdem anguli acuti dato lateri adiacentis ad aliud, produceturq; latus recto angulo oppoſitum, in partibus menſuræ, ſecundum quam latus circa angulum rectum eſt datum.

d Propoſ. 2. triang. rectil.

Aliter per ſolos ſinus.

FIAT, vt ſinus anguli acuti dato lateri oppoſiti ad latus datum circa angulum rectum, ita ſinus alterius anguli acuti ad aliud, [e] *inuenieturq; latus huic alteri acuto angulo oppoſitum circa angulum rectum: Fiat item, vt ſinus anguli a[illegible]te lateri oppoſiti ad datum latus circa rectum angulum, ita ſinus totus ad aliud, producetur q; latus angulo recto [illegible]um, in partibus menſuræ, ſecundum quam latus circa angulum rectum datum eſt.*

e Propoſ. 2. [illegible] ctil.

4. DATO latere in triangulo rectangulo, quod angulo recto opponitur, cum alterutro reliquorum duorum laterum circa angulum rectum, reperire duos angulos acutos, & alterum latus circa angulum rectum.

Quærũtur duo anguli acuti, & vnum latus circa angulum rectũ.

FIAT, vt datum latus recto angulo oppoſitum ad ſinum totum, ita datum latus circa angulum rectum ad aliud, [f] procreabiturque ſinus anguli acuti huic poſteriori lateri dato oppoſiti: Ex hoc autem angulo inuento alter quoq; acutus notus fiet, cum ambo vni recto ſint æquales. Fiat rurſus, vt ſinus totus ad datum latus angulo recto oppoſitum, ita ſinus acuti anguli inuenti quæſito tertio lateri oppoſiti ad aliud, inuenietúrq; alterum hoc latus circa angulum rectum, in partibus menſuræ, ſecundum quam duo alia latera data ſunt.

f Propoſ. 3. triang. rectil.

5. DATIS duobus lateribus circa angulum rectum, inuenire duos angulos acutos, & latus recto angulo oppoſitum.

Quærũtur duo acuti anguli, & latus recto angulo oppoſitum.

FIAT, vt alterutrum laterum datorum ad ſinum totum, ita alterum latus datum ad aliud, [g] prodibitq; tangens anguli acuti huic poſteriori lateri oppoſiti. Ex hoc autem angulo inuento notus euadet alter acutus angulus,

g Propoſ. 3. triang. rectil.

angulus, cum ambo acuti vni recto ſint æquales. Fiat rurſum, vt ſinus totus ad vtrumuis laterum circa angulum rectum d[illegible]tum, ita ſecans anguli acuti accepto huic lateri adiacentis ad aliud, inuenieturque latus angulo recto oppoſitum [illegible] partibus, in quibus data ſunt duo latera circa rectum angulum.

Aliter per ſolos ſinus.

ADDANTVR ſimul quadrata duorum laterum circa angulum rectum datorum. Nam huius aggregati radix erit latus angulo recto oppoſitum. Fiat rurſus, vt latus recto angulo oppoſitum, quod iam inuentum eſt, ad ſinum totum, ita alterutrum datorum laterum circa angulum rectum ad aliud, [h] *proueniet q; ſinus acuti anguli aſſumpto lateri circa angulum rectum oppoſiti. Ex hoc autem angulo inuento fiet quoq; alter cognitus, cum vni recto ambo acuti ſint æquales.*

h *Propoſ. 3. triang. rectilinea.*

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM NON RECTANGVLORVM PROBLEMATA, ET PRAXES.

Quærũtur duo arcus, vel anguli, ex eorũ aggregato.

6. DATO aggregato duorum arcuum, vel angulorum, quod minus ſit, quam grad. 180. vna cum proportione, quam eorum ſinus habent, vtrumq; illorum exhibere notum.

FIAT, vt ſemiſſis aggregati terminorum proportionis datæ, quam ſinus arcuum, vel angulorum habent, ad tangentem ſemiſſis aggregati arcuum, vel angulorum dati, (quærendo tangentem per partem proportionalem reſpondentem 30. ſecundis, ſi forte aggregatum arcuum, vel angulorum bifariam diuidi nequeat ſine ſecundis.) ita differentia inter ſemiſſem aggregati terminorum datæ proportionis, & alterutrum terminorum, ad aliud. [a] Inuenietur enim tangens arcus, vel anguli, quo vterque arcus, vel angulus quæſitus à ſemiſſe aggregati eorundem arcuum, vel angulorum dati differt: atq; adeo arcus, vel angulus tangentis huius inuentæ additus ad ſemiſſem dati aggregati arcuum, vel angulorum dabit maiorem arcum, vel angulum quæſitum; ablatus vero ab eadem ſemiſſe relinquet arcum, vel angulum minorem.

a *Propoſ. 6. triang. rectilin.*

Aliter.

FIAT, vt ſemiſſis differentiæ inter duos terminos proportionis datæ ad tangentem ſemiſſis differentiæ inter datum aggregatum arcuum, vel angulorum, & ſemicirculum, ita aggregatum ex ſemiſſe differentiæ inter duos terminos datæ proportionis, & conſequente termino eiuſdem proportionis, ad aliud. [b] Producetur enim tangens arcus, ſeu anguli, à quo ſi detrahatur ſemiſſis differentiæ inter datum aggregatum arcuum, vel angulorum, & ſemicirculum, reliquus fiet arcus, ſiue angulus minor quæſitus: hic autem ex dato aggregato ſubductus relinquet arcum, vel angulum quæſitum maiorem.

b *Propoſ. 6. triang. rectilin.*

Aliter per ſolos ſinus.

FIAT, vt ſemiſſis aggregati terminorum proportionis datæ ad ſinum ſemiſſis aggregati arcuum, ſeu angulorum, ita differentia inter ſemiſſem aggregati terminorum datæ proportionis, & alterutrum terminorum, ad aliud, [c] *inuenietur q; quartus quidam numerus; cuius quadratum ſi adjciatur quadrato ſinus complementi ſemiſſis aggregati arcuum, ſeu angulorum: Et rurſum fiat, vt radix quadrata aggregati duorum dictorum quadratorum ad ſinum totum, ita quartus ille numerus inuentus ad aliud, producetur ſinus arcus, ſiue anguli, quo vterq; arcus angulusve ab eorundem aggregati dati ſemiſſe differt. Additus ergo hic arcus, ſeu angulus ad ſemiſſem aggregati dati præbebit maiorem arcum, vel angulum; ablatus vero ex eadem ſemiſſe minorem arcum, ſeu angulum relinquet.*

c *Propoſ. 6. triang. rectilin.*

QVOD ſi quando proportio ſinuum data ſit æqualitatis, dabit ſemiſſis dati aggregati arcuum, ſeu angulorum, vtrumque arcum, ſiue angulum.

Quærũtur duo arcus, ſeu anguli, ex eorũ aggregato.

7. DATO duorum arcuum, quorum vterque ſemicirculo minor ſit, vel duorum angulorum aggregato, quod maius ſit, quam grad. 180. vna cum proportione, quam eorum ſinus habent, vtrumq; illorum reddere notum.

d *Propoſ. 6. triang. rectilin.*

DETRACTO dato aggregato ex gr. 360. [d] inueniatur per problema 6. vterq; arcus ſiue angulus reſidui aggregati, quod minus eſt ſemper quam grad. 180. remanetq; eadem proportio ſinuum. Nam ſi ambo inuenti ſeorſum ex ſemicirculo ſubtrahantur, reliqui erunt arcus, vel anguli quæſiti.

QVANDO proportio data eſt æqualitatis, dabit quoque ſemiſſis dati aggregati vtrumque arcum, ſiue angulum quæſitum.

QVOD ſi forte datum aggregatum contineat præciſe gr. 180. problema ſolui non poteſt.

Quærũtur duo arcus, ſiue anguli ex eorum differẽtia.

8. DATA differentia duorum arcuum, quorum vterq; ſemicirculo ſit minor, vel duorum angulorum, vna cum proportione, quam eorum ſinus habent, vtrumque illorum notum efficere.

SI proportio ſinus maioris arcus, vel anguli, ad ſinum minoris eſt maioris inæqualitatis; fiat, vt ſemiſſis differentiæ terminorum proportionis datæ ad tangentem ſemiſſis datæ differentiæ arcuum, vel angulc um, ita aggregatum ex ſemiſſe differentiæ terminorum proportionis, & conſequente termino proportio ciuſdem, ad aliud, [e] produceturque tangens arcus, ſiue anguli, qui ſemiſſi differentiæ arcuum, vel angulc un datæ additus componet maiorem arcum, ſeu angulum; ſi vero ab eodem ſemiſſis differentiæ arcuum, vel angulorum ſubducatur, reliquus erit arcus, vel angulus minor.

e triang ectiline

SI vero proportio ſinus maioris arcus, vel anguli, ad ſinum minoris eſt minoris inæqualitatis; inuertantur eius termini, vt fiat proportio maioris inæqualitatis; atque ex hac, & data differentia arcuum, ſeu angulorum inueniantur duo arcus, vel anguli, vt dictum eſt. Nam maior eorum ex ſemicirculo ſublatus dabit minorem arcum, ſeu angulum quæſitum; minor vero ſubductus ex ſemicirculo offeret maiorem.

Aliter.

QVANDO ſinus maioris arcus, vel anguli ad ſinum minoris habet proportionem maioris inæqualitatis; [f] inquirantur ex data illa proportione maioris inæqualitatis, & ex arcu, ſeu angulo, qui poſt detractionem datæ differentiæ ex ſemicirculo relinquitur, tanquam ex aggregato duorum arcuum, ſiue angulorum, duo arcus, ſiue anguli huius aggregati, vt in problemate 6. præcepimus. Nam maior arcus, ſeu angulus inuentus, ſi ex ſemicirculo auferatur, dabit maiorem arcum ſiue angulum quæſitum: Minor autem inuentus erit minor quæſitus.

f Propoſ. 7. triang. rectilin.

QVANDO autem proportio data eſt minoris inæqualitatis; inuertantur eius termini, vt fiat proportio maioris inæqualitatis: atque ex hac, & data differentia arcuum, ſeu angulorum, inueſtigentur duo arcus, ſiue anguli, vt iam dictum eſt. Maior enim eorum ex ſemicirculo ſubtractus dabit arcum, ſeu angulum quæſitum minorem; Minor vero maiorem.

Aliter per ſolos ſinus.

SI data proportio ſinus maioris arcus, ſiue anguli ad ſinum minoris eſt maioris inæqualitatis; fiat, vt ſemiſſis differentiæ terminorum proportionis datæ ad ſinum ſemiſſis datæ differentiæ arcuum, vel angulorum, ita aggregatum ex ſemiſſe differentiæ terminorum proportionis, & conſequente termino eiuſdem proportionis, ad aliud, [g] inuenieturq; quartus quidam numerus; cuius quadratum ſi adiiciatur quadrato ſinus complementi ſemiſſis differentiæ arcuum, ſeu angulorum datæ: Et rurſum fiat, vt radix quadrata aggregati dictorum quadratorum ad ſinum totum, ita numerus ille quartus inuentus ad aliud, reperietur ſinus arcus, ſiue anguli, cui ſi addatur ſemiſſis datæ differentiæ arcuum, ſeu angulorum, notus fiet maior arcus, ſiue angulus: ab eodem vero ſi eadem ſemiſſis detrahatur, reliquus erit minor.

g Propoſ. 7. triang. rectil.

QVOD ſi data proportio ſit minoris inæqualitatis, agendum erit, vt ſupra diximus.

IAM vero ſi forte proportio data ſit æqualitatis, detrahatur differentia data arcuum, ſiue angulorum ex ſemicirculo. Nam reſidui ſemiſſis erit minor arcus, ſeu angulus quæſitus: eadem vero ſemiſſis ad datam differentiam adiecta dabit maiorem.

9. SI ab vno angulo trianguli cuiuſuis datorum laterum ad latus oppoſitum perpendicularis demittatur, quanta ſit recta inter perpendicularem, & vtrumvis reliquorum angulorum, inuenire.

Quæritur caſus lineæ perpenpendicularis.

DIFFERENTIA inter quadrata duorum laterum ambientium angulum, à quo perpendicularis demiſſa eſt, diuidatur per latus tertium, produceturque numerus; qui ſi minor fuerit tertio latere, [h] indicabit, perpendicularem intra triangulum cecidiſſe; idemque ex tertio eodem latere ſubductus relinquet numerum, cuius ſemiſſis dabit minus ſegmentum baſis, hoc autem ex toto tertio latere ſubtractum dabit ſegmentum maius. Idem vero numerus ex diuiſione productus, ſi fuerit maior tertio latere, argumento erit, perpendicularem extra triangulum cecidiſſe. Quare ſi ex eo tertium latus auferatur, reliquus erit numerus, cuius ſemiſſis dabit rectam extra triangulum inter perpendicularem, & angulum obtuſum; eadem vero ſemiſſis tertio lateri appoſita dabit alteram rectam inter perpendicularem, & angulum acutum.

h Propoſ. 9. triang. rectilin.

Aliter, & facilius.

FIAT, vt tertium latus, in quod demiſſa eſt perpendicularis, ad ſummam aliorum duorum laterum, ita differentia eorundem ad aliud, prouenietq; numerus, [i] ex quo rectam inter perpendicularem, & angulum vtrumq; inueniemus, vt nuper diximus.

i Propoſ 9. triang. rectil.

Aliter.

CADENTE perpendiculari inter triangulum; diuidatur ſemiſſis differentiæ inter quadratum vtriuſuis laterum ambientium angulum, à quo perpendicularis eſt demiſſa, & ſummam quadratorum ex aliis duobus lateribus deſcriptorum, per latus, in quod perpendicularis cadit, [k] produceturque ſegmentum baſis prope angulum, quem continent duo latera, quorum ſumma quadratorum fuit accepta; hoc autem ſegmentum ex tota baſi detractum relinquet alterum ſegmentum.

k Scho. propoſ. 9. triãg. rectil.

CADENTE vero perpendiculari extra triangulum, diuidatur ſemiſſis differentiæ inter quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti, & ſummam quadratorum ex aliis duobus lateribus deſcriptorum, per latus, in quod productum perpendicularis cadit, procreabiturque linea extra triangulum inter perpendicularem, & angulum obtuſum; hæc vero toti baſi adiecta conficiet alteram rectam inter perpendicularem, & acutum angulum baſis.

QVOD

l Coro. propoſ. 8. triãg. rectil.

QVOD ſi duo latera circa perpendicularem ſint æqualia, [l] ſecabit perpendicularis baſim bifariam. Quar[illegible]imidium baſis dabit vtramque rectam quæſitam.

[illegible] latera.

10. DA[illegible]S omnibus angulis trianguli non rectanguli, cum vno latere, inuenire alia duo latera.

m [illegible] p. 10. triang. rectilinei.

FIAT, vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti ad ſinum vtriuſuis reliquorum angulorum, ita latus datum ad aliud, [m] inuenieturque latus poſteriori huic angulo oppoſitum. Fiat rurſus, vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti ad ſinum tertii anguli, ita latus datum ad aliud, produceturque tertium latus huic tertio angulo oppoſitum.

SI triangulum ſit Iſoſceles, vnius tantum lateris inuentione opus eſt, ſi vnum datum ſit, cum angulis. Idem dicendum eſt de Scaleno, ſi duo eius latera cum angulis data ſint. In Æquilatero vero, ſi vnum latus detur, data erunt & reliqua illi æqualia.

Quæruntur anguli.

11. DATIS omnibus lateribus trianguli non rectanguli, reperire omnes eius angulos.

n Propoſ. 11. triang. rectilin.

[n] DVCTA ad maximum latus perpendiculari ex angulo oppoſito, (vt perpendicularis ſemper intra triangulum cadat) inueniantur, per antecedens problema, rectæ inter perpendicularem, & duos angulos maximi lateris poſitæ. Deinde fiat, vt minimum latus ad ſinum totum, ita minus ſegmentum baſis ad aliud, gigneturq; ſinus, cuius arcus complementum dabit angulum baſis minimo lateri adiacentem. Rurſus fiat, vt medi[illegible] latus ad ſinum totum, ita maius ſegmentum baſis ad aliud, procreabiturq; ſinus, cuius arcus complementum dabit angulum baſis medio lateri adiacentem. Tertius vero angulus maximo lateri oppoſitus conflabitur ex duobus arcubus duorum ſinuum inuentorum: Vel certe relinquetur poſt detractionem duorum angulorum inuentorum ex duobus rectis.

SI triangulum ſit Iſoſceles, ducentur erit perpendicularis ad baſim, quam bifariam ſecabit. Nam ſi tunc fiat, vt vnum æqualium laterum ad ſinum totum, ita dimidium baſis ad aliud, reperietur ſinus, cuius arcus complementum dabit vnum æqualium angulorum ſupra baſim, ac proinde & alterum. Tertius ex his duobus elicietur.

IN æquilatero dabuntur anguli, etiam ſi latero non dentur, cum quilibet ſit tertia pars duorum recto[illegible], vel duæ tertiæ vnius recti.

Quæritur latus, cum eius angulis duobus.

12. DATIS duobus lateribus trianguli non rectanguli, cum angulo ab ipſis comprehenſo, inuenire tertium latus, & reliquos angulos.

o Propoſ. 12 triang. rectilin.

[o] SVBDVCTO angulo dato ex duobus rectis, vt aggregatum aliorum duorum habeatur, inueniatur, per 6. problema triang. rectil. ex hoc aggregato, & proportione laterum datorum eis oppoſitorum, (quæ eadem eſt, quæ inter ſinus eorum reperitur) vterque eorum. Deinde fiat, vt ſinus vtriuſvis horum angulorum inuentorum ad ſinum anguli in principio dati, ita latus inuento angulo, qui in aurea regula acceptus fuerit, oppoſitum ad aliud, inuenieturque tertium latus.

QVOD ſi data duo latera ſint æqualia, oblato angulo dato ex duobus rectis, dabit ſemiſſis reſidui vtrumque angulorum æqualium: Et ſi fiat, vt ſinus vnius illorum ad ſinum anguli dati, ita vnum laterum æqualium ad aliud, prodibit tertium latus.

Quæruntur duo anguli, cum vno latere.

13. DATIS duobus lateribus trianguli non rectanguli, cum angulo, qui vni eorum opponitur, inueſtigare reliquos, & tertium latus: ſi modo, quando datus angulus eſt acutus, conſtet, num angulus alteri dato lateri oppoſitus ſit acutus etiam, an vero obtuſus.

p Propoſ. 13 triang. rectilin.

[p] FIAT, vt latus datum angulo dato oppoſitum ad alterum latus datum, ita ſinus anguli dati ad aliud, re[illegible]turq; ſinus anguli alteri dato lateri oppoſiti, qui ſi acutus fuerit, (ſemper autem acutus erit, ſi datus eſt ob[illegible] ipſo ſinu inuento notus fiet; ſi vero obtuſus, ſinus inuentus dabit angulum, qui ex duobus rectis ſubductus quæſitum angulum alteri dato lateri oppoſitum relinquet: Summa autem ex dato angulo, & inuento angulo conflata, ſi ex duobus rectis ſubtrahatur, indicabit tertium angulum à datis lateribus comprehenſum. Fiat deinde, vt ſinus anguli dati ad ſinum huius tertii anguli inuenti, ita latus datum dato angulo oppoſitum ad aliud, gigneturque tertium latus quæſitum.

SI data latera ſint æqualia, datus etiam erit angulus alteri dato lateri opppoſitus, cum dato angulo ſit æq[illegible]lis. Hinc tertius angulus, & tertium latus reperietur, vt prius.

TRIAN-

TRIANGVLORVM SPHÆRICORVM RECTILINEORVM RECTANGVLORVM PROBLEMATA, AC PRAXES.

1. DATO arcu in triangulo rectangulo, qui recto angulo opponirur, cum alterutro arcuum circa rectum angulum, inuenire angulum huic arcui oppoſitum.

Quæritur angulus nõ rectus.

FIAT, vt ſinus arcus dati recto angulo oppoſiti ad ſinum totum, ita ſinus arcus dati circa angulum rectum ad aliud, [a] inuenieturque ſinus anguli huic arcui oppoſiti, qui quæritur. Hic autem angulus erit acutus, ſi datus arcus ei oppoſitus circa rectum angulum fuerit quadrante minor; obtuſus autem, ſi maior.

a Prob. 1. propoſ. 41. triang. ſphær.

Aliter.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum arcus angulo recto oppoſiti, ita ſecans complementi arcus circa rectum angulum dati ad aliud, [b] produceturque ſecans complementi anguli quæſiti, qui huic arcui opponitur.

b Probl. propoſ. 55. triang. ſphær.

2. DATO arcu in triangulo rectangulo, qui recto angulo opponitur, cum alterutro angulorum non rectorum, inuenire arcum huic angulo oppoſitum.

Quæritur arcus circa angulũ rectum.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum arcus angulo recto oppoſiti, ita ſinus anguli dati ad aliud, [c] reperieturq; ſinus arcus huic angulo oppoſiti, qui quæritur. Hic autem arcus quadrante minor erit, ſi datus angulus ei oppoſitus fuerit acutus; maior vero, ſi obtuſus.

c Probl. 2. propoſ. 41. triangul. ſphær.

3. DATO alterutro arcuum in triangulo rectangulo circa angulum rectum, cum angulo ei oppoſito, reperire arcum recto angulo oppoſitum: ſi modo conſtet, num quadrante minor ſit, an maior; vel an alter angulus dato arcui adiacens ſit acutus, obtuſuſve; vel denique, an alter arcus circa rectum angulum ſit minor quadrante, aut maior.

Quæritur arcus recto angulo oppoſitus.

FIAT, vt ſinus anguli dati ad ſinum dati arcus, ita ſinus totus ad aliud, [d] produceturque ſinus arcus recto angulo oppoſiti: qui ex inuento ſinu cognoſci non poterit, niſi conſtet, num ſit quadrante minor, vel maior; aut an alter angulus non rectus ſit acutus, obtuſuſve; aut an alter arcus circa angulum rectum ſit minor, aut maior quadrante. Nam ſi alter angulus eſt acutus, ſi quidem & angulus datus acutus ſit; aut ſi tam ille, quam hic eſt obtuſus, erit quæſitus arcus recto angulo oppoſitus, quadrante minor: ſi vero alter ille angulus eſt acutus, & datus obtuſus; aut ille obtuſus, & hic acutus, erit idem arcus quæſitus, & angulo recto oppoſitus, quadrante maior. Sic etiam, ſi alter arcus circa angulum rectum, & datus arcus, ſunt eiuſdem ſpeciei, nempe ambo minores aut maiores quadrante, erit arcus quæſitus recto angulo oppoſitus quadrante minor; ſi vero diuerſarum ſpecierum, nimirum vnus quadrante minor, & alter maior, erit idem arcus quæſitus quadrante maior.

d Probl. 3. propoſ. 41. triangul. ſphær.

Aliter.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum dati anguli, ita ſecans complementi arcus dati ad aliud, [e] [illegible]oduceturque ſecans complementi arcus recto angulo oppoſiti.

e Probl. propoſ. 54. triang. ſphær.

4. DATIS duobus angulis non rectis in tria[illegible]ſo rectangulo, inuenire arcum vtri[illegible]eorum oppoſitum, vna cum arcu rectum angulum ſubtendente.

Quæritur vterq; ar[illegible] circa ang[illegible] rectum. Deinde arcus recto angulo oppoſitus.

FIAT, vt ſinus anguli dati quæſito arcui adiacentis ad ſinum totum, ita ſinus complementi alterius anguli dati ad aliud, [f] produceturque ſinus complementi arcus huic poſteriori angulo oppoſiti. Erit autem vterlibet arcus inuentus quadrante minor, ſi [illegible]gulus ei oppoſitus fuerit acutus; maior vero, ſi obtuſus.

IAM inuento vtroque arcu circa angulum rectum, inuenietur, per problema 3. ex vtrolibet illorum, & an[illegible] ei oppoſito dato, arcus quoque recto angulo oppoſitus.

f Probl. 1. propoſ. 42. triangul. ſphær.

Aliter.

FIAT, vt ſinus totus an ſinum anguli non recti quæſito arcui adiacentis, ita ſecans alterius anguli non recti ad aliud, [g] reperieturque ſecans arcus huic poſteriori angulo oppoſiti, qui quæritur.

g Probl. propoſ. 52. triang. ſphær.

5. DATO alterutro arcuum in triangulo rectangulo circa angulum rectum, cum angulo ei adiacente, inueſtigare alium angulum eidem arcui oppoſitum, & reliquos duos arcus.

Quæritur angulus nõ rect9. Deinde alii duo arcus,

FIAT,

h Probl. 2. propoſ. 42. triangul. ſph.

F[illegible]T, vt ſinus totus ad ſinum anguli dati, ita ſinus complementi arcus dati ad aliud, [h] procreabiturque ſinus co[illegible]lementi alterius anguli, quem quærimus. Hic autem angulus erit acutus, ſi datus arcus fuerit quadrante mino[illegible] obtuſus vero, ſi maior.

EX vtroque autem angulo non recto, quorum vnus datus eſt, & alter inuentus, reperientur reliqui duo arcus, vt in præcedenti problemate dictum eſt.

Quæritur angulus nõ rectus. Deinde alij duo arcus.

6. DATO alterutro arcuum in triangulo rectangulo circa angulum rectum, cum angulo ei oppoſito, inueſtigare alium angulum non rectum eidem arcui adiacentem, & reliquos duos arcus: ſi modo conſtet, num alius ille angulus non rectus quæſitus ſit acutus, obtuſusve; vel an alteruter arcuum quæſitorum quadrante minor ſit, vel maior.

i Probl. 2. propoſ. 42. triangul. ſphær.

FIAT, vt ſinus complementi arcus dati ad ſinum complementi anguli dati, ita ſinus totus ad aliud, [i] reperieturque ſinus alterius anguli non recti quæſiti: qui ex inuento ſinu non elicietur, niſi prius conſtet, an acutus ſit, an obtuſus: Aut, an alteruter reliquorum duorum arcuum non datorum ſit quadrante minor, aut maior. Nam ſi alter arcus circa angulum rectum non datus, & quæſito angulo oppoſitus, fuerit minor quadrante, erit quæſitus angulus acutus; ſi vero maior, obtuſus. Pari ratione, ſi arcus recto angulo oppoſitus, & non d[illegible] tus, fuerit quadrante minor; ſi quidem angulus datus ſit acutus, erit quæſitus quoq; angulus acutus; ſi vero obtuſus, obtuſus: At ſi arcus angulo recto oppoſitus fuerit maior quadrante; ſi quidem datus angulus ſit acutus, erit quæſitus angulus obtuſus; ſi vero obtuſus, acutus.

EX vtroque porro angulo non recto, quorum vnus datus eſt, & alter inuentus, inuenientur reliqu[illegible] arcus, vt in problemate 4. traditum eſt.

Aliter.

k Probl. propoſ. 56. triang. ſphær.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum complementi arcus dati, ita ſecans dati anguli ad aliud, [k] reperieturq; ſecans complementi alterius anguli non recti, qui quæritur. Reliqua inuenientur, vt ſupra dictum eſt.

Quæritur arcus recto angulo oppoſitus. Deinde duo anguli non recti.

7. DATIS duobus arcubus in triangulo rectangulo circa angulum rectum, reperire tertium arcum angulo recto oppoſitum, & duos angulos non rectos.

l Probl. propoſ. 43. triang. ſphær.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum complementi vtriuslibet arcuum datorum, ita ſinus complementi alterius arcus dati ad aliud, [l] produceturq; ſinus complementi arcus recto angulo oppoſiti. Hic autem arcus quadrante erit minor, ſi vterque arcus circa rectum angulum datus fuerit minor, aut maior quadrante; quadrante vero maior, ſi vnus datorum arcuum fuerit quadrante minor, & alter maior.

EX arcu autem rectum angulum ſubtendente inuento, & alterutro arcuum circa angulum rectum datorum, inuenietur angulus ei oppoſitus, vt in problemate 1. diximus.

Quæritur arcus circa angulũ rectum. Deinde duo anguli non recti.

8. DATO arcu in triangulo rectangulo, qui recto angulo opponitur, cum alterutro arcuum circa angulum rectum, inquirere alium arcum circa rectum angulum, & duos angulos non rectos.

m Proble. propoſ. 43. triangul. ſphær.

FIAT, vt ſinus complementi arcus dati circa angulum rectum ad ſinum complementi arcus recto angulo oppoſiti, ita ſinus totus ad aliud, [m] gigneturque ſinus complementi alterius arcus circa rectum angulum, qui quæritur. Hic autem arcus erit quadrante minor, ſi vterque arcus datus minor quadrante fuerit, aut maior; maior vero, ſi alter datorum arcuum fuerit quadrante minor, & alter maior.

INVENTO autem arcu altero circa rectum angulum, reperientur anguli, vt in præcedenti problemate dictum eſt.

n Probl. propoſ. 53. triang. ſphær.

Aliter.

[illegible]IAT, vt ſinus totus ad ſinum complementi dati arcus circa angulum rectum, ita ſecans arcus angulo recto oppoſiti ad aliud, [n] produceturque ſecans tertii arcus, qui quæritur, &c.

Quæritur arcus circa angulũ rectum. Deinde alter angulus non rectus, & arcus recto angulo oppoſitus.

9. DATO alterutro arcuum in triangulo rectangulo circa angulum rectum, cum angulo non recto ei adiacente, ſcrutari alterum arcum circa angulum rectum, & alium angulum non rectum, cum arcu rectum angulum ſubtendente.

o Prob. 1. propoſ. 44. triang. ſphær.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum dati arcus, ita tangens dati anguli ad aliud, [o] produceturq; tangens arcus quæſiti. Qui arcus minor quadrante erit, ſi datus angulus ei oppoſitus fuerit acutus; maior autem, ſi obtuſus.

EX eodem porro arcu circa angulum rectum dato, & angulo adiacente, reperietur & alter angulus [illegible] rectus, & arcus recto angulo oppoſitus, vt ſupra in 5. problemate docuimus.

Quæritur arcus circa angulũ rectum. Deinde alter angulus non rectus, & arcus recto angulo oppoſitus.

10. DATO alterutro arcuum in triangulo rectangulo circa angulum rectum, cum angulo ei oppoſito, indagare alterum arcum circa rectum angulum, & alium angulum non rectum, cum arcu rectum angulum ſubtendente: ſi modo conſtet, an reliquus arcus circa angulum rectum quæſitus quadrante minor ſit, aut maior; vel an alter angulus non rectus ſit acutus, obtuſusue; vel denique num arcus angulo recto oppoſitus ſit minor quadrante, aut maior.

FIAT,

FIAT, vt tangens anguli dati ad tangentem dati arcus, ita ſinus totus ad aliud, ᵃ reperieturque ſinu[s] arcus quæſiti: qui ex inuento ſinu non cognoſcetur, niſi conſtet, num quadrante minor ſit, aut maior; vel [an alt]er angulus non rectus ſit acutus, obtuſuſve; vel denique, an arcus recto angulo oppoſitus ſit minor quad[ra]nte, aut maior. Nam ſi alter angulus fuerit acutus, erit quæſitus arcus ei oppoſitus, quadrãte minor; ſi vero [ob]tuſus, ma[i]ior. Sic etiam, ſi arcus recto angulo oppoſitus fuerit minor quadrãte, ſi quidem & datus arcus ſ[it] quadrante minor, erit quæſitus arcus minor quoque quadrante; ſi vero quadrante maior, maior quoque: At ſi arcus recto angulo oppoſitus fuerit quadrante maior, ſi quidem datus arcus maior quoque ſit, erit quæſitus arcus minor quadrante; ſi vero quadrante minor, maior.

IAM vero ex eodem arcu circa angulum rectum dato, & angulo oppoſito, reperietur & alter angulus non rectus, & arcus recto angulo oppoſitus, vt in problemate 6. traditum eſt. Vel certe, ex duobus arcubus circa angulum rectum, quorum vnus datus eſt, & alter inuentus, inuenietur arcus recto angulo oppoſitus, cum duobus angulis non rectis, vt in problemate 7. traditum eſt.

Aliter.

FIAT, vt ſinus totus ad tangentem dati arcus, ita tangens complementi anguli dati ad aliud, ᵇ reperieturque ſinus arcus quæſiti. Reliqua inuenientur, vt proxime præcepimus.

11. DATIS duobus arcubus in triangulo rectangulo circa angulum rectum, inuenire vtrumlibet angulorum non rectorum. & arcum præterea recto angulo oppoſitum.

FIAT, vt ſinus vtriuſuis arcuum datorum ad ſinum totum, ita tangens alterius arcus dati ad aliud, ᵃ procreabiturque tangens anguli huic poſteriori arcui oppoſiti. Qui angulus acutus erit, ſi datus arcus oppoſitus fuerit quadrante minor, obtuſus autem, ſi maior.

EX eiſdem duobus arcubus datis inuenietur, per 7. problema, arcus tertius recto angulo oppoſitus: Vel certe, per problema 3. ex alterutro arcuum datorum, & angulo oppoſito inuento.

Aliter.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum vtriuſvis arcuum datorum, ita tangens complementi alterius arcus dati ad aliud, ᵇ prodibitque tangens complementi anguli poſteriori huic arcui oppoſiti. Reliqua inuenientur, vt proxime dictum eſt.

12. DATO alterutro arcuum in triangulo rectangulo circa angulum rectum, cum angulo non recto ei adiacente, inuenire arcum recto angulo oppoſitum, & reliquum arcum circa angulum rectum, cum altero angulo non recto.

FIAT, vt ſinus complementi anguli dati ad ſinum totum, ita tangens dati arcus ad aliud, ᵃ reperieturque tangens arcus angulo recto oppoſiti. Hic autem arcus quadrante erit minor, ſi datus angulus fuerit acutus, & datus arcus ei adiacens quadrante minor; aut ſi angulus datus obtuſus fuerit, & arcus datus quadrante maior: Maior autem quadrante erit idem arcus quæſitus, ſi datus angulus fuerit acutus, & arcus datus quadrante maior; aut ſi datus angulus fuerit obtuſus, & arcus datus minor quadrante.

Iam vero, per 2. problema. ex arcu rectum angulum ſubtendente inuento, & angulo dato, reperietur alter arcus circa angulum rectum dato angulo oppoſitus. Ex eodem vero arcu rectum angulum ſubtendente, & arcu in principio dato, inuenietur, per 1. problema, alter angulus non rectus dato arcui oppoſitus.

Aliter.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli dati, ita tangens complementi arcus dati ad aliud, ᵇ inuenieturque tangens complementi arcus recto angulo oppoſiti. Reliqua reperientur, vt prius.

13. DATO alterutro arcuum in triangulo rectangulo circa angulum rectum, cum arcu rectum angulum ſubtendente, reperire angulum à dictis arcubus comprehenſum, ſiue dato arcui circa rectum angulum adiacentem, & inſuper reliquum arcum, & angulum.

FIAT, vt tangens arcus recto angulo oppoſiti ad tangentem dati arcus circa angulum rectum, ita ſinus totus ad aliud, ᵃ produceturque ſinus complementi anguli à dictis arcubus comprehenſi, qui quæritur. Hic autem acutus erit, ſi datus arcus recto angulo oppoſitus fuerit quadrante minor, & arcus circa rectum angulum datus minor quoque; aut ſi tam ille, quam hic quadrante maior fuerit: Idem vero angulus quæſitus erit obtuſus, ſi datus arcus angulo recto oppoſitus fuerit minor quadrante, & datus arcus circa rectum angulum quadrante maior; aut ſi ille fuerit quadrante maior, & hic minor.

RELIQVA inueſtigabuntur, vt in præcedenti problemate traditum eſt.

Aliter.

FIAT, vt ſinus totus ad tangentem complementi arcus angulo recto oppoſiti, ita tangens dati arcus circa rectum angulum ad aliud, ᵇ inuenieturque ſinus complementi anguli adiacentis, qui deſideratur.

14. DATO arcu rectum angulum ſubtendente in triangulo rectangulo, cum alterutro angulorum non rectorum, reperire arcum circa angulum rectum huic angulo adiacentem, ac præterea alterum arcum circa angulum rectum, cum altero angulo non recto.

a Probl. 1. propoſ. 44. triang. ſphær.

b Prob. propoſ. 49. triang. ſphær. Quæritur vterq; angulus non rectus. Deinde arcus recto angulo oppoſitus.

a Probl. 2. propoſ. 44. triang. ſphær.

b Probl. propoſ. 48. triang. ſphær. Quæritur arcus recto angulo oppoſitus. Deinde alter arcus circa rectũ angulum, cum altero angulo non recto.

a Probl. 1. propoſ. 45. triang. ſphær.

b Probl. propoſ. 46. triang. ſphær. Quæritur angulus nõ rectus. Deinde alter arcus circa rectum angulum, & alter angulus non recto.

a Probl. 2. propoſ. 45. triang. ſphær.

b Probl. propoſ. 51. triang. ſphær. Quæritur arcus circa angulum rectum. Deinde alter arcus circa angulum rectum, cum reliquo angulo non recto.

a Probl. 3. propoſ. 45. triang. ſphær.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum complementi anguli dati, ita tangens arcus recto angulo oppoſiti ad aliud, [a] proc[...]biturque tangens arcus quæſiti. Qui quadrante minor erit, ſi arcus datus recto angulo oppoſitus fuerit min[...]quadrante,& datus angulus acutus;aut ſi arcus datus quadrante fuerit maior, & angulus datus obtu[...]us: Idem [...]ro arcus quæſitus erit qu[...]drante maior, ſi datus arcus angulo recto oppoſitus fuerit minor quadrante,& datus angulus obtuſus;aut ſi arcus datus fuerit quadrante maior,& datus angulus acutus.

CÆTERA explorabuntur,vt in problemate 12.docuimus.

Quæ[...]ur angulus nõ rectus. Deinde duo reliqui arcus.

15. DATO arcu in triangulo rectangulo,qui recto angulo opponitur,cum alterutro angulorum non rectorum, inquirere alterum angulum non rectum, & duos arcus circa rectum angulum.

a Prob. propoſ. 47. triang. ſphæ.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum complementi dati arcus recto angulo oppoſiti, ita tangens anguli dati ad aliud,[a] reperieturque tangens complementi anguli quæſiti. Hic vero erit acutus, ſi arcus recto angulo oppoſitus fuerit quadrante minor,& datus angulus acutus;aut ſi datus arcus fuerit maior quadrante, & datus angulus obtuſus: At angulus idem quæſitus erit obtuſus, ſi arcus angulo recto oppoſitus quadrante minor fuerit, & angulus datus obtuſus;aut ſi arcus ille fuerit quadrante maior,& datus angulus acutus.

HINC ex dato arcu angulum rectum ſubtendente,& vtroque angulo non recto,quorum vnus datus eſt, & alter inuentus,reperietur,per 2.problema,vterque arcus circa rectum angulum.

Quæritur arcus angulo recto oppoſitus. Deinde duo arcus circa angulum rectum.

16. DATIS duobus angulis non rectis in triangulo rectangulo, inuenire arcum recto a[n]gulo oppoſitum,& reliquos duos arcus circa angulum rectum.

a Prob. propoſ. 50. triang. ſphær.

FIAT, vt ſinus totus ad tangentem complementi vtriusvis angulorum datorum,ita tangens complementi alterius dati anguli ad aliud; [a] procreabiturque ſinus complementi arcus angulo recto oppoſiti,quem deſideramus.Hic arcus erit quadrante minor, ſi vterque angulorum datorum acutus fuerit, obtuſusue; quadrante vero maior,ſi alter acutus fuerit,& alter obtuſus.

PORRO ex arcu rectum angulum ſubtendente inuento, & vtrovis angulorum datorum,reperietur arcus ei oppoſitus,vt in 2.problem.traditum eſt.

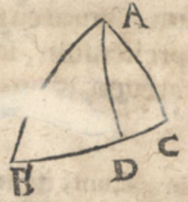
TRIANGVLORVM SPHÆRICORVM NON RECTANGVLORVM PROBLEMATA ET PRAXES.

Quæruntur omnes arcus.

17. DATIS omnibus angulis trianguli non rectanguli,inuenire omnes eius arcus.

Quando omnes anguli dati ſunt inæquales. [a Pr]op. 62. triang. ſphær.

SINT primum omnes anguli dati in triangulo ABC,inæquales,quorum duo B,C, acuti, vel obtuſi,& ex



tertio angulo A,ad BC, ducatur arcus perpendicularis AD, [a] qui intra triangulum cadet. Statuantur ſinus complementorum angulorum B, C, pro terminis proportionis ſinus anguli BAD,ad ſinum anguli CAD. Atque ex hac proportione,& aggregato angulorum BAD,CAD,hoc eſt,ex dato angulo BAC, inquiratur,per problema 6. trian. rectil. vterq; angulus BAD, CAD. Deinde, per problema 16.triang.ſphær.tam ex duobus anguli[s] [D], BAD,non rectis inueſtigetur arcus AB, angulo recto D, oppoſitus in triangulo ABD, quam ex duobus angulis non rectis C,CAD, arcus AC, recto angulo D,in triangulo ACD,oppoſitus. Poſtremo,per problema 2.tam ex arcu AB,rectum angulum D,ſubtendente, & angulo BAD,inuentis reperiatur arcus BD, quam ex arcu AC,rectum angulum D, ſubtendente, & angul[o] CAD,inuentis arcus CD.Summa enim arcuum BD,CD, totum arcum BC, efficiet notum. Atque ita omnes tres arcus AB,AC,BC,noti facti erunt.

Per ſolos ſinus, quando omnes dati anguli inæquales ſunt.

PER ſolos ſinus ita problema abſoluemus. Vterque angulus BAD,CAD,inueniatur per 3. praxim problematis 6.triang. rectil. Deinde,per 1. praxim problematis 4.triang.ſphær.tam ex duobus angulis B,BAD, inueſtigetur arcus BD, quam ex duobus angulis C, CAD, arcus CD. Summa enim arcuum BD, CD, totum arcum BC,notum efficiet. Poſtremo,per problema 3. triang.ſphær.reperiatur tam arcus AB, recto angulo D, oppoſitus, ex arcu BD,& angulo ei oppoſito BAD,inuentis,quam arcus AC,recto angulo D,oppoſitus ex arcu CD,& angulo CAD,ei oppoſito inuentis:quia præter data conſtat etiam ſpecies tam alterius anguli B,quam anguli alterius C,cum vterque datus ſit.

QVOD ſi quando alter angulorum ad A, inuentus fuerit rectus, nempe BAD; inuenti erunt duo arcus AB,BD, cum vterque ſit quadrans, ob rectos angulos D, DAB. Eadem ratione,ſi deprehenſus fuerit angulus CAD,rectus,non autem BAD,(fieri enim non poteſt,vt angulus vterque ad A,rectus ſit,cum totus BAC, minor ſit duobus rectis) inuenti erunt duo arcus AC,CD,vtpote quadrantes,ob angulos rectos D, DAC.

Quando dati duo anguli ſunt æquales.

SINT deinde duo ſaltem anguli dati B, C, æquales, quicquid ſit de tertio A, à quo arcus perpendicularis AD, ad BC, ducatur. Erunt tam duo arcus AB, AC, quam duo BD, CD, & duo anguli ad A, æquales; ac proinde vterque angulus ad A, cognitus, tanquam dimidium dati anguli BAC. Inueniatur ergo, per 16. problema, triang. ſphær. arcus AB, recto angulo D, oppoſitus, ex duobus angulis B, BAD; eritque proinde & AC, illi æqualis, cognitus. Deinde per problema 14. triang. ſphær. ex inuento arcu AB, rectum angulum ſubtendente, & dato angulo B, reperiatur arcus BD; eritque propterea & CD, illi æqualis, cognitus; ideoque & totus BC, notus. Inuentique iam erunt omnes tres arcus AB, AC, BC.



Per ſolos ſinus, quando duo dati anguli ſunt æquales.

PER *ſolos autem ſinus ita rem exequemur. Per 1. praxim problematis 4. triang. ſphær. inquiratur arcus BD, ex duobus angulis B, BAD; eritque idcirco & CD, illi æqualis, cognitus, proptereaque & totus BC, notus. Deinde, per problema 3. triang. ſphær. ex arcu inuento BD, & angulo ei oppoſito BAD, reperiatur arcus AB, recto angulo oppoſitus: quia præter data conſtat etiam ſpecies alterius anguli B, cum datus ſit: eritq; propterea & arcus AC, ipſi AB, æqualis, cognitus.*

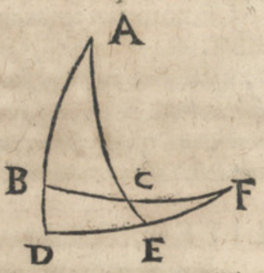
Quæruntur omnes anguli.

18. DATIS omnibus arcubus trianguli non rectanguli, inueſtigare omnes eius angulos.

Quādo duo dati arcus ſunt inæquales, & quadrante minores.

a Propoſ. 63. triang. ſphær.

a SINT omnes arcus in triangulo ABC, dati, ſitque primo loco inquirendus angulus A, & duo arcus AB, AC, eum continentes ſint inæquales, quadranteque minores, quicquid ſit de arcu BC. Productis arcubus AB, AC, vt fiant quadrantes AD, AE, deſcribatur per D, E, arcus circuli maximi DE, occurrens arcui BC, producto verſus maiorem arcum, qui ſit AC, in puncto F. Statuantur ſinus complementorum arcuum datorum AB, AC, pro terminis proportionis ſinus arcus BF, ad ſinum arcus CF. Atque ex hac proportione, & arcu dato BC, qui differentia eſt arcuum BF, CF, inueſtigetur, per problema 8. triang. rectil. vterque arcus BF, CF. Deinde, per problema 8. triang. ſphær. inueſtigetur tam arcus DF, ex arcu inuento BF, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu BD, qui complemētum eſt dati arcus AB; quam arcus EF, ex arcu inuento CF, rectum angulum E, ſubtendente, & arcu CE, qui complementum eſt dati arcus AC. Subducto enim arcu EF, inuento, ex inuento arcu DF, notus remanebit arcus DE, anguli, A; ac proinde angulus A, notus erit. Poſt hæc, per problema 11. triang. ſphær. ex arcubus notis BD, DF, circa rectum angulum D, inueniatur angulus DBF, ac proinde & reliquus duorum rectorum ABC: Eadem denique ratione, ex arcubus CE, EF, notis circa angulum rectum E, eruatur angulus ECF, atque adeo & angulus ACB, ei ad verticem æqualis. Atque ita iam omnes tres anguli A, B, C, inuenti erunt.

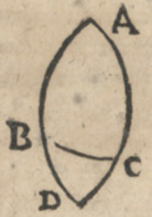


Per ſolos ſinus, quando dati duo arcus ſunt inæquales, & quadrante minores.

PER *ſolos ſinus ita progrediemur. Vterque arcus BF, CF, reperiatur per 3. praxim problematis 8. triang. rectil. Deinde, per 1. praxim problematis 8. triang. ſphær. tam arcus DF, ex arcu inuento BF, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu BD, complemento dati arcus AB, inueniatur, quam arcus EF, ex inuento arcu CF, rectum angulum E, ſubtendente, & arcu CE, complemento dati arcus AC. Subducto enim arcu EF, ex arcu DF, notus relinquetur DE, arcus anguli A; atque adeo angulus A, notus erit. Poſt hæc, per problema 1. triang. ſphær. ex arcu inuento BF, rectum angulum D, ſubtendente, & inuento arcu DF, inquiratur angulus DBF, arcui DF, oppoſitus: Ex quo notus quoque fiet reliquus angulus duorum rectorum, nempe ABC. Ad extremum eadem ratione, ex arcu inuento CF, rectum angulum E, ſubtendente, & inuento arcu EF, inueſtigetur angulus ECF, arcui EF, oppoſitus: Ex quo notus etiam fiet angulus ei ad verticem æqualis ACB.*

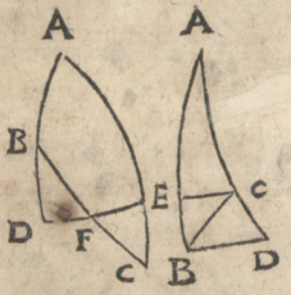
Quando duo dati arcus ſunt inæquales & quadrāte maiores.

SINT deinde duo arcus inæquales AB, AC, quadrante maiores; qui producantur, donec conueniant in D: Eruntq; in triangulo DBC, duo arcus DB, DC, inæquales, & quadrante minores. Quare, vt proxime diximus, omnes eius tres anguli reperientur; ac proinde & reliqui duorum rectorum ABC, ACB, noti erunt, necnon & A, ipſi D, æqualis.



Quando duo arcus dati inæquales ſunt & vnus quadrante maior, & alter minor.

SIT tertio arcus AB, quadrante minor, & AC, maior quadrante. Producto AB, vt fiat quadrans AD, & abſciſſo ex AC, quadrante AE, ducatur per D, E, arcus circuli maximi DE, ſecans BC, in F, vt in priore harum duarum figurarum. Statuantur ſinus complementorum arcuum datorum AB, AC, pro terminis proportionis ſinus arcus BF, ad ſinum arcus CF; Atque ex hac proportione, & aggregato arcuum BF, CF, hoc eſt, ex dato arcu BC, indagetur, per 6. problema triang. rectil. vterque arcus BF, CF. Deinde, per problema 8. triang. ſphær. inueniatur tam arcus DF, ex arcu BF, inuento rectum angulum D, ſubtendente, & arcu BD, complemento dati arcus AB; quam arcus EF, ex inuento arcu CF, rectum angulum E, ſubtendente, & arcu CE, complemento arcus AC, dati. Summa enim inuentorum arcuum DF, EF, dabit totum arcum DE, anguli A; ac proinde angulus A, cognitus erit. Poſt hæc, per problema 11. triang. ſphær. perueſtigetur ex arcubus DB, DF, notis circa angulum rectum D, angulus DBF, ac proinde & duorum rectorum reliquus ABC. Ac tandem eodem modo ex arcubus CE, EF, circa angulum rectum E, notis eliciatur angulus C: Inuentique erunt omnes tres anguli A, B, C.



Per ſolos ſinus, quando dati duo arcus inæquales ſunt & vnus quadrante maior, & alter minor.

PER *ſolos ſinus ita agendum erit. Vterque arcus BF, CF, per 3. praxim problematis 6. triang. rectil. inueniatur. Deinde per 1. praxim problematis 8. triang. ſphær. tam arcus DF, ex arcu BF, inuento, rectumq; angulum D, ſubtendente, & arcu BD, complemento arcus dati AB; quam arcus EF, ex inuento arcu CF, qui recto angulo E, opponitur, & arcu CE, complemento dati arcus AC, eruatur. Nam ſumma inuentorum arcuum DF, EF, totum arcum DE, anguli A, dabit. Poſt hæc, per problema 1. triang. ſphær. reperiatur ex arcu BF, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu DF, notis, angulus DBF, ac proinde & duorum rectorum reliquus ABC. Et tandem eodem modo ex notis arcubus CF, EF, angulus C, inueniatur.*

Quando duo arcus dati inæquales ſunt & maior arcus quadrans, minor autem quadrante minor.

SIT quarto maior arcus AB, quadrans, & AC, minor quadrante, vt in poſteriore proximarum duarum figurarum. Producto arcu AC, vt fiat quadrans AD, ducatur per B, D, arcus circuli maximi BD. Deinde, per problema 8. triang. ſphær. ex arcu dato BC, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu CD, complemento dati arcus AC, inueniatur arcus BD, anguli A; ex quo angulus ipſe A, notus erit. Poſt hæc, per problema 11. triang. ſphær. inueſtigetur ex duobus arcubus notis BD, CD, circa rectum angulum D, angulus BCD; ex quo notus quoque erit duorum rectorum reliquus ACB. Denique, per idem problema 11. ex eiſdem arcubus BD, CD, reperiatur angulus CBD; qui ex recto ABD, detractus notum relinquet angulum ABC.

Per ſolos ſinus, quando maior arcus quadrans eſt.

PER ſolos ſinus ſic procedemus. Per 1. praxim problematis 8. triang. ſphær. ex dato arcu BC, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu CD, complemento dati arcus AC, reperiatur BD, arcus anguli A: ex quo angulus ipſe A, cognitus erit. Deinde ex arcubus notis BC, BD, per problema 1. triang. ſphær. eruatur angulus BCD: ac proinde & duorum rectorũ reliquus ACB. Eadem tandem ratione, ex notis arcubus BC, CD, inquiratur angulus CBD, qui ex recto ABD, demptus notum relinquet angulum ABC.

Quando maior arcus datus quadrante maior eſt & minor quadrans.

SIT quinto, & vltimo maior arcus AB, quadrante maior, & minor AC, quadrans, vt in eadem poſteriore proximarum duarum figurarũ. Abſciſſo quadrante AE, ex AB, ducatur per C, E, arcus circuli maximi CE. Deinde per problema 8. triang. ſphær. ex dato arcu BC, rectum angulum E, ſubtendente, & arcu BE, complemento arcus dati AB, inueniatur arcus CE, anguli A; ex quo angulus ipſe A, cognoſcetur. Poſt hæc, per problema 11. triang. ſphær. ex notis duobus arcubus BE, EC, circa rectum angulum E, eliciatur angulus BCE; cui ſi addatur rectus ACE, notus fiet totus angulus ACB. Eadem tandem ratione ex eiſdem arcubus BE, EC, inueniatur angulus EBC.

Per ſolos ſinus, quando maior arcus datus quadrante maior eſt, & minor quadrans.

PER ſolos ſinus ita propoſitum exequemur. Per 1. praxim problematis 8. triang. ſphær. ex dato arcu BC, rectum angulum E, ſubtendente, & arcu BE, complemento dati arcus AB, inquiratur arcus CE, anguli A: fietque ita notus angulus A. Deinde per problema 1. triang. ſphær. ex notis arcubus BC, BE, reperiatur angulus BCE; cui ſi addatur rectus ACE, totus ACB, cognitus erit. Pari ratione tandem ex arcubus notis BC, CE, indagetur angulus CBE.

ALITER, & facilius, per ſolos ſinus, quando duo arcus quæſitum angulum comprehendentes ſunt inæquales quomodocunque.

Praxis facilior, & generalis, per ſolos ſinus, quando duo arcus anguli quæſitum continẽtes ſunt inæquales.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum vtriuslibet arcuum inæqualium quæſitum angulum comprehendentium, ita ſinus alterius arcus circa eundem angulum ad aliud, inuenieturque numerus quidam quartus. Deinde rurſus fiat, vt numerus ille quartus inuentus ad ſinum totum, ita differentia inter ſinum verſum arcus quæſito angulo oppoſiti, & ſinum verſum arcus, quo duo arcus quæſitum angulum ambientes inter ſe differunt, ad aliud produceturque ſinus verſus anguli, qui quæritur: ex quo angulus ipſe elicietur.

EODEM modo alij duo anguli inueſtigabuntur, ſi arcus illos continentes fuerint inæquales.

Quãdo duo arcus dati ſunt æquales.



SINT iam duo arcus AB, AC, quæſitum angulum A, comprehendentes, æquales. Secabit arcus perpendicularis AD, & angulum A, & baſim BC, bifariam Inueniatur ergo, per problema 1. triang. ſphær. ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu BD, dimidio dati arcus BC, angulus BAD, qui duplicatus totum angulum BAC, dabit. Deinde, per problema 13. triang. ſphær. ex eiſdem notis arcubus AB, BD, reperiatur angulus B, cui æqualis eſt angulus C, (ob æquales arcus AB, AC,) ac proinde cognitus quoque.

Per ſolos ſinus, quando dati duo arcus æquales ſunt.

PER ſolos ſinus ita agemus. Per 1. praxim problematis 1. triang. ſphær. inueniatur ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu BD, dimidio arcus dati BC, angulus BAD, qui duplicatus totum BAC, notum efficiet. Deinde per 1. praxim problematis 6. triang. ſphær. ex arcu BD, dimidio arcus dati BC, & angulo oppoſito BAD, inuento, (cum ſpecies alterius anguli B, conſtet. Nam ſi datus arcus AB, recto angulo D, oppoſitus eſt quadrante minor, angulus B, acutus erit, quemadmodum & BAD, acutus eſt: Si vero AB, quadrante maior eſt, erit angulus B, obtuſus, cum BAD, acutus ſit) reperiatur angulus B, cui æqualis eſt angulus C, ob æquales arcus AB, AC.

NEQVE vero duo æquales arcus eſſe poſſunt quadrantes. Nam alias duo anguli ſupra baſim eſſent recti; atque adeo triangulum eſſet rectangulum, Quod eſt contra hypotheſin.

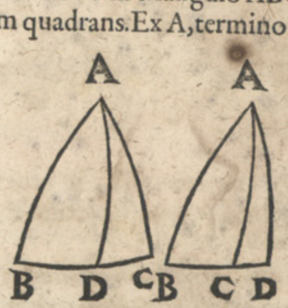
Quæritur arcus, cum duobus angulis adiacentibus.

19. DATIS duobus arcubus trianguli non rectanguli cum angulo ab ipſis comprehenſo, inueſtigare reliquum arcum, cum reliquis duobus angulis.

Quando duo arcus dati ſunt inæquales & neuter eorum quadrans.

a Propo. 64 triãg. ſphæ.

a SINT in triangulo ABC, duo arcus AB, BC, dati, cum angulo B: ſintque primum inæquales, & neuter eorum quadrans. Ex A, termino vnius eorum ad alterum demittatur arcus perpendicularis AD, qui an intra triangulum, an vero extra cadat, ex operatione ipſa diſcemus. Nam inueniatur, per problema 2. triang. ſphær. ex arcu dato AB, rectum angulum D, ſubtendente, & dato angulo B, arcus AD, angulo B, oppoſitus. Rurſus ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & inuento arcu AD, reperiatur, per problema 8. triang ſphær. tertius arcus BD. Si igitur arcus hic BD, inuentus fuerit minor dato arcu BC, cadet arcus AD, intra triangulum, extra vero, ſi maior. Sublato autem inuento arcu BD, ex dato arcu BC, (ſi ille hoc minor eſt) vel dempto arcu BC, dato ex inuento arcu BD, (ſi hic illo maior eſt) notus relinquetur arcus CD. Ex arcubus denique AD, CD, circa angulum rectum D, inueniatur, per problema 7. triang. ſphær. tertius arcus AC, qui quæritur.



DEINDE, per problema 13. triang. ſphær. ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu inuẽto AD, reperiatur angulus BAD, à dictis arcubus cõprehenſus. Eademq; ratione, ex inuento arcu AC, rectũ angulum

angulum D, ſubtendente, & inuento arcu AD, inueniatur angulus CAD, à dictis arcubus co[illegible]prehenſus. Nam angulus CAD, additus angulo BAD, (quando arcus AD, intra triangulum cadit) vel an[illegible]lus CAD, ex angulo BAD, ſublatus, (quando arcus AD, cadit extra triangulum) conficiet, aut relinque[illegible]gulum quæſitum BAC.

AD extremum, per problema 13. triang. ſphær. ex inuento arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu inuento CD, eliciatur angulus C, qui, vbi arcus AD, intra triangulum cadit, quęritur; at, quando arcus AD, cadit extra triangulum, ſubductus ex duobus rectis relinquit angulum ACB, quæſitum.

Per ſ[illegible] ſi-nus, q[illegible]n-do da[illegible] [illegible] arcu[illegible] inæquales ſunt & neuter eorum quadrans.

PER ſolos ſinus ſic agemus. Per problema 2. triang. ſphær. reperiatur ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & dato angulo B, oppoſitus arcus AD: Et hinc per 1. praxim problematis 8. triangul. ſphær. arcus BD. Hic enim ablatus ex dato arcu BC, (ſi ille hoc minor eſt) vel ex inuento arcu BD, ablatus datus arcus BC, (ſi hic illo minor eſt) notum relinquet arcum CD. Deinde per 1. praxim problematis 1. triangul. ſphæric. tam ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu inuento BD, eruatur angulus oppoſitus BAD; quam ex inuento arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente, & inuento arcu CD, oppoſitus angulus CAD. Nam ex duobus angulis BAD, CAD, inuentis quæſitus angulus BAC, cognoſcetur, ſi vnus alteri addatur, quando arcus AD, intra triangulum cadit, vel, quando cadit extra, ſi ex BAD, detrahatur CAD. Poſtremo, per 1. praxim problematis 1. triangul. ſphæric. inquiratur ex inuento arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu inuento AD, op[illegible]ſitus angulus C. Hic enim in priori triangulo eſt quæſitus, in poſteriori vero reliquus duorum rectorum ACB, eſt is, qui quæritur.

QVOD ſi forte arcus CD, deprehendatur quadrans, (nunquam autem BD, erit quadrans, poſito AB, non quadrante) erit tunc & arcus quæſitus AC, quadrans, & angulus CAD, rectus. Atque ita ſine moleſtia in-[illegible]s erit arcus AC, qui quæritur, & angulus CAD, ex quibus quæſitos angulos BAC, ACB, inueniemus, vt prius.

Quando alter datorum inæqualium arcuum eſt quadrans.

SIT iam alter datorum arcuum inæqualium quadrans, nempe AB, à cuius extremo A, ad alterum arcus perpendicularis AD, demittatur. Erit tunc arcus quoque BD, quadrans, & angulus BAD, rectus: nec non B, polus arcus AD; ac proinde arcus AD, ex dato angulo B, notus fiet. Atque ita in hoc caſu duo arcus BD, AD, cum angulo BAD, noti facti erunt, ſine alio labore: ex quibus reliqua inueſtigabuntur, vt prius.

ALITER, & facilius, per ſolos ſinus, quando dati duo arcus inæquales ſunt quomodocunque.

Praxis facilior, & generalis, per ſolos ſinus, quando dati duo arcus ſunt inæquales.

FIAT, vt ſinus totus ad ſinum vtriuslibet datorum arcuum inæqualium, ita ſinus alterius arcus dati ad aliud, producetur que quidam quartus numerus. Deinde rurſus fiat, vt ſinus totus ad inuentum illum quartum numerum, ita ſinus verſus anguli dati ad aliud, reperieturque differentia inter ſinum verſum tertij arcus, qui quæritur, & ſinum verſum differentiæ datorum arcuum inæqualium: quæ differentia inuenta, ſi adijciatur ad ſinum verſum differentiæ datorum arcuum, componet ſinum verſum tertij arcus quæſiti. Cognitis iam tribus arcubus propoſiti trianguli, reperientur alij duo anguli ex præcedenti problemate, præſertim ex praxi illa faciliori, ſi arcus duo quemlibet illorum continentes fuerint inæquales. Quod ſi quando æquales ſint, adhibenda erit poſtrema praxis eiuſdem problematis præcedentis.

Quando duo arcus dati ſunt æquales.

SED iam duo arcus dati AB, AC, datum angulum A, comprehendentes ſint æquales, ac proinde neuter quadrans. Secabit arcus perpendicularis AD, bifariam, & datum angulum A, & baſim BC. Inueniatur ergo per problema 2. triangul. ſphæric. ex dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & ex angulo BAD, dimidio dati anguli BAC, arcus oppoſitus BD, qui duplicatus totum arcum BC, quæſitum dabit. Deinde, per problema 13. triang. ſphæric. ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & inuento arcu BD, inquiratur angulus B, à dictis arcubus comprehenſus; cui æqualis eſt angulus C, ob æquales arcus AB, AC.



Per ſolos ſinus, quando duo arcus dati ſunt æquales.

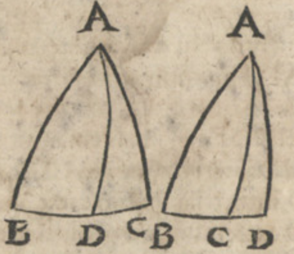
PER ſolos ſinus ita res peragetur. Ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & angulo BAD, dimidio dati anguli BAC, reperiatur, per problema 2. triangulor. ſphæric. arcus oppoſitus BD: qui duplicatus quæſitum totum BC, offeret. Deinde, per 1. praxim problematis 6. triang. ſphær. ex inuento arcu BD, & angulo BAD, dimidio anguli BAC, dati (cum præterea conſtet ſpecies alterius anguli B. Nam ſi arcus AB, fuerit minor quadrante, erit angulus B, acutus, ſicut & BAD, acutus eſt: Si vero AB, ſit quadrante maior, erit B, obtuſus, cum BAD, acutus ſit) eliciatur angulus B; cui angulus C, æqualis eſt.

20. DATIS duobus angulis trianguli non rectanguli, cum arcu ipſis adiacente, indagare reliquos arcus, cum angulo reliquo.

Quæruntur duo arcus, cum angulo ab ipſis comprehenſo. Quando dati anguli ſunt inæquales, & arcus adiacens non quadrans.

a Propoſ. 65. triang. ſphær.

a SINT in triangulo ABC, dati duo anguli B, BAC, cum arcu AB, adiacente: ſintque primum dati anguli inæquales, & arcus AB, non quadrans. Ex altero datorum angulorum, nempe ex A, ad arcum oppoſitum BC, demittatur arcus perpendicularis, qui an intra triangulum cadat, an extra, operatio ipſa docebit. Inueniatur enim per problema 15. triangul. ſphæric. ex dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & dato angulo B, alter angulus non rectus BAD: qui ſi minor fuerit angulo dato BAC, cadet arcus AD, intra triangulum; extra vero, ſi maior. In priori caſu ſubductus angulus BAD, inuentus ex dato angulo BAC; in poſteriori vero datus angulus BAC, ex inuento BAD, detractus, notum relinquet angulum CAD.



Rurſus, per problema 2. triang. ſphær. ex dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & angulo B, dato, reperiatur arcus AD, oppoſitus. Item, per problema 12. triang. ſphær. ex inuento arcu AD, & angulo adiacente CAD, inuento, eruatur arcus AC, recto angulo D, oppoſitus; qui quidem eſt vnus ex quæſitis.

DEINDE,per problema 8. triang.ſphær.tam ex dato arcu AB,rectum angulum D,ſubtendente, & inuento arcu AD, indagetur arcus BD; quam ex inuento arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu inuento AD, arcus CD:qui adiectus ad inuentum arcum BD,cadente arcu AD,intra triangulum, vel ſubductus ex eodem arcu BD,cadente arcu AD,extra triangulum,notum dabit alterum arcum BC, quæſitum.

AD extremum,per problema 15.triang.ſphær.inueſtigetur ex inuento arcu AC,rectum angulum D,ſubtendente, & angulo inuento CAD, angulus ACD: qui in priori triangulo eſt is,qui quæritur;in poſteriori autem ſubductus ex duobus rectis reliquum facit ACB, quæſitum.

Per ſolos ſinus,quando dati anguli ſunt inæquales, & arcus adiacens non quadrans.

PER ſolos ſinus ſic negotium abſoluetur.Per problema 2.triang.ſphær.inueniatur ex dato arcu AB,rectum angulum D,ſubtendente,& angulo dato B,arcus oppoſitus AD: Et per 1.praxim problematis 8.triang.ſphær.reperiatur ex dato arcu AB,rectum angulum D,ſubtendente,& inuento arcu AD,tertius arcus BD.Item per 1.praxim problematis 1.triang.ſphær. inquiratur ex dato arcu AB,angulum rectum D,ſubtendente,& inuento arcu BD,angulus oppoſitus BAD:qui ablatus ex dato BAC,(ſi ille hoc minor eſt)vel ex eo datus BAC,detractus (ſi hic illo minor eſt) notum relinquet angulum CAD.Rurſus per problema 5.triang.ſphær.ex inuento arcu AD,& angulo adiacente CAD,eruatur angulus ACD;qui in priori triangulo eſt quæſitus, in poſteriori vero reliquus duorum rectorum ACB, quæſitus eſt.

POST hæc, per 1.praxim problematis 4.triang.ſphær. ex vtroque angulo CAD, ACD, inuento reperiatur arcus CD: qui in priori triangulo additus iamdudum inuento arcui BD, vel in poſteriori ab eo ablatus, notum faciet arcum BC, quæſitum.

DENIQVE, per problema 7.triang. ſphær. inueniatur ex inuentis arcubus AD, CD, circa angulum rectum D,arcus tertius AC, recto angulo D, oppoſitus,qui quæritur. Atque ita inuenti erunt duo reliqui arcus BC, AC, cum reliquo angulo ACB.

QVOD ſi quando angulus inuentus CAD,fuerit rectus,(BAD,nunquam poteſt eſſe rectus, poſito AB, non quadrante)erunt AC,CD,quadrantes;& AD,arcus anguli C;ac proinde angulus C, notus fiet ex inuento arcu AD.Reliquus autem arcus BC, cognoſcetur ex inuento arcu BD, & quadrante CD, veluti prius.

Quando datus arcus eſt quadrans.

IAM vero ſi datus arcus AB, ſit quadrans, exiſtentibus adhuc angulis B, BAC, datis inæqualibus,erit angulus BAD.rectus,& arcus quoque BD,quadrans.Item B,erit polus arcus AD;propterea que arcus ipſe AD,ex dato angulo B,cognitus erit.Inuentis autem tunc tanta facilitate arcubus AD,BD, & angulo recto BAD, reperiemus cætera,vt prius.

Quando dati duo anguli ſunt æquales.



SINT deinde in triangulo ABC,dati duo anguli B,C, æquales,cum arcu BC adiacente,ſiue quadrans is ſit,ſiue non. Erunt arcus AB,AC,æquales, & arcus perpendicularis AD,ex tertio angulo A,ad BC,demiſſus ſecabit & arcum BC,& angulum A,bifariam.Inueniatur ergo,per problema 12.triang.ſphær. ex arcu BD; dimidio dati arcus BC,& dato angulo B,adiacente,arcus AB,recto angulo D,oppoſitus; cui cum æqualis ſit AC, inuenti erunt reliqui duo arcus. Rurſus, per problema 5. triang.ſphær.ex eodem arcu BD,dimidio dati arcus BC,& dato angulo B, adiacente reperiatur alter angulus non rectus BAD. Hic namque duplicatus totum quæſitum angulum BAC, dabit.

Per ſolos ſinus,quãdo duo anguli dati ſunt æquales,

PER ſolos ſinus ita operabimur.Per problema 5. triang.ſphær. inueniatur ex arcu BD, dimidio dati arcus BD, & dato angulo B, adiacente angulus BAD: qui duplicatus dabit totum BAC, quæſitum. Deinde per 1.praxim problematis 3. triang. ſphær.ex arcu BD, dimidio dati arcus BC, & inuento angulo BAD, oppoſito reperiatur (cum præterea conſtet ſpecies alterius anguli B,qui datus eſt) arcus AB,recto angulo D,oppoſitus:cui æqualis eſt AC.

Quærũtur duo arcus cum vno angulo.

21. DATIS duobus angulis trianguli non rectanguli, cum arcu qui alteri illorum opponitur,reliquos arcus,cum reliquo angulo inueſtigare:ſi modo conſtet,num arcus alteri angulo dato oppoſitus quadrante maior ſit,aut minor,aut certe quadrans.

Quando dati duo anguli inæquales ſunt & arcus datus non quadrans.

a Propoſ. 66. triang. ſphær.

a SINT in triangulo ABC,dati duo anguli B,C,primum inæquales, cum arcu AB,qui angulo C,opponitur, non quadrante, conſtetque præterea ſpecies arcus AC, alteri angulo dato B,oppoſiti. Ducatur ex tertio angulo A, ad arcum BC, arcus perpendicularis AD; qui intra triangulum cadet, ſi vterque angulus datus B, & C, eſt acutus,vel obtuſus; extra vero, ſi vnus acutus, & alter obtuſus eſt. Inueſtigetur,per problema 2.triang.ſphær.ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & dato angulo B, arcus oppoſitus AD. Item, per problema 14. triang. ſphær. ex eodem dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & dato angulo B,eliciatur arcus BD.Rurſus reperiatur,per problema 15.triang. ſphær.ex eodem dato arcu AB,rectum angulum D,ſubtendente, & dato angulo B,angulus BAD. Ad hæc,per problema 3.triang.ſphær.inueniatur quoque ex inuento arcu AD,& dato angulo C,oppoſito.(Nam,cadente arcu AD, extra triangulum, angulus ACD,arcui AD,oppoſitus relinquitur notus poſt ſubtractionem dati anguli ACB,ex duobus rectis) arcus AC,recto angulo D,oppoſitus,cum eius ſpecies conſtare ponatur.Atque ita inuentus erit arcus AC,vnus ex quæſitis.



DEINDE,per problema 14.triang. ſphær. reperiatur ex inuento arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente,& dato angulo C,arcus CD:qui additus arcui BD,ſupra inuento, vel ex eo detractus, (prout nimirum arcus AD,intra triangulum cadit,aut extra)notum faciet arcum BC,qui eſt alter ex quæſitis.

AD extremum,per problema 15. triang. ſphær. ex inuento eodem arcu AC, rectum angulum D,ſubtendente,& dato angulo C,inueniatur angulus CAD:qui additus angulo BAD,ſi arcus intra triangulum cadit,vel ſi extra,ex eodem ſubductus,cognitum efficiet angulum BAC, quæſitum.

SOLIS ſinubus vtemur ſic. Per problema 2. triang. ſphæric. ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & dato angulo B, inquiratur arcus oppoſitus AD. Et hinc, per 1. praxim problematis 8. triang. ſphæ. ex dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & inuento arcu AD, reperiatur tertius arcus BD. Et rurſus, per 1. praxim problematis 1. triang. ſphær. ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & inuento arcu BD, eruatur angulus oppoſitus BAD. Poſt hæc, per praxim problematis 3. triang. ſphæric. eliciatur ex inuento arcu AD, & oppoſito angulo dato C, arcus AC, recto angulo D, oppoſitus, cum eius ſpecies conſtet ex hypotheſi: qui arcus AC, ex quæſitis vnus eſt.

Per ſolos ſinus quando dati duo anguli ſunt inæquales, & arcus datus non quadrans.

DEINDE, per 1. praxim problematis 8. triang. ſphær. ex inuento arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu AD, reperiatur tertius arcus CD: ex quo, ſi in priori triangulo arcui BD, inuento addatur, vel in poſteriori ex eodem ſubtrahatur, cognitus fiet alter arcus quæſitus BC.

PER 1. praxim deniq; problematis 1. triang. ſphær. ex arcu AC, angulum rectum D, ſubtendente, & arcu CD, inuento, inquiratur angulus oppoſitus CAD. Nam hic in priori triangulo additus inuento angulo BAD, vel in poſteriori ab eodem demptus, notum faciet angulum BAC, quæſitum.

QVOD ſi quando arcus AC, alteri angulo B, dato oppoſitus ſit quadrans, quod euenire poteſt, non exiſtente quadrante AB, (quo in caſu nunquam quadrans eſſe poterit AD, vel BD.) erit quoque CD, quadrans, & angulus CAD, rectus. Quare non laborandum tunc erit in inquiſitione arcuum AC, CD, & anguli CAD: ſed ſolus inueniendus erit arcus BC, & angulus BAC, vt diximus.

VERVM ſit iam datus arcus AB, quadrans, & adhuc dati duo anguli B, C, inæquales. Quo poſito, erit & BD, quadrans, & angulus BAD, rectus; nec non B, polus arcus AD; ac proinde arcus AD, ex dato angulo B, cum eius arcus ſit, notus fiet. Cognitis autem tanta facilitate arcubus BD, AD, cum angulo recto BAD, inueniuntur reliqua, vt prius.

Quãdo datus arcus quadrans eſt, & dati duo anguli inæquales.



SINT tandem dati duo anguli B, C, æquales. Diuidet arcus AD, & baſim BC, & angulum A, bifariam; & arcus AB, AC, æquales erunt. Inquiratur, per problema 14. triang. ſphær. ex dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & dato angulo B, arcus BD: qui duplicatus totum quæſitum BC, offeret. Alter autem quæſitus AC, datus erit, cum dato AB, ſit æqualis. Rurſus, per problema 15. triangul. ſphæric. ex eodem arcu dato AB, & angulo B, eliciatur angulus BAD; quo duplicato, habebitur totus BAC, qui quæritur.

Quando duo anguli dati ſunt æquales.

PER ſolos ſinus ita abſoluemus problema. Per problema 2. triangul. ſphær. inueſtigetur arcus AD, ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & dato angulo B, arcui AD, oppoſito. Atque hinc, per 1. praxim problematis 8. triang. ſphæric. reperiatur ex dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & inuento arcu AD, tertius arcus BD: qui duplicatus totum quæſitum BC, dabit. Deinde, per 1. praxim problematis 1. triang. ſphær. ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu BD, inuento indagetur angulus oppoſitus BAD: qui duplicatus offeret totum BAC, quæſitum.

Per ſolos ſinus, quando duo anguli dati ſunt æquales.

IN hoc porro caſu non poteſt datus arcus AB, eſſe quadrans.

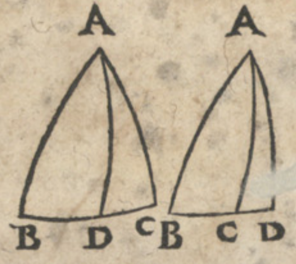
22. DATIS duobus arcubus trianguli non rectanguli, cum angulo, qui alteri eorum opponitur, reliquos angulos, cum reliquo arcu ſcrutari: ſi modo conſtet, num angulus alteri arcui dato oppoſitus acutus ſit, aut obtuſus.

Quærũtur duo anguli cum vno arcu.

[a] SINT in triangulo ABC, dati duo arcus AB, AC, cum angulo B, qui arcui AC, opponitur: ſint autem primum illi arcus inæquales, & neuter quadrans, conſtetque præterea ſpecies anguli C, alteri arcui dato AB, oppoſiti. Ducatur ex angulo A, à datis arcubus comprehenſo ad arcum BC, arcus perpendicularis, qui intra triangulum cadet, ſi vterque angulus B, C, ſit acutus, vel obtuſus; extra vero, ſi vnus acutus ſit, & alter obtuſus. Conſtat autem, an vterque angulus acutus ſit, obtuſuſve, an non; quia angulus B, datus eſt, cum ſpecie anguli C. Inquiratur ergo, per problema 2. triang. ſphær. ex dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & angulo dato B, arcus oppoſitus AD. Et hinc, per problema 8. triangul. ſphær. ex eodem arcu dato AB, & arcu inuento AD, eliciatur tertius arcus BD. Hinc rurſus, per problema 1. triang. ſphær. ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu BD, inuento reperiatur angulus BAD, arcui BD, oppoſitus: Et per problema 13. triang. ſphær. ex dato arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu AD, inuento eruatur angulus CAD, à dictis arcubus comprehenſus. Nam hic angulus adiectus ad inuentum angulum BAD, vel ab eodem ſubtractus, (prout arcus AD, cadit intra, vel extra triangulum) dabit quæſitum angulum BAC. Inueniatur præterea, per problema 15. triang. ſphær. ex dato arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente, & inuento angulo CAD, angulus ACD: qui erit is, quem quærimus, ſi arcus AD, intra triangulum cadit, ſi vero extra, ablatus ex duobus rectis dabit angulum ACB, quæſitum: ſicque duo reliqui anguli BAC, ACB, erunt cogniti.

Quando dati duo arcus ſunt inæquales, & neuter eorum quadrans.

a Propoſ. 67 triãg. ſphæ.



DEINDE, per problema 8. triang. ſphær. ex dato arcu AC, angulum rectum D, ſubtendente, & inuento arcu AD, inquiratur arcus CD. Hic enim additus arcui inuento BD, vel ab eodem ſubductus (prout arcus AD, intra triangulum cadit, vel extra) notum offeret quæſitum arcum BC.

IN hoc porro caſu, nullus arcuum AD, BD, CD; quadrans eſſe poteſt.

PER ſolos ſinus ita erit agendum. Per problema 2. triangul. ſphæric. ex dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & angulo dato B, inueniatur oppoſitus arcus AD: Atq; hinc, per 1. praxim problematis 8. triangul. ſphær. ex dato arcu AB, dato rectum ſubtendente angulum D, & inuento arcu AD, eruatur tertius arcus BD: Atque hinc rurſus, per 1 praxim problematis 1. triangul. ſphær. ex arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & arcu inuento BD, reperiatur angulus oppoſitus BAD:

Per ſolos ſinus, quando duo arcus dati ſunt inæquales, & neuter eorũ quadrans.

BAD: [illegible] per 1. praxim problematis 8. triang. ſphær. ex dato arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente, & arcu inuento AD, erua[illegible] tertius arcus CD; qui vel additus arcui inuento BD, vel ex eo ſubtractus, (prout arcus AD, cadit intra, vel extra tria[illegible]ulu[illegible]) dabit quæſitum arcum BC.

DEIND[illegible] *inueſtigetur per 1. praxim problematis 1. triang. ſphær. ex dato arcu AC, rectum angulum D, ſubtendente, & inuento arcu CD, angulus oppoſitus CAD: qui angulo BAD, adiunctus, vel ab eo demptus, (prout arcus AD, intra triangulum, aut extra cadit) exhibebit quæſitum angulum BAC. Deniq; per problema 5. triang. ſphær. ex arcu inuento AD, & inuento angulo adiacente CAD, reperiatur angulus alter ACD: qui erit ex quæſitis alter, ſi arcus AD, intra triangulum cadit, ſi vero cadit extra, detrahendus erit ex duobus rectis, vt reliquus fiat alter angulus quæſitus ACB.*

Quando alter datorũ arcuum eſt quadrans.

QVOD ſi alter datorum arcuum ſit quadrans; ſi quidem AB, quadrans fuerit, erit quoque BD, quadrans, & angulus BAD, rectus, nec non B, polus arcus AD, ac proinde arcus AD, cognoſcetur ex dato angulo B. Atq; ita cognitis arcubus AD, BD, & angulo recto BAD, reliqua inueniemus, vt prius. Pari ratione, ſi AC, fuerit quadrans, erit quoque CD, quadrans, & angulus CAD, rectus, nec non C, polus arcus AD; atque adeo inuentus arcus AD, notum faciet angulum ſuum ACD; qui vnus erit ex quæſitis, ſi arcus AD, intra triangulum cadit: ſi vero cadit extra, idem ex duobus rectis detractus relinquet quæſitum angulum ACB. Inuentis autem tanta facilitate angulis CAD, ACD, & arcu CD, reperientur cætera, vt prius.

Quando duo arcus dati ſunt æquales.



SINT iam dati duo arcus AB, AC, æquales. Secabit arcus AD, & baſim BC, & angulum A, bifariam, angulique B, C, æquales erunt; atq; ita inquirendus erit tantum angulus BAC, cum arcu BC. Inquiratur ergo, per problema 15. triang. ſphær. ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & dato angulo B, angulus BAD, qui duplicatus offeret totum quæſitum BAC. Rurſus, per problema 2. triang. ſphær. ex arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente, & inuento angulo BAD, reperiatur arcus oppoſitus BD: qui duplicatus totum quæſitum BC, dabit.

Per ſolos ſinus, quando dati duo arcus ſunt æquales.

PER *ſolos ſinus ſic. Per problema 2. triang. ſphær. inueniatur ex dato arcu AB, angulum rectum D, ſubtendente & dato angulo B, arcus oppoſitus AD: Atque hinc per 1. praxim problematis 8. triang. ſphær. ex dato arcu AB, rectum angulum D, ſubtendente, & inuento arcu AD, reperiatur tertius arcus BD, qui duplicatus totum quæſitum BC, exhibebit. Per problema tandem 5. triangul. ſphær. inueſtigetur ex inuento arcu BD, & dato angulo B, adiacente angulus BAD, arcui BD, oppoſitus. Hic enim duplicatus dabit totum BAC, quem deſideramus.*

CÆTERVM, vt facilius problema illud, quod maximè optamus, præſertim in ſphæricis triangulis, inuenire poſſimus, confecimus hic indicem omnium problematum ad calculum neceſſariorum: quibus quidem numeros præfiximus, qui indicent, quem ordinem quodlibet inter problemata, quorum praxes proxime expoſuimus, obtineat; quemadmodum & ſupra problematibus ipſis in margine adſcripſimus propoſitiones, & problemata, in quibus praxes demonſtrantur in noſtris triangulis rectilineis, & ſphæricis. Quanquam autem in indice triangulorum ſphæricorum rectangulorum proponantur tantum ſingula in ſingulis problematibus inuenienda: ijs tamen inuentis, pleraque etiam alia in eiſdem reperiuntur, vt ex ſuperioribus liquet.

IN-

INDEX PROBLEMATVM, ET PRAXIVM TRIANGVLORVM.

IN TRIANGVLIS RECTILINEIS RECTANGVLIS.

Inuenitur.

Ltus circa angulum rectum vtrilibet angulorum acutorum oppoſitum; ex latere rectum angulum ſubtendente, & alterutro acutorum angulorum.

Latus angulo recto oppoſitum, & alterutrum duorum circa eundem rectum angulum; ex altero latere circa angulum rectum, & vno acutorum angulorum.

. Vterque angulus acutus, & alterutrum duorum laterum circa angulum rectum; ex latere angulum rectum ſubtendente, & altero latere circa eundem rectum angulum.

5. Vterque angulus acutus, & latus recto angulo oppoſitum; ex duobus lateribus circa eundem angulum rectum.

IN TRIANGVLIS RECTILINEIS NON RECTANGVLIS.

Inueniuntur.

10. Duo latera; ex omnibus angulis, & reliquo latere.

11. Omnes anguli: ex omnibus lateribus.

2. Vnum latus, & duo anguli illi adiacentes; ex reliquis duobus lateribus, & reliquo angulo ab ipſis comprehenſo.

13. Duo anguli, & vnum latus vni eorum oppoſitum; ex reliquis duobus lateribus, & reliquo angulo, qui vni eorum opponitur.

IN TRIANGVLIS SPHÆRICIS RECTANGVLIS.

Inuenitur arcus angulo recto oppoſitus.

3. Ex arcu circa rectum angulum, & angulo ei oppoſito.

12. Ex arcu circa angulum rectum, & angul[illegible]diacente

7. Ex vtroque ar[illegible]u circa angulum rectu

Ex vtroque angulo non rect[illegible]

Inuenitur arcus circa [illegible]

Ex arcu rectum angulum ſubtendente, &

4. Ex arcu rectum angulum ſubtendente, &

. Ex arcu angulum rectum ſubten[illegible]nte

0. Ex altero arcu circa rectum angulum

9. Ex altero arcu circa angulum rectur

4. Ex vtroque angulo non recto.

Inuenitur angulus non rectus.

1. Ex arcu rectum angulum ſubtendente, & arcu circa angulum rectum, qui quæſito angulo opponitur.
13. Ex arcu angulum rectum ſubtendente, & arcu circa angulum rectum, qui quæſito angulo adiacet.
15. Ex arcu rectum angulum ſubtendente, & altero angulo non recto.
11. Ex vtroque arcu circa angulum rectum.
5. Ex arcu circa rectum angulum, qui angulo quæſito opponitur, & altero angulo non recto illi arcui adiacente.
6. Ex arcu circa angulum rectum, qui angulo quæſito adiacet, & altero angulo non recto illi arcui oppoſito.

IN TRIANGVLIS SPHÆRICIS NON RECTANGVLIS.

Inueniuntur.

17. Omnes tres arcus; ex omnibus tribus angulis.
18. Omnes tres anguli; ex omnibus tribus arcubus.
19. Vnus arcus, & duo anguli illi adiacentes; ex aliis duobus arcubus, & reliquo angulo ab ipſis comprehenſo.
20. Duo arcus, & angulus ab ipſis comprehenſus; ex reliquo arcu, & aliis duobus angulis huic arcui adiacentibus.
21. Duo arcus, & vnus angulus vni eorum oppoſitus; ex reliquo arcu & aliis duobus angulis, quorum vni hic arcus opponitur: ſi modo conſtet ſpecies arcus alteri angulo dato oppoſiti.
22. Duo anguli, & vnus arcus vni eorum oppoſitus; ex reliquo angulo, & aliis duobus arcubus, quorum vni hic angulus opponitur: ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri arcui dato oppoſiti.

VERVM hunc Indicem longe clarius digeßimus in Lemmate 53. lib. 1. Aſtrolabii: vbi etiam ſex viis quodlibet problema ſphæricorum triangulorum diſſoluimus.

ATQVE hic finis ſit noſtrorum triangulorum, in quibus omnia ea videor eſſe complexus, quæ ad calculum ipſorum requiruntur. His ergo, benigne Lector, interea fruere feliciter, dum tres integros libros triangulorum ſphæricorum Menelai, cum duobus Franciſci Maurolyci, in quibus multo plura, quam hic à nobis explanata ſunt, & quidem ſcitu iucundißima, continentur, clarioribus demonſtrationibus illuſtratos in lucem, Deo noſtris cœptis bene fauente, prodire ſinamus.

FINIS TRIANGVLORVM SPHÆRICORVM.